FACHRICHTUNG 6.1
MATHEMATIK
Dr. Bernadette Hahn

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

6. Übung zu 'Compressed Sensing in der Bildrekonstruktion' Wintersemester 2015/16

Aufgabe Numerische Lösungsverfahren — 12 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ gegebene Messmatrix, $y \in \mathbb{R}^N$ gemessener Datenvektor, $D \in \mathbb{R}^{N\times N}$ Transformationsmatrix, welche einen gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^N$ auf einen sparsen Koeffizientenvektor $Dx \in \mathbb{R}^N$ abbildet. Die Lösung x_{CS} des Minimierungsproblems

$$\min_{x\in\mathbb{R}^N} f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) := \gamma P_\lambda(x) + \|Ax - y\|_2^2,$$

mit $P_\lambda(x) := \sum_{i=1}^N \sqrt{(Dx)_i^2 + \lambda^2}$ soll numerisch mit dem Gradientenverfahren bestimmt werden.

1. Teil

Schreiben Sie hierzu ein Programm, welches für vorgegebenes $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $x \in \mathbb{R}^N$ und $D \in \mathbb{R}^{N\times N}$ die Lösung x_{CS} bei konstanter, vorgegebener Schrittweite σ aus den Daten $y = Ax$ bestimmt. Die Iteration soll abgebrochen werden, falls $\nabla f(x^k) < 3\cdot 10^{-4}$, spätestens aber nach 35000 Iterationsschritten. Wählen Sie als Startvektor für die Iteration den Nullvektor.

Zur schnellen Auswertung des Gradienten $\nabla f(x)$ können Sie die in Aufgabe 1, Blatt 5 hergeleitete Darstellung verwenden.

2. Teil

Das Programm soll nun jeweils

- für einen sparsen als auch nicht-sparsen Ausgangsvektor x^{sp} bzw. $x^{nsp} \in \mathbb{R}^{250}$ mit

$$x_j^{sp} = \begin{cases} 1 & \text{für } j \in \left\{\lfloor \frac{N}{6} \rfloor, \lfloor \frac{N}{3} \rfloor, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor, \lfloor \frac{2N}{3} \rfloor, \lfloor \frac{5N}{6} \rfloor\right\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad x_j^{nsp} = \begin{cases} 1 & \text{für } 80 \le j \le 170 \\ 0.5 & \text{sonst} \end{cases},$$

- für exakte als auch gestörte Daten,
- und für die verschiedene Anzahl an Daten $M = 250, 150, 100, 50$

getestet werden.
Im sparsen Fall kann die Transformationsmatrix D als Einheitsmatrix gewählt werden, im nicht-sparsen Fall wählen wir $D \in \mathbb{R}^{N\times N}$, welche x auf den entsprechenden Gradientenvektor abbildet, vgl. Aufgabe 2, Blatt 5.

Auf der Homepage steht eine 250×250-Matrix in der Datei MATRIX.dat zur Verfügung, welche in Matlab mit dem Befehl load MATRIX.dat eingelesen werden kann. Um die $M \times 250$-Messmatrix A zu erzeugen, wählen Sie die ersten M Zeilen dieser eingelesenen Matrix aus.
Um verrauschte Daten zu simulieren, stören Sie die exakten Daten $g^{sp} = Ax^{sp}$ bzw. $g^{nsp} = Ax^{nsp}$ durch eine auf $[-0.01, 0.01]$ gleichverteilte Zufallsvariable. (**Hinweis:** Der Befehl (2 · rand(n,m)-1) in Matlab erzeugt eine auf $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable der Dimension $n \times m$.)
Verwenden Sie für das Gradientenverfahren die Parameter $\gamma_{CS} = \lambda = 10^{-3}$, sowie die konstante Schrittweite $\sigma = 0.3$.

Zum Vergleich soll jeweils auch die entsprechende Lösung x_{TP} des Tikhonov-Phillips Verfahrens berechnet werden. Als Parameter γ_{TP} verwenden Sie im Fall exakter Daten $\gamma_{TP} = 10^{-8}$ und im Fall verrauschter Daten $\gamma_{TP} = 2 \cdot 10^{-4}$.

Stellen Sie Ihre Ergebnisse jeweils graphisch dar und interpretieren Sie diese. Berechnen Sie zum Vergleich auch jeweils die l_2-Norm Ihrer Lösungsvektoren.

Abgabe am Freitag 5. Februar vor der Vorlesung.