UNIVERSITT DES SAARLANDES
Fakultt 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. mult. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

6. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Aufgabe 1 (*B-Splines*)

Sei χ die charakteristische Funktion vom Intervall $[-1/2, 1/2]$.
Wir definieren die B-Spline vom Grad $k \in I\!N$ durch

$$B = \chi * \chi * \cdots * \chi \qquad (k \text{ mal}) .$$

Sei $g \in \mathcal{S}(I\!R)$ und $h > 0$. Mit $B_{1/h}(s) := B(s/h)$ definieren wir die Approximation $I_h g$ von g durch

$$I_h g(s) = \sum_l g(hl) B_{1/h}(s - hl) .$$

Zeigen Sie

$$\widehat{(I_h g)}(\xi) = \left(\text{sinc} \left(\frac{\xi h}{2} \right) \right)^k \sum_l \hat{g} \left(\xi - \frac{2\pi}{h} l \right) .$$

Aufgabe 2 (*Finite Differenzen mit B-Splines*)
Zur numerischen Approximation der zweiten Ableitung einer Funktion $f \in C^2(I\!R)$ kann man die Näherungsformel

$$D_h^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \text{ fr } h \neq 0 .$$

1. Beweisen Sie
$$\mathcal{F} D_h^2 f(\xi) = e^{-ix\xi} \frac{2}{h^2} \frac{1 - \cos(h\xi)}{\xi^2} \mathcal{F} f''(\xi) .$$

2. Was ergibt der Grenzwert
$$\lim_{h \to 0} \mathcal{F} D_h^2 f(\xi) \, ?$$

3. Zeigen Sie außerdem
$$D_h^2 f(x) = \frac{1}{h^2} (\chi_{[-h/2, h/2]} * \chi_{[-h/2, h/2]} * f'')(x) .$$

Aufgabe 3 (*Zerebrale Autoregulation*)

Die zerebrale Autoregulation (CAR) ist die Fähigkeit des menschlichen Körpers automatisch den Blutfluss im Gehirn konstant zu halten, insbonsedere bei Schwankungen des systemischen Blutdruckes. Es besteht breiter Zuspruch zur Modellierung der CAR als linearer Faltungsoperator

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x, y) f(y) dy$$

mit dem CAR-Kern $k(x,y) = k(x-y), k \in L^1(\mathbb{R})$. Dabei bezeichnet f die gemessene Systemblutdruck (am Handgelenk) und Af die Blutflussgeschwindigkeit in der zerebralen Hauptarterie.
Für $s \geq 0$ definieren wir auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Norm

$$||f||_{H^s} := ||(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}||_{L^2} := \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2\right)^{1/2},$$

wobei $\hat{f}$ die Fourier-Transformierte von $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist.
Der Ablschluss $H^s(\mathbb{R}) := \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ bezüglich der Norm $||\cdot||_{H^s}$ bildet einen Hilbertraum, der Sobolev-Raum heißt.

1. Es sei χ die Charakteristische Funktion des Intervalls $[-1/2, 1/2]$. Weiter sei B_l die $B-$Spline der Ordnung l definiert durch

$$B_l = \chi * \chi * \cdots \chi,\ l - \text{Faktoren}, l \in \mathbb{N}.$$

   Zeigen Sie

$$B_l \in H^r(\mathbb{R}) \quad \text{für} \quad r < l - 1/2.$$

   Für $k = B_l$ zeigen Sie, dass $A : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s+r}(\mathbb{R})$ ein stetiger Operator ist.

2. Es seien $k \in L^1(\mathbb{R})$ sowie die $l-$te Ableitung $k^{(l)} \in L^1(\mathbb{R})$, $l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$A \in \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}), H^{s+l}(\mathbb{R})) \quad \text{mit} \quad ||A|| \leq 2^{l/2}\left(||k||_{L^1}^2 + ||k^{(l)}||_{L^1}^2\right)^{1/2}.$$

   Das Ziel ist also, aus den Messdaten $g = Af$ und f den Kern k zu bestimmen, um Rückfluss über den Zustand der Autoregulation zu erhalten.
   Wie kann man die Aussage über der Glattheit von k überprüfen, wenn exakte Daten f und g zu Verfügung stehen?

Abgabe: Dienstag, den 09.12.2014 vor der Vorlesung.
Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.