FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. G. Rigaud

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

3. Übungsblatt zu 'Spezielle Funktionen'

Aufgabe 1

Es sei $F(z) := {}_2F_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, z^2)$ mit $F(1) = \frac{4}{\pi}$.
Zeigen Sie:

$$F(s) \leq 1 + \frac{1}{4}s^2 + \left(\frac{4}{\pi} - \frac{5}{4}\right)s^4 =: f(s) \quad \text{für} \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Beweisen Sie weiterhin die Fehlerabschätzung:

$$d(s) = f(s) - F(s) \leq \sum_{n=3}^{\infty} q_n \, (2n^{-1})^{2/n-2} \, (1 - 2n^{-1}) \,,$$

wobei $q_n = \{(-\frac{1}{2})_n\}^2 \, (n!)^{-2}$ ist.

Aufgabe 2

Es seien $\delta := z \cdot \frac{\partial}{\partial z}$ und $c \neq 0, -1, -2 \ldots$
Beweisen Sie:

a) $(\delta + a) \, {}_2F_1(a, b, c, z) = a \, {}_2F_1(a + 1, b, c, z)$,

b) $(\delta + c - 1) \, {}_2F_1(a, b, c, z) = (c - 1) \, {}_2F_1(a, b, c - 1, z)$,

c) $(1 - z) \, \delta \, {}_2F_1(a, b, c, z) = (c - a) \, {}_2F_1(a - 1, b, c, z) + (a - c + bz) \, {}_2F_1(a, b, c, z)$.

Aufgabe 3

Es sei $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, beweisen Sie

a) ${}_2F_1(a, b, c, z) = (1 - z)^{c-a-b} \, {}_2F_1(c - a, c - b, c, z)$,

b) ${}_2F_1(a, b, c, x) = (1 - x)_2^{-a}F_1\left(a, c - b, c, \frac{x}{x-1}\right)$,

c) $(a - b){}_2F_1(a, b, c, z) = a{}_2F_1(a + 1, b, c, z) - b{}_2F_1(a, b + 1, c, z)$,

c) $(a - b)z \, {}_1F_1(a, b + 1, z) + b(z + b - 1){}_1F_1(a, b, z) = b(b - 1){}_1F_1(a, b - 1, z)$.

Aufgabe 4

a) Beweisen Sie, dass die konfluente hypergeometrische Reihe ${}_1F_1(a, b, x)$ die Lösung der Differentialgleichung ist

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (b - x)\frac{dy}{dx} - ay = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$x^{1-b} \ {}_1F_1(a - b + 1, 2 - b, x), \quad b \notin \mathbb{Z}$$

eine andere Lösung und linear unabhängig von ${}_1F_1(a, b, x)$ ist.

c) Zeigen Sie

$${}_1F_1(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 (1 - t)^{b-a-1} t^{a-1} e^{xt} dt.$$

Abgabetermin: 23.11.15 vor der Vorlesung

Übungstermin: 24.11.15 um 10Uhr c.t. in Gebäude E2.4, Seminarraum 7 (203)