

Unvollständige Daten bei der 3D Radon Transformation: Theorie und Algorithmen

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Mathematikers
der Naturwissenschaftlichen-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

VON
Clemens Stefan Becker

Saarbrücken
Februar 2006

Betreuer: Univ.-Prof. Dr. A. K. Louis

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Mathematische Grundlagen	5
1.1 Allgemeine Kugelflächenfunktionen	5
1.1.1 Definition	6
1.1.2 Explizite Darstellung und Eigenschaften	6
1.1.3 Der Fall $n = 3$	9
1.2 Die Radon Transformation	11
1.2.1 Definitionen	11
1.2.2 Symmetrie und Invarianzen	15
1.2.3 Singulärwertzerlegung	18
1.2.4 Limited Angle	23
1.3 Die Approximative Inverse	24
1.3.1 Grundlagen	25
1.3.2 Die Approximative Inverse der Radon Transformation bei vollständigen Daten	27
2 Limited-Angle in n Dimensionen	35
2.1 Definitionen	35
2.2 Singulärwertzerlegung	36
2.3 Numerische Eigenwertanalyse	43
2.3.1 Der Fall $n = 3$	44
2.3.2 Der Fall $n = 4$	47
2.4 Approximative Inverse	51
2.4.1 Lösen von $R_\theta \psi_\gamma^{LA} = e_\gamma$	51
2.4.2 Rekonstruktionsformel	57
3 Limited-Angle in 3D	59
3.1 Definitionen	59
3.2 Singulärwertzerlegung	60
3.3 Numerische Eigenwertanalyse	66

3.3.1	Einschränkung des Polarwinkels	66
3.3.2	Einschränkung des Azimutal- und Polarwinkels	68
3.3.3	Eine alternative Datenverteilung	73
3.4	Approximative Inverse	76
3.4.1	Lösen von $R_{\vartheta, \phi} \psi_{\gamma}^{LA} = e_{\gamma}$	76
3.4.2	Rekonstruktionsformel	79
Anhang		81
A	Spezielle Funktionen	81
A.1	Die Gamma-Funktion Γ	81
A.2	Die Jacobi-Polynome $P_m^{(\alpha, \beta)}$	81
A.3	Die Gegenbauer-Polynome C_m^{λ}	82
A.4	Die Legendre-Polynome P_m und die assoziierten Legendre-Funktionen P_m^l	83
A.5	Die Tschebyscheff-Polynome 2. Art U_m	84
B	Kugelkoordinaten in n Dimensionen	85
B.1	Definition	85
B.2	Eigenschaften	86
Literaturverzeichnis		88

Einleitung

Beim Studium der Radon Transformation hat der zweidimensionale Fall immer eine Sonderrolle gespielt, weil die 2D Radon Transformation das mathematische Modell für eine wichtige Anwendung liefert, nämlich der zweidimensionalen Computertomographie. Da die 3D Radon Transformation ihrerseits *kein* Modell für die dreidimensionale Computertomographie darstellt (dazu wird stattdessen die Röntgen Transformation benötigt), konnte sich ihre Bedeutung für die Praxis nie wirklich mit der der 2D Radon Transformation messen. Insofern überrascht es nicht, dass bei der Radon Transformation viele Probleme bisher in erster Linie für den zweidimensionalen Fall untersucht wurden.

Mit dem Einsatz der *Elektronen paramagnetischen Resonanz Bildgebung* (kurz EPR Imaging bzw. EPRI) sind nun jedoch Verfahren relevant geworden, deren mathematisches Modell durch die 3D Radon Transformation beschrieben wird, vgl. [11] - [13]. Folglich ist es mittlerweile durchaus von Interesse, ob bzw. auf welche Weise sich die für die 2D Radon Transformation erhaltenen Ergebnisse auf den dreidimensionalen Fall übertragen lassen.

In diesem Zusammenhang ist auch diese Arbeit zu sehen: Das Limited-Angle Problem, das sich dadurch definiert, dass die gemessenen Daten nur für bestimmte Richtungen vorliegen, ist im Zweidimensionalen für die Radon Transformation eingehend untersucht worden. Speziell berechnet DIETZ aufbauend auf der von LOUIS in [16] angegebenen Singulärwertzerlegung in [5] die zugehörige Approximative Inverse.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist nun die Berechnung der Approximativen Inversen für die *dreidimensionale* Limited-Angle Radon Transformation. Dabei werden die bereits zitierten Arbeiten [16] und [5] als Leitfaden dienen.

Im ersten Kapitel geben wir einen Überblick über die dazu nötigen mathematischen Grundlagen. Da sich ein Spezialfall der 3D-Limited-Angle Radon Transformation relativ leicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt, beginnen wir mit den Kugelflächenfunktionen in n Dimensionen. Es folgen grundlegende Eigenschaften der Radon Transformation. Zuletzt stellen wir

die Approximative Inverse allgemein vor und berechnen sie konkret für die Radon Transformation in n Dimensionen bei vollständig verfügbaren Daten.

In Kapitel 2 wird die Approximative Inverse einer speziellen Limited-Angle Radon Transformation für beliebige Dimension $n \geq 3$ berechnet. Das Vorgehen unterteilt sich dabei im Wesentlichen in zwei Schritte: Zunächst wird die Singulärwertzerlegung bestimmt und das Abklingverhalten der Singulärwerte mittels numerischer Experimente studiert. Im Anschluss daran wird dann im zweiten Schritt mit Hilfe der Singulärwertzerlegung der Rekonstruktionskern der Approximativen Inversen bestimmt und mit dem der Radon Transformation bei vollständigen Daten verglichen.

Das Vorgehen in Kapitel 3 ist prinzipiell ähnlich wie in Kapitel 2. Der Unterschied besteht darin, dass wir uns dort auf den dreidimensionalen Fall beschränken, aber dafür ein allgemeineres Limited-Angle Problem behandeln.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit geholfen haben. Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Dr. Louis, der mich stets sehr hilfsbereit und umfassend betreut hat. Ihm verdanke ich u. a. einen wesentlichen Hinweis zur Berechnung der Singulärwertzerlegung in Kapitel 3.

Darüber hinaus danke ich allen Mitarbeitern am Institut für das gute Arbeitsklima und für ihre Ratschläge und Hilfe bei den verschiedensten mathematischen Problemen. Ein Dankeschön gebührt insbesondere Dipl.-Inf. David Theis und Dipl.-Math. Thomas Weber, die mich bei Fragen zu L^AT_EX geduldig mit Rat und Tat unterstützt und sich zudem als Korrekturleser zur Verfügung gestellt haben.

Großer Dank gilt nicht zuletzt meinen Eltern, die mich während meines gesamten Studiums immer unterstützt und gefördert haben.

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

Wir beginnen mit einer Zusammenstellung der wichtigsten mathematischen Grundlagen, die wir für unsere weiteren Untersuchungen benötigen.

Als erstes wenden wir uns den allgemeinen Kugelflächenfunktionen zu, insbesondere konzentrieren wir uns auf Möglichkeiten, diese explizit in sphärischen Koordinaten anzugeben.

Danach behandeln wir den grundlegenden Operator der vorliegenden Arbeit, die Radon Transformation. Neben einem Überblick über ihre wichtigsten Eigenschaften widmen wir uns vor allem ihrer Singulärwertzerlegung und definieren die Limited-Angle Radon Transformation, die den Ausgangspunkt für die Überlegungen in den Kapiteln 2 und 3 darstellt.

Zum Schluss stellen wir schließlich die Idee der Approximativen Inversen vor und wenden sie auf die Radon Transformation im Falle vollständig vorliegender Daten an.

1.1 Kugelflächenfunktionen in n Dimensionen

Die Kugelflächenfunktionen spielen als Orthogonalbasis von $L^2(S^{n-1})$ eine wichtige Rolle bei der Singulärwertzerlegung der Radon Transformation. Für vollständige Daten benötigt man bei den auftretenden Berechnungen lediglich ihre Orthogonalitäts- bzw. Orthonormalitätsrelationen bzgl. S^{n-1} . Sobald die Daten jedoch nur noch für eine Teilmenge $S_E^{n-1} \subsetneq S^{n-1}$ vorliegen, verlieren diese Orthogonalitätsbeziehungen ihre Gültigkeit und man benötigt eine konkrete Darstellung, um dennoch zu einem Ergebnis zu gelangen, vgl. Abschnitt 2.2.

Im Dreidimensionalen ist solch eine konkrete Darstellung wohlbekannt. Im Folgenden geben wir für den allgemeinen n -dimensionalen Fall entsprechende Darstellungen in einer Form an, die unseren späteren Bedürfnissen

angepasst ist. Darüber hinaus werden wir auch sehen, dass die für $n = 3$ aus dem allgemeinen Fall abgeleiteten Formeln im Wesentlichen mit der altbekannten dreidimensionalen Darstellung übereinstimmen.

1.1.1 Definition

Die n -dimensionalen Kugelflächenfunktionen $Y^{(n)}$ sind definiert als die Einschränkung harmonischer, homogener Polynome¹ aus $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ auf die Einheitssphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Sie bilden ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2(S^{n-1})$. Dabei gibt es für $(n, l) \neq (2, 0)$ jeweils

$$A(n, l) := \frac{(2l + n - 2)(n + l - 3)!}{l!(n - 2)!} = \mathcal{O}(l^{n-2}) \quad \text{bzw.} \quad A(2, 0) := 1$$

linear unabhängige Kugelflächenfunktionen vom Grad l (s. [6], [22], [24]). Speziell erhalten wir für $n = 2, 3, 4$:

$$A(2, l) = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 2 & l \neq 0 \end{cases}, \quad A(3, l) = 2l + 1, \quad A(4, l) = (l + 1)^2 \quad (1.1)$$

Im weiteren Verlauf bezeichnen wir eine Kugelflächenfunktion vom Grad m in n Dimensionen mit $Y_m^{(n)}$.

1.1.2 Explizite Darstellung und Eigenschaften

Wir wollen nun eine orthonormale Basis der n -dimensionalen Kugelflächenfunktionen explizit in sphärischen Koordinaten angeben. Dies wird uns später konkrete Rechnungen mit solchen Kugelflächenfunktionen ermöglichen.

Im Fall $n = 2$ ist die Einheitssphäre S^1 gerade der Einheitskreis. Mittels Polarkoordinaten $\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, lässt sich eine Orthonormalbasis für die Kugelflächenfunktionen vom Grad l darstellen als

$$Y_{lz}^{(2)}(\varphi) := Y_{lz}^{(2)}(\omega(\varphi)) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{zil\varphi}, \quad z \in \{\pm 1\}. \quad (1.2)$$

Für $n \geq 3$ ist es nach [21] möglich, eine explizite Darstellung der $Y_m^{(n)}$ rekursiv anzugeben:

Wir definieren für $m \geq l \geq 0$ die Funktionen

$$P_{ml}^{(n)}(t) := (-1)^l (1 - t^2)^{\frac{l}{2}} C_{m-l}^{\frac{n-2}{2}+l}(t), \quad (1.3)$$

¹Eine homogene Funktion f vom Grad k erfüllt definitionsgemäß $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$. Für Polynome ist dies äquivalent dazu, dass jedes Monom Gesamtgrad k hat.

und die Normierungskonstante

$$c_{ml}^{(n)} := \frac{2^{l+\frac{n-3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(l + \frac{n}{2} - 1\right) \sqrt{\frac{(m + \frac{n}{2} - 1)(m - l)!}{(m + l + n - 3)!}}, \quad (1.4)$$

wobei C_m^λ die Gegenbauer-Polynome und Γ die Gamma-Funktion bezeichne (vgl. Anhang A). Damit können wir eine Orthonormalbasis für die Kugelflächenfunktionen vom Grad m in n Dimensionen rekursiv durch die entsprechenden Kugelflächenfunktionen in $n - 1$ Dimensionen wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} & Y_{mlk_1 \dots k_{n-3} z}^{(n)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) \\ & := Y_{mlk_1 \dots k_{n-3} z}^{(n)}(\omega^{(n)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)) \\ & := c_{ml}^{(n)} P_{ml}^{(n)}(\cos \theta_1) Y_{lk_1 \dots k_{n-3} z}^{(n-1)}(\theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$m \geq l \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{n-3} \geq 0, z \in \{\pm 1\}$$

Dabei bezeichne $\omega^{(n)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$, $\theta_i \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, die Parametrisierung der Einheitssphäre S^{n-1} mittels n -dimensionaler Kugelkoordinaten (s. Anhang B).

Im Weiteren wird es beim Gebrauch der $Y_{mlk_1 \dots k_{n-3} z}^{(n)}$ nur auf m und l ankommen, d. h. auf den jeweiligen Grad der beiden in (1.5) auftretenden Kugelflächenfunktionen. Die genauen Werte der Indizes k_1, \dots, k_{n-3} und z hingegen sind unwichtig, so dass wir fortan die kürzere und übersichtlichere Darstellung

$$Y_{mlk}^{(n)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) = c_{ml}^{(n)} P_{ml}^{(n)}(\cos \theta_1) Y_{lk}^{(n-1)}(\theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) \quad (1.6)$$

$$m \geq l \geq 0, k = 1, \dots, A(n-1, l)$$

benutzen werden.

Nachrechnen der Orthonormalität. Wir sind abgesehen von Konstanten der Darstellung in [21] gefolgt, weswegen es genügt, die Orthonormalität der angegebenen Funktionen nachzurechnen. Dazu führen wir einen Induktionsbeweis nach n :

Für $n = 2$ ist die Behauptung wegen $|S^1| = 2\pi$ und der bekannten Orthogonalität der in (1.2) angegebenen Funktionen klar.

Sei nun $n \geq 3$ und die Behauptung gelte für $n - 1$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 & \int_{S^{n-1}} Y_{mlk}^{(n)} \overline{Y_{m'l'k'}^{(n)}} dS^{n-1} \\
 &= c_{ml}^{(n)} c_{m'l'}^{(n)} \int_0^\pi P_{ml}^{(n)}(\cos \theta_1) P_{m'l'}^{(n)}(\cos \theta_1) \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \\
 & \quad \times \underbrace{\int_{S^{n-2}} Y_{lk}^{(n-1)} \overline{Y_{l'k'}^{(n-1)}} dS^{n-2}}_{=\delta_{ll'} \delta_{kk'} \text{ nach Ind.voraussetzung}}, \quad (dS^{n-1} = \sin^{n-2} \theta d\theta dS^{n-2}) \\
 &= \delta_{ll'} \delta_{kk'} c_{ml}^{(n)} c_{m'l'}^{(n)} \underbrace{\int_0^\pi P_{ml}^{(n)}(\cos \theta) P_{m'l'}^{(n)}(\cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta}_{=: I}
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (1.3) und Ausführen der Substitution $x := \cos \theta$, $d\theta = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (cos ist auf $[0, \pi]$ umkehrbar) folgt

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{l+\frac{n-3}{2}} C_{m-l}^{l+\frac{n-2}{2}}(x) C_{m'-l}^{l+\frac{n-2}{2}}(x) dx \\
 &= \delta_{mm'} \frac{\pi(m+l+n-3)!}{2^{2l+n-3} (m-l)! (m+\frac{n-2}{2}) \Gamma^2(l+\frac{n-2}{2})} \\
 &= \frac{\delta_{mm'}}{c_{ml}^{(n)2}}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\langle Y_{mlk}^{(n)}, Y_{m'l'k'}^{(n)} \rangle_{L^2(S^{n-1})} = \delta_{mm'} \delta_{ll'} \delta_{kk'}$$

und damit die Behauptung. \square

Bemerkungen 1.1.1.

1) Wegen

$$\frac{d^k}{dx^k} C_m^\lambda(x) = 2^k \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} C_{m-k}^{\lambda+k}(x)$$

(vgl. [8], 8.935(1)) wäre es auch möglich, die $P_{ml}^{(n)}$ für $l > 0$ als

$$P_{ml}^{(n)}(x) := (-1)^l (1-x^2)^{l/2} \frac{d^l}{dx^l} P_{m0}(x)$$

zu definieren. In dieser Form wären sie das exakte n -dimensionale Analogon zu den assoziierten Legendre-Funktionen, die bei der üblichen Definition der

dreidimensionalen Kugelflächenfunktionen an entsprechender Stelle auftreten, vgl. Abschnitt 1.1.3. Wir bevorzugen hier die Definition gemäß (1.3), weil spätere Berechnungen ohnehin auf Eigenschaften der Gegenbauer-Polynome zurückgeführt werden müssen und wir so keine zusätzlichen Konstanten zu beachten brauchen.

2) Da wir später den Wert von $Y_0^{(n)}$ benötigen, notieren wir noch, dass

$$Y_0^{(n)} \equiv |S^{n-1}|^{-1/2} \left(= \prod_{k=2}^n c_{00}^{(k)} \right)$$

gilt. Dies ergibt sich aus der Orthogonalitätsrelation der Kugelflächenfunktionen und daraus, dass $Y_0^{(n)}$ konstant ist, da alle auftretenden $P_{ml}^{(k)}$

$$P_{ml}^{(k)} = P_{00}^k = C_0^{\frac{k-2}{2}} \equiv 1$$

erfüllen. Wegen

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

bedeutet dies

$$Y_0^{(n)} \equiv \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}} \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

3) Parität der Kugelflächenfunktionen $Y_{mlk}^{(n)}$

Jede Kugelflächenfunktion ist entweder gerade oder ungerade. Dabei hängt die Parität einer Kugelflächenfunktion allein von ihrem Grad ab, denn es gilt:

$$Y_{mlk}^{(n)}(-\omega^{(n)}) = (-1)^m Y_{mlk}^{(n)}(\omega^{(n)}) \quad (1.8)$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die $Y_{mlk}^{(n)}$ definitionsgemäß die Einschränkung eines homogenen Polynoms vom Grad m auf die Einheitssphäre sind. Alternativ kann man die Behauptung auch leicht mit Hilfe der Symmetrien der Gegenbauer-Polynome und Darstellung (1.6) nachrechnen (beachte: $-\omega^{(n)}(\theta_1, \theta_2, \dots, \varphi) = \omega^{(n)}(\pi - \theta_1, \pi - \theta_2, \dots, \varphi + \pi)$, vgl. Lemma B.2.1). \square

1.1.3 Der Fall $n = 3$

Die dreidimensionalen Kugelflächenfunktionen werden in der Praxis am häufigsten benötigt. Für diesen Spezialfall hat sich daher eine eigene Darstellung eingebürgert, von der zunächst nicht klar ist, ob sie mit der unserer

allgemeinen Version übereinstimmt. Wir werden nun nachweisen, dass beide Darstellungen — von einem evtl. unterschiedlichen Vorzeichen abgesehen — tatsächlich die gleichen Funktionen bezeichnen.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit geben wir zunächst noch einmal die „klassische“ Definition der dreidimensionalen Kugelflächenfunktionen an:

Für $|l| < m$ bezeichnen wir wie üblich mit

$$P_m^l(x) := \begin{cases} (-1)^l (1-x^2)^{l/2} \frac{d^l}{dx^l} P_m(x), & l \geq 0 \\ (-1)^l \frac{(m-|l|)!}{(m+|l|)!} P_m^{|l|}(x), & l < 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

die assoziierten Legendre-Funktionen vom Grad m und Ordnung l , wobei P_m das Legendre-Polynom vom Grad m ist. Die dreidimensionalen Kugelflächenfunktionen werden dann für $m \geq 0, l = -m, \dots, m$ durch

$$Y_m^l(\theta, \varphi) := \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi} \frac{(m-l)!}{(m+l)!}} P_m^l(\cos \theta) e^{il\varphi} \quad (1.10)$$

definiert.

Bemerkung 1.1.2.

Offensichtlich kommen wir in dieser Schreibweise mit lediglich zwei Indizes aus. Dabei haben wir den dritten Index k unserer ursprünglichen Darstellung $Y_{mlk}^{(n)}$, der für $n = 3$ gerade $A(n-1, l) = A(2, l) = 2$ ($l \neq 0$) Werte annimmt und das Vorzeichen des Arguments der e -Funktion bestimmt, mit dem zweiten Index l zu einem neuen Index l zusammengefasst. Dementsprechend durchläuft der neue Index l einen größeren Wertebereich.

Für *gerades* l ergibt sich dann nach Einsetzen von (1.9)

$$Y_m^l(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi} \frac{(m-|l|)!}{(m+|l|)!}} P_m^{|l|}(\cos \theta) e^{il\varphi}, \quad (1.10')$$

was man umgekehrt auch als alternative Definition für ungerade l heranziehen könnte, der Unterschied ist jeweils nur der Faktor -1 .

Kommen wir nun zur konkreten Darstellung der $Y_{mlk}^{(3)}$. Unter Beachtung von $C_m^{1/2}(x) = P_m(x)$ und $\frac{d^k}{dx^k} C_m^\lambda(x) = 2^k \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} C_{m-k}^{\lambda+k}(x)$ ergibt sich nach Einsetzen von $n = 3$ in (1.3) und (1.4)

$$P_{ml}^{(3)}(x) = 2^{-l} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(l+\frac{1}{2})} P_m^l(x) \quad \text{und}$$

$$c_{ml}^{(3)} = \frac{2^l}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{(2m+1)(m-l)!}{(m+l)!}}.$$

Wegen $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ erhält man schließlich (beachte (1.2)):

$$\begin{aligned} Y_{mlz}^{(3)}(\theta, \varphi) &= c_{ml}^{(3)} P_{ml}^{(3)}(\cos \theta) Y_{lz}^{(2)}(\varphi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2m+1)(m-l)!}{(m+l)!}} P_m^l(\cos \theta) \frac{e^{zil\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi} \frac{(m-l)!}{(m+l)!}} P_m^l(\cos \theta) e^{zil\varphi}, \quad m \geq l \geq 0, z \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

Abgesehen von der schon in der obigen Bemerkung angesprochenen unterschiedlichen Indizierung stimmt dieses Ergebnis mit (1.10') überein. Legt man hingegen — wie normalerweise üblich — (1.10) als Definition zu Grunde, unterscheiden sich beide Darstellungen für negatives, ungerades l (bzw. ungerades l und $z = -1$) um den konstanten Faktor -1 , eine sicherlich vernachlässigbare Diskrepanz, da weder die Orthogonalitätsbeziehungen noch die Normierung davon beeinflusst werden.

1.2 Die Radon Transformation

Die Radon Transformation ist der grundlegende Operator für die vorliegende Arbeit. In diesem Abschnitt wird deshalb das für die weiteren Betrachtungen notwendige Vorwissen zusammenfassend bereitgestellt.

