FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Dr. Bernadette Hahn

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

5. Übung zu 'Compressed Sensing in der Bildrekonstruktion'
Wintersemester 2015/16

1. Aufgabe **3 + 3 = 6 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{M\times N},\ y \in \mathbb{R}^M,\ D \in \mathbb{R}^{N\times N},\ 0 < \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^N} f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) := \gamma P_\lambda(x) + \|Ax - y\|_2^2.$$

Dabei stellt

$$P_\lambda(x) := \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(Dx)_i^2 + \lambda^2}$$

eine differenzierbare Approximation an die l_1-Norm $\|Dx\|_1$ dar.

Zur numerischen Lösung des Minimierungsproblems werden Auswertungen von $\nabla f(x)$ benötigt. Zeigen Sie:

a) $\nabla(\|Ax - y\|_2^2) = 2A^T(Ax - y)$,

b) $\nabla P_\lambda(x) = D^T W D x$
mit Diagonalmatrix $W = \mathrm{diag}(w_1, \dots, w_N),\ w_i = \dfrac{1}{\sqrt{(Dx)_i^2 + \lambda^2}}$.

2. Aufgabe **1 + 3 = 4 Punkte**

Sei $z \in \mathbb{R}^N$ ein stückweise konstanter Vektor. Wir definieren den zugehörigen Gradientenvektor ∇z als Vorwärtsdifferenzenoperator

$$(\nabla z)_i := \begin{cases} z_{i+1} - z_i & \text{für } i < N \\ 0 & \text{für } i = N \end{cases}. \tag{1}$$

a) Stellen Sie den Vektor ∇z als Produkt Dz mit einer Transformationsmatrix $D \in \mathbb{R}^{N\times N}$ dar.

b) Schreiben Sie ein Programm, welches ∇z für einen gegebenen Vektor z sowohl direkt, d.h. mit Hilfe der Definition (1), als auch mit der Matrixvektormultiplikation aus a) berechnet.

Testen Sie Ihr Programm für den Vektor $z \in \mathbb{R}^N$ mit $N = 10, 50, 100$,

$$z_i = f(i-1), \quad f(x) = \sin\left(x \cdot \tfrac{\pi}{N-1}\right),\ i = 1, \dots, N$$

und stellen Sie Ihre Ergebnisse aussagekräftig graphisch dar.

3. Aufgabe **4 Punkte**

Ein klassisches Regularisierungsverfahren zum Lösen inverser Probleme $Ax = y$ ist das Tikhonov-Phillips-Verfahren. Hierbei wird der Lösungsvektor x_{TP} durch Minimierung

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \gamma \|x\|_2^2 + \|Ax - y\|_2^2$$

bzw. äquivalent durch Lösen der Normalgleichung

$$(A^T A + \gamma I)x = A^T y$$

mit der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ bestimmt.

Schreiben Sie ein Programm, welches zu gegebener Matrix $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, exaktem Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^N$ und Parameter $\gamma > 0$ den Vektor x_{TP} aus den Daten $y = Ax$ berechnet.

Testen Sie Ihr Programm mit einer Zufallsmatrix $A \in \mathbb{R}^{120 \times 100}$,

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{für } 20 \leq j \leq 70 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad j = 1, \ldots, 100$$

und $\gamma = 10^{-5}$. Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

Hinweis: Der Befehl randn(M,N) in Matlab erzeugt eine $M \times N$-Matrix, deren Einträge normalverteilte Zufallszahlen sind.

Abgabe am Freitag 22. Januar vor der Vorlesung.