UNIVERSITT DES SAARLANDES
Fakultt 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. mult. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

8. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Die Infrarot-Radiometrie ist ein meßtechnisches Verfahren, das vornehmlich bei der Qualitätsprüfung eingesetzt wird. Ein zu untersuchendes Objekt wird thermisch moduliert angeregt. Dadurch eingebrachte Wärme führt zu einer sich in der Zeit verändernden Temperaturstrahlung, die vom Objekt ausgeht. Aus dem Verlauf der Strahlung können Informationen über das Objekt gewonnen werden.

Aufgabe 1

Wir betrachten einen Stab, der sich zusammensetzt aus einem thermisch homogenen Teil für $x \leq 0$ mit der thermischen Konduktivität k_0, der Dichte ρ_0 und der spezifischen Wärmekapazität c_0, und ein Teil für $x > 0$ mit kontinuierlich veränderlichen thermischen Eigenschaften k, ρ und c, die von der Tiefe x abhängt. Das Temperaturfeld erfüllt dann die 1-D Pseudo-Helmholtz-Gleichung

$$L_{\sigma_0} T(x) = F(x) T(x)$$

mit

$$L_{\sigma_0} = \frac{d^2}{dx^2} - \sigma_0^2 \quad \text{und} \quad F(x) = \begin{cases} \sigma_0^2 (n(x)^2 - 1) & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases},$$

wobei der thermische Brechungsindex durch $n(x) = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha(x)}}$ und die thermische Diffusivität durch $\alpha = k/\rho c$ (bzw. $\alpha_0 = k_0/\rho_0 c_0$) gegeben sind.
Zeigen Sie, dass die (Greensche) Funktion

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\sigma_0} \left(e^{-\sigma_0 |x-y|} + e^{-\sigma_0 |x+y|} \right)$$

die Gleichung

$$L_{\sigma_0} G(x, y) = \delta(x - y)$$

löst.
Weiter zeigen Sie, dass die Neumann-Randbedingung

$$\frac{d}{dy} G(x, y)_{|y=0} = 0$$

erfüllt ist.
Sei T_i eine Lösung von $L_{\sigma_0} T_i = 0$. Zeige Sie, dass das Streufeld $T_s := T - T_i$ die Integralgleichung

$$T_s(x) = \int_0^\infty G(x, y) F(y) T(y) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

erfüllt.

Aufgabe 2

Sei $T_i(x) = \frac{I}{\sigma_0 k_0} e^{-\sigma_0 x}, \quad x \in \mathbb{R},$ wobei die positive Konstante I die Intensität bezeichnet.
Wir setzen vorraus, dass für $x > 0$ das Medium homogen ist d.h. $k(x) = k_1$ und $\sigma(x) = \sigma_1, x > 0$.
Berechnen Sie $T(0)$.
Bei der Approximation $k_0 \sim k_1$ berechnen Sie den relativen Fehler $|\frac{T(0)-T_a(0)}{T(0)}|$, wobei T_a die approximeierte Lösung bezeichnet.

Aufgabe 3

Das Ziel betrifft nun die Lösung der Gleichung

$$T_s(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha_0 y} F(y) T(y) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

falls die Born-Approximation $T_s \ll T_i$ gültig ist. In dem Fall gilt die linearisierte Gleichung

$$T_s(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha_0 y} F(y) T_i(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Leiten Sie her eine Inversionsformel zur Berechnung von $f(y) := (\frac{1}{\alpha(y)} - \frac{1}{\alpha_0})$ aus den Daten $\frac{dT}{dx}(0) = g(\sigma_0)$, wobei g gegeben ist.

Abgabe: Dienstag, den 6.1.2015 vor der Vorlesung.
Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.

Wir wünschen ein
FROHE WEIHNACHTEN
und ein
GUTES NEUES JAHR 2015