UNIVERSITT DES SAARLANDES
Fakultt 6.1 Mathematik

Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. mult. A.K. Louis
Dr. A. Lakhal

9. Übungsblatt zu 'Integraltransformationen WS 2014/15'

Aufgabe 1 (Iterierte Hilbert-Transformation)

Es seien $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}, \mathcal{H}^n = \mathcal{H} \circ \mathcal{H}^{n-1}, n \geq 2$, mit $\mathcal{H}$ die Hilbert-Transformation.
Zeigen Sie

$$\mathcal{H}^{n-1} f = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n-2)}{2}} \mathcal{H} f & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} f & \text{falls} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Wenden Sie $\mathcal{H}^n$ auf die Funktion

$$I_h f(s) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(lh) \chi(\frac{s}{h} - l), \ \ h > 0,$$

wobei f eine stetige Funktion mit kompakten Träger und χ die Charakteristische Funktion des Intervalls $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sind. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 (*Hankel-Transformation*)

Sei $L_2(r)$ der Hilbertraum der Funktionen mit $\int_0^\infty r|\psi(r)|^2 dr < \infty$. Weiter sei $\mathcal{H}_\ell$ die Hankel-Transformation in $\mathbb{R}^2$ der Odnung $\ell \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für $\psi \in L_2(r)$:

$$\mathcal{H}_\ell \, (\mathcal{H}_\ell) \, \psi = \psi$$

Zeigen Sie auch, dass $\mathcal{H}_\ell$ ein unitärer, selbstadjungierter Operator auf $L_2(r)$ ist.

Aufgabe 3 (*Laplace-Operator und Kugelflächenfunktion)*

Sei Y_ℓ eine Kugelflächenfunktion in $S^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.
Berechnen Sie für die Funktion

$$F(x) = |x|^k Y_\ell(\frac{x}{|x|}), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

den Wert $\Delta F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x)$.
Hinweis Benutze Polarkoordianten.

Abgabe: Donnerstag, den 15.01.2015 vor der Vorlesung.
Die Übungen finden donnerstags von 14 bis 16 Uhr c.t. im Seminarraum 8 (früher Raum 318) des Gebäudes E2. 4 (3. EG) statt.