Nach einem kurzen Überblick über die Definition und die für uns wichtigen Eigenschaften der Radon Transformation gehen wir vor allem auf ihre Singulärwertzerlegung (kurz: SWZ) ein, bevor wir uns zum Schluss noch der allgemeinen Limited-Angle Radon Transformation zuwenden.

1.2.1 Definitionen

Im Folgenden bezeichne

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 < r\}$$

die n -dimensionale offene Kugel vom Radius r um den Punkt x_0 . Speziell bezeichnen wir mit

$$\Omega^n := B_1(0)$$

die offene Einheitskugel im \mathbb{R}^n . Des Weiteren sei

$$Z^n := S^{n-1} \times [-1, 1]$$

der n -dimensionale Einheitszylinder. Das Integrationsgewicht w_n sei definiert als

$$w_n(s) := (1 - s^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Unter $C_0^\infty(\Omega^n)$ verstehen wir den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω^n .

Wir definieren nun zunächst den Operator \tilde{R} durch

$$\begin{aligned} \tilde{R} : C_0^\infty(\Omega^n) &\longrightarrow L^2(Z^n, w_n^{-1}) \\ \tilde{R}f(\omega, s) &:= \int_{\Omega^n} \delta(s - x^\top \omega) f(x) dx, \end{aligned} \quad (1.11)$$

wobei δ hier die Delta-Distribution bezeichnet. Details zur Definition und Handhabung von „auf glatten Flächen konzentrierten Distributionen“ können in [7] nachgelesen werden. Anschaulich bedeutet (1.11), dass man f über die Hyperebene integriert, die durch den Normalenvektor ω und Abstand s zum Ursprung eindeutig bestimmt ist. Dementsprechend kann man durch Drehen des Koordinatensystems zeigen, dass (1.11) äquivalent zu

$$\tilde{R}f(\omega, s) = \int_{\omega^\perp \cap B_{\sqrt{1-s^2}}(0)} f(s\omega + y) dy \quad (1.12)$$

$$= \int_{(s\omega + \omega^\perp) \cap \Omega^n} f(y) dy \quad (1.13)$$

ist.

Lemma 1.2.1.

Der in (1.11) definierte Operator \tilde{R} ist stetig, wenn man $C_0^\infty(\Omega^n)$ mit der L^2 -Norm versieht.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} |\tilde{R}f(\omega, s)|^2 &= \left| \int_{(s\omega + \omega^\perp) \cap \Omega^n} f(y) dy \right|^2 \\ &\leq \left(\int_{(s\omega + \omega^\perp) \cap \Omega^n} |f(y)| dy \right)^2 \\ &\leq \text{Vol}((s\omega + \omega^\perp) \cap \Omega^n) \|f\|_{L^2(\Omega^n)}^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf f und die charakteristische Funktion $\chi_{(s\omega + \omega^\perp) \cap \Omega^n}$ angewendet haben. Die Menge

$(s\omega + \omega^\perp) \cap \Omega^n$ lässt sich als Schnittmenge der durch (ω, s) bestimmten Ebene mit Ω^n durch die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} x \cdot \omega &= s \\ \|x\|_2^2 &= x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1 \end{aligned}$$

beschreiben. Drehen wir das Koordinatensystem so, dass ω dem ersten Basisvektor entspricht, also $x'_1 = x \cdot \omega$ gilt, ergibt sich daraus (die Norm ist invariant unter Drehungen)

$$\begin{aligned} s^2 + x'_2{}^2 + \dots + x'_n{}^2 &< 1 \\ \iff x'_2{}^2 + \dots + x'_n{}^2 &< 1 - s^2 \end{aligned}$$

und wir sehen, dass $(s\omega + \omega^\perp) \cap \Omega^n$ gerade eine $n - 1$ -dimensionale Kugel vom Radius $\sqrt{1 - s^2}$ ist und dementsprechend ein Volumen proportional $(1 - s^2)^{\frac{n-1}{2}} = w_n(s)$ hat, vgl. (B.9). Damit erhalten wir

$$|\tilde{R}f(\omega, s)|^2 \leq c(n) w_n(s) \|f\|_{L^2(\Omega^n)}^2$$

und somit schließlich

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}f\|_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}^2 &= \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 |\tilde{R}f(\omega, s)|^2 w_n^{-1}(s) ds d\omega \\ &\leq 2c(n) |S^{n-1}| \|f\|_{L^2(\Omega^n)}^2, \end{aligned}$$

was gerade die behauptete Stetigkeit von \tilde{R} beweist. Der Beweis kann auch in [22] nachgelesen werden. In [14] wird eine allgemeinere Aussage bewiesen. \square

Da man zur Nachbildung realer physikalischer Größen am besten L^2 -Räume benutzt, setzt man \tilde{R} nun noch zu einem stetigen Operator auf $L^2(\Omega^n)$ fort. Dies ist möglich und darüber hinaus eindeutig, da $C_0^\infty(\Omega^n)$ dicht in $L^2(\Omega^n)$ liegt (vgl. [28], V.1.9).

Definition 1.2.2 (Radon Transformation).

Unter der *Radon Transformation* R verstehen wir die eindeutige stetige Fortsetzung des Operators \tilde{R} aus (1.11) auf $L^2(\Omega^n)$,

$$R : L^2(\Omega^n) \longrightarrow L^2(Z^n, w_n^{-1}). \quad (1.14)$$

Tatsächlich kann man zeigen, dass R nicht nur stetig, sondern sogar kompakt ist.²

²Am einfachsten sieht man dies später unter Verwendung der SWZ: Mit deren Hilfe lässt sich R als normweiser Grenzwert von stetigen Operatoren mit endlichdimensionalem Bild darstellen. Da solche Operatoren immer kompakt sind, ist auch R als normweiser Grenzwert kompakter Operatoren zwischen Hilberträumen kompakt (vgl. [28], II.3.2).

Bemerkung 1.2.3.

Für Funktionen $f \in L^2(\Omega^n)$ macht die Schreibweise

$$Rf(\omega, s) = \int_{\Omega^n} \delta(s - x^\top \omega) f(x) dx$$

erst einmal keinen Sinn, da L^2 -Funktionen nicht durch ihre Werte auf Nullmengen (hier: Hyperebenen) bestimmt sind. Dennoch werden auch wir diese Schreibweise später abkürzend verwenden. Formal bedeutet dies, dass entsprechende Rechnungen zunächst für $C_0^\infty(\Omega^n)$ durchgeführt und die resultierenden Eigenschaften durch Dichtheitsargumente auf $L^2(\Omega^n)$ übertragen werden.

Als stetiger Operator zwischen Hilberträumen hat R einen stetigen adjungierten Operator:

Lemma 1.2.4.

Der adjungierte Operator R^* der Radon Transformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} R^* : L^2(Z^n, w_n^{-1}) &\longrightarrow L^2(\Omega^n) \\ R^*g(x) &= \int_{S^{n-1}} g(\omega, x^\top \omega) w_n^{-1}(x^\top \omega) d\omega \end{aligned} \quad (1.15)$$

und ebenfalls kompakt.

Beweis. Wir haben (s.a. [22])

$$\begin{aligned} \langle Rf, g \rangle_{L^2(Z^n, w_n^{-1})} &= \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 Rf(\omega, s) g(\omega, s) w_n^{-1}(s) ds d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 \int_{\Omega^n} \delta(s - x^\top \omega) f(x) dx g(\omega, s) w_n^{-1}(s) ds d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\Omega^n} \int_{-1}^1 \delta(s - x^\top \omega) g(\omega, s) w_n^{-1}(s) ds f(x) dx d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\Omega^n} g(\omega, x^\top \omega) w_n^{-1}(x^\top \omega) f(x) dx d\omega \\ &= \int_{\Omega^n} f(x) \int_{S^{n-1}} g(\omega, x^\top \omega) w_n^{-1}(x^\top \omega) d\omega dx \\ &= \langle f, R^*g \rangle_{L^2(\Omega^n)}. \end{aligned}$$

Die Kompaktheit von R^* folgt aus der Kompaktheit von R und dem Satz von Schauder, (z. B. [28], III.4.4). \square

1.2.2 Symmetrie und Invarianzen

Aus der Gleichung

$$Rf(\omega, s) = \int_{(s\omega + \omega^\perp) \cap \Omega^n} f(y) dy$$

folgt wegen $(-\omega)^\perp = \omega^\perp$ unmittelbar die Symmetrierelation

$$Rf(\omega, s) = Rf(-\omega, -s), \quad (1.16)$$

welche die Redundanz der Daten widerspiegelt.

Im Hinblick auf die spätere Anwendung der Approximativen Inversen sind darüber hinaus noch die Invarianzen von R^* wichtig, denen wir uns nun zuwenden wollen.

Translationsinvarianz

Wir orientieren uns an der Notation von DIETZ [5] und definieren für $x \in \Omega^n$ die Translationen T_1^x, T_2^x auf $L^2(\Omega^n)$ bzw. $L^2(Z^n, w_n^{-1})$ durch

$$T_1^x f(y) := 2^{-n} f\left(\frac{y-x}{2}\right), \quad (1.17)$$

$$T_2^x g(\omega, s) := 2^{-n} g\left(\omega, \frac{s-x^\top \omega}{2}\right) w_n^{-1}\left(\frac{s-x^\top \omega}{2}\right) w_n(s). \quad (1.18)$$

Der Faktor 2^{-n} sorgt dabei dafür, dass f und $T_1^x f$ den gleichen Mittelwert haben. Insbesondere ist $(T_1^x e_\gamma)_{\gamma>0}$ eine um x konzentrierte Dirac-Folge³, wenn $(e_\gamma)_{\gamma>0}$ eine um 0 konzentrierte Dirac-Folge ist, s. a. Abschnitt 1.3.1. Wir notieren nun das

Lemma 1.2.5 (Translationsinvarianz von R^*).

Die linearen Operatoren

$$\begin{aligned} T_1^x &: L^2(\Omega^n) \longrightarrow L^2(\Omega^n), \\ T_2^x &: L^2(Z^n, w_n^{-1}) \longrightarrow L^2(Z^n, w_n^{-1}) \end{aligned}$$

sind stetig und erfüllen die Relation

$$T_1^x R^* = R^* T_2^x. \quad (1.19)$$

³Wir werden das Thema Dirac-Folgen bzw. Approximation von Delta-Distributionen nicht weiter vertiefen, Einzelheiten können z. B. in [2] oder [27] nachgelesen werden.

Beweis. Wir zeigen zunächst die behauptete Stetigkeit, bevor wir (1.19) beweisen.

i) Für $x, y \in \Omega^n$ gilt auch $\frac{y-x}{2} \in \Omega^n$, so dass $T_1^x f$ für $f \in L^2(\Omega^n)$ sinnvoll definiert ist. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \|T_1^x f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 &= \int_{\Omega^n} 2^{-2n} |f((y-x)/2)|^2 dy \\ &= 2^{-n} \int_{B_{\frac{1}{2}}(\frac{-x}{2})} |f(u)|^2 du \\ &\leq 2^{-n} \int_{\Omega^n} |f(u)|^2 du = 2^{-n} \|f\|_{L^2(\Omega^n)}^2, \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $u := \frac{y-x}{2}$, $dy = 2^n du$ benutzt haben. Wurzelziehen liefert die Stetigkeit von T_1^x .

ii) Hier halten wir zunächst fest, dass für $x \in \Omega^n$, $\omega \in S^{n-1}$ und $s \in [-1, 1]$ wegen $|\langle x, \omega \rangle| \leq \|x\| \|\omega\| = \|x\| < 1$ auch

$$\left| \frac{s - x^\top \omega}{2} \right| \leq \frac{1 + \|x\|}{2} < 1 \quad (\#)$$

unabhängig von ω gilt und somit insbesondere die Definition von $T_2^x g$ für Funktionen auf dem Einheitszylinder Sinn macht. Des Weiteren haben wir für $g \in L^2(Z^n, w_n^{-1})$

$$\begin{aligned} \|T_2^x g\|_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}^2 &= 2^{-2n} \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 \left| g\left(\omega, \frac{s - x^\top \omega}{2}\right) \right|^2 w_n^{-2}\left(\frac{s - x^\top \omega}{2}\right) w_n(s) ds d\omega \\ &\leq 2^{-2n+1} \int_{S^{n-1}} \int_{\frac{-1-x^\top \omega}{2}}^{\frac{1-x^\top \omega}{2}} |g(\omega, t)|^2 w_n^{-1}(t) w_n^{-1}(t) dt d\omega, \end{aligned}$$

wobei wir $w_n(s) \leq 1$ für $s \in [-1, 1]$ ausgenutzt und $t := \frac{s-x^\top \omega}{2}$, $ds = 2 dt$, substituiert haben. Wegen (#) gibt es unabhängig von ω ein $\varepsilon > 0$ mit $[\frac{-1-x^\top \omega}{2}, \frac{1-x^\top \omega}{2}] \subseteq [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon] =: I$. Auf dem kompakten Intervall I ist die Funktion w_n^{-1} jedoch stetig und nimmt dort deshalb ein Maximum M an. Wir folgern

$$\begin{aligned} \|T_2^x g\|_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}^2 &\leq 2^{-2n+1} M \int_{S^{n-1}} \int_{\frac{-1-x^\top \omega}{2}}^{\frac{1-x^\top \omega}{2}} |g(\omega, t)|^2 w_n^{-1}(t) dt d\omega \\ &\leq 2^{-2n+1} M \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 |g(\omega, t)|^2 w_n^{-1}(t) dt d\omega \\ &= 2^{-2n+1} M \|g\|_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}^2 \end{aligned}$$

und erhalten nach Wurzelziehen schließlich die Stetigkeit von T_2^x .

iii) Wir haben (s. a. [5])

$$\begin{aligned}
& T_1^x R^* g(y) \\
&= 2^{-n} \int_{S^{n-1}} g(\omega, \left(\frac{y-x}{2}\right)^\top \omega) w_n^{-1} \left(\left(\frac{y-x}{2}\right)^\top \omega\right) d\omega \\
&= \int_{S^{n-1}} 2^{-n} g(\omega, \left(\frac{y^\top \omega - x^\top \omega}{2}\right)) w_n^{-1} \left(\frac{y^\top \omega - x^\top \omega}{2}\right) w_n(y^\top \omega) w_n^{-1}(y^\top \omega) d\omega \\
&= R^* T_2^x g(y),
\end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist. \square

Rotationsinvarianz

Sei U eine unitäre Matrix. Wir definieren die beiden Rotationen D_1^U, D_2^U für $f \in L^2(\Omega^n)$ bzw. $g \in L^2(Z^n, w_n^{-1})$ durch

$$D_1^U f(y) := f(Uy) \quad (1.20)$$

$$D_2^U g(\omega, s) := g(U\omega, s) \quad (1.21)$$

und erhalten ein zu den Aussagen bzgl. der Translation analoges

Lemma 1.2.6 (Rotationsinvarianz von R^*).

Die linearen Operatoren

$$\begin{aligned}
D_1^U &: L^2(\Omega^n) \longrightarrow L^2(\Omega^n), \\
D_2^U &: L^2(Z^n, w_n^{-1}) \longrightarrow L^2(Z^n, w_n^{-1})
\end{aligned}$$

sind stetig und erfüllen die Relation

$$D_1^U R^* = R^* D_2^U. \quad (1.22)$$

Beweis. i) Da Skalarprodukt und Norm invariant unter unitären Transformationen sind, gilt $U\Omega^n = \Omega^n$ und $US^{n-1} = S^{n-1}$. Wegen $|\det U| = 1$ erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned}
\|D_1^U f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 &= \int_{\Omega^n} |f(Uy)|^2 dy \\
&= \int_{\Omega^n} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2(\Omega^n)}^2
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \|D_2^U g\|_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}^2 &= \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 |g(U\omega, s)|^2 w_n^{-1}(s) ds d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 |g(\tilde{\omega}, s)|^2 w_n^{-1}(s) ds d\tilde{\omega} = \|g\|_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}^2, \end{aligned}$$

und damit insgesamt den ersten Teil der Behauptung.

ii) Wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned} D_1^U R^* g(y) &= \int_{S^{n-1}} g(\omega, (Uy)^\top \omega) w_n^{-1}((Uy)^\top \omega) d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} g(\omega, y^\top (U^\top \omega)) w_n^{-1}(y^\top (U^\top \omega)) d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} g(U\varpi, y^\top \varpi) w_n^{-1}(y^\top \varpi) d\varpi \\ &= R^* D_2^U g(y) \end{aligned}$$

gilt. Damit ist alles gezeigt. \square

1.2.3 Singulärwertzerlegung

Die Singulärwertzerlegung eines kompakten Operator ist generell ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung seiner Eigenschaften. So lassen sich z.B. aus dem Abklingverhalten der Singulärwerte Rückschlüsse auf den Grad der Schlechtgestellttheit des entsprechenden inversen Problems ziehen, vgl. [17].

Wir geben nun die Singulärwertzerlegung der Radon Transformation $R : L^2(\Omega^n) \rightarrow L^2(Z^n, w_n^{-1})$ an, welche später zum einen bei der Berechnung des entsprechenden Rekonstruktionskerns benötigt wird (Abschnitt 1.3.2) und zum anderen die Grundlage für die SWZ der Limited-Angle Radon Transformation bildet (Abschnitte 2.2 und 3.2).

Dabei bezeichne im Folgenden $P_m^{(\alpha, \beta)}$ die Jacobi-Polynome vom Grad m , C_m^λ die Gegenbauer-Polynome vom Grad m und $Y_{lk_1 k_2}^{(n)}$ die Kugelflächenfunktionen vom Grad l , vgl. Abschnitt 1.1.

Satz 1.2.7 (Normierte SWZ der Radon Transformation).

Sei $w_n(s) := (1 - s^2)^{\frac{n-1}{2}}$ und

$$d_m^{(n)} := \sqrt{\frac{2^{n-1} m! \left(m + \frac{n}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi (m+n-1)!}}.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} v_{mlk_1k_2}^{(n)}(x) &:= \sqrt{2m+n} |x|^l P_{(m-l)/2}^{(0, l + \frac{n-2}{2})}(2|x|^2 - 1) Y_{lk_1k_2}^{(n)}(x/|x|), \\ u_{mlk_1k_2}^{(n)}(\omega, s) &:= d_m^{(n)} w_n(s) C_m^{\frac{n}{2}}(s) Y_{lk_1k_2}^{(n)}(\omega) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sigma_{mlk_1k_2}^{(n)} &:= 2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{m!}{(m+n-1)!}} \\ &= \sigma_m^{(n)} = \mathcal{O}\left(m^{-\frac{(n-1)}{2}}\right). \end{aligned}$$

Dann bildet $\{v_{mlk_1k_2}^{(n)}, u_{mlk_1k_2}^{(n)}; \sigma_m^{(n)}\}$, $m \geq 0$, $0 \leq l \leq m$, $m+l$ gerade, $0 \leq k_1 \leq l$, $k_2 = 1, \dots, A(n-1, k_1)$ eine normierte Singulärwertzerlegung der n -dimensionalen Radon Transformation als Operator

$$R : L^2(\Omega^n) \longrightarrow L^2(Z^n, w_n^{-1}).$$

Beweis. Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{mlk}^{(n)}(x) &= \tilde{d}_m^{(n)} |x|^l P_{(m-l)/2}^{(0, l + \frac{n-2}{2})}(2|x|^2 - 1) Y_{lk}^{(n)}(x/|x|), \\ \tilde{u}_{mlk}^{(n)}(\omega, s) &= w_n(s) C_m^{\frac{n}{2}}(s) Y_{lk}^{(n)}(\omega), \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{d}_m^{(n)} = 2^{1-n} \pi^{1-n/2} \frac{\Gamma(m+n)}{m! \Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Wie LOUIS in [15] (Theorem 3.1, Lemma 4.2 und Corollary 4.3) zeigt, sind dann die $\tilde{v}_{mlk}^{(n)}$ (unnormierte) Eigenfunktionen von R^*R , bilden für $m \geq 0$, $0 \leq l \leq m$, $m+l$ gerade, $k = 1, \dots, A(n, l)$ ein vollständiges, orthogonales System von $L^2(\Omega^n)$ und erfüllen die Relation

$$R\tilde{v}_{mlk}^{(n)} = \tilde{u}_{mlk}^{(n)}.$$

Daher bleibt zum Beweis der Behauptung lediglich die Normierung der angegebenen Funktionen sowie der angegebene Wert der singulären Werte σ_m zu verifizieren.⁴

⁴Denn wie bei jeder SWZ folgt aus der Orthonormalität und Vollständigkeit der singulären Funktionen v in Verbindung mit der Relation $Rv = \sigma u$ die Orthonormalität und entsprechende Vollständigkeit der singulären Funktionen u .

Im Folgenden betrachten wir ein beliebiges, aber festes Funktionenpaar $\tilde{v}_{mlk}^{(n)}, \tilde{u}_{mlk}^{(n)}$ und lassen der besseren Übersichtlichkeit halber die Dimensionsbezeichnung und die Indizes weg.

