FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. G. Rigaud

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

8. Übungsblatt zu 'Spezielle Funktionen'

Aufgabe 1 (3+3 = 6 Punkte)

Die zugeordneten Laguerre-Polynome hängen mit den gewöhnlichen Laguerre-Polynomen über

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x).$$

1. Beweisen Sie:
$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) t^n.$$

2. Leiten Sie her:
$$L_n^{a+b+1}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} L_k^a(x) L_{n-k}^b(y).$$

Aufgabe 2 (3+3 = 6 Punkte)

Benutzen Sie die Funk-Hecke Theorem und die Tschebyscheff Rekursionsformeln (z.B. in [1]) zu berechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - p} e^{in\varphi} d\varphi, \qquad 0 \leq p < 1,$$

und

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - p} e^{in\varphi} d\varphi, \qquad 0 \leq p < 1.$$

[1] *I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New-York, 1965.*

Hinweis: [1] p. 800

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{y-x} = \pi U_{n-1}(x).$$

Aufgabe 3 **(2+3+3 = 8 Punkte)**

Die dreidimensionalen Kugelflächenfunktionen können folgendermaßen berechnet werden:
Zeigen Sie:

a) Für $r := (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ gilt:
$$\Delta r^{-1} = 0\,.$$

b) Seien $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ und $D_3 = \frac{\partial}{\partial z}$. Dann ist
$$D_1^a\, D_2^b\, D_3^c\, r^{-1} = H_n \cdot r^{-2n-1}$$
mit einem homogenen Polynom $H_n \in \Pi_n^h$ für $n = a + b + c, \quad a, b, c \in \mathbb{N}$ und .

c) Das Polynom H_n aus b) ist sogar harmonisch. Beweisen Sie dazu
$$\Delta H_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\{H_n r^{-2n-1}\} = 0\,.$$

Bemerkung: Werden a, b, c variiert, so entstehen alle harmonischen Polynome.

Abgabetermin: 18.1.16 vor der Vorlesung

Übungstermin: 19.1.16 um 10Uhr c.t. in Gebäude E2.4, Seminarraum 7 (203)