UNIVERSITT DES SAARLANDES
Fakultt 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. mult. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

5. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Aufgabe 1 (*Dirichlet-Kern*)

Sei f eine periodische Funktion mit Periode $T > 0$. Wir definieren den Dirichlet-Kern D_N durch:

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^{+N} e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad , \quad t \in I\!R \, , \; N \in I\!N \, .$$

1. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von $D_N * f$, wenn $f_{|[0,T[} \in L^2(0,T)$.

2. Berechnen Sie die Fourierreihen und die Fouriertransformierte der periodischen Funktion

$$f(t) = \begin{cases} +1, & \text{falls} \quad 0 < t < \frac{T}{2} \\ \\ -1, & \text{falls} \quad -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases} \quad , \quad f(t+T) = f(t), t \in I\!R.$$

Aufgabe 2 (*Wärmeleitungsgleichung*)

Wir betrachten das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(x,0) &= g(x) \end{cases} \quad , \quad (*)$$

wobei $g \in L_2(\mathbb{R})$ gegeben ist.

1. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung von $(*)$ mit $u(t,\cdot)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\cdot)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ für $t \in \mathbb{R}$.
   Zeigen Sie
   $$\hat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}\hat{g}(\xi), \;\; \xi, t \in \mathbb{R},$$
   wobei die Fourier Transformation bezüglich der ersten Variabel durchzuführen ist.

2. Bestimmen Sie den Kern $k \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$, so dass die Funktion u, gegeben durch die Faltung
   $$u(x,t) = k_t * g\,(x), \quad \text{mit} \quad k_t(x) = k(x,t),$$
   eine Lösung von $(*)$ ist.

Aufgabe 3 (*Wellengleichung*)

Es sei das Anfangswertroblem für die Wellengleichung

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad x,t\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) & = & f(x),\ x\in\mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & g(x),\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right. \quad , \quad (**)$$

1. Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ gegeben und $g = 0$ zeigen Sie, analog wie in Aufgabe 2, dass die Funktion

$$u(x,t) := \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} (e^{i\xi(x-t)} + e^{i\xi(x+t)})\hat{f}(\xi)d\xi,\ x,t\in\mathbb{R},$$

   eine Lösung von $(**)$.
   Interpritieren Sie dieses Ergebniss.

2. Für $g \in L_2(\mathbb{R})$ gegeben und $f = 0$ lösen Sie $(**)$.

Abgabe: Dienstag, den 02.12.2014 vor der Vorlesung.
Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.