Da R^*R als positiver Operator nur reelle, nichtnegative Eigenwerte hat und wir uns auf positive Eigenwerte beschränken können (wäre \tilde{v} Eigenfunktion von R^*R zum Eigenwert 0, ergäbe sich wegen $\text{Kern}(R^*R) = \text{Kern}(R)$ der Widerspruch $R\tilde{v} = 0 \neq \tilde{u}$), können wir mit einem $\sigma > 0$ schreiben:

$$R^*R\tilde{v} = \sigma^2\tilde{v}$$

Setzen wir $\hat{u} := R\tilde{v}/\sigma$, ergibt sich

$$R\tilde{v} = \sigma\hat{u} = \tilde{u},$$

so dass wir wegen

$$\|\hat{u}\|^2 = \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \langle R\tilde{v}, R\tilde{v} \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \langle R^*R\tilde{v}, \tilde{v} \rangle = \langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle = \|\tilde{v}\|^2$$

σ berechnen können als

$$\sigma = \frac{\|\tilde{u}\|}{\|\hat{u}\|} = \frac{\|\tilde{u}\|}{\|\tilde{v}\|}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}^2 &= \int_{-1}^1 [C_m^{\frac{n}{2}}(s)]^2 w_n(s) ds \underbrace{\int_{S^{n-1}} Y_{lk}^{(n)} \overline{Y_{lk}^{(n)}} dS^{n-1}}_{=1} \\ &= \frac{2^{1-n} \pi \Gamma(m+n)}{(m+\frac{n}{2}) \Gamma^2(\frac{n}{2}) m!}, \quad \text{vgl. (A.7),} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{L^2(\Omega^n)}^2 &= \tilde{d}_m^2 \int_{\Omega^n} |x|^{2l} [P_{(m-l)/2}^{(0, l+\frac{n-2}{2})}(2|x|^2-1)]^2 Y_{lk}^{(n)}(x/|x|) \overline{Y_{lk}^{(n)}(x/|x|)} dx \\ &= \tilde{d}_m^2 \int_0^1 |r|^{2l+n-1} [P_{(m-l)/2}^{(0, l+\frac{n-2}{2})}(2r^2-1)]^2 dr \quad (\text{Kugelkoordinaten}) \\ &= \tilde{d}_m^2 2^{-(l+n/2+1)} \int_{-1}^1 (1+u)^{l+\frac{n-2}{2}} [P_{(m-l)/2}^{(0, l+\frac{n-2}{2})}(u)]^2 du, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Substitution $u := 2r^2 - 1$ ausgeführt wurde. Nutzen wir nun noch die Normierungseigenschaft der Jacobi-Polynome

(vgl. (A.4)) aus, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{L^2(\Omega^n)}^2 &= \frac{\tilde{d}_m^2}{2 \left(m + \frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{2^{1-2n} \pi^{2-n} \Gamma^2(m+n)}{m!^2 \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) \left(m + \frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Die normierten Funktionen

$$\begin{aligned} v &:= \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|} \\ &= \sqrt{2m+n} |x|^l P_{\left(\frac{m-l}{2}\right)}^{(0, l + \frac{n-2}{2})}(2|x|^2 - 1) Y_{lk}^{(n)}(x/|x|) \\ u &:= \frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|} = \frac{\tilde{u}}{\sigma \|\hat{u}\|} = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} \\ &= \sqrt{\frac{2^{n-1} m! \left(m + \frac{n}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi \Gamma(m+n)}} w_n(s) C_m^{\frac{n}{2}}(s) Y_{lk}^{(n)}(\omega). \end{aligned}$$

und der Singulärwert

$$\sigma = \frac{\|\tilde{u}\|}{\|\tilde{v}\|} = 2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{m!}{\Gamma(m+n)}}$$

entsprechen dann wegen $\Gamma(k+1) = k!$ ($k \in \mathbb{N}$), vgl. (A.1), den Angaben des Satzes und erfüllen (beachte $\|\tilde{v}\| = \|\hat{u}\|$) nach Konstruktion $Rv = \sigma u$. \square

Bemerkungen 1.2.8 (zur Indizierung der SWZ).

1) Natürlich wäre es auch möglich, statt zweier Indizes k_1 und k_2 nur einen Index k zu benutzen, wie wir es auch im Beweis getan haben. Dieser müsste dann den Wertebereich $1, \dots, A(n, l)$ durchlaufen. Allerdings wäre k damit nur noch ein reiner Abzählindex, so dass die Information über den „zweiten Grad“ der entsprechenden Kugelflächenfunktion verloren ginge. In der Schreibweise

$$Y_{lk_1 k_2}^{(n)} = c_{lk_1}^{(n)} P_{lk_1}^{(n)} Y_{k_1 k_2}^{(n-1)}$$

(vgl. (1.6)) hingegen ist klar, dass die niedrigdimensionalere Kugelflächenfunktion den Grad k_1 , $0 \leq k_1 \leq l$ hat. Dies wird insbesondere bei der Konstruktion der Singulärwertzerlegung der Limited-Angle Radon Transformation eine Rolle spielen, s. Abschnitt 2.2.

2) Die Bedingung „ $m+l$ gerade“ in obiger Indizierung lässt bei festem m für l die Werte

$$l = \begin{cases} 0, 2, \dots, m & m \text{ gerade} \\ 1, 3, \dots, m & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

zu, l springt also immer in Zwischenschritten. Im Hinblick auf die weitere Verwendung der Singulärwertzerlegung ist diese Eigenschaft eher hinderlich, vgl. Bemerkung 2.2.1. Daher ist es zweckmäßiger, von vornherein mit einer entsprechend angepassten (d. h. umindizierten) Singulärwertzerlegung zu arbeiten:

Wir ersetzen l durch $m-2l$, so dass nun $0 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ und $0 \leq k_1 \leq m-2l$ gilt. Darüber hinaus wird es sich aber ebenfalls als notwendig erweisen, den zweiten Index in Abhängigkeit von k_1 anstatt umgekehrt zu indizieren. Schreiben wir demnach $0 \leq k_1 \leq m-2l$ entsprechend um, erhalten wir $0 \leq l \leq \lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor$, mit $0 \leq k_1 \leq m$. Insgesamt ergibt sich also die Singulärwertzerlegung

$$\{v_{m,m-2l,k_1,k_2}, u_{m,m-2l,k_1,k_2}; \sigma_m\},$$

$$m \geq 0, 0 \leq k_1 \leq m, 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{m-k_1}{2} \right\rfloor, k_2 = 1, \dots, A(n-1, k_1),$$

die wir auch im Folgenden benutzen werden.

Wir halten noch explizit fest:

Korollar 1.2.9. Die Radon Transformation R ist injektiv.

Beweis. Wie bereits im Beweis des Satzes angemerkt wird in [15] gezeigt, dass $\text{Kern}(R)^\perp = \overline{\text{span}}\{\tilde{v}_{mlk}^{(n)}\} = L^2(\Omega^n)$ gilt. Durch Bildung des orthogonalen Komplements erhält man daraus $\text{Kern}(R) = \overline{\text{Kern}(R)} = L^2(\Omega^n)^\perp = \{0\}$, also die Injektivität von R . \square

Da wir uns in Kapitel 3 speziell mit der dreidimensionalen Radon Transformation beschäftigen werden, formulieren wir die Aussage von Satz 1.2.7 für diesen Fall noch einmal in einer angepassteren Form. Der Unterschied besteht hauptsächlich darin, dass wir die klassische Notation der Kugelflächenfunktionen gemäß (1.10') verwenden.

Korollar 1.2.10.

Sei $R : L^2(\Omega^3) \rightarrow L^2(Z^3, w^{-1})$ die dreidimensionale Radon Transformation und $w(s) := (1-s^2)$. Weiterhin seien

$$v_{mlk}(x) := \sqrt{2m+3} |x|^l P_{(m-l)/2}^{(0,l+1/2)}(2|x|^2-1) Y_l^k(x/|x|),$$

$$u_{mlk}(\omega, s) := \sqrt{\frac{m+3/2}{(m+1)(m+2)}} w(s) C_m^{3/2}(s) Y_l^k(\omega),$$

$$\sigma_m := \frac{2^{3/2}\pi}{\sqrt{(m+1)(m+2)}} = \mathcal{O}(m^{-1}).$$

Dann sind $\{v_{mlk}, u_{mlk}; \sigma_m\}$, $m \geq 0$, $0 \leq l \leq m$, $m+l$ gerade, $|k| \leq l$, und $\{v_{m,m-2l,k}, u_{m,m-2l,k}; \sigma_m\}$, $m \geq 0$, $0 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $0 \leq |k| \leq m-2l$, (bzw. $m \geq 0$, $|k| \leq m$, $0 \leq l \leq \lfloor \frac{m-|k|}{2} \rfloor$) normierte singuläre Systeme von R . \square

1.2.4 Limited Angle

Zum Abschluss definieren wir noch die allgemeine Limited-Angle Radon Transformation (LA-RT) und geben einen kurzen Überblick über ihre Eigenschaften. Um den Unterschied deutlich zu machen, werden wir die gewöhnliche Radon Transformation von nun an ggf. auch als Full-Data Radon Transformation (FD-RT) oder vollständige Radon Transformation bezeichnen.

Definition

Sei zunächst $S_E^{n-1} \subseteq S^{n-1}$ eine Teilmenge der Einheitssphäre. In späteren konkreten Fällen wird S_E^{n-1} dabei auf Grund der Redundanz der Daten (vgl. (1.16)) punktsymmetrisch zum Ursprung sein, hier ist dies jedoch noch unerheblich. Entsprechend dieser Winkeleinschränkung definieren wir den eingeschränkten Einheitszylinder als

$$Z_E^n := S_E^{n-1} \times [-1, 1],$$

und können nun festhalten:

Definition 1.2.11.

Der Operator

$$\begin{aligned} R_E : L^2(\Omega^n) &\longrightarrow L^2(Z_E^n, w_n^{-1}) \\ f &\longmapsto Rf|_{Z_E^n} \end{aligned}$$

heißt *allgemeine Limited-Angle Radon Transformation*.

Ebenso wie die vollständige Radon Transformation R ist auch R_E ein kompakter Operator. Um dies einzusehen, betrachten wir den Restriktionsoperator

$$\begin{aligned} P_E : L^2(Z^n, w_n^{-1}) &\longrightarrow L^2(Z_E^n, w_n^{-1}) \\ g &\longmapsto g|_{Z_E^n} \end{aligned}$$

der auf Grund von $\|g\|_{L^2(Z_E^n, w_n^{-1})} \leq \|g\|_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}$ stetig ist. Offensichtlich gilt $R_E = P_E R$, also ist R_E als Komposition eines kompakten und eines stetigen Operators selbst wieder kompakt ([28], II.3.2).

Adjungierter Operator

Durch eine Rechnung analog zu der im Beweis von Lemma 1.2.4 erhalten wir als adjungierten Operator

$$\begin{aligned} R_E^* &: L^2(Z_E^n, w_n^{-1}) \longrightarrow L^2(\Omega^n) \\ R_E^* g(x) &= \int_{S_E^{n-1}} g(\omega, x^\top \omega) w_n^{-1}(x^\top \omega) d\omega. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Symmetrie und Invarianzen

Falls S_E^{n-1} punktsymmetrisch zum Ursprung ist, bleibt die Symmetrie der Radon Transformation auch im Limited-Angle Fall erhalten und es gilt

$$R_E f(-\omega, -s) = R_E f(\omega, s). \quad (1.24)$$

Der Beweis der Translationsinvarianz von R^* (Lemma 1.2.5) lässt sich eins zu eins auf R_E^* übertragen, man muss lediglich S^{n-1} durch S_E^{n-1} ersetzen. Folglich gilt

$$T_1^x R_E^* = R_E^* T_2^x. \quad (1.25)$$

Hingegen nutzt der Beweis von Lemma 1.2.6 aus, dass S^{n-1} invariant unter beliebigen Drehungen und Spiegelungen ist. Dies ist für S_E^{n-1} nicht mehr erfüllt, denn für beliebige unitäre Matrizen U gilt nicht unbedingt $U S_E^{n-1} = S_E^{n-1}$. Dementsprechend kann für R_E^* keine Rotationsinvarianz gezeigt werden, i. Allg. gilt also

$$D_1^U R_E^* \neq R_E^* D_2^U. \quad (1.26)$$

1.3 Die Approximative Inverse

Die Radon Transformation kann als kompakter Operator mit unendlichdimensionalem Bildraum keine stetige Inverse besitzen (vgl. [28]). Folglich ist das Problem, zu gegebenen Daten g eine Lösung f mit $Rf = g$ zu finden, schlecht gestellt, was den Einsatz von Regularisierungsverfahren notwendig macht.

Im Rahmen dieser Arbeit werden wir hierzu die Approximative Inverse heranziehen, die wir zunächst kurz vorstellen werden. Dabei orientieren wir uns an [18], wo auch weitere Einzelheiten nachgelesen werden können. Eine Analyse der Regularisierungseigenschaften der Approximativen Inverse findet man in [10] und [19].

Anschließend leiten wir mit Hilfe der Approximativen Inversen eine Rekonstruktionsformel für die n -dimensionale Radon Transformation im Fall vollständiger Daten her.

1.3.1 Grundlagen

In diesem und im nächsten Abschnitt bezeichne $A : X \rightarrow Y$ einen linearen, kompakten Operator zwischen zwei Hilberträumen X und Y mit zugehöriger Singulärwertzerlegung $\{v_n, u_n; \sigma_n\}$, $n \geq 0$. Unser Ziel ist es, die Gleichung $Af = g$ zu lösen.

Konzept der Approximativen Inversen

Die Idee der Approximativen Inversen besteht darin, mit Hilfe eines sogenannten *Mollifiers* e_γ (dabei ist $\gamma > 0$ der zugehörige *Regularisierungsparameter*) eine geglättete Version $f_\gamma = \langle f, e_\gamma \rangle$ der (verallgemeinerten) Lösung f zu bestimmen. Dadurch wird der Einfluss der hochfrequenten und daher besonders fehleranfälligen Anteile der Lösung gemindert.

Bemerkung 1.3.1. Je nach Wahl des Mollifiers e_γ kann f_γ ganz unterschiedliche Approximationseigenschaften besitzen und z. B. auch Ableitungen von f approximieren (s. [18]). Für unsere Zwecke, d. h. zur Approximation von f selbst, geht man jedoch üblicherweise davon aus, dass die verwendeten Mollifier eine Dirac-Folge $(e_\gamma)_{\gamma>0}$ bilden. Einzelheiten hierzu findet man z. B. in [2] oder [27].

In der bisherigen Form ist f_γ ohne Kenntnis der Lösung f freilich noch nicht berechenbar. Der Ausweg besteht darin, das Hilfsproblem

$$A^* \psi_\gamma = e_\gamma \tag{1.27}$$

zu lösen. Dabei wird ψ_γ als *Rekonstruktionskern* bezeichnet. Dann gilt

$$f_\gamma = \langle f, e_\gamma \rangle_X = \langle f, A^* \psi_\gamma \rangle_X = \langle Af, \psi_\gamma \rangle_Y = \langle g, \psi_\gamma \rangle_Y =: S_\gamma g,$$

die geglättete Lösung ergibt sich also als Skalarprodukt der Daten mit dem von den Daten unabhängig berechenbaren Rekonstruktionskern. Damit haben wir die Lösung von $Af = g$ auf die Lösung von $A^* \psi_\gamma = e_\gamma$ zurückgeführt.

Der Vorteil der Approximativen Inversen liegt darin, dass wir die rechte Seite e_γ geeignet (z. B. beliebig glatt) wählen können und dadurch zudem exakt kennen, was auf die gemessenen und daher fehlerbehafteten Daten g natürlich nicht zutrifft.

Für $e_\gamma \notin \text{Bild}(A^*)$ hat (1.27) keine Lösung. Allerdings können wir zumindest für den Fall $e_\gamma \in \text{Bild}(A^*) \oplus \text{Bild}(A^*)^\perp = D(A^{*+})$ mittels der Pseudoinversen A^{*+} noch eine verallgemeinerte Lösung bestimmen. Indem wir A^{*+} unter Verwendung der SWZ von A^* als Reihe auswerten (vgl. [17], [23]),

erhalten wir die Darstellung

$$\psi_\gamma = A^{*+} e_\gamma = \sum_{\sigma_n > 0} \sigma_n^{-1} \langle e_\gamma, v_n \rangle u_n \quad (1.28)$$

für den Rekonstruktionskern. Im Folgenden werden wir immer $e_\gamma \in \text{Bild}(A^*)$ annehmen.

Bemerkung 1.3.2.

Die Bedingung $e_\gamma \in \text{Bild}(A^*)$ bedingt nach dem Picard-Kriterium (s. [17]) die Konvergenz der Reihe in (1.28) und wird uns die Formulierung von Lemma 1.3.3 vereinfachen. Sie kann als eine Glattheitsbedingung an den Mollifier e_γ aufgefasst werden, vgl. [19]. Allerdings reicht sie nicht aus, um uns später die Möglichkeit einer punktweisen Auswertung von f_γ zu garantieren. Hierfür müsste e_γ einer stärkeren Glattheitsanforderung genügen.

Wir können im Rahmen dieser Arbeit auf diesen Themenkomplex nicht weiter eingehen. Relevant ist für uns der Fall, dass X und Y Funktionenräume sind. Dann können wir das Problem umgehen, indem wir bei der Formulierung der entsprechenden Ergebnisse der Einfachheit halber gleich $e_\gamma \in \text{Bild}(A^*) \cap C^\infty$ voraussetzen. Dies ist lediglich eine theoretische Einschränkung; in der Praxis werden meist ohnehin C^∞ -Mollifier benutzt, vgl. [5].

Ausnutzen von Invarianzen

Der Rekonstruktionskern muss bislang für jeden Rekonstruktionspunkt x berechnet werden, wir schreiben daher präziser $\psi_\gamma(x, \cdot)$ für die Lösung von $A^* \psi_\gamma(x, \cdot) = e_\gamma(x, \cdot)$. Diese Rekonstruktionskerne können unabhängig von den Daten vorberechnet werden, die benötigte Rechenzeit fällt also nicht ins Gewicht. Allerdings kann sich der benötigte Speicherplatz zu einem Problem entwickeln. Sind wir jedoch bereit, für verschiedene Rekonstruktionspunkte x „gleichartige“ Mollifier $e_\gamma(x, \cdot)$ zu benutzen, können wir den Speicherbedarf reduzieren, indem wir uns eventuelle Invarianzen des Operators A zu Nutze machen. Die Grundlage dazu liefert folgende Beobachtung:

Lemma 1.3.3.

Für die Operatoren $A \in L(X, Y)$, $T_1 \in L(X)$ und $T_2 \in L(Y)$ gelte

$$T_1 A^* = A^* T_2,$$

zudem sei E_γ ein Mollifier aus $\text{Bild}(A^*)$ und Ψ_γ der entsprechende Rekonstruktionskern, d.h. es gelte $A^* \Psi_\gamma = E_\gamma$. Wählen wir einen weiteren Mollifier e_γ als

$$e_\gamma = T_1 E_\gamma,$$

so wird die entsprechende Gleichung $A^*\psi_\gamma = e_\gamma$ durch

$$\psi_\gamma = T_2\Psi_\gamma$$

gelöst.

Beweis. Es gilt dann

$$A^*\psi_\gamma = A^*T_2\Psi_\gamma = T_1A^*\Psi_\gamma = T_1E_\gamma = e_\gamma.$$

□

Wählen wir also z. B. im Falle einer Translationsinvarianz zur Rekonstruktion an der Stelle x den Mollifier $e_\gamma(x, \cdot)$ als Translation eines Mollifiers E_γ , ergibt sich auch der entsprechende Rekonstruktionskern $\psi_\gamma(x, \cdot)$ als Translation des Rekonstruktionskerns Ψ_γ , und nur Ψ_γ muss abgespeichert werden. Je mehr Invarianzen man ausnutzen kann, desto mehr Speicherplatz lässt sich auf diese Weise einsparen.

1.3.2 Die Approximative Inverse der Radon Transformation bei vollständigen Daten

Nun wenden wir die Approximative Inverse auf die Radon Transformation an. Dabei bestimmen wir zunächst für einen rotationssymmetrischen Mollifier e_γ eine Lösung von $R^*\psi_\gamma = e_\gamma$. Mit dieser leiten wir dann durch Ausnutzen der Translationsinvarianz der Radon Transformation eine Formel für $f_\gamma(x)$ her.

Lösen von $R^*\psi_\gamma = e_\gamma$

Bei vollständigen Daten kann man den Rekonstruktionskern mit einer Vorwärtsrechnung aus Re_γ bestimmen (vgl. [5]), indem man die spezielle Struktur der Inversionsformel der FD-RT ausnutzt. Bei eingeschränkten Winkel-daten hingegen ist dies nicht mehr möglich, da bislang noch keine Inversionsformel für die LA-RT bekannt ist. Entsprechende Ergebnisse wären also nicht vergleichbar. Deshalb werden wir uns auf die zweite Möglichkeit beschränken und die Lösung von $R^*\psi_\gamma = e_\gamma$ gemäß (1.28) mit Hilfe der Singulärwertzerlegung bestimmen.

Sei also $e_\gamma \in \text{Bild}(R^*)$ ein rotationssymmetrischer Mollifier, d. h. es gelte $e_\gamma(y) = e_\gamma(|y|)$ oder anders ausgedrückt $e_\gamma = D_1^U e_\gamma$ für jede unitäre Matrix U . Nach den Lemmata 1.2.6 und 1.3.3 gilt dann auch

$$\psi_\gamma(\omega, s) = D_2^U \psi_\gamma(\omega, s) = \psi_\gamma(U\omega, s) \quad \forall U \in O(n),$$

was gerade

$$\psi_\gamma(\omega, s) = \psi_\gamma(s)$$

impliziert. Die Rotationssymmetrie des Mollifiers überträgt sich also auf den Rekonstruktionskern.

Dies sollte sich natürlich auch unabhängig von obiger Überlegung direkt aus der konkreten Rechnung ergeben. Wir beginnen, indem wir die SWZ der Radon Transformation in (1.28) einsetzen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(\omega, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} A(n-1, k_1) \sum_{k_2=1} \sigma_m^{-1} \langle e_\gamma, v_{m, m-2l, k_1, k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} u_{m, m-2l, k_1, k_2}(\omega, s). \end{aligned}$$

Wegen der Rotationssymmetrie des Mollifiers e_γ erhalten wir durch Einführen von Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} &\langle e_\gamma, v_{m, m-2l, k_1, k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \\ &= \int_0^1 e_\gamma(r) \sqrt{2m+n} r^{m-2l+n-1} P_l^{(0, m-2l+n/2-1)}(2r^2-1) dr \\ &\quad \times \int_{S^{n-1}} Y_{m-2l, k_1, k_2}^{(n)} dS^{n-1}. \end{aligned}$$

Nutzen wir die Orthogonalitätsrelation der Kugelflächenfunktionen aus, erhalten wir ($Y_0^{(n)}$ ist konstant, vgl. Bemerkung 1.1.1)

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} Y_{m-2l, k_1, k_2}^{(n)} dS^{n-1} &= \frac{1}{Y_0^{(n)}} \int_{S^{n-1}} Y_{m-2l, k_1, k_2}^{(n)} Y_0^{(n)} dS^{n-1} \\ &= \frac{1}{Y_0^{(n)}} \delta_{m-2l, 0}. \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt liefert also nur für $m = 2l$ einen Beitrag, d.h. m muss gerade sein und $l = \frac{m}{2}$ gelten. Letzteres bedingt aber $k_1 = 0$. Auf Grund von $A(n-1, 0) = 1$ ergibt sich schließlich:

$$\psi_\gamma(\omega, s) = \sum_{\substack{m=0, \\ m \text{ gerade}}}^{\infty} \sigma_m^{-1} \langle e_\gamma, v_{m, 0, 0, 1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} u_{m, 0, 0, 1}(\omega, s) \quad (1.29)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m}^{-1} \langle e_\gamma, v_{2m, 0, 0, 1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} u_{2m, 0, 0, 1}(\omega, s) \quad (1.30)$$

Wegen $\langle e_\gamma, v_{2m,0,0,1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} = \sigma_{2m}^{-1} \langle Re_\gamma, u_{2m,0,0,1} \rangle_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}$ haben wir nun im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, den Ausdruck weiter zu vereinfachen. Welcher Variante man später im konkreten Fall den Vorzug gibt, wird davon abhängen, welches Skalarprodukt sich besser approximieren lässt oder gar in einer geschlossenen Formel analytisch ausgewertet werden kann (vgl. dazu [20]).

