UNIVERSITT DES SAARLANDES
Fakultt 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. mult. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

2. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Aufgabe 1

Sei die Funktion $k(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. Weiter sei der Operator K durch die Faltung

$$K\phi = k * \phi, \ \phi \in L_2(\mathbb{R}),$$

gegeben.
Zeigen Sie

$$K \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R})) \quad \text{mit} \quad ||K|| \leq 2.$$

Sei $\gamma \neq 0$ und $f \in L_2(\mathbb{R})$. Wenden Sie die Fourier Transformation auf die Gleichung

$$\gamma\phi - K\phi = f, \ \phi \in L_2(\mathbb{R})$$

an und geben Sie abhängig vom Parameter γ die Lösung ϕ_γ dieser Integralgleichung.
Diskutieren Sie den Fall $\gamma = 0$.

Aufgabe 2

Für ein Signal $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^1(\mathbb{R})$ und $\lim\limits_{|t|\to\infty} \sqrt{t} f(t) = 0$. Die Ungleichung

$$\Delta t \Delta\omega \geq \frac{1}{2},$$

wird als *Heisenberg'sche Unschärferelation* genant, wobei Δt die Signalbreite und $\Delta\omega$ die Bandbreite bezeichnen (s. Aufgabe 3 auf dem 1. Übungsblatt). Zeigen Sie, dass die Gleichheit genau für das modulierte Gauß-Signal

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \ f(t) = Ae^{i\nu t}e^{-c(t-b)^2} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{C}, A \neq 0, \nu, b \in \mathbb{R}, \ c > 0,$$

eintritt.

Aufgabe 3

Unser Ohr vermag verschiedene Frequenzen zu verschiedenen Zeitpunkten sehr wohl unterscheiden. Das menschliche Gehör ist dann in der Lage eine *Zeit-Frequenz Analyse* vorzunehmen.
Es sei $f \in L^2(\mathbb{R}), f \neq 0,$ ein Signal, das etwa ein Musikstück darstellt. Für $\gamma > 0, t_0 \in \mathbb{R},$ sei das Signal $\chi_{\gamma,t_0}(t) = \chi(\frac{t-t_0}{\gamma})$ mit χ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, 1]$.
Berechnen Sie für χ_{γ,t_0} den mittleren Zeitpunkt, die mittlere Frequenz, die Signalbreite und die Bandbreite (s. Aufgabe 3 auf dem 1. Übungsblatt). Interpretieren Sie den Grenzfall $\gamma \to 0$ bzw. $\gamma \to \infty$.
Kann man ein musikalisches Instrument bauen, das einen einzigen Ton zur beliebig kurzen Tondauer spielt?

Abgabe: 11.11.2014 vor der Vorlesung.
Die Übungen finden donnastags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.