FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Dr. Bernadette Hahn

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

2. Übung zu 'Compressed Sensing in der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2015/16

1. Aufgabe **2 + 2 = 4 Punkte**

a) Sei $p \in (0, \infty)$. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Abbildung $\|\cdot\|_p$ mit

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

ist konvex.

b) Sei $x\ \Sigma_s$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{\|x\|_1}{\sqrt{s}} \ \leq \ \|x\|_2 \ \leq \ \sqrt{s}\,\|x\|_\infty.$$

2. Aufgabe Einheitskugeln **4 Punkte**

Betrachten Sie die Einheitskugeln B_p im $\mathbb{R}^2$

$$B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie für $p \in \left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \infty\right\}$ jeweils eine explizite Mengendarstellung und zeichen Sie diese. (Verwenden Sie für jeden Wert von p ein neues Koordinatensystem.)

3. Aufgabe **3 + 1 = 4 Punkte**

a) Zeigen Sie: Für $p > q > 0,\ s \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$\sigma_s(x)_p \leq \frac{1}{s^{1/q-1/p}}\ \|x\|_q.$$

b) Folgern Sie, dass Elemente der Einheitskugel B_q aus (1) p-komprimierbar sind für $p > q,\ p \geq 1$.

4. Aufgabe **3 Punkte**

Sei $x \in \mathbb{R}^N$ ein Vektor, dessen Einträge x_k dem Potenzgesetz

$$|x_k| \leq C_r k^{-r}$$

genügen, wobei $|x_1| \geq |x_2| \geq \cdots \geq |x_N|,\ r > 1$ und $C_r > 0$. Zeigen Sie, dass x komprimierbar bzgl. der l_1-Norm ist.

Abgabe am Freitag 20. November vor der Vorlesung.