FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. G. Rigaud

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

2. Übungsblatt zu 'Spezielle Funktionen'

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Aussagen über das *Pochhammer-Symbol*.

a) Für $\alpha \neq 0\,, -1, -2, \ldots$ gilt

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\,.$$

b) Für $k, n \in \mathbb{N}$ ist

$$(\alpha)_{kn} = k^{nk} \left(\frac{\alpha}{k}\right)_n \left(\frac{\alpha+1}{k}\right)_n \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\alpha+k-1}{k}\right)_n\,.$$

(Multiplikationsformel)

c) Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\alpha)_{n+k} = (\alpha+n)_k\,(\alpha)_n\,.$$

Aufgabe 2

Die ψ-*Funktion* ist die logarithmische Ableitung der Gamma-Funktion, d.h.:

$$\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x}\,\ln(\Gamma(x)) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\,.$$

Zeigen Sie:

a) $\psi(x) = \psi(x+1) - \frac{1}{x}$,

b) $\psi'(x) \geq 0$ für $x > 0$,

c)

$$\psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right) dt.$$

Hinweis:

$$\ln(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \psi'(x) = 0$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Gamma-Funktion.

> Es sei:
>
> - $G \in C^2(\mathbb{R}^+)$ und positiv auf $\mathbb{R}^+_\star$,
> - $\frac{d^2}{dx^2} \ln G(x) \geq 0$, für $x > 0$,
> - $G(x+1) = xG(x)$, für $x > 0$.
>
> Dann $G(x) = c\,\Gamma(x)$ mit $c > 0$.

Aufgabe 4

Beweisen Sie:

a)
$$\sum_{k=1}^{m} k^n = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}}{n+1}, \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}\,.$$

b)
$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\Big(x + \frac{k}{m}\Big)\,,$$

für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{N}$.

Abgabetermin: 16.11.15 vor der Vorlesung

Übungstermin: 17.11.15 um 10Uhr c.t. in Gebäude E2.4, Seminarraum 7 (203)