UNIVERSITT DES SAARLANDES
Fakultt 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. mult. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

3. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Aufgabe 1 (*Parsevalsche Gleichung*)

Zeigen Sie unter Verwendung der Parsevalschen Gleichung, dass für alle $a, b > 0$,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin at)(\sin bt)}{t^2} dt = \pi \min(a, b)$$

gilt.

Aufgabe 2 (*Hilbert-Transformation*)

Es sei die Hilbert-Transformation $\mathcal{H}$ definiert auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ durch

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R} \setminus (x-\varepsilon, x+\varepsilon)} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

1. Zeigen Sie
$$\mathcal{H}f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$$
2. Beweisen Sie, dass die Hilbert-Transformation eine Isometrie von $L_2(\mathbb{R})$ nach $L_2(\mathbb{R})$ ist und dass der inverse Operator durch $\mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}$ gegeben ist.

Aufgabe 3 (*Verschmierte Welt*)

Ein Bild $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^n$. Es wird mit der Belichtungszeit Δt photographiert. Wir definieren die Wahrnehmung-Distribution T durch:

$$Tf := \int\limits_0^{\Delta t} f(-tv)\, dt\,.$$

Die Funktion $g := T * f$ bezeichnet dann das auf dem Film entstehende Bild.
Berechnen Sie g aus f. Kann man f aus g berechnen?

Abgabe: 18.11.2014 vor der Vorlesung.
Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.