FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. G. Rigaud

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

5. Übungsblatt zu 'Spezielle Funktionen'

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie
$$\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m-1}{}_pF_q(\alpha_1,...,\alpha_p;\beta_1,...,\beta_q;tx)dx$$
$$= B(l,m)\ {}_{p+1}F_{q+1}(\alpha_1,...,\alpha_p,l;\beta_1,...,\beta_q,m+l;t).$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachten Sie n beliebige paarweise verschiedene Stützstellen $x_1,...,x_n \in (a,b)$. Beweisen Sie, dass die Newton-Cotes Formel für Polynome vom Grad $\leq n-1$ exakt ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Belegungsfunktion, $x_{k,n}$, $k = 1,\ldots,n$, die Nullstellen des n-ten Orthogonalpolynoms bzgl. der Belegung α, L_k das k-te Lagrange-Polynom zu den Knotenpunkten $\{x_{k,n}\}$ und $\sigma_k = \langle L_k, L_k\rangle_\alpha = \langle 1, L_k\rangle_\alpha$ die Gewichte der Gauß-Quadratur. Zeigen Sie, dass für ein beliebiges $p \in \Pi_n$ gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^2(x)\ d\alpha(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \sigma_k\ p^2(x_{k,n})\,,$$

und dass das Gleichheitszeichen nur für $p \in \Pi_{n-1}$ gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es gelten die Bezeichnungen aus Aufgabe 3. Weiterhin sei ϕ_n das n-te orthonormale Polynom bzgl. der Belegung α.
Beweisen Sie die folgenden beiden Darstellungen der Gewichte σ_k der Gauß-Quadratur.

a)
$$\sigma_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi_n(x)}{(x-x_{k,n})\,\phi_n'(x_{k,n})}\,d\alpha(x)\,,$$

b)
$$\sigma_k = \Big(\sum_{j=1}^{n} \phi_j^2(x_{k,n})\Big)^{-1}.$$

Abgabetermin: 7.12.15 vor der Vorlesung

Übungstermin: 8.12.15 um 10Uhr c.t. in Gebäude E2.4, Seminarraum 7 (203)