FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Dr. Bernadette Hahn

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

1. Übung zu 'Compressed Sensing in der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2015/16

1. Aufgabe Fouriertransformation **2 + 1 + 1 + 2 = 6 Punkte**

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$h(x) = \chi_{[-\gamma,\gamma]}(x) := \begin{cases} 1 & |x| \leq \gamma \\ 0 & |x| > \gamma \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},\ \gamma \in \mathbb{R} \setminus 0.$$

b) Zeigen Sie, dass für $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F} f\right)(x) = f(-x).$$

c) Bestimmen Sie $\mathcal{F} f(x)$ für

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \gamma \,\mathrm{sinc}(\gamma x), \quad x \in \mathbb{R},\ \gamma \in \mathbb{R} \setminus 0$$

mit $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

d) Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$ und $g, h \in L_1(\mathbb{R})$ mit

$$f(x, y) = g(x)\, h(y).$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{F} f(u, v) = \mathcal{F} g(u)\, \mathcal{F} h(v)$.

2. Aufgabe Fourierreihe **2 + 3 = 5 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass $(u_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ mit

$$u_l(x) := (2a)^{-1/2} e^{\mathrm{i}\pi l x/a}$$

ein Orthonormalsystem auf $L_2([-a, a])$ bildet.

b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{falls} \ -\pi \leq x < 0 \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Aufgabe Abtasttheorem **1 + 4 = 5 Punkte**

Betrachten Sie die 2-bandbeschränkte Funktion

$$f(x) = (\operatorname{sinc}(x))^2 .$$

a) Kann f in eine sinc-Reihe entwickelt werden, d.h. existieren Koeffizienten $a_l \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{Z}$ und eine Schrittweite $h \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hl)\right) \quad ?$$

Falls ja, geben Sie $a_l,\ l \in \mathbb{Z}$ und die entsprechende Schrittweite h an.

b) Für vorgegebenes N soll die N-te Partialsumme

$$S_N(x) = \sum_{l=-N}^{N} f(hl) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hl)\right)$$

für x auf dem Gitter $\mathcal{G} := \left\{\frac{k}{20}\pi,\ k = -100, \ldots, 100\right\}$ berechnet werden.

Schreiben Sie ein entsprechendes Programm und testen Sie dieses für $N = 1, 10, 100$ sowie für die Schrittweiten $h \in \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right\}$.

Geben Sie jeweils den Maximalfehler $\|S_N - f\|_\infty = \max_{x\in\mathcal{G}} |S_N(x) - f(x)|$ an und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Abgabe am Freitag 6. November vor der Vorlesung.