



4. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Aufgabe 1 (*Signum Ableiten*)

Geben Sie die Ableitung (im Sinne der Distributionen) der Funktion

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} +1, & \text{falls } t \geq 0 \\ -1, & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

an.

Bestimmen Sie die Fourier Transformierte von sgn .

Aufgabe 2 (*Rotierendes Bild.*)

Ein mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Bild $f \in \mathcal{S}$ werde mit Beleuchtungszeit T photographiert. Auf dem Film entsteht dann das verschmierte Bild

$$g(x) = \int_0^T f(U(t)x) dt, \quad U(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Setzen Sie

$$x = r \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}, \quad f(x(r, \psi)) = \sum_k f_k(r) e^{ik\psi}, \quad g(x(r, \psi)) = \sum_k g_k(r) e^{ik\psi}$$

und berechnen Sie die g_k aus den f_k .

Kann man die f_k aus den g_k effizient berechnen?

Aufgabe 3 (*Helmholtz Gleichung*)

Als Modell für die Ausbreitung von zeit-harmonischen skalaren Wellen u in geschichteten Medien gilt näherungsweise die (inhomogene) 1D–Helmholtz Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + k^2 u(x) = -k^2 f(x) u(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (*)$$

wobei $n := 1 + f$ den Brechungsindex des Mediums und $k > 0$ die Wellenzahl bezeichnen.

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g_k(x) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

eine Fundamentallösung der Helmholtz Gleichung d.h. es gilt

$$L_k g_k = \delta$$

im Sinn der Distributionen, wobei $L_k := \frac{d^2}{dt^2} + k^2$ den Helmholtz Operator und δ die Dirac Distribution bezeichnen.

Ist g_k die eindeutige Fundamentallösung der Helmholtz Gleichung?

Sei u^{inc} eine Lösung der homogenen Helmholtz Gleichung

$$L_k u^{inc} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Weiter sei u eine Lösung der Integralgleichung

$$u(x) = u^{inc}(x) - k^2 \int_{\mathbb{R}} g_k(x-y) f(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass u eine Lösung der inhomogenen Helmholtz Gleichung (*) ist.

Abgabe: 25.11.2014 vor der Vorlesung.

Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.