1. *Variante:* Wir haben bis auf Einsetzen der konkreten Werte bereits gesehen, dass

$$\langle e_\gamma, v_{2m,0,0,1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} = \frac{\sqrt{4m+n}}{Y_0^{(n)}} \int_0^1 e_\gamma(r) r^{n-1} P_m^{(0,n/2-1)}(2r^2-1) dr$$

gilt. Wir setzen

$$\tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} := \int_0^1 e_\gamma(r) r^{n-1} P_m^{(0,n/2-1)}(2r^2-1) dr.$$

Beachten wir nun noch, dass $u_{2m,0,0,1}(\omega, s) = d_{2m} C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) w_n(s) Y_0^{(n)}(\omega)$ wegen $Y_0^{(n)}(\omega) = |S^{n-1}|^{-1/2}$ nicht von ω abhängt, erhalten wir als Zwischenergebnis

$$\psi_\gamma(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m}^{-1} \sqrt{4m+n} \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} d_{2m} C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) w_n(s).$$

Der Rekonstruktionskern erweist sich also wie erwartet als rotationssymmetrisch. Die in der Berechnung des Rekonstruktionskerns auftauchenden Konstanten lassen sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned} & \sigma_{2m}^{-1} \sqrt{4m+n} d_{2m} \\ &= \sqrt{\frac{(2m+n-1)!}{(2m)! \pi^{n-1} 2^n}} 2\sqrt{m+n/4} \sqrt{\frac{2^{n-1} (2m)! 2(m+n/4)}{\pi (2m+n-1)!}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} (m+n/4) \\ &= 4 |S^{n-1}|^{-1} (m+n/4), \quad \text{vgl. (B.8),} \end{aligned} \tag{1.31}$$

so dass sich schlussendlich

$$\psi_\gamma(s) = \frac{4}{|S^{n-1}|} \sum_{m=0}^{\infty} (m+n/4) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) w_n(s)$$

ergibt.

2. Variante: Hier haben wir

$$\begin{aligned} \langle e_\gamma, v_{2m,0,0,1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} &= \sigma_{2m}^{-1} \langle e_\gamma, R^* u_{2m,0,0,1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \\ &= \sigma_{2m}^{-1} \langle Re_\gamma, u_{2m,0,0,1} \rangle_{L^2(Z^n, w_n^{-1})}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist der Mollifier e_γ rotationssymmetrisch. Folglich hängt seine Radon Transformierte Re_γ nur von s und nicht von ω ab und wir erhalten

$$\begin{aligned} &\langle e_\gamma, v_{2m,0,0,1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \\ &= \sigma_{2m}^{-1} \underbrace{\int_{S^{n-1}} Y_0^{(n)} dS^{n-1}}_{=Y_0^{(n)-1}} \int_{-1}^1 Re_\gamma(s) d_{2m} C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) w_n(s) w_n^{-1}(s) ds. \end{aligned}$$

Für Re_γ reduziert sich $Rf(-\omega, -s) = Rf(\omega, s)$ auf Grund der Winkelunabhängigkeit auf $Re_\gamma(-s) = Re_\gamma(s)$; Re_γ ist also gerade. Da auch $C_{2m}^{\frac{n}{2}}$ gerade ist (s. (A.8)), gilt

$$\int_{-1}^1 Re_\gamma(s) C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) ds = 2 \int_0^1 Re_\gamma(s) C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) ds.$$

Wir kürzen auch hier das auftretende Integral ab und setzen

$$I_{2m,\gamma}^{(n)} := \int_0^1 Re_\gamma(s) C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) ds.$$

Damit erhalten wir das Zwischenergebnis

$$\psi_\gamma(s) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m}^{-2} I_{2m,\gamma}^{(n)} d_{2m}^2 C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) w_n(s).$$

Die Konstanten vereinfachen sich hier zu

$$\begin{aligned} 2 \sigma_{2m}^{-2} d_{2m}^2 &= 2 \frac{(2m+n-1)!}{(2m)! \pi^{n-1} 2^n} \frac{2^{n-1}}{\pi} \frac{(2m)! 2(m+n/4) \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(2m+n-1)!} \\ &= 2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^n} (m+n/4) \\ &= 8 |S^{n-1}|^{-2} (m+n/4), \quad \text{vgl. (B.8),} \end{aligned} \tag{1.32}$$

so dass sich insgesamt

$$\psi_\gamma(s) = \frac{8}{|S^{n-1}|^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m+n/4) I_{2m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) w_n(s)$$

ergibt.

Wir fassen die Ergebnisse der Übersichtlichkeit halber zusammen in folgendem

Lemma 1.3.4.

Für einen rotationssymmetrischen Mollifier $e_\gamma \in \text{Bild}(R^*)$ lässt sich der Rekonstruktionskern ψ_γ (d. h. die Lösung von $R^*\psi_\gamma = e_\gamma$) darstellen als

$$\psi_\gamma(s) = \frac{4}{|S^{n-1}|} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) w_n(s) \quad (1.33)$$

$$\text{bzw. } \psi_\gamma(s) = \frac{8}{|S^{n-1}|^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) I_{2m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) w_n(s), \quad (1.34)$$

wobei $\tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)}$ und $I_{2m,\gamma}^{(n)}$ definiert sind als

$$\tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} := \int_0^1 e_\gamma(r) P_m^{(0,n/2-1)}(2r^2 - 1) r^{n-1} dr \quad (1.35)$$

$$I_{2m,\gamma}^{(n)} := \int_0^1 Re_\gamma(s) C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) ds. \quad (1.36)$$

□

Beispiele 1.3.5.

Für die in der Praxis relevanten Spezialfälle $n = 2, 3, 4$ erhalten wir durch Einsetzen:

(i) $n = 2$: Es ergibt sich

$$\psi_\gamma(s) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 1/2) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(2)} U_{2m}(s) w_2(s) \quad (1.37)$$

$$\text{mit } \tilde{I}_{m,\gamma}^{(2)} = \int_0^1 e_\gamma(r) P_m(2r^2 - 1) r dr,$$

sowie

$$\psi_\gamma(s) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 1/2) I_{2m,\gamma}^{(2)} U_{2m}(s) w_2(s) \quad (1.38)$$

$$\text{mit } I_{2m,\gamma}^{(2)} = \int_0^1 Re_\gamma(s) U_{2m}(s) ds,$$

wobei U_m die *Tschebyscheff-Polynome 2. Art* bezeichne, s. Anhang A.5. Darstellung (1.37) entspricht der von LOUIS in [20], wenn man beachtet, dass dort α_{2m} noch den Faktor $(2(2m+1))^{1/2}$ enthält. Dagegen entspricht (1.38) gerade der von DIETZ angegebenen Formel (s. [5], Korollar 1.3.6.a).

(ii) $n = 3$: Hier erhalten wir:

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(s) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 3/4) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(3)} C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) w_3(s) \\ \text{mit} \quad \tilde{I}_{m,\gamma}^{(3)} &= \int_0^1 e_\gamma(r) P_m^{(0,1/2)}(2r^2 - 1) r^2 dr, \end{aligned} \quad (1.39)$$

sowie

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(s) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 3/4) I_{2m,\gamma}^{(3)} C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) w_3(s) \\ \text{mit} \quad I_{2m,\gamma}^{(3)} &= \int_0^1 Re_\gamma(s) C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) ds; \end{aligned} \quad (1.40)$$

(1.40) entspricht dabei wieder [5], Korollar 1.3.6.b.

(iii) $n = 4$ ergibt schließlich:

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(s) &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 1) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(4)} C_{2m}^2(s) w_4(s) \\ \text{mit} \quad \tilde{I}_{m,\gamma}^{(4)} &= \int_0^1 e_\gamma(r) P_m^{(0,1)}(2r^2 - 1) r^3 dr, \end{aligned} \quad (1.41)$$

sowie

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(s) &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 1) I_{2m,\gamma}^{(4)} C_{2m}^2(s) w_4(s) \\ \text{mit} \quad I_{2m,\gamma}^{(4)} &= \int_0^1 Re_\gamma(s) C_{2m}^2(s) ds. \end{aligned} \quad (1.42)$$

□

Rekonstruktionsformel

Gehen wir nun davon aus, dass wir wie oben dargestellt einen (rotations-symmetrischen) Rekonstruktionskern ψ_γ^0 für einen rotations-symmetrischen Mollifier $e_\gamma^0 \in \text{Bild}(R^*) \cap C^\infty(\Omega^n)$ bestimmt haben. Um noch die Translationsinvarianz der Radon Transformation ausnutzen zu können, definieren wir mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.2.2 den Mollifier $e_\gamma(x, \cdot)$ für die Rekonstruktion an der Stelle $x \in \Omega^n$ als

$$e_\gamma(x, \cdot) := T_1^x e_\gamma^0. \quad (1.43)$$

Die Lemmata 1.2.5 und 1.3.3 liefern dann, dass

$$\psi_\gamma(x; \omega, s) = T_2^x \psi_\gamma^0(s) \quad (1.44)$$

$$= 2^{-n} \psi_\gamma^0\left(\frac{s - x^\top \omega}{2}\right) w_n^{-1}\left(\frac{s - x^\top \omega}{2}\right) w_n(s) \quad (1.45)$$

die Gleichung $R^* \psi_\gamma(x; \cdot) = e_\gamma(x, \cdot)$ löst. Die Rekonstruktionsformel ergibt sich nun aus dem Skalarprodukt der Daten g und $\psi_\gamma(x; \cdot)$:

$$\begin{aligned} f_\gamma(x) &= \langle g, \psi_\gamma(x; \cdot) \rangle_{L^2(Z^n, w_n^{-1})} \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \psi_\gamma(x; \omega, s) w_n^{-1}(s) ds d\omega \\ &= 2^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \psi_\gamma^0\left(\frac{s - x^\top \omega}{2}\right) w_n^{-1}\left(\frac{s - x^\top \omega}{2}\right) ds d\omega. \end{aligned}$$

Da ψ_γ^0 den Faktor w_n beinhaltet (vgl. Lemma 1.3.4), erhalten wir mit

$$\tilde{\psi}_\gamma^0(s) := \frac{4}{|S^{n-1}|} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) \quad (1.46)$$

$$= \frac{8}{|S^{n-1}|2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) I_{2m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s), \quad (1.47)$$

die Darstellung

$$f_\gamma(x) = 2^{-n} \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_\gamma^0\left(\frac{s - x^\top \omega}{2}\right) ds d\omega. \quad (1.48)$$

Definieren wir nun noch

$$S_+^{n-1} := \{\omega \in S^{n-1} \mid \omega_n > 0\} \quad (1.49)$$

$$\text{bzw. } S_-^{n-1} := \{\omega \in S^{n-1} \mid \omega_n < 0\}, \quad (1.50)$$

sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
& \int_{S_-^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_\gamma^0 \left(\frac{s - x^\top \omega}{2} \right) ds d\omega \\
&= \int_{S_+^{n-1}} \int_{-1}^1 g(-\omega, s) \tilde{\psi}_\gamma^0 \left(\frac{s + x^\top \omega}{2} \right) ds d\omega \\
&= \int_{S_+^{n-1}} \int_{-1}^1 g(-\omega, -s) \tilde{\psi}_\gamma^0 \left(\frac{-(s - x^\top \omega)}{2} \right) ds d\omega \\
&= \int_{S_+^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_\gamma^0 \left(\frac{s - x^\top \omega}{2} \right) ds d\omega
\end{aligned}$$

gilt, wobei wir im letzten Schritt die Redundanz der Daten und die gerade Parität von $\tilde{\psi}_\gamma^0$ ausgenutzt haben. Also können wir uns auf die Integration über die Oberfläche einer Kugelhälfte beschränken und erhalten

$$f_\gamma(x) = 2^{1-n} \int_{S_+^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_\gamma^0 \left(\frac{s - x^\top \omega}{2} \right) ds d\omega.$$

Damit haben wir gezeigt:

Satz 1.3.6.

Sei $e_\gamma^0 \in \text{Bild}(R^*) \cap C^\infty(\Omega^n)$ ein rotationssymmetrischer Mollifier und $\tilde{\psi}_\gamma^0$ der zugehörige Rekonstruktionskern gemäß (1.46). Für die zur Rekonstruktion an der Stelle x benutzten Mollifier gelte $e_\gamma(x, \cdot) = T_1^x e_\gamma^0$.

Dann lässt sich die Approximative Inverse S_γ der Radon Transformation in der Form

$$S_\gamma g(x) = f_\gamma(x) = 2^{1-n} \int_{S_+^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_\gamma^0 \left(\frac{s - x^\top \omega}{2} \right) ds d\omega \quad (1.51)$$

darstellen. □

Kapitel 2

Limited-Angle in n Dimensionen

Ausgangspunkt für die Untersuchungen in diesem Kapitel war ursprünglich der Fall der dreidimensionalen Limited-Angle Radon Transformation, bei der die Daten bzgl. der Winkelvariablen θ eingeschränkt sind. Bald wurde jedoch klar, dass sich dieser Fall relativ problemlos auf n Dimensionen verallgemeinern lässt, so dass wir nun zunächst das Problem in dieser Allgemeinheit betrachten wollen und die entsprechenden Ergebnisse am Ende für $n = 3$ und $n = 4$ konkretisieren werden.

2.1 Definitionen

Wir nehmen an, dass die Daten $g(\omega, s)$ lediglich bzgl. der Winkelvariablen θ_1 eingeschränkt sind, also vorhanden sind für alle $(\omega, s) \in Z_\vartheta^n$, $n \geq 3$, wobei

$$Z_\vartheta^n := S_\vartheta^{n-1} \times [-1, 1], \quad \vartheta \in [0, \pi/2], \quad (2.1)$$

gilt und S_ϑ^{n-1} definiert ist als

$$S_\vartheta^{n-1} := \left\{ \omega(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) \in S^{n-1} \mid \theta_1 \in \left[\frac{\pi}{2} - \vartheta, \frac{\pi}{2} + \vartheta \right] \right\}. \quad (2.2)$$

Je kleiner ϑ ist, desto mehr Daten fehlen also.

Die entsprechende spezielle Limited-Angle Radon Transformation bezeichnen wir mit ($n \geq 3$)

$$R_\vartheta : L^2(\Omega^n) \longrightarrow L^2(Z_\vartheta^n, w_n^{-1}), \quad (2.3)$$

und nennen R_ϑ die θ_1 -Limited-Angle Radon Transformation (θ_1 -LA-RT).

Bemerkungen 2.1.1 (Struktur der fehlenden Daten).

1) Die Symmetrie des fehlenden Datenbereichs um $\frac{\pi}{2}$ ist kein Zufall, sondern

sogar notwendig und entspricht der bereits in Abschnitt 1.2.4 angesprochenen Punktsymmetrie der Winkelverteilung:

Denn wegen $Rf(-\omega, -s) = Rf(\omega, s)$ (Redundanz der Daten, s. (1.16)) und der sonstigen Vollständigkeit der Daten wären unsymmetrische Datenlücken (d. h. solche, für die zwar nicht die Daten $g(\omega, \cdot)$, wohl aber die entsprechenden $g(-\omega, \cdot)$ vorhanden wären) nur scheinbare und könnten durch die übrigen Daten gefüllt werden, vgl. auch Lemma B.2.1.

2) Eine andere Möglichkeit wäre anzunehmen, dass die Daten für θ_1 in $[\frac{\pi}{2} - \vartheta, \frac{\pi}{2} + \vartheta]$ fehlen und in $[0, \frac{\pi}{2} - \vartheta \cup \frac{\pi}{2} + \vartheta, \pi]$ vorhanden sind. In diesem Fall würden mit wachsendem ϑ mehr Daten fehlen. Abgesehen von der unterschiedlichen Interpretation von ϑ sind die sonstigen Auswirkungen äußerst gering, vgl. Bemerkung 2.2.1 und den Beweis von Korollar 2.2.4.

2.2 Singulärwertzerlegung

In diesem Abschnitt wollen wir die SWZ der oben definierten Limited-Angle Radon Transformation R_ϑ bestimmen. Diese wird uns erlauben, die Operatorgleichung $R_\vartheta^* \psi_\gamma = e_\gamma$ zur Bestimmung des Rekonstruktionskerns ψ_γ durch Auswerten der Pseudoinversen R_ϑ^{*+} zu lösen. Die bei der FD-RT mögliche Variante, den Rekonstruktionskern über eine Inversionsformel für R zu bestimmen, existiert hier nicht, weil eine solche bislang für R_ϑ nicht bekannt ist.

Die Idee besteht darin, analog zum zweidimensionalen Fall (vgl. [16]) aus der SWZ der vollständigen Radon Transformation R eine SWZ für die Limited-Angle Radon Transformation R_ϑ herzuleiten. Da sich durch den Wechsel von $L^2(Z^n, w_n^{-1})$ zu $L^2(Z_\vartheta^n, w_n^{-1})$ beim Übergang von R auf R_ϑ insbesondere der adjungierte Operator ändert (vgl. (1.23)), sind die singulären Funktionen $v_{mlk_1k_2}$ aus Satz 1.2.7 i. Allg. keine Eigenfunktionen von $R_\vartheta^* R_\vartheta$. Allerdings lassen sich solche aus ihnen konstruieren:

Da die $v_{mlk_1k_2}$ eine Basis des $L^2(\Omega^n)$ bilden (s. [15]) und R_ϑ^* nach $L^2(\Omega^n)$ abbildet, lässt sich $R_\vartheta^* R_\vartheta v_{mlk_1k_2}$ nach den $v_{m'l'k'_1k'_2}$ entwickeln. Wir berechnen den Entwicklungskoeffizienten, wobei wir die angepasste Indizierung (vgl. Bemerkung 1.2.8) verwenden und der Übersichtlichkeit halber die Dimensionenkennzeichnung weglassen. Unser Ziel ist, Orthogonalität bzgl. aller Indizes zu erreichen, weil dies äquivalent zur Konstruktion einer Eigenfunktion von

$R_\vartheta^* R_\vartheta$ ist:

$$\begin{aligned}
& \langle R_\vartheta^* R_\vartheta v_{m,m-2l,k_1,k_2}, v_{m',m'-2l',k'_1,k'_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \\
&= \langle R_\vartheta v_{m,m-2l,k_1,k_2}, R_\vartheta v_{m',m'-2l',k'_1,k'_2} \rangle_{L^2(Z_\vartheta^n, w_n^{-1})} \\
&= \sigma_m \sigma_{m'} \langle u_{m,m-2l,k_1,k_2}, u_{m',m'-2l',k'_1,k'_2} \rangle_{L^2(Z_\vartheta^n, w_n^{-1})}, \quad \text{denn } R_\vartheta f|_{Z_\vartheta^n} = Rf|_{Z_\vartheta^n} \\
&= \sigma_m \sigma_{m'} d_m d_{m'} \underbrace{\int_{-1}^1 C_m^{\frac{n}{2}}(s) C_{m'}^{\frac{n}{2}}(s) w(s) ds}_{= \frac{\delta_{mm'}}{d_m^2}} \int_{S_\vartheta^{n-1}} Y_{m-2l,k_1,k_2}^{(n)} \overline{Y_{m'-2l',k'_1,k'_2}^{(n)}} dS^{n-1} \\
&= \delta_{mm'} \sigma_m^2 \int_{S_\vartheta^{n-1}} Y_{m-2l,k_1,k_2}^{(n)} \overline{Y_{m-2l',k'_1,k'_2}^{(n)}} dS^{n-1} \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Die Orthogonalität bzgl. des ersten Indexes bleibt also erhalten. Bis hierher haben wir noch keinen Gebrauch von der genauen Form der Winkeleinschränkung gemacht, so dass dieses Ergebnis unabhängig davon auch für andere Limited-Angle Radon Transformationen richtig bleibt.

