FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. G. Rigaud

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

6. Übungsblatt zu 'Spezielle Funktionen'

Aufgabe 1 (3+2+3+3 = 11 Punkte)

Die Legendre Polynome erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

und sind durch die Legendre Differentialgleichung

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

definiert.

1. Seien P_n die Legendre Polynome vom Grad n und $f \in \Pi_m$. Beweisen Sie, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n\, P_n(x), \qquad \text{mit} \quad c_n = (n+1/2)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

2. Zeigen Sie mit 1., dass $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$.
3. Berechnen Sie das Integral mit 2. und der Legendre Dgl.

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx.$$

4. Zeigen Sie, dass $P_n(x) < P_{n+1}(x)$ für $x > 1$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Satz, der Aufgabe 1.1 verallgemeinert.

> Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig mit endlicher Anzahl von Maxima und Minima. Dann ist
>
> $$\sum_{n\geq 0} c_n P_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f \text{ stetig in } x \\ \frac{f(x+)+f(x-)}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$
>
> Diese Reihe heißt die Legendre Reihe von f.

Berechnen Sie die Legendre Reihe von $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$.

Aufgabe 3 **(4+2 = 6 Punkte)**

Sei

$$C_n^\nu(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(n-m+\nu)}{\Gamma(\nu)m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}.$$

- Zeigen Sie: C_n^ν erfüllt die Gegenbauersche Dgl.

$$(1-x^2)y'' - (2\nu+1)xy' + n(n+2\nu)y = 0.$$

- Beweisen Sie:

$$\frac{d^m}{dx^m}C_n^\nu(x) = 2^m \frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)} C_{n-m}^{\nu+m}(x).$$

Abgabetermin: 14.12.15 vor der Vorlesung

Übungstermin: 15.12.15 um 10Uhr c.t. in Gebäude E2.4, Seminarraum 7 (203)