FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Dr. Bernadette Hahn

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

3. Übung zu 'Compressed Sensing in der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2015/16

1. Aufgabe Diskrete Fouriertransformation **1 + 4 = 5 Punkte**

Für $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^T \in \mathbb{R}^N$ heißt $\hat{x} \in \mathbb{C}^N$ mit

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i kn/N}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

die diskrete Fouriertransformation von x. Insbesondere kann x mittels der inversen diskreten Fouriertransformation eindeutig aus $\hat{x}$ bestimmt werden.

Sei $N \geq 2s$. Im Folgenden betrachten wir den Fall unvollständiger Fourierdaten, d.h. die Gleichung

$$Ax = y \tag{1}$$

wobei

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i kn/N}, \quad k = 0, \ldots, 2s-1.$$

a) Zeigen Sie, dass für die Vandermonde Matrix

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \ n \geq 2$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\det V_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

b) Zeigen Sie, dass jeder s-sparse Vektor x eindeutig aus (1) rekonstruiert werden kann.

2. Aufgabe Rekonstruktion sparser Lösungen **4 Punkte**

Betrachten Sie das unterbestimmte Gleichungssystem

$$Ax = y \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|x\|_p^p \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = y, \quad x \geq 0$$

jeweils für $p = 2$ und $p = 1$.

Welche Wahl von p erscheint Ihnen in Bezug auf die Rekonstruktion eines sparsen Lösungsvektors geeignet?

3. Aufgabe l_1-Minimierung im Komplexen — 5 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $z^* = (1, e^{\mathrm{i}2\pi/3}, e^{\mathrm{i}4\pi/3})^T \in \mathbb{C}^3$ ist eindeutige Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{z\in\mathbb{C}^3} \|z\|_1 \quad \text{u.d.N.} \quad Az = y \quad \text{mit } y = Az^*.$$

Hinweis: Überführen Sie das Gleichungssystem $Az = y$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}, z \in \mathbb{C}^3$ in ein System

$$\tilde{A}x = y$$

mit komplexwertiger Matrix $\tilde{A}$ und reellem Vektor x.

Abgabe am Freitag 4. Dezember vor der Vorlesung.