FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. G. Rigaud

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

1. Übungsblatt zu 'Spezielle Funktionen'

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Integrale:

a)
$$\int_0^\infty t^{-3/2}(1-e^{-t})dt,$$

b)
$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{a-1} dt, \qquad a>0.$$

Aufgabe 2

a) Beweisen Sie die Duplikationsformel der Gamma-Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(n)\,\Gamma(n+1/2)\,.$$

b) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\,\frac{(2n)!}{n!}.$$

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie: $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$.

b) Für alle n, $m \in \mathbb{N}$ gilt
$$B(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}\,.$$
Berechnen Sie das Integral für alle $b>a, m>0, n>0$
$$\int_a^b (b-x)^{m-1}(x-a)^{n-1}\,dx,$$
und dann präxis für $n=3/2$ and $m=1/2$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie die Formel

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$$

mit $\zeta(x)$ die Riemann'sche Zetafunktion definiert durch

$$\zeta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{-x}.$$

Abgabetermin: 9.11.15 vor der Vorlesung

Übungstermin: 10.11.15 um 10Uhr c.t. in Gebäude E2.5, Seminarraum 7 (203)