Setzen wir nun (1.6) und (2.2) ein, erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned}
& \langle R_\vartheta^* R_\vartheta v_{m,m-2l,k_1,k_2}, v_{m',m'-2l',k'_1,k'_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \\
&= \delta_{mm'} \sigma_m^2 c_{m-2l,k_1}^{(n)} c_{m-2l',k'_1}^{(n)} \\
&\quad \times \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} P_{m-2l,k_1}^{(n)}(\cos \theta_1) P_{m-2l',k'_1}^{(n)}(\cos \theta_1) \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \\
&\quad \times \underbrace{\int_{S^{n-2}} Y_{k_1 k_2}^{(n-1)} \overline{Y_{k'_1 k'_2}^{(n-1)}} dS^{n-2}}_{= \delta_{k_1 k'_1} \delta_{k_2 k'_2}} \\
&= \delta_{mm'} \delta_{k_1 k'_1} \delta_{k_2 k'_2} \sigma_m^2 c_{m-2l,k_1}^{(n)} c_{m-2l',k_1}^{(n)} \\
&\quad \times \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} P_{m-2l,k_1}^{(n)}(\cos \theta) P_{m-2l',k_1}^{(n)}(\cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta
\end{aligned}$$

Unabhängig von der betrachteten Dimension $n \geq 3$ bleibt also lediglich ein Index übrig, bzgl. dem noch orthogonalisiert werden muss. Zunächst formen wir das Integral weiter um. Die Substitution $x := \cos \theta$, $d\theta = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, führt

zusammen mit der Anwendung des Additionstheorems für den Cosinus auf

$$\begin{aligned}
 I &:= \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} P_{m-2l,k_1}^{(n)}(\cos \theta) P_{m-2l',k_1}^{(n)}(\cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta \\
 &= \int_{-\sin \vartheta}^{\sin \vartheta} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} P_{m-2l,k_1}^{(n)}(x) P_{m-2l',k_1}^{(n)}(x) dx \\
 &\stackrel{(1.3)}{=} \int_{-\sin \vartheta}^{\sin \vartheta} (1-x^2)^{k_1+\frac{n-3}{2}} C_{m-2l-k_1}^{k_1+\frac{n-2}{2}}(x) C_{m-2l'-k_1}^{k_1+\frac{n-2}{2}}(x) dx. \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Nutzt man noch aus, dass der Integrand eine gerade Funktion ist (vgl. (A.8)), erhält man schließlich

$$I = 2 \int_0^{\sin \vartheta} (1-x^2)^{k_1+\frac{n-3}{2}} C_{m-2l-k_1}^{k_1+\frac{n-2}{2}}(x) C_{m-2l'-k_1}^{k_1+\frac{n-2}{2}}(x) dx.$$

Definieren wir nun für $n \geq 3$ die reelle $(\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor + 1) \times (\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor + 1)$ Matrix

$$A(n, \vartheta; m, k_1) := (a_{ll'})_{ll'}, \quad l, l' = 0, \dots, \left\lfloor \frac{m-k_1}{2} \right\rfloor, \quad (2.6)$$

durch

$$\begin{aligned}
 a_{ll'} &:= 2 c_{m-2l,k_1}^{(n)} c_{m-2l',k_1}^{(n)} \\
 &\quad \times \int_0^{\sin \vartheta} (1-x^2)^{k_1+\frac{n-3}{2}} C_{m-2l-k_1}^{k_1+\frac{n-2}{2}}(x) C_{m-2l'-k_1}^{k_1+\frac{n-2}{2}}(x) dx, \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
 &\left\langle R_{\vartheta}^* R_{\vartheta} v_{m,m-2l,k_1,k_2}, v_{m',m'-2l',k_1',k_2'} \right\rangle_{L^2(\Omega^n)} \\
 &= \sigma_m^2 \delta_{mm'} \delta_{k_1 k_1'} \delta_{k_2 k_2'} a_{ll'}. \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Bemerkungen 2.2.1.

1) Hier offenbart sich schließlich der Nutzen der umindizierten SWZ: Da durch, dass l nicht in Zweierschritten springt, sondern normal durchgezählt werden kann, können wir damit gleichzeitig die Einträge der Matrix indizieren. Genauso ist nun klar, dass wir l in Abhängigkeit von k_1 indizieren, weil in der Matrix $A(n, \vartheta; m, k_1)$ zu festem k_1 die Einträge zugehöriger Paare (l, l') stehen.

2) Die Matrix $A(n, \vartheta; m, k_1)$ hängt nicht von k_2 ab, bei festem m und k_1 kann also unabhängig vom jeweiligen konkreten Wert von k_2 die gleiche Matrix verwendet werden.

3) Würden die Daten nur für $[0, \frac{\pi}{2} - \vartheta] \cup [\frac{\pi}{2} + \vartheta, \pi]$ vorliegen, erhielten wir wegen $\int_0^{\pi/2-\vartheta} + \int_{\pi/2+\vartheta}^{\pi} = \int_0^{\pi} - \int_{\pi/2-\vartheta}^{\pi/2+\vartheta}$ an Stelle von $A(n, \vartheta; m, k_1)$ die Matrix $\text{Id} - A(n, \vartheta; m, k_1)$.

Offensichtlich ist die Matrix $A(n, \vartheta; m, k_1)$ symmetrisch. Daher existieren Eigenvektoren $d_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)$, $0 \leq \mu \leq \lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor$, von $A(n, \vartheta; m, k_1)$, die eine Orthonormalbasis (ONB) des $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{m-k_1+2}{2} \rfloor}$ bilden. Die zugehörigen reellen Eigenwerte bezeichnen wir mit $\lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)$. Bzgl. der ONB der Eigenvektoren hat die Matrix $A(n, \vartheta; m, k_1)$ Diagonalgestalt. Damit ist prinzipiell der letzte noch fehlende Schritt zur Berechnung der Eigenfunktionen von $R_\vartheta^* R_\vartheta$ getan. Bevor wir nun die SWZ der LA-RT angeben, notieren wir noch die

Bemerkung 2.2.2. Die Eigenwerte λ_μ der Matrix $A(n, \vartheta; m, k_1)$ werden sich im Folgenden schnell als nichtnegativ herausstellen. Tatsächlich lassen die späteren Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 vermuten, dass für sinnvolle Winkelschränkungen (d. h. abgesehen von den Fällen vollständig vorhandener oder komplett fehlender Winkeldaten) die Eigenwerte analog zum Fall der 2D-LA-RT sogar echt zwischen 0 und 1 liegen. Den Beweis einer solchen Vermutung müssen wir hier allerdings schuldig bleiben, eine direkte theoretische Eigenwert- oder wenigstens Regularitätsanalyse der Matrix erscheint angesichts der Definition ihrer Einträge durch Integrale aussichtslos bzw. würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.¹

Dem möglichen Fall $\lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta) = 0$ müssen wir insbesondere bei der Formulierung der SWZ Rechnung tragen:

Satz 2.2.3 (SWZ der θ_1 -LA-RT).

Für $n \geq 3$ bezeichne $v_{m, m-2l, k_1, k_2}^{(n)}$, $u_{m, m-2l, k_1, k_2}^{(n)}$ die singulären Funktionen und $\sigma_m^{(n)}$ die Singulärwerte aus Satz 1.2.7. Mit $\lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)$ und $d_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)$ bezeichnen wir die Eigenwerte bzw. orthonormierten Eigenvektoren der in (2.7) definierten Matrix $A(n, \vartheta; m, k_1)$.

Wir setzen

$$f_{m, k_1, \mu, k_2}^{(n)}(x) := \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} d_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)_l v_{m, m-2l, k_1, k_2}^{(n)}(x) \quad (2.9)$$

und im Fall $\lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta) \neq 0$

$$g_{m, k_1, \mu, k_2}^{(n)}(\omega, s) := \lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)^{-1/2} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} d_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)_l u_{m, m-2l, k_1, k_2}^{(n)}(\omega, s) \quad (2.10)$$

$$\tau_{m, k_1, \mu}^{(n)} := \sigma_m^{(n)} \lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)^{1/2}. \quad (2.11)$$

¹Im Fall der 2D-LA-RT hat die auftretende Matrix eine Toeplitz-Struktur und ist bereits von SLEPIAN in [25] intensiv studiert worden, so dass man mit dessen Ergebnissen den Fall verschwindender Eigenwerte ausschließen kann, vgl. [16].

Dann bildet $\left\{ f_{m,k_1,\mu,k_2}^{(n)}, g_{m,k_1,\mu,k_2}^{(n)}, \tau_{m,k_1,\mu}^{(n)} \right\}$ für die Indizes $m \geq 0, 0 \leq k_1 \leq m, 0 \leq \mu \leq \lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor, k_2 = 1, \dots, A(n-1, k_1)$, für die $\lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta) \neq 0$ gilt, eine normierte SWZ von

$$R_\vartheta : L^2(\Omega^n) \longrightarrow L^2(Z_\vartheta^n, w_n^{-1}).$$

Beweis.

Wir zeigen zunächst, dass alle f_{m,k_1,μ,k_2} (inklusive derjenigen, denen ein Eigenwert $\lambda_\mu = 0$ entspricht) ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) von $L^2(\Omega^n)$ bilden:

Orthonormalität:

Es ist

$$\begin{aligned} & \langle f_{m,k_1,\mu,k_2}, f_{m',k'_1,\mu',k'_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} \sum_{l'=0}^{\lfloor \frac{m'-k'_1}{2} \rfloor} d_\mu(m, k_1; \vartheta)_l d_{\mu'}(m', k'_1; \vartheta)_{l'} \\ & \quad \times \underbrace{\langle v_{m,m-2l,k_1,k_2}, v_{m',m'-2l',k'_1,k'_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)}}_{=\delta_{mm'}\delta_{ll'}\delta_{k_1k'_1}\delta_{k_2k'_2}} \\ &= \delta_{mm'}\delta_{k_1k'_1}\delta_{k_2k'_2} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} d_\mu(m, k_1; \vartheta)_l d_{\mu'}(m, k_1; \vartheta)_l \\ &= \delta_{mm'}\delta_{k_1k'_1}\delta_{k_2k'_2} d_\mu^\top d_{\mu'} \\ &= \delta_{mm'}\delta_{k_1k'_1}\delta_{k_2k'_2}\delta_{\mu\mu'}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass die d_μ nach Definition eine ONB des $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{m-k_1+2}{2} \rfloor}$ bilden.

Vollständigkeit:

Sei $h \in L^2(\Omega^n)$ gegeben mit

$$\begin{aligned} \langle h, f_{m,k_1,\mu,k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} &= 0 \quad \forall m \geq 0, 0 \leq k_1 \leq m, 0 \leq \mu \leq \left\lfloor \frac{m-k_1}{2} \right\rfloor, \\ & k_2 = 1, \dots, A(n-1, k_1). \end{aligned}$$

Wir haben nachzuweisen, dass $h = 0$ gilt. Indem wir die Voraussetzung

$$\langle h, f_{m,k_1,\mu,k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} d_\mu(m, k_1; \vartheta)_l \langle h, v_{m,m-2l,k_1,k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} = 0$$

bei festem m und k_1 für alle μ zusammenfassen, können wir diese auch schreiben als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d_0^\top(m, k_1; \vartheta) \\ \vdots \\ d_{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor}^\top(m, k_1; \vartheta) \end{pmatrix}}_{=: D_{mk_1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \langle h, v_{m,m,k_1,k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \\ \vdots \\ \langle h, v_{m,m-2\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor, k_1, k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \end{pmatrix}}_{=: \tilde{h}_{mk_1}} = 0.$$

Da die d_μ eine ONB des $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{m-k_1+2}{2} \rfloor}$ bilden, ist D_{mk_1} eine orthogonale Matrix, also insbesondere invertierbar. Folglich hat das obige homogene lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung $\tilde{h}_{mk_1} = 0$. Weil dies für alle m und k_1 gilt, bedeutet das gerade, dass

$$\langle h, v_{m,m-2l,k_1,k_2} \rangle = 0 \quad \forall m \geq 0, 0 \leq k_1 \leq m, 0 \leq \mu \leq \left\lfloor \frac{m-k_1}{2} \right\rfloor, \\ k_2 = 1, \dots, A(n-1, k_1)$$

gilt. Da die $v_{m,m-2l,k_1,k_2}$ ein VONS von $\text{Kern}(R)^\perp = L^2(\Omega^n)$ sind, folgt daraus gerade $h = 0$.

Nun können wir zeigen, dass die f_{m,k_1,μ,k_2} Eigenfunktionen von $R_\vartheta^* R_\vartheta$ sind: Da die f_{m,k_1,μ,k_2} ein VONS von $L^2(\Omega^n)$ bilden, können wir $R_\vartheta^* R_\vartheta f_{m,k_1,\mu,k_2}$ bzgl. der f_{m',k'_1,μ',k'_2} entwickeln. Der Entwicklungskoeffizient ergibt sich zu

$$\begin{aligned} & \langle R_\vartheta^* R_\vartheta f_{m,k_1,\mu,k_2}, f_{m',k'_1,\mu',k'_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} \sum_{l'=0}^{\lfloor \frac{m'-k'_1}{2} \rfloor} d_\mu(m, k_1; \vartheta)_l d_{\mu'}(m', k'_1; \vartheta)_{l'} \\ & \quad \times \underbrace{\langle R_\vartheta^* R_\vartheta v_{m,m-2l,k_1,k_2}, v_{m',m'-2l',k'_1,k'_2} \rangle}_{\stackrel{(2.8)}{=} \sigma_m^2 \delta_{mm'} \delta_{k_1 k'_1} \delta_{k_2 k'_2} a_{ll'}} \\ &= \sigma_m^2 \delta_{mm'} \delta_{k_1 k'_1} \delta_{k_2 k'_2} \underbrace{\sum_{l,l'=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} d_\mu(m, k_1; \vartheta)_l a_{ll'} d_{\mu'}(m, k_1; \vartheta)_{l'}}_{= d_\mu^\top A d_{\mu'} = \lambda_\mu \delta_{\mu\mu'}} \\ &= \sigma_m^2 \lambda_\mu(m, k_1; \vartheta) \delta_{mm'} \delta_{k_1 k'_1} \delta_{\mu\mu'} \delta_{k_2 k'_2}; \end{aligned}$$

also ist

$$R_\vartheta^* R_\vartheta f_{m,k_1,\mu,k_2} = \sigma_m^2 \lambda_\mu(m, k_1; \vartheta) f_{m,k_1,\mu,k_2}.$$

Weil Eigenwerte eines positiven Operators zumindest nichtnegativ und die σ_m positiv sind, sind auch die $\lambda_\mu(m, k_1; \vartheta)$ nichtnegativ. Da wir $\lambda_\mu(m, k_1; \vartheta) \neq 0$ vorausgesetzt haben, folgt wegen $R_\vartheta v_{m, m-2l, k_1, k_2} = \sigma_m u_{m, m-2l, k_1, k_2}$ sofort die Beziehung

$$g_{m, k_1, \mu, k_2} = \frac{R_\vartheta f_{m, k_1, \mu, k_2}}{\sigma_m \lambda_\mu(m, k_1; \vartheta)^{1/2}}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} R_\vartheta f_{m, k_1, \mu, k_2} &= \tau_{m, k_1, \mu} g_{m, k_1, \mu, k_2} \\ R_\vartheta^* g_{m, k_1, \mu, k_2} &= \tau_{m, k_1, \mu} f_{m, k_1, \mu, k_2}. \end{aligned}$$

Durch die Forderung $\lambda_\mu(m, k_1; \vartheta) \neq 0$ schließen wir im angegebenen singulären System gerade diejenigen f_{m, k_1, μ, k_2} aus, die in $\text{Kern}(R_\vartheta^* R_\vartheta) = \text{Kern}(R_\vartheta)$ liegen. Wegen $L^2(\Omega^n) = \text{Kern}(R_\vartheta) \oplus \text{Kern}(R_\vartheta)^\perp$ bilden die übrigen f_{m, k_1, μ, k_2} dann wie gewünscht ein VONS von $\text{Kern}(R_\vartheta)^\perp$. Damit ist alles bewiesen. \square

Auch wenn wir nicht $\lambda_\mu > 0$ beweisen können, lässt sich aus dem Beweis des Satzes doch immerhin folgern:

Korollar 2.2.4.

Für die Eigenwerte $\lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)$ der Matrizen $A(n, \vartheta; m, k_1)$ gilt

$$0 \leq \lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta) \leq 1. \quad (2.12)$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.2.3 gezeigt wurde, sind die $\lambda_\mu(m, k_1; \vartheta)$ als Eigenwerte eines positiven Operators nichtnegativ (z. B. [28], VI.4.4). Verwendet man die alternative Datenverteilung, erhält man gemäß Bemerkung 2.2.1 statt $A(n, \vartheta; m, k_1)$ die Matrix $\text{Id} - A(n, \vartheta; m, k_1)$ und dementsprechend $\sigma_m^2 (1 - \lambda_\mu(m, k_1; \vartheta))$ als Eigenwerte eines positiven Operators $R_\vartheta'^* R_\vartheta'$. Daraus folgt nun, dass der Ausdruck $(1 - \lambda_\mu(m, k_1; \vartheta))$ nichtnegativ ist, was aber gerade $\lambda_\mu(m, k_1; \vartheta) \leq 1$ bedeutet. \square

Könnte man den Fall $\lambda_\mu = 0$ ausschließen, hätte man damit auch die Injektivität von R_ϑ gezeigt, weil dann keine der Funktionen $f_{m, k_1, \mu}$ im Kern läge und folglich $\text{Kern}(R_\vartheta)^\perp = L^2(\Omega^n)$, also $\text{Kern}(R_\vartheta) = \{0\}$ gälte.

Bei der Berechnung der Pseudoinversen mittels der SWZ treten die Kehrwerte der Singulärwerte auf. Insofern ist es wichtig zu wissen, wie schnell die singulären Werte gegen 0 fallen, weil man dementsprechend regularisieren muss. Hier lässt sich zum Abklingverhalten der $\tau_{m, k_1, \mu}$ zunächst nicht viel sagen, da wir das Verhalten der Eigenwerte $\lambda_\mu^{(n)}(m, k_1; \vartheta)$ noch nicht hinreichend genau kennen. Allerdings können wir schon jetzt folgende Beobachtung machen:

Für den Fall vollständiger Daten, d. h. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ergibt (2.7) unter Beachtung von (1.4) und (A.7) gerade

$$a_{ll'} = \delta_{ll'}.$$

Die singulären Funktionen v_{mlk} sind dann also bereits Eigenfunktionen von $R_\vartheta^* R_\vartheta$.² Die Eigenwerte sind dabei alle 1 und haben keinen Einfluss auf das Abklingverhalten, das allein durch die $\sigma_m = \tau_{m,k_1,\mu}$ bestimmt wird. Das ist natürlich klar, weil es in diesem künstlichen Fall keinen Unterschied zwischen R_ϑ und R gibt.

Umgekehrt, wenn wir den theoretisch schlechtestmöglichen Fall überhaupt keiner Daten, d. h. $\vartheta = 0$, betrachten,³ ergibt sich sofort

$$a_{ll'} = 0.$$

Alle Eigenwerte sind also 0; Kehrwertbildung und Rekonstruktion sind unmöglich. Alles andere wäre aber auch eine Überraschung gewesen: ohne jeglichen Daten lässt sich nur schwerlich etwas rekonstruieren.

Ausgehend von diesen Extremfällen und Korollar 2.2.4 können wir vermuten, dass sich die Eigenwerte der Matrix $A(n, \vartheta; m, k_1)$ für $0 < \vartheta < \pi/2$ wie folgt verhalten: Je mehr Daten vorhanden sind, desto mehr Eigenwerte liegen bei 1 und umso weniger bei 0. Diese Vermutung soll im Folgenden präzisiert werden.

2.3 Numerische Eigenwertanalyse

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Eigenwertverteilung der Matrizen $A(n, \vartheta; m, k_1)$ zu. Wie schon zuvor erwähnt ist eine theoretische Analyse überaus schwierig und daher ein entsprechender Ansatz wenig erfolgversprechend. Daher beschränken wir uns auf numerische Experimente für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$, deren empirische Ergebnisse — auch wenn sie naturgemäß keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit erheben können — uns dennoch einen guten Überblick über das Verhalten der Eigenwertverteilung liefern werden.

²Entsprechend können wir durch die Wahl der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{m-k_1+2}{2} \rfloor}$ erreichen, dass $f_{m,k_1,\mu,k_2} = v_{m,m-2\mu,k_1,k_2}$ und $g_{m,k_1,\mu,k_2} = u_{m,m-2\mu,k_1,k_2}$ gilt, sich also die singulären Funktionen nicht ändern.

³Genau genommen stehen gemäß unserer Definition dann immer noch die Daten für $\theta_1 = \pi/2$ zur Verfügung, die allerdings als Nullmenge bei der Integration keinen Beitrag liefern.

2.3.1 Der Fall $n = 3$

Beginnen wir mit Beispielen für den dreidimensionalen Fall. Zunächst wollen wir $k = 0$ annehmen, wir betrachten also zuerst die Verteilungen der $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ Eigenwerte der Matrizen $A(3, \vartheta; m, 0)$. Dieser Spezialfall ist insbesondere für die spätere Berechnung des Rekonstruktionskerns wichtig, weil dieser ausschließlich aus singulären Funktionen mit $k = 0$ besteht (s. Abschnitt 2.4.1).

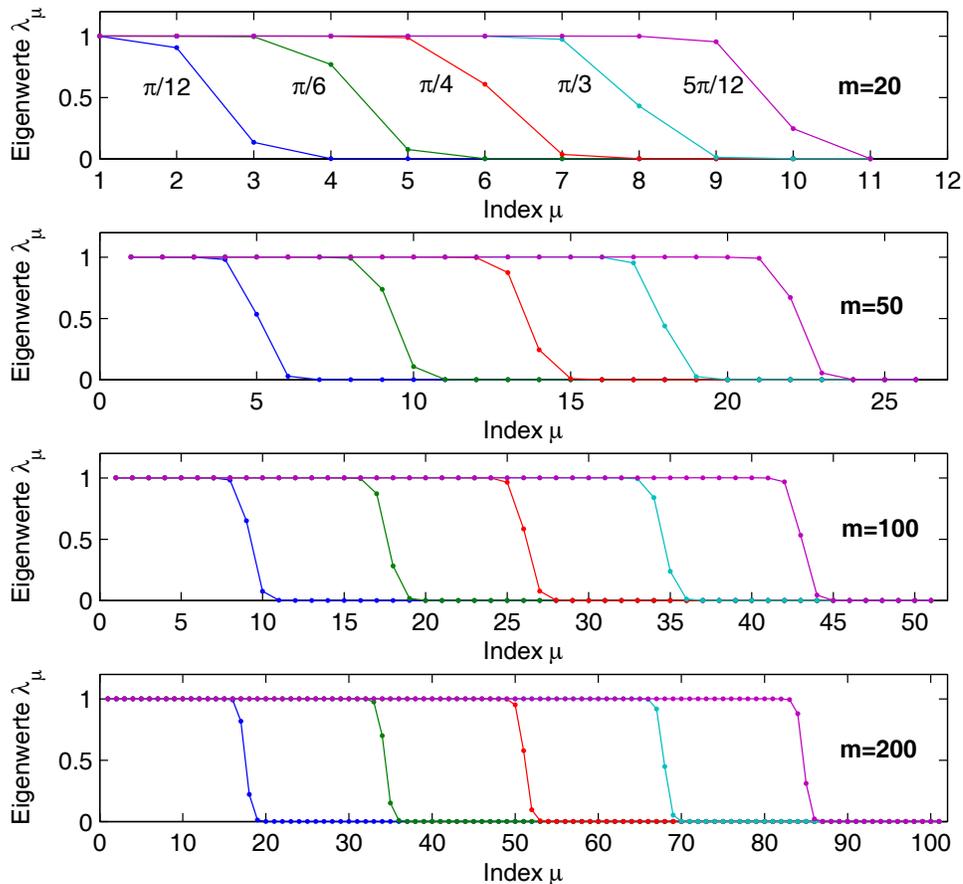


Abbildung 2.1: Darstellung der Eigenwerte von $A(3, \vartheta; m, 0)$ für $m = 20, 50, 100, 200$ und $\vartheta = \pi/12$ (blau), $\pi/6$ (grün), $\pi/4$ (rot), $\pi/3$ (türkis) und $5\pi/12$ (violett).

