UNIVERSITT DES SAARLANDES
Fakultt 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. mult. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

7. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Aufgabe 1 (*Sobolev-Räume*)

Es seien $f \in L_2(\mathbb{R})$ und die α-te Ableitung $f^\alpha \in L_2(\mathbb{R})$ für alle $\alpha \leq s \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie

$$c_1(s)\|f\|_{H^s}^2 \leq \sum_{\alpha=0}^{s} \|f^\alpha\|_{L_2}^2 \leq c_2(s)\|f\|_{H^s}^2 \,,$$

wobei $c_2(s) = 1$ und $c_1(s) = \begin{cases} \frac{((s/2)!)^2}{s!} & \text{für} \quad s \quad \text{gerade} \\ \frac{(((s-1)/2)!)^2}{s!} & \text{für} \quad s \quad \text{ungerade} \end{cases}$.

Aufgabe 2 (*Glättungseigenschaften*)

Beweisen Sie, dass der Integraloperator

$$[Af](x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

für $k \in \mathbb{N}$ der Ungleichung

$$\|f\|_{H^{k-1}(0,1)} \leq \|Af\|_{H^k(0,1)} \leq 2\|f\|_{H^{k-1}(0,1)}$$

genügt, wobei $H^k(0,1) := \{f \in L_2(0,1), \|f\|_{H^k(0,1)} := \left(\sum_{\alpha=0}^k \|f^\alpha\|_{L_2(0,1)}^2\right)^{1/2} < \infty\}$.

Aufgabe 3 (*Durch Matritzen erzeugte Normen*)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix mit dem Singulärensystem $\{v_k, u_k, \sigma_k\}_{k=1,..,r}$, d.h. $\{u_k\}_{k=1,..,r}$ bilden eine Basis des Bildraums $\mathcal{R}(A)$ von A und $\{v_k\}_{k=1,..,r}$ bilden eine Basis des Bildraums $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$ der adjungierten Matrix A^*, so dass für die Singulärwerte $\sigma_k > 0$ gilt $Av_k = \sigma_k u_k$ und $A^* u_k = \sigma_k v_k$ für $k = 1,..,r$. Wir definieren für $\nu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathcal{N}(A)^\perp$ die Normen

$$\|x\|_\nu := \left(\sum_{k=1}^r \sigma_k^{-2\nu} |v_k^T x|^2\right)^{1/2} .$$

Zeigen Sie für $x \in \mathcal{N}(A)^\perp$:

1. $\|x\|_\nu \leq C\|x\|_{\nu+\mu}$ für $\mu \geq 0$. Dabei ist $C = C(\nu,\mu) > 0$ eine von x unabhängige Konstante.
2. $\|x\|_{\theta_\nu+(1-\theta)_\mu} \leq \|x\|_\nu^\theta \, \|x\|_\mu^{1-\theta}$ für $\theta \in [0,1]$.
3. $\|x\|_\mu \leq \|A\|_2^{\nu-\mu} \, \|x\|_\nu$ für $\nu \geq \mu$.

Abgabe: Dienstag, den 16.12.2014 vor der Vorlesung.
Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.