FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. G. Rigaud

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

4. Übungsblatt zu 'Spezielle Funktionen'

Aufgabe 1

Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang zwischen Legendre-Polynomen und hypergeometrischer Funktion:

$$P_n(x) = F\Big(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\Big).$$

Aufgabe 2

Sei $\{p_n\}$ ein System orthogonaler Polynome auf dem Intervall $[-1,1]$ zu der symmetrischen Gewichtsfunktion $w(x)$.
Beweise:

a)
$$\int_{-1}^{1} w(x)p_n'(x)p_m'(x)dx = 0$$
für $n+m$ ungerade.

b)
$$\int_{-1}^{1} w(x)p_n'(x)p_m(x)dx = 0$$
falls $n \leq m$ oder falls $n > m$ und $n+m$ gerade.

Hinweis: Zeigen Sie: n (un)gerade $\Longrightarrow p_n$ (un)gerade.

Aufgabe 3

Seien $w : [a,b] \to \mathbb{R}_+^\star$ eine stückweise stetige und integrable Gewichtsfunktion und $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$ das System orthogonaler Polynome bezüglich des Skalarprodukts

$$< p, q >_w = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx$$

mit führendem Koeffizienten $k_n = 1$.

1. Zeigen Sie, dass die Polynome p_n der folgenden Rekursion genügen:

$$p_0 = 1, \qquad p_1 = x - \beta_0,$$
$$p_{n+1} = (x-\beta_n)p_n - \gamma_n^2 p_{n-1}, \quad n = 1, 2, ...$$

mit

$$\beta_n = \frac{< x\ p_n, p_n >_w}{\|p_n\|_w^2}, \quad n = 0, 1, ..., \qquad \gamma_n^2 = \frac{\|p_n\|_w^2}{\|p_{n-1}\|_w^2}, \quad n = 1, 2, ...$$

2. Die Matrix $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \beta_0 & -\gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma_1 & \beta_0 & -\gamma_2 & \dots & \vdots \\ 0 & -\gamma_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma_{n-1} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Nullstellen des p_n und

$$v^{(k)} = (\tau_0 p_0(\lambda_k), \tau_1 p_1(\lambda_k), \dots, \tau_{n-1} p_{n-1}(\lambda_k))^\top \in \mathbb{R}^n \qquad k = 1, 2, ..., n$$

mit

$$\tau_j = \begin{cases} 1 & , \quad j = 0, \\ (-1)^j \prod_{l=1}^{j} \gamma_l^{-1} & , \quad j = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

Zeigen Sie $Jv^{(k)} = \lambda_k v^{(k)}$

3. Ableiten und beweisen Sie: die Nullstellen des p_n stimmen mit den Eigenwerten der Matrix J überein und die Gewichte σ_k der Gauss-Quadratur ergeben sich daraus folgendermassen

$$\sigma_k = < 1, 1 >_w / \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j^2 p_j^2(\lambda_k), \quad k = 1, ..., n.$$

Abgabetermin: 30.11.15 vor der Vorlesung

Übungstermin: 01.12.15 um 10Uhr c.t. in Gebäude E2.4, Seminarraum 7 (203)