Wie in Abbildung 2.1 zu sehen ist, teilen sich die Eigenwerte vor allem in zwei Anteile auf, die jeweils sehr nahe bei 1 bzw. 0 liegen. Die Eigenwerte bei 0 haben dabei eine ungefähre Größenordnung von $+10^{-6}$, sind also insbesondere immer noch messbar größer 0. Das Verhältnis der beiden Bereiche

zueinander hängt vom Winkel ϑ und damit von der Menge der verfügbaren Daten ab. Der Übergang zwischen beiden Bereichen beschränkt sich auf höchstens drei bis vier Eigenwerte und ist demgemäß besonders für große Matrizen ($m = 200$) sehr scharf, wohingegen bei kleineren Matrizen ($m = 20$) anteilmäßig mehr Eigenwerte im Zwischenbereich liegen.

Was die Anzahl der Eigenwerte nahe 1 bzw. nahe 0 angeht, so stellen wir z. B. für $\vartheta = \pi/6$ (was gerade bedeutet, dass nur ein Drittel der maximal möglichen Daten zur Verfügung steht) fest, dass abgesehen von den „Übergangseigenwerten“ das Verhältnis der Eigenwerte bei 1 zu den Eigenwerten bei 0 ziemlich genau 1 : 2 beträgt. Für $\vartheta = \pi/4$ (dann ist die Hälfte der maximal möglichen Daten vorhanden) sind beide Bereiche in etwa gleich groß, im Fall $\vartheta = \pi/3$ (ein Drittel der Daten fehlt) schließlich beträgt das Verhältnis ungefähr 2 : 1. Insgesamt können wir die Anzahl der Eigenwerte nahe 1 in unseren Beispielen sehr gut mit der Formel

$$\frac{\text{verfügbare Datenmenge}}{\text{komplette Datenmenge}} \times \text{Anzahl der Eigenwerte,}$$

also mit

$$\frac{2\vartheta}{\pi} \cdot \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \right) \quad (2.13)$$

beschreiben. Die übrigen Eigenwerte liegen — vom Übergangsbereich abgesehen — nahe bei 0.

Dieses Verhalten entspricht exakt dem der Slepian-Matrizen, die an entsprechender Stelle bei der 2D Limited-Angle Radon Transformation auftreten, vgl. [16]. Die dortige Interpretation trifft auch hier zu:

Die Konditionszahlen der obigen Matrizen, d. h. das Verhältnis von größtem zu kleinstem Eigenwert, sind unabhängig vom verfügbaren Winkelbereich auf Grund der immer auftretenden Eigenwerte nahe 0 sehr groß, die Matrizen sind allesamt sehr schlecht konditioniert. Diese pauschale Betrachtung wird allerdings der Situation nicht gerecht, vor allem weil es von diesem Standpunkt aus gesehen keinen Unterschied macht, wie groß der Anteil der verfügbaren Daten ist. Tatsächlich ist es aussagekräftiger, die Anzahl der Eigenwerte bei 1 mit der der Anzahl der Eigenwerte bei 0 zu vergleichen.

Denn bei der Lösung von Operatorgleichungen mit Hilfe der SWZ gehen die Singulärwerte als Kehrwert in die Berechnung ein. Diejenigen, denen ein Eigenwert bei 1 entspricht, stimmen dabei quasi mit den singulären Werten der vollständigen Radon Transformation überein. Die singulären Werte, denen ein Eigenwert nahe 0 entspricht, sind hingegen kaum verwertbar.

Dementsprechend können die Anteile der Daten, die zu den singulären Funktionen mit den Eigenwerten nahe bei 1 gehören, genauso gut oder

schlecht wie bei der vollständigen Radon Transformation rekonstruiert werden; die Anteile der singulären Funktionen mit Eigenwerten nahe 0 hingegen sind praktisch verloren.

Je mehr Daten vorhanden sind, desto kleiner fällt der Anteil der Eigenwerte nahe 0 und damit der Anteil der nicht rekonstruierbaren singulären Funktionen aus. Dieses Ergebnis entspricht auch unseren Erwartungen: Der rekonstruierbare Anteil des Bildes wächst mit der Menge der verfügbaren Daten.

Nun betrachten wir noch den Fall $k \neq 0$. Prinzipiell zeigen die Verteilungen der $\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor + 1$ Eigenwerte ein ähnliches Verhalten, vor allem für kleinere Werte von k .

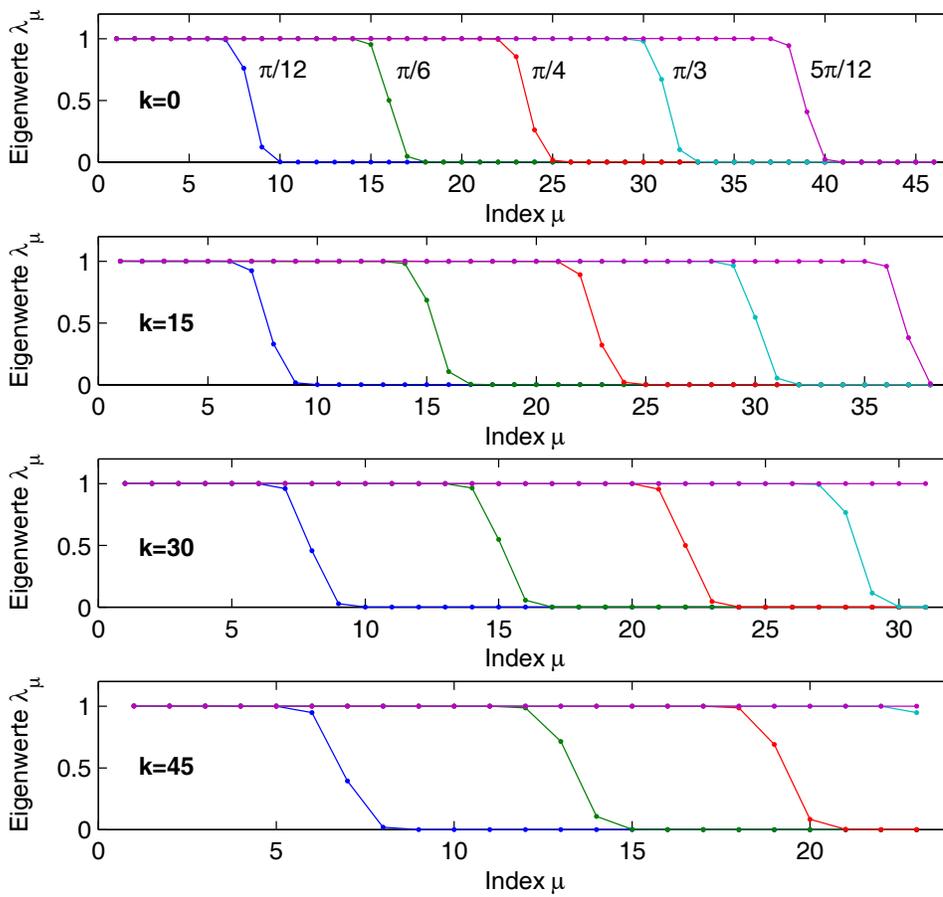


Abbildung 2.2: Darstellung der Eigenwerte von $A(3, \vartheta; 90, k)$ für $k = 0, 15, 30, 45$ und $\vartheta = \pi/12$ (blau), $\pi/6$ (grün), $\pi/4$ (rot), $\pi/3$ (türkis) und $5\pi/12$ (violett).

So verteilen sich die Eigenwerte wieder fast ausschließlich auf Werte nahe 1 oder 0; die Anzahl der Eigenwerte, die deutlich dazwischen liegen, beträgt meist nicht mehr als drei.

Neu und deshalb bemerkenswert ist allerdings, dass sich der Anteil der Eigenwerte nahe 1 für festes m mit wachsendem k vergrößert bzw. die Eigenwerte bei 0 für hinreichend großes k sogar ganz verschwinden. In Abbildung 2.2 ist dies deutlich zu erkennen: Für $k = 15$ hat die zu $\vartheta = \frac{5}{12}\pi$ gehörende Matrix nur noch einen Eigenwert bei 0, für $k = 30$ liegen die Eigenwerte vollständig bei 1 und für $k = 45$ schließlich liegen auch für $\vartheta = \pi/3$ alle Eigenwerte bei 1. Gleichzeitig verschieben sich auch die Sprungstellen für alle anderen Winkel deutlich nach rechts.

Dies bedeutet, dass für festes m der Anteil der rekonstruierbaren Funktionen mit wachsendem k (und damit fallender Matrizengröße) anwächst. Für den Fall, dass k hinreichend groß ist und alle Eigenwerte sehr nahe bei 1 liegen, sind sogar alle zugehörigen singulären Funktionen rekonstruierbar.

Heuristisch und ohne präzisere mathematische Formulierung können wir das auch folgendermaßen begründen: Die in diesem Fall relevante Matrix $A(3, \vartheta; m, k)$ ist „ungefähr“ die Einheitsmatrix.⁴ Somit stimmen die entsprechenden singulären Funktionen der LA-RT mit denen der FD-RT „relativ gut“ überein (vgl. Satz 2.2.3) und können dementsprechend mit gleicher Güte rekonstruiert werden. Da dieses Verhalten umso stärker zum Tragen kommt, je größer k ist, handelt es sich dabei im Dreidimensionalen vor allem um singuläre Funktionen, die bzgl. der Azimutalrichtung φ stärker oszillieren (vgl. Abschnitt 1.1.3).

2.3.2 Der Fall $n = 4$

Beim Übergang vom drei- zum vierdimensionalen Fall ändert sich so gut wie gar nichts. Tatsächlich verhalten sich die Eigenwertverteilungen der korrespondierenden Matrizen $A(4, \vartheta; m, k_1)$ praktisch genauso wie im Dreidimensionalen.

Um das zu belegen, betrachten wir wieder zunächst den Fall $k_1 = 0$. Hier haben wir das schon von $n = 3$ bekannte Bild: Die Eigenwerte liegen entweder nahe bei 0 oder 1; die Lage des relativ schmalen Übergangsbereiches hängt davon ab, wieviel Daten zur Verfügung stehen und wird recht genau durch

⁴Denn als reell symmetrische Matrix ist $A(3, \vartheta; m, k)$ diagonalisierbar und somit ähnlich zu einer Matrix, auf deren Diagonalen ihre Eigenwerte, d. h. nur Werte sehr nahe 1 stehen, also quasi ähnlich zur Einheitsmatrix. Und die einzige Matrix, die in der Ähnlichkeitsklasse der Einheitsmatrix liegt, ist die Einheitsmatrix selbst.

die Formel (2.13)

$$\frac{2\vartheta}{\pi} \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \right)$$

beschrieben, wie Abbildung 2.3 deutlich macht.

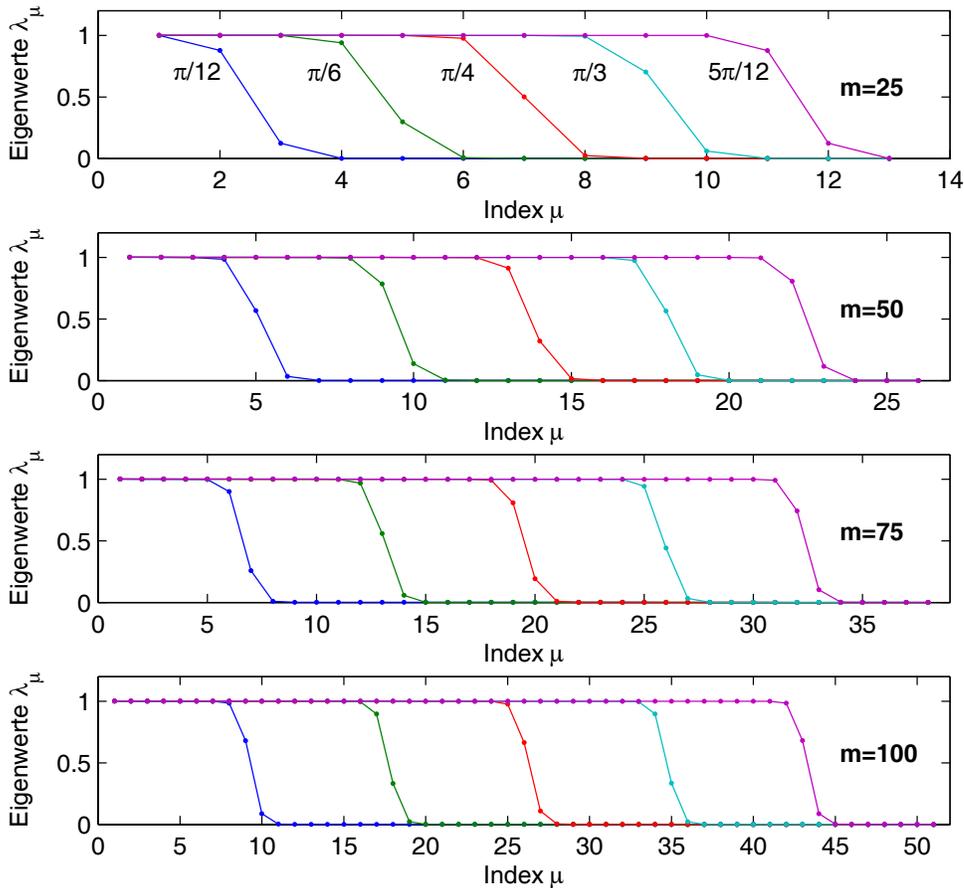


Abbildung 2.3: Darstellung der Eigenwerte von $A(4, \vartheta; m, 0)$ für $m = 25, 50, 75, 100$ und $\vartheta = \pi/12$ (blau), $\pi/6$ (grün), $\pi/4$ (rot), $\pi/3$ (türkis) und $5\pi/12$ (violett).

Ebenso wiederholen sich für $k_1 \neq 0$ die Ergebnisse, die wir bei $n = 3$ für $k \neq 0$ beobachtet haben. Um zu illustrieren, wie stark sich die Eigenwertverteilungen ähneln, haben wir in Abbildung 2.4 die Eigenwerte von $A(4, \vartheta; m, k_1)$ für die gleichen Werte von m und k_1 aufgetragen, wie wir sie schon für Abbildung 2.2 gewählt hatten.

Die Ergebnisse stimmen in frappierender Weise überein. Tatsächlich sind die beiden Plots im direkten Vergleich nur schwer auseinander zu halten und unterscheiden sich nur in Details.

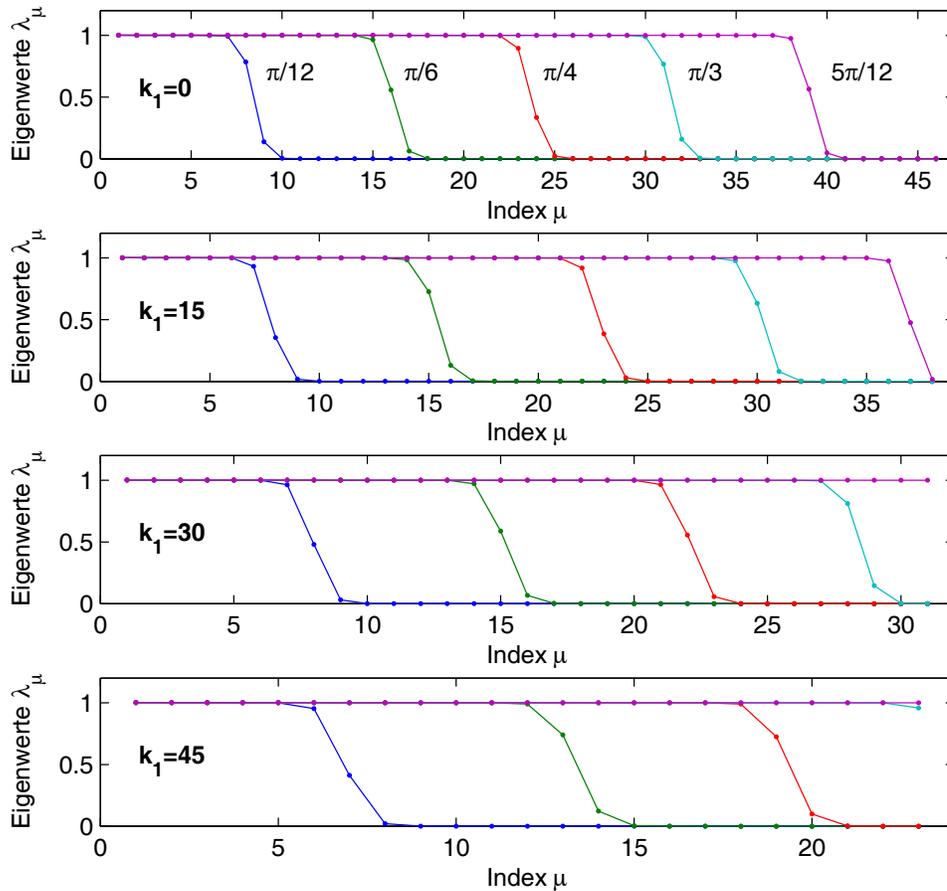


Abbildung 2.4: Darstellung der Eigenwerte von $A(4, \vartheta; 90, k_1)$ für $k_1 = 0, 15, 30, 45$ und $\vartheta = \pi/12$ (blau), $\pi/6$ (grün), $\pi/4$ (rot), $\pi/3$ (türkis) und $5\pi/12$ (violett).

Auch hier können wir also zusammenfassend festhalten, dass sich der Anteil der Eigenwerte bei 1 wieder mit wachsendem k vergrößert und für hinreichend große k und geeignetem Winkel ϑ sogar alle Eigenwerte bei 1 liegen.

Natürlich gelten auf Grund der nahezu identischen Eigenwertverteilungen alle im Fall $n = 3$ gemachten Schlussfolgerungen entsprechend auch für $n = 4$. Diese Beobachtung gibt Anlass zur Frage, ob die Matrizen $A(n, \vartheta; m, k_1)$ unabhängig von n eine ähnliche Eigenwertverteilung haben, was allerdings na-

turgemäß nicht durch empirische Untersuchungen beantwortet werden kann.

Bemerkungen 2.3.1.

1) Die grundsätzliche Frage, ob die Matrizen $A(n, \vartheta; m, k_1)$ Null-Eigenwerte besitzen, bleibt nach wie vor unbeantwortet. Die obigen Ergebnisse zeigen zwar, dass fast immer ein gewisser Anteil der Eigenwerte sehr nahe *bei* 0, aber immer noch deutlich *über* 0 liegt.⁵

Die zugehörigen Eigenfunktionen von $R_\vartheta^* R_\vartheta$ liegen dementsprechend nicht etwa im Kern, sondern treten tatsächlich als singuläre Funktionen von R_ϑ auf und sind somit viel eher ein Beleg für die enorme Schlechtgestellttheit des Ausgangsproblems.

2) Abschließend noch eine letzte Anmerkung zu der alternativen Datenverteilung, die wir bereits in Bemerkung 2.1.1 angesprochen haben. Der Einfachheit halber sei dazu im Weiteren $n = 3$.

Nehmen wir an, dass in unserer bisherigen Datenverteilung relativ wenig Daten gegeben sind, also z. B. mit $\vartheta = \pi/6$ nur für $\theta \in [\pi/2 - \vartheta, \pi/2 + \vartheta] = [\pi/3, 2\pi/3]$. Für $k = 0$ können wir auf Grund der obigen Ergebnisse ungefähr ein Drittel der singulären Funktionen rekonstruieren. Nun betrachten wir die alternative Datenverteilung, d. h. die Daten sind nur für $\theta \in [0, \pi/2 - \vartheta] \cup [\pi/2 + \vartheta, \pi]$ vorhanden. Wollen wir auch hier die Daten für einen Winkelbereich von $\pi/3$ als gegeben annehmen, müssen wir hier $\vartheta = \pi/3$ wählen, die Daten sind dann gerade für $[0, \pi/6] \cup [5\pi/6, \pi]$ gegeben. Bei den dann relevanten Matrizen $\text{Id} - A(3, \pi/3; m, 0)$ (vgl. Bemerkung 2.2.1) liegt dann wiederum ein Drittel der Eigenwerte bei 1, so dass auch hier zu erwarten steht, ungefähr ein Drittel der entsprechenden singulären Funktionen rekonstruieren zu können. Entsprechendes gilt für andere Winkel. Das Verhalten ist für $k = 0$ also in beiden Fällen gleich.

Für $k \neq 0$ ergibt sich hingegen ein völlig anderes Bild: Wie wir oben gesehen haben, vergrößert sich für unser Standardszenario mit wachsendem k der Anteil der rekonstruierbaren singulären Funktionen, da der Anteil der Eigenwerte von $A(3, \vartheta; m, k)$ nahe 1 zunimmt. Dieses Verhalten ist unabhängig vom gewählten Winkel, auch wenn es bei größeren Winkeln ϑ stärker zum Tragen kommt. Folglich gilt für alle entsprechenden Matrizen $\text{Id} - A(3, \vartheta; m, k)$, dass der Anteil der Eigenwerte bei 0 (und damit der Anteil der *nicht* rekonstruierbaren singulären Funktionen) wächst.

Für die alternative Datenverteilung verbessert sich die Rekonstruierbarkeit der singulären Funktionen also nicht mit wachsendem k , sie verschlech-

⁵Bei zu ungenauen Integralauswertungen in der Berechnung der Matrixelemente treten zwar u. U. Eigenwerte auf, die unterhalb der Maschinengenauigkeit liegen. Allerdings werden diese immer von negativen Eigenwerten begleitet, was ein eindeutiges Indiz für numerische Fehler darstellt, vgl. Korollar 2.2.4.

tert sich im Gegenteil sogar noch. Anscheinend sind für die Rekonstruktion der entsprechenden Lösungsanteile die Daten in der Nähe des „Äquators“ wichtiger als diejenigen an den „Polen“. In Abschnitt 3.3.3 werden wir aber sehen, dass für festes m zumindest die Gesamtanzahl aller rekonstruierbaren singulären Funktionen ungefähr gleich groß ist, sofern in beiden Fällen vergleichbare Datenmengen vorliegen.

