**FACHRICHTUNG 6.1**
**MATHEMATIK**
Prof. Dr. A. K. Louis
Dr. G. Rigaud

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

## 9. Übungsblatt zu 'Spezielle Funktionen'

### Aufgabe 1 (2+2 = 4 Punkte)

Berechnen Sie den 2- bzw. 3-dimensionalen Laplace Operator in Polarkoordinaten.

### Aufgabe 2 (3+3 = 6 Punkte)

Sei $p \in \Pi_k^h$ ein homogenes Polynom vom Grad $k$ in $\mathbb{R}^n$ und $R(p)$ die Restriktion von $p$ auf $S^{n-1}$.
Zeigen Sie:

a) $R(p) = \sum_{\substack{l=0 \\ l+k\,gerade}}^{k} c_l Y_l$ mit $c_l \in \mathbb{C}$ und $Y_l \in SH^l$.

b) Für ein $Y_l \in SH^l$ gibt es $\overline{c}_j \in \mathbb{C}$ und Kugelflächenfunktionen $\overline{Y}_j \in SH^j$ auf $S^{n-2}$ mit

$$Y_l\big|_{S^{n-2}} = \sum_{\substack{j=0 \\ j+l\,gerade}}^{l} \overline{c}_j \, \overline{Y}_j \, .$$

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie den folgenden Zusammenhang zwischen den Kugelflächenfunktionen $Y_l$ vom Grad $l$ der Ordnung $2$ und den Tschebyscheff-Polynomen 2. Art $U_m$.

$$\sum_{\substack{l=-m \\ l+m\,gerade}}^{m} Y_l(\omega(\varphi)) = U_m(\cos\varphi) \, , \quad \omega(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in S^1 \, .$$

**Aufgabe 4** **(6 Punkte)**

Beweisen Sie das Additionstheorem für die dreidimensionalen Kugelflächenfunktionen

$$P_n(\cos\eta_{xy}) = \sum_{m=-n}^{n} Y_{n,m}(x)Y_{n,-m}(y)\,.$$

Dabei bezeichnet $\eta_{xy}$ für $x, y \in S^2$ die Länge der Geodäte von $x$ nach $y$ in $S^2$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß es ein $k_n(x, y)$ gibt mit

$$f_n(x) = \int_{S^2} k_n(x,y)\overline{f_n(y)}dy$$

für alle $f_n \in SH^n$.
Zeigen Sie dann, daß $k_n(x, y) = (4\pi)^{-1}(2n + 1)P_n(\cos\eta_{xy})$ gilt.

**Abgabetermin: 25.1.16 vor der Vorlesung**

**Übungstermin: 26.1.16 um 10Uhr c.t. in Gebäude E2.4, Seminarraum 7 (203)**