2.4 Approximative Inverse

Nachdem uns nun die SWZ der θ_1 -LA-RT zur Verfügung steht, können wir auch für diese einen Rekonstruktionskern für die Approximative Inverse bestimmen und so eine Rekonstruktionsformel herleiten.

2.4.1 Lösen von $R_{\vartheta} \psi_{\gamma}^{LA} = e_{\gamma}$

Im Gegensatz zum Fall vollständiger Daten besitzt R_{ϑ}^* keine Rotationsinvarianz mehr (Abschnitt 1.2.4). Auch wenn sich daher eine Rotationsinvarianz des Mollifiers nicht mehr auf den Rekonstruktionskern überträgt, nehmen wir hier trotzdem an, dass wir die Gleichung $R_{\vartheta}^* \psi_{\gamma}^{LA} = e_{\gamma}$ für einen rotations-symmetrischen Mollifier $e_{\gamma} \in \text{Bild}(R_{\vartheta}^*)$ lösen. Dadurch entsteht zum einen Vergleichbarkeit mit dem Rekonstruktionskern der Full-Data Radon Transformation, zum anderen vereinfacht sich die Rechnung immer noch ganz erheblich.

Wir vereinbaren noch, dass die nachfolgenden Reihen so zu verstehen sind, dass wir nur über die Indizes aufsummieren, für die $\lambda_{\mu}(m, k_1; \vartheta) \neq 0$ gilt und somit $\tau_{m, k_1, \mu}$ bzw. g_{m, k_1, μ, k_2} überhaupt definiert sind. Nach (1.28) erhalten wir dann:

$$\psi_{\gamma}^{LA}(\omega, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^m \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} \sum_{k_2=0}^{A(n-1, k_1)} \tau_{m, k_1, \mu}^{-1} \langle e_{\gamma}, f_{m, k_1, \mu, k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} g_{m, k_1, \mu, k_2}(\omega, s)$$

Nun ist

$$\langle e_{\gamma}, f_{m, k_1, \mu, k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-k_1}{2} \rfloor} d_{\mu}(m, k_1; \vartheta)_l \langle e_{\gamma}, v_{m, m-2l, k_1, k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)}.$$

Da wir e_{γ} als rotations-symmetrisch angenommen haben, können wir die Ergebnisse der Berechnung von $\langle e_{\gamma}, v_{m, m-2l, k_1, k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)}$ aus Abschnitt 1.3.2 über-

nehmen und erhalten

$$\begin{aligned} & \langle e_\gamma, f_{m,k_1,\mu,k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} \\ &= \begin{cases} d_\mu(m, 0; \vartheta)_{m/2} \langle e_\gamma, v_{m,0,0,1} \rangle_{L^2(\Omega^n)}, & m \text{ gerade, } k_1 = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \psi_\gamma^{LA}(\omega, s) &= \sum_{\substack{m=0, \\ m \text{ gerade}}}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{m/2} \tau_{m,0,\mu}^{-1} d_\mu(m, 0; \vartheta)_{m/2} \langle e_\gamma, v_{m,0,0,1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} g_{m,0,\mu,1}(\omega, s) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^m \tau_{2m,0,\mu}^{-1} d_\mu(2m, 0; \vartheta)_m \langle e_\gamma, v_{2m,0,0,1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} g_{2m,0,\mu,1}(\omega, s). \end{aligned}$$

Einsetzen von (vgl. Abschnitt 1.3.2, Variante 1)

$$\langle e_\gamma, v_{2m,0,0,1} \rangle_{L^2(\Omega^n)} = 2 |S^{n-1}|^{1/2} \sqrt{m + n/4} \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)}$$

und der Definitionen von $\tau_{2m,0,\mu}$ bzw. $g_{2m,0,\mu,1}$ ergibt

$$\begin{aligned} \psi_\gamma^{LA}(\omega, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^m \lambda_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)^{-1} \sigma_{2m}^{-1} d_\mu(2m, 0; \vartheta)_m 2 |S^{n-1}|^{1/2} \sqrt{m + n/4} \\ &\quad \times \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} d_{2m} \sum_{l=0}^m d_\mu(2m, 0; \vartheta)_l C_{2m}^{m/2}(s) w_n(s) Y_{2(m-l),0,1}^{(n)}(\omega) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m}^{-1} d_{2m} 2 \sqrt{m + n/4} \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{m/2}(s) w_n(s) q_{2m}^{(n)}, \end{aligned}$$

wobei $q_{2m}^{(n)}(\omega)$ definiert ist als

$$\begin{aligned} q_{2m}^{(n)}(\omega) &:= |S^{n-1}|^{1/2} \sum_{l=0}^m Y_{2(m-l),0,1}^{(n)}(\omega) \\ &\quad \times \sum_{\mu=0}^m \lambda_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)^{-1} d_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)_m d_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)_l. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Beachten wir noch (vgl. (1.31))

$$\sigma_{2m}^{-1} d_{2m} 2 \sqrt{m + n/4} = \frac{4}{|S^{n-1}|} (m + n/4),$$

erhalten wir schließlich

$$\psi_\gamma^{LA}(\omega, s) = \frac{4}{|S^{n-1}|} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{n/2}(s) w_n(s) q_{2m}^{(n)}(\omega).$$

Offensichtlich unterscheiden sich Full-Data und Limited-Angle Rekonstruktionskern „nur“ durch den Faktor q_{2m} (vgl. Lemma 1.3.4). Dieser beinhaltet die Winkelabhängigkeit von ψ_γ^{LA} ; seine Berechnung stellt den zusätzlichen Aufwand dar, den man zum Ausgleich für die fehlenden Daten erbringen muss.

Da der Rekonstruktionskern unabhängig von den Daten vorberechenbar ist, sind dies trotz allem lediglich Einmal-Kosten, die den Aufwand der eigentlichen Rekonstruktion nicht erhöhen. Was sich hingegen erhöht, ist der Speicherbedarf: Da der Rekonstruktionskern jetzt auch von der Richtung ω abhängt, muss nun für jede einzelne Richtung soviel Speicher zur Verfügung stehen, wie im Falle vollständiger Daten für den ganzen Rekonstruktionskern benötigt wird.

Wenden wir uns noch einmal q_{2m} zu. Wegen $n \geq 3$ gilt (s. Abschnitt 1.1.2)

$$\begin{aligned} Y_{2(m-l),0,1}^{(n)}(\omega) &= c_{2(m-l),0}^{(n)} P_{2(m-l),0}^{(n)}(\cos \theta_1) \underbrace{Y_0^{(n-1)}(\theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)}_{=|S^{n-2}|^{-1/2}} \\ &= |S^{n-2}|^{-1/2} c_{2(m-l),0}^{(n)} C_{2(m-l)}^{\frac{n-2}{2}}(\cos \theta_1), \end{aligned}$$

womit wir

$$q_{2m}^{(n)}(\omega) = q_{2m}^{(n)}(\theta_1) = \sqrt{\frac{|S^{n-1}|}{|S^{n-2}|}} \sum_{l=0}^m c_{2(m-l),0}^{(n)} \Lambda_l^{(n)}(m) C_{2(m-l)}^{\frac{n-2}{2}}(\cos \theta_1),$$

$$\text{mit } \Lambda_l^{(n)}(m) := \sum_{\mu=0}^m \lambda_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)^{-1} d_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)_m d_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)_l$$

erhalten.

Natürlich haben wir auch hier die Möglichkeit, das Skalarprodukt in der alternativen Darstellung (vgl. 1.3.2, Variante 2)

$$\langle e_\gamma, v_{m,m-2l,k_1,k_2} \rangle_{L^2(\Omega^n)} = 2 |S^{n-1}|^{1/2} \sigma_{2m}^{-1} d_{2m} I_{2m,\gamma}^{(n)}$$

zu benutzen. Wir erhalten dann unter Benutzung von (1.32) nach analoger Rechnung das Ergebnis

$$\psi_\gamma^{LA}(\omega, s) = \frac{8}{|S^{n-1}|^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) I_{2m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{n/2}(s) w_n(s) q_{2m}^{(n)}(\omega).$$

Damit haben wir gezeigt:

Satz 2.4.1.

Es seien $e_\gamma \in \text{Bild}(R_\vartheta^*)$ ein rotationssymmetrischer Mollifier und

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} &= \int_0^1 e_\gamma(r) P_m^{(0,n/2-1)}(2r^2-1) r^{n-1} dr \\ I_{2m,\gamma}^{(n)} &= \int_0^1 R e_\gamma(s) C_{2m}^{\frac{n}{2}}(s) ds.\end{aligned}$$

die Integrale aus Lemma 1.3.4. Dann hat der Rekonstruktionskern ψ_γ^{LA} als Lösung der Gleichung $R_\vartheta^* \psi_\gamma^{LA} = e_\gamma$ die Darstellungen

$$\psi_\gamma^{LA}(\theta_1, s) = \frac{4}{|S^{n-1}|} \sum_{m=0}^{\infty} (m+n/4) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{n/2}(s) w_n(s) q_{2m}^{(n)}(\theta_1) \quad (2.15)$$

$$\text{bzw. } \psi_\gamma^{LA}(\theta_1, s) = \frac{8}{|S^{n-1}|^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m+n/4) I_{2m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{n/2}(s) w_n(s) q_{2m}^{(n)}(\theta_1), \quad (2.16)$$

wobei ($n \geq 3$)

$$q_{2m}^{(n)}(\theta_1) = \sqrt{\frac{|S^{n-1}|}{|S^{n-2}|}} \sum_{l=0}^m c_{2(m-l),0}^{(n)} \Lambda_l^{(n)}(m) C_{2(m-l)}^{\frac{n-2}{2}}(\cos \theta_1), \quad (2.17)$$

$$\Lambda_l^{(n)}(m) = \sum_{\mu=0}^m \lambda_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)^{-1} d_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)_m d_\mu^{(n)}(2m, 0; \vartheta)_l \quad (2.18)$$

gilt. □

Bei einer konkreten Berechnung verlangt die Auswertung der Λ_l größere Aufmerksamkeit und wird nur mittels einer Regularisierung möglich sein, da wir entsprechend den Ergebnissen aus Abschnitt 2.3 immer einige Eigenwerte λ_μ nahe 0 zu erwarten haben.

Um den Einfluss dieser numerischen Instabilität abzuschwächen und zudem den Unterschied zwischen Full-Data und Limited-Angle Rekonstruktionskern zu verdeutlichen, schreiben wir das Ergebnis folgendermaßen um: Bezeichnen wir mit ψ_γ^{FD} den Rekonstruktionskern der vollständigen Radon Transformation aus Lemma 1.3.4 und mit

$$\begin{aligned}\zeta(\theta_1, s) &= \psi_\gamma^{LA}(\theta_1, s) - \psi_\gamma^{FD}(s) \\ &= \frac{4}{|S^{n-1}|} \sum_{m=0}^{\infty} (m+n/4) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{n/2}(s) w_n(s) (q_{2m}^{(n)}(\theta_1) - 1) \\ &= \frac{8}{|S^{n-1}|^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m+n/4) I_{2m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{n/2}(s) w_n(s) (q_{2m}^{(n)}(\theta_1) - 1)\end{aligned}$$

die Differenz zwischen LA- und FD-Rekonstruktionskern, so gilt offensichtlich

$$\psi_\gamma^{LA}(\theta_1, s) = \psi_\gamma^{FD}(s) + \zeta(\theta_1, s).$$

Wir können $\zeta(\omega, s)$ als winkelabhängigen Korrekturterm interpretieren, den wir zu dem winkelunabhängigen Rekonstruktionskern ψ_γ^{FD} der vollständigen Radon Transformation addieren müssen, um das Fehlen der Daten im θ_1 -Winkelbereich $[0, \pi/2 - \vartheta] \cup [\pi/2 + \vartheta, \pi]$ auszugleichen.

Der Vorteil einer Realisierung gemäß dieser Darstellung liegt nun darin, dass sich der numerisch unproblematische Anteil ψ_γ^{FD} als Grundlage für ψ_γ^{LA} ohne Regularisierung berechnen lässt. Die numerischen Schwierigkeiten bei der Berechnung des Korrekturterms $\zeta(\theta_1, s)$ können dann durch ein früheres Abbrechen der Reihendarstellung gemindert werden. Im Gegensatz dazu muss man bei einer Berechnung gemäß (2.15) oder (2.16) bei jedem Summanden q_{2m} berechnen, also auch für den Full-Data Anteil von ψ_γ^{LA} . Wir halten diese Überlegung fest in dem

Satz 2.4.2.

Der Rekonstruktionskern ψ_γ^{LA} aus Satz 2.4.1 lässt sich in der numerisch günstigeren Form

$$\psi_\gamma^{LA}(\theta_1, s) = \psi_\gamma^{FD}(s) + \zeta(\theta_1, s) \quad (2.19)$$

darstellen, wobei der Korrekturterm $\zeta(\theta_1, s)$ durch

$$\zeta(\theta_1, s) = \psi_\gamma^{LA}(\theta_1, s) - \psi_\gamma^{FD}(s) \quad (2.20)$$

$$= \frac{4}{|S^{n-1}|} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{n/2}(s) w_n(s) (q_{2m}^{(n)}(\theta_1) - 1) \quad (2.21)$$

$$= \frac{8}{|S^{n-1}|^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) I_{2m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{n/2}(s) w_n(s) (q_{2m}^{(n)}(\theta_1) - 1) \quad (2.22)$$

gegeben ist. □

Wir notieren noch das

Korollar 2.4.3.

Es gelten die Symmetrierelationen

$$\psi_\gamma^{LA}(\omega, -s) = \psi_\gamma^{LA}(\omega, s) = \psi_\gamma^{LA}(-\omega, s) \quad (2.23)$$

$$\text{und} \quad \zeta(\omega, -s) = \zeta(\omega, s) = \zeta(-\omega, s). \quad (2.24)$$

Beweis. Das erste Gleichheitszeichen folgt jeweils unmittelbar aus den entsprechenden Darstellungen in Satz 2.4.1 und Satz 2.4.2, weil sowohl das Gewicht w_n als auch die aufsummierten Gegenbauer-Polynome $C_{2m}^{m/2}$ gerade Funktionen sind.

Das zweite Gleichheitszeichen ergibt sich aus der Definition von $q_{2m}(\omega)$, vgl. (2.14), da alle beteiligten Kugelflächenfunktionen gerade sind, vgl. Bemerkung 1.1.1. \square

Bemerkung 2.4.4.

Das Besondere an der θ_1 -Limited-Angle Radon Transformation ist, dass der Rekonstruktionskern ψ_γ^{LA} unabhängig von der Dimension n lediglich von einer Winkelvariablen (nämlich gerade θ_1) abhängt.⁶ Dies ist keine automatische Folge davon, dass wir die Daten nur bzgl. eines Winkels eingeschränkt haben: Wir werden in Abschnitt 3.4 sehen, dass Einschränkungen bzgl. eines Winkels auch Rekonstruktionskerne zur Folge haben können, die von mehreren Winkeln abhängen.

Neben den Eigenwertverteilungen der für die SWZ benötigten Matrizen in Abschnitt 2.3 ist dies eine weitere Eigenschaft, die an die „klassische“ Limited-Angle Radon Transformation in zwei Dimensionen (vgl. DIETZ [5]) erinnert. In diesem Sinne ist die θ_1 -LA-RT die dazu passende Verallgemeinerung für $n \geq 3$.

Beispiele 2.4.5.

Als Ergänzung zu den Beispielen 1.3.5 geben wir noch die konkrete Darstellung von $q_{2m}^{(n)}$ für $n = 3, 4$ an.⁷

(i) $n = 3$:

$$q_{2m}^{(3)}(\theta) = \sum_{l=0}^m \sqrt{4(m-l)+1} \Lambda_l^{(3)}(m) P_{2(m-l)}(\cos \theta) \quad (2.25)$$

(ii) $n = 4$:

$$q_{2m}^{(4)}(\theta_1) = \sum_{l=0}^m \Lambda_l^{(4)}(m) U_{2(m-l)}(\cos \theta_1) \quad (2.26)$$

⁶Einen vollständig winkelunabhängigen Rekonstruktionskern können wir hier auf Grund der fehlenden Rotationsinvarianz der LA-RT natürlich nicht mehr erwarten.

⁷Den Fall $n = 2$ können wir hier nicht behandeln, da die θ_1 -LA-RT und insbesondere ihre SWZ und die dabei beteiligten Matrizen gemäß unserer Definition nur für $n \geq 3$ sinnvoll erklärt sind.

2.4.2 Rekonstruktionsformel

Sei nun $\psi_\gamma^{LA,0}$ der in obiger Form berechnete Rekonstruktionskern für einen rotationssymmetrischen Mollifier e_γ^0 aus $\text{Bild}(R_\vartheta^*) \cap C^\infty(\Omega^n)$. Da auch die Limited-Angle Radon Transformation eine Translationsinvarianz aufweist, definieren wir wieder den Mollifier $e_\gamma(x, \cdot)$ zur Rekonstruktion an der Stelle $x \in \Omega^n$ durch

$$e_\gamma(x, \cdot) := T_1^x e_\gamma^0. \quad (2.27)$$

Dann wird die Gleichung $R_\vartheta^* \psi_\gamma^{LA}(x; \cdot) = e_\gamma(x, \cdot)$ nach (1.25) und Lemma 1.3.3 von

$$\psi_\gamma^{LA}(x; \omega, s) = T_2^x \psi_\gamma^{LA,0}(\omega, s) \quad (2.28)$$

$$= 2^{-n} \psi_\gamma^{LA,0} \left(\omega, \frac{s - x^\top \omega}{2} \right) w_n^{-1} \left(\frac{s - x^\top \omega}{2} \right) w_n(s) \quad (2.29)$$

gelöst. Bilden wir also das Skalarprodukt aus den Daten g mit dem Rekonstruktionskern, erhalten wir

$$\begin{aligned} f_\gamma(x) &= \langle g, \psi_\gamma^{LA}(x; \cdot) \rangle_{L^2(Z_\vartheta^n, w_n^{-1})} \\ &= \int_{S_\vartheta^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \psi_\gamma^{LA}(x; \omega, s) w_n^{-1}(s) ds d\omega \\ &= 2^{-n} \int_{S_\vartheta^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \psi_\gamma^{LA,0} \left(\omega, \frac{s - x^\top \omega}{2} \right) w_n^{-1} \left(\frac{s - x^\top \omega}{2} \right) ds d\omega. \end{aligned}$$

Der Faktor w_n^{-1} hebt sich mit dem in $\psi_\gamma^{LA,0}$ enthaltenen Faktor w_n weg. Wir setzen daher analog zum Full-Data Fall

$$\tilde{\psi}_\gamma^{LA,0}(\omega, s) := \frac{4}{|S^{n-1}|} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) \tilde{I}_{m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{m/2}(s) q_{2m}^{(n)}(\theta_1) \quad (2.30)$$

$$= \frac{8}{|S^{n-1}|^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + n/4) I_{2m,\gamma}^{(n)} C_{2m}^{m/2}(s) q_{2m}^{(n)}(\theta_1) \quad (2.31)$$

und erhalten für f_γ das vorläufige Ergebnis

$$f_\gamma(x) = 2^{-n} \int_{S_\vartheta^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_\gamma^{LA,0} \left(\omega, \frac{s - x^\top \omega}{2} \right) ds d\omega.$$

Die Symmetrien aus Korollar 2.4.3 gelten auch, wenn man im Rekonstruktionskern die gerade Funktion w_n weglässt, also insbesondere auch für $\tilde{\psi}_\gamma^{LA,0}$.

Dadurch können wir die obige Formel weiter vereinfachen. Wir definieren dazu

$$S_{\vartheta,+}^{n-1} := \{\omega \in S_{\vartheta}^{n-1} \mid \omega_n > 0\} \quad (2.32)$$

$$\text{bzw. } S_{\vartheta,-}^{n-1} := \{\omega \in S_{\vartheta}^{n-1} \mid \omega_n < 0\} \quad (2.33)$$

und erhalten wegen

$$\begin{aligned} & \int_{S_{\vartheta,-}^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_{\gamma}^{LA,0} \left(\omega, \frac{s - x^{\top} \omega}{2} \right) ds d\omega \\ &= \int_{S_{\vartheta,+}^{n-1}} \int_{-1}^1 g(-\omega, s) \tilde{\psi}_{\gamma}^{LA,0} \left(-\omega, \frac{s + x^{\top} \omega}{2} \right) ds d\omega \\ &= \int_{S_{\vartheta,+}^{n-1}} \int_{-1}^1 g(-\omega, -s) \tilde{\psi}_{\gamma}^{LA,0} \left(-\omega, \frac{-(s - x^{\top} \omega)}{2} \right) ds d\omega \\ &= \int_{S_{\vartheta,+}^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_{\gamma}^{LA,0} \left(\omega, \frac{s - x^{\top} \omega}{2} \right) ds d\omega \end{aligned}$$

schließlich die Formel

$$f_{\gamma}(x) = 2^{1-n} \int_{S_{\vartheta,+}^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_{\gamma}^{LA,0} \left(\omega, \frac{s - x^{\top} \omega}{2} \right) ds d\omega.$$

Insgesamt haben wir damit analog zu Satz 1.3.6 gezeigt:

Satz 2.4.6.

Sei $e_{\gamma}^0 \in \text{Bild}(R_{\vartheta}^*) \cap C^{\infty}(\Omega^n)$ ein rotationssymmetrischer Mollifier und $\tilde{\psi}_{\gamma}^{LA,0}$ der zugehörige Rekonstruktionskern gemäß (2.30). Für die zur Rekonstruktion an der Stelle x benutzten Mollifier gelte $e_{\gamma}(x, \cdot) = T_1^x e_{\gamma}^0$.

Dann lässt sich die Approximative Inverse S_{γ} der θ_1 -Limited-Angle Radon Transformation R_{ϑ} in der Form

$$S_{\gamma}(x) = f_{\gamma}(x) = 2^{1-n} \int_{S_{\vartheta,+}^{n-1}} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_{\gamma}^{LA,0} \left(\omega, \frac{s - x^{\top} \omega}{2} \right) ds d\omega \quad (2.34)$$

darstellen. □

Kapitel 3

Limited-Angle in 3D

Die θ_1 -Limited-Angle Radon Transformation aus Kapitel 2 entspricht im Dreidimensionalen einer Einschränkung des Polarwinkels θ bei gleichzeitiger voller Verfügbarkeit des Azimutalwinkels φ . Natürlich stellt sich nun die Frage, wie sich die Limited-Angle Radon Transformation verhält, wenn man die Daten bzgl. φ oder sowohl bzgl. θ als auch bzgl. φ einschränkt. Dies wollen wir in diesem Kapitel untersuchen.

Da wir uns dabei auf den dreidimensionalen Fall konzentrieren werden, verwenden wir von nun an der Einfachheit halber die klassische Darstellung der Kugelflächenfunktionen entsprechend (1.10').

Unsere Vorgehensweise wird in vielerlei Hinsicht der in Kapitel 2 ähneln, so dass wir uns insgesamt kürzer fassen und vor allem den auftretenden Unterschieden widmen können.

3.1 Definitionen

Wir setzen nun voraus, dass die Daten $g(\omega, s)$ für ω aus

$$S_{\vartheta, \phi}^2 := \left\{ \omega(\theta, \varphi) \in S^2 \left| \begin{array}{l} \theta \in [\pi/2 - \vartheta, \pi/2 + \vartheta], \\ \varphi \in [-\phi, \phi] \cup [\pi - \phi, \pi + \phi] \end{array} \right. \right\}, \quad (3.1)$$

$\vartheta, \phi \in [0, \pi/2]$, gegeben sind¹ und definieren

$$Z_{\vartheta, \phi} := S_{\vartheta, \phi}^2 \times [-1, 1] \quad (3.2)$$

als den entsprechenden eingeschränkten Einheitszylinder. Je größer ϑ und ϕ sind, desto mehr Daten sind also vorhanden.

¹Insbesondere ist $S_{\vartheta, \phi}^2$ ebenfalls punktsymmetrisch, vgl. Bemerkung 2.1.1.

Die daraus resultierende Limited-Angle Radon Transformation bezeichnen wir mit ($w(s) := w_3(s) = 1 - s^2$)

$$R_{\vartheta, \phi} : L^2(\Omega^3) \longrightarrow L^2(Z_{\vartheta, \phi}, w^{-1}), \quad (3.3)$$

und nennen $R_{\vartheta, \phi}$ die *allgemeine 3D Limited-Angle Radon Transformation*. Für $\phi = \pi/2$ stimmt $R_{\vartheta, \phi}$ mit R_{ϑ} und $n = 3$ aus Kapitel 2 überein.

Bemerkung 3.1.1.

Wir verzichten darauf, den Spezialfall vollständiger Daten bzgl. θ bei eingeschränkter Verfügbarkeit von φ gesondert zu betrachten. Dies wird sich als unnötig erweisen: Sofern φ eingeschränkt ist, macht es keinen entscheidenden Unterschied, ob θ voll verfügbar ist oder nicht.

3.2 Singulärwertzerlegung

Im Folgenden bezeichnen wir mit $v_{m, m-2l, k}$ die singulären Funktionen der dreidimensionalen FD-RT gemäß Korollar 1.2.10. Analog zu Abschnitt 2.2 beginnen wir mit der Entwicklung von $R_{\vartheta, \phi}^* R_{\vartheta, \phi} v_{m, m-2l, k}$ nach den $v_{m', m'-2l', k'}$. Nutzen wir dabei aus, dass (2.4) für jede Limited-Angle Radon Transformation gilt, erhalten wir direkt

$$\begin{aligned} & \langle R_{\vartheta, \phi}^* R_{\vartheta, \phi} v_{m, m-2l, k}, v_{m', m'-2l', k'} \rangle_{L^2(\Omega^3)} \\ &= \delta_{mm'} \sigma_m^2 \int_{S_{\vartheta, \phi}^2} Y_{m-2l}^k(\omega) \overline{Y_{m-2l'}^{k'}(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Für das Integral gilt mit einer passenden Konstanten c (vgl. (1.10'))

$$\begin{aligned} & \int_{S_{\vartheta, \phi}^2} Y_{m-2l}^k(\omega) \overline{Y_{m-2l'}^{k'}(\omega)} d\omega \\ &= c \int_{\pi/2-\vartheta}^{\pi/2+\vartheta} P_{m-2l}^{|k|}(\cos \theta) P_{m-2l'}^{|k'|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_{\substack{[-\phi, \phi] \cup \\ [\pi-\phi, \pi+\phi]}} e^{i(k-k')\varphi} d\varphi \\ &= c \int_{-\sin \vartheta}^{\sin \vartheta} P_{m-2l}^{|k|}(x) P_{m-2l'}^{|k'|}(x) dx \int_{\substack{[-\phi, \phi] \cup \\ [\pi-\phi, \pi+\phi]}} e^{i(k-k')\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aus Gleichung (3.4) wird nun deutlich, warum es keinen Unterschied macht, ob die Daten in θ vollständig sind oder nicht:

Da wir im zweiten Integral die komplexe e -Funktion für $\phi \neq \pi/2$ nur über einen Teilbereich ihrer 2π -Periode integrieren, ergibt sich dort auch für $k \neq k'$ ein Wert ungleich 0; im Gegensatz zu der SWZ-Berechnung in 2.2 geht die

Orthogonalität bzgl. k und k' bei dieser Art der Winkeleinschränkung verloren. Folglich können wir aber auch bei der Berechnung des ersten Integrals nicht mehr davon ausgehen, dass die beiden verallgemeinerten Legendre-Funktionen gleiche Ordnung haben, so dass wir selbst bei einer Integration über $[-1, 1]$ (was vollständigen Daten bzgl. des Polarwinkels θ entspräche) keinerlei Orthogonalität mehr erreichen.

Der Ausweg besteht darin, die singulären Funktionen umzuindizieren: Mit Hilfe der Summenformel $\sum_{l=1}^n l = \frac{n(n+1)}{2}$ rechnet man schnell nach, dass es zu festem m insgesamt

$$\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (2(m-2l)+1) = \frac{m^2}{2} + \frac{3m}{2} + 1$$

singuläre Funktionen gibt. Diese nummerieren wir nun mit einem neuen Index j von 0 bis $m(m+3)/2$ durch. Die Reihenfolge ist dabei irrelevant, ggf. kennzeichnen wir mit $j(l, k)$ bzw. $l(j), k(j)$ die einander entsprechenden Indizes. Nachdem wir die beiden Indizes l, k in einem Index j zusammengeführt haben, nimmt der Entwicklungskoeffizient die Form

$$\langle R_{\vartheta, \phi}^* R_{\vartheta, \phi} v_{mj}, v_{m'j'} \rangle_{L^2(\Omega^3)} = \delta_{mm'} \sigma_m^2 \int_{S_{\vartheta, \phi}^2} Y_{m-2l(j)}^{k(j)}(\omega) \overline{Y_{m-2l(j')}^{k(j')}(\omega)} d\omega \quad (3.5)$$

an. Definieren wir also die $[m(m+3)/2+1] \times [m(m+3)/2+1]$ Matrix $B(m; \vartheta, \phi)$ durch

$$B(m; \vartheta, \phi) := (b_{jj'})_{jj'}, \quad j, j' = 0, \dots, m(m+3)/2,$$

wobei

$$b_{jj'} = \int_{S_{\vartheta, \phi}^2} Y_{m-2l(j)}^{k(j)}(\omega) \overline{Y_{m-2l(j')}^{k(j')}(\omega)} d\omega \quad (3.6)$$

gilt, erhalten wir

$$\langle R_{\vartheta, \phi}^* R_{\vartheta, \phi} v_{mj}, v_{m'j'} \rangle_{L^2(\Omega^3)} = \delta_{mm'} \sigma_m^2 b_{jj'}. \quad (3.7)$$

Offensichtlich ist $B(m; \vartheta, \phi)$ hermitesch (sogar reell symmetrisch, s. u.), so dass wir eine ONB aus Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten finden und damit eine SWZ für $R_{\vartheta, \phi}$ konstruieren können.

Zunächst geben wir jedoch die Einträge von $B(m; \vartheta, \phi)$ in einer expliziteren Form an. Indem wir die Konstante in (3.4) ausschreiben, erhalten wir den

Ausdruck

$$b_{jj'} = c(j) c(j') \underbrace{\int_{-\sin \vartheta}^{\sin \vartheta} P_{m-2l(j)}^{|k(j)|}(x) P_{m-2l(j')}^{|k(j')|}(x) dx}_{=: I_1} \underbrace{\int_{\substack{[-\phi, \phi] \cup \\ [\pi-\phi, \pi+\phi]}} e^{i(k(j)-k(j'))\varphi} d\varphi}_{=: I_2},$$

wobei

$$c(j) := \sqrt{\frac{2(m-2l(j))+1}{4\pi} \frac{(m-2l(j)-|k(j)|)!}{(m-2l(j)+|k(j)|)!}} \quad (3.8)$$

bezeichnet.

Wegen der Symmetrierelationen der verallgemeinerten Legendre Funktionen (A.18) hat der Integrand in I_2 die gleiche Parität wie $k(j) + k(j')$. Wir erhalten also

$$I_1 = \begin{cases} 0, & k(j) + k(j') \text{ ungerade} \\ 2 \int_0^{\sin \vartheta} P_{m-2l(j)}^{|k(j)|}(x) P_{m-2l(j')}^{|k(j')|}(x) dx, & k(j) + k(j') \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.9)$$

Bei der Berechnung von I_2 können wir uns daher auf den Fall „ $k(j) + k(j')$ gerade“ beschränken. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\pi-\phi}^{\pi+\phi} e^{i(k(j)-k(j'))\varphi} d\varphi &= \int_{-\phi}^{\phi} e^{i(k(j)-k(j'))(\psi+\pi)} d\psi \\ &= (-1)^{k(j)+k(j')} \int_{-\phi}^{\phi} e^{i(k(j)-k(j'))\psi} d\psi \\ &= \int_{-\phi}^{\phi} e^{i(k(j)-k(j'))\psi} d\psi, \end{aligned}$$

so dass wir in diesem Fall

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int_{-\phi}^{\phi} e^{i(k(j)-k(j'))\varphi} d\varphi \\ &= \begin{cases} 4 \frac{\sin((k(j)-k(j'))\phi)}{k(j)-k(j')}, & k(j) \neq k(j') \\ 4\phi, & k(j) = k(j') \end{cases} \quad (3.10) \end{aligned}$$

erhalten.² Insgesamt ergibt sich damit:

$$b_{jj'} = \begin{cases} 0, & k(j) + k(j') \text{ ungerade} \\ 8c(j)c(j') \int_0^{\sin \vartheta} P_{m-2l(j)}^{|k(j)|}(x) P_{m-2l(j')}^{|k(j')|}(x) dx \\ \quad \times \begin{cases} \frac{\sin((k(j)-k(j'))\phi)}{k(j)-k(j')} & , k(j) \neq k(j') \\ \phi & , k(j) = k(j') \end{cases} & , k(j) + k(j') \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.11)$$

Insbesondere ist $B(m; \vartheta, \phi)$ eine reell symmetrische Matrix. Entsprechend bezeichnen wir für $\mu = 0, \dots, m(m+3)/2$ mit $\lambda_\mu(m; \vartheta, \phi)$ ihre Eigenwerte (für die wir ebensowenig wie in Kapitel 2 den Fall $\lambda_\mu = 0$ ausschließen können) und mit $d_\mu(m; \vartheta, \phi)$ die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren.

Satz 3.2.1 (SWZ der allg. 3D-LA-RT).

Es bezeichne v_{mj}, u_{mj} die (umindizierten) singulären Funktionen und σ_m die Singulärwerte der vollständigen dreidimensionalen Radon Transformation, vgl. Korollar 1.2.10. Mit $\lambda_\mu(m; \vartheta, \phi)$, $\mu = 0, \dots, m(m+3)/2$, bezeichnen wir die Eigenwerte der in (3.11) definierten Matrix, mit $d_\mu(m; \vartheta, \phi)$ die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren.

Wir setzen

$$f_{m\mu}(x) := \sum_{j=0}^{m(m+3)/2} d_\mu(m; \vartheta, \phi)_j v_{mj}(x) \quad (3.12)$$

und im Fall $\lambda_\mu(m; \vartheta, \phi) \neq 0$

$$g_{m\mu}(\omega, s) := \lambda_\mu(m; \vartheta, \phi)^{-1/2} \sum_{j=0}^{m(m+3)/2} d_\mu(m; \vartheta, \phi)_j u_{mj}(\omega, s) \quad (3.13)$$

$$\tau_{m\mu} := \sigma_m \lambda_\mu(m; \vartheta, \phi)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Dann bildet das System $\{f_{m\mu}, g_{m\mu}; \tau_{m\mu}\}$ für die Indizes $m \geq 0$, $\mu = 0, \dots, m(m+3)/2$, für die $\lambda_\mu(m; \vartheta, \phi) \neq 0$ gilt, eine normierte SWZ der allgemeinen 3D Limited-Angle Radon Transformation

$$R_{\vartheta, \phi} : L^2(\Omega^3) \longrightarrow L^2(Z_{\vartheta, \phi}, w^{-1}).$$

²Für „k(j)+k(j') gerade“ entspricht I_2 bis auf Konstanten den Einträgen der Slepian-Matrix ([25]), mit der man die SWZ der 2D-LA-RT konstruiert, vgl. [16].

Beweis.

Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 2.2.3. Zunächst zeigen wir, dass die $f_{m\mu}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(\Omega^3)$ bilden:

Orthonormalität:

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \langle f_{m\mu}, f_{n\nu} \rangle_{L^2(\Omega^3)} \\
&= \sum_{j=0}^{m(m+3)/2} \sum_{t=0}^{n(n+3)/2} d_\mu(m; \vartheta, \phi)_j d_\nu(n; \vartheta, \phi)_t \underbrace{\langle v_{mj}, v_{nt} \rangle_{L^2(\Omega^3)}}_{=\delta_{mn}\delta_{jt}} \\
&= \delta_{mn} \sum_{j=0}^{m(m+3)/2} d_\mu(m; \vartheta, \phi)_j d_\nu(m; \vartheta, \phi)_j \\
&= \delta_{mn} \delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Vollständigkeit:

Sei $h \in L^2(\Omega^3)$ gegeben mit

$$\langle h, f_{m\mu} \rangle_{L^2(\Omega^3)} = 0 \quad \forall m \geq 0, \mu = 0, \dots, m(m+3)/2.$$

Wir müssen wieder $h = 0$ nachweisen. Fassen wir die ausgeschriebene Annahme

$$\langle h, f_{m\mu} \rangle_{L^2(\Omega^3)} = \sum_{j=0}^{m(m+3)/2} d_\mu(m; \vartheta, \phi)_j \langle h, v_{mj} \rangle_{L^2(\Omega^3)} = 0$$

bei festem m für alle möglichen Werte von μ zusammen, erhalten wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} d_0(m; \vartheta, \phi)^\top \\ \vdots \\ d_{m(m+3)/2}(m; \vartheta, \phi)^\top \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle h, v_{m,0} \rangle_{L^2(\Omega^3)} \\ \vdots \\ \langle h, v_{m,m(m+3)/2} \rangle_{L^2(\Omega^3)} \end{pmatrix} = 0,$$

das nur die triviale Nulllösung besitzt, weil die aus der ONB der d_μ 's bestehende Matrix regulär ist. Es folgt

$$\langle h, v_{mj} \rangle_{L^2(\Omega^3)} = 0 \quad \forall m \geq 0, j = 0, \dots, m(m+3)/2$$

und damit

$$h \in \text{span}\{v_{mj}\}^\perp = \overline{\text{span}\{v_{mj}\}}^\perp = L^2(\Omega^3)^\perp = \{0\},$$

was die behauptete Vollständigkeit beweist.

Nun zeigen wir, dass die f_{mj} Eigenfunktionen von $R_{\vartheta,\phi}^* R_{\vartheta,\phi}$ sind: Da die $f_{m\mu}$ ein VONS von $L^2(\Omega^3)$ bilden, können wir $R_{\vartheta,\phi}^* R_{\vartheta,\phi} f_{m\mu}$ bzgl. dieses Systems entwickeln. Für den Entwicklungskoeffizienten ergibt sich nach Konstruktion der d_μ 's und unter Beachtung von (3.7) gerade

$$\langle R_{\vartheta,\phi}^* R_{\vartheta,\phi} f_{m\mu}, f_{n\nu} \rangle_{L^2(\Omega^3)} = \delta_{mn} \delta_{\mu\nu} \sigma_m^2 \lambda_\mu(m; \vartheta, \phi),$$

was wiederum

$$R_{\vartheta,\phi}^* R_{\vartheta,\phi} f_{m\mu} = \sigma_m^2 \lambda_\mu(m; \vartheta, \phi) f_{m\mu}$$

impliziert. Da $R_{\vartheta,\phi}^* R_{\vartheta,\phi}$ ein positiver Operator ist und somit zumindest nicht-negative Eigenwerte hat und die σ_m positiv sind, sind auch die $\lambda_\mu(m; \vartheta, \phi)$ nichtnegativ. Mit Hilfe von $R_{\vartheta,\phi} v_{ms} = \sigma_m u_{ms}$ verifiziert man dann wieder, dass für $\lambda_\mu(m; \vartheta, \phi) \neq 0$

$$g_{m\mu} = \frac{R_{\vartheta,\phi} f_{m\mu}}{\sigma_m \lambda_\mu(m; \vartheta, \phi)^{1/2}}$$

gilt. Damit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} R_{\vartheta,\phi} f_{m\mu} &= \tau_{m\mu} g_{m\mu} \\ R_{\vartheta,\phi}^* g_{m\mu} &= \tau_{m\mu} f_{m\mu}, \end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist. □

Wie in Abschnitt 2.2 folgern wir:

Korollar 3.2.2.

Die Eigenwerte $\lambda_\mu(m; \vartheta, \phi)$ der Matrix $B(m; \vartheta, \phi)$ erfüllen

$$0 \leq \lambda_\mu(m; \vartheta, \phi) \leq 1. \tag{3.15}$$

Beweis. Im Beweis des Satzes haben wir bereits $\lambda_\mu(m; \vartheta, \phi) \geq 0$ nachgewiesen. Nehmen wir eine alternative Datenverteilung an, in der die Daten für $\omega \in S^2 \setminus S_{\vartheta,\phi}^2$ vorhanden sind, erhalten wir mit einer vollkommen analogen Rechnung die Matrix $\text{Id} - B(m; \vartheta, \phi)$ und damit einen positiven Operator $R_{\vartheta,\phi}^* R_{\vartheta,\phi}$ mit den Eigenwerten $\sigma_m^2 (1 - \lambda_\mu(m; \vartheta, \phi))$, woraus wir nun wieder $1 - \lambda_\mu(m; \vartheta, \phi) \geq 0$, also $\lambda_\mu(m; \vartheta, \phi) \leq 1$ schließen können. □

Wie schon in Abschnitt 2.2 gilt auch hier: Falls tatsächlich alle Eigenwerte größer 0 sein sollten, ist der Operator $R_{\vartheta,\phi}$ injektiv.

Ebenso wie in Abschnitt 2.2 kann man auch hier wegen Korollar 3.2.2 und durch Betrachten der beiden Extremfälle „vollständige Daten“ ($B(m; \pi/2, \pi/2) = \text{Id}$, alle Eigenwerte sind 1) bzw. „gar keine Daten“ ($B(m; 0, 0)$ ist die Nullmatrix, alle Eigenwerte sind 0) annehmen, dass die Eigenwertverteilung von $B(m; \vartheta, \phi)$ qualitativ der von $A(3, \vartheta; m, k)$ ähnelt: Je mehr Daten vorhanden sind, desto mehr Eigenwerte liegen bei 1, je weniger Daten verfügbar sind, desto mehr Eigenwerte liegen in der Nähe von 0.

3.3 Numerische Eigenwertanalyse

Die obige Vermutung versuchen wir wieder mit numerischen Experimenten zu untermauern bzw. zu präzisieren. Dabei widmen wir uns zunächst dem Spezialfall, dem wir bereits in Kapitel 2 in einem allgemeineren Rahmen begegnet sind.

3.3.1 Einschränkung des Polarwinkels

Wir nehmen zunächst an, dass bezüglich des Azimutalwinkels φ alle Daten vorhanden sind, also $\phi = \pi/2$ gilt. In diesem Fall stimmt die allgemeine 3D Limited-Angle Radon Transformation mit der θ_1 -LA-RT aus Kapitel 2 mit $n = 3$ überein. Der formale Unterschied liegt darin, dass wir hier sämtliche zu festem m gehörenden singulären Funktionen zusammen mit nur *einer* Matrix $B(m; \vartheta, \pi/2)$ orthogonalisieren. In Kapitel 2 waren wir hingegen den dem Problem angepassteren Weg gegangen und hatten jeweils nur die zu festem m und k gehörenden singulären Funktionen mit je einer Matrix $A(3, \vartheta; m, k)$ orthogonalisiert.

Zwar ist es eigentlich ungünstig, diesen Fall tatsächlich mit dem dafür unnötig allgemeinen Verfahren zu behandeln, als Ausgangspunkt für unsere weiteren Untersuchungen ist er jedoch recht hilfreich, weil uns unsere Beobachtungen aus Abschnitt 2.3 helfen, das entsprechende Verhalten der Eigenwerte zu verstehen.

Der Zusammenhang zwischen beiden Betrachtungsweisen schlägt sich auch in der Struktur der Matrix $B(m; \vartheta, \pi/2)$ nieder: Mit $\phi = \pi/2$ lautet (3.11)

$$b_{jj'} = \begin{cases} 4\pi c(j)c(j') \int_0^{\sin \vartheta} P_{m-2l(j)}^{|k(j)|}(x) P_{m-2l(j')}^{|k(j')|}(x) dx, & k(j) = k(j') \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Auch wenn es auf Grund der unterschiedlichen Notationen nicht sofort ersichtlich ist, kann man sich doch durch eine kurze Rechnung relativ schnell

davon überzeugen, dass der Eintrag ungleich 0 erwartungsgemäß dem von $A(3, \vartheta; m, |k(j)|)$ an der Stelle $(l(j), l(j'))$ entspricht. Ordnen wir also die Indizes (l, k) in Gruppen der Form $(0, k), (1, k), (2, k), \dots$ an³, hat die Matrix $B(m; \vartheta, \pi/2)$ Blockdiagonalgestalt, wobei die einzelnen Blöcke gerade aus den Matrizen $A(3, \vartheta; m, |k|)$, $k = -m, \dots, m$, bestehen. Die Matrizen $A(3, \vartheta; m, |k|)$ sind für $k \neq 0$ also je zweimal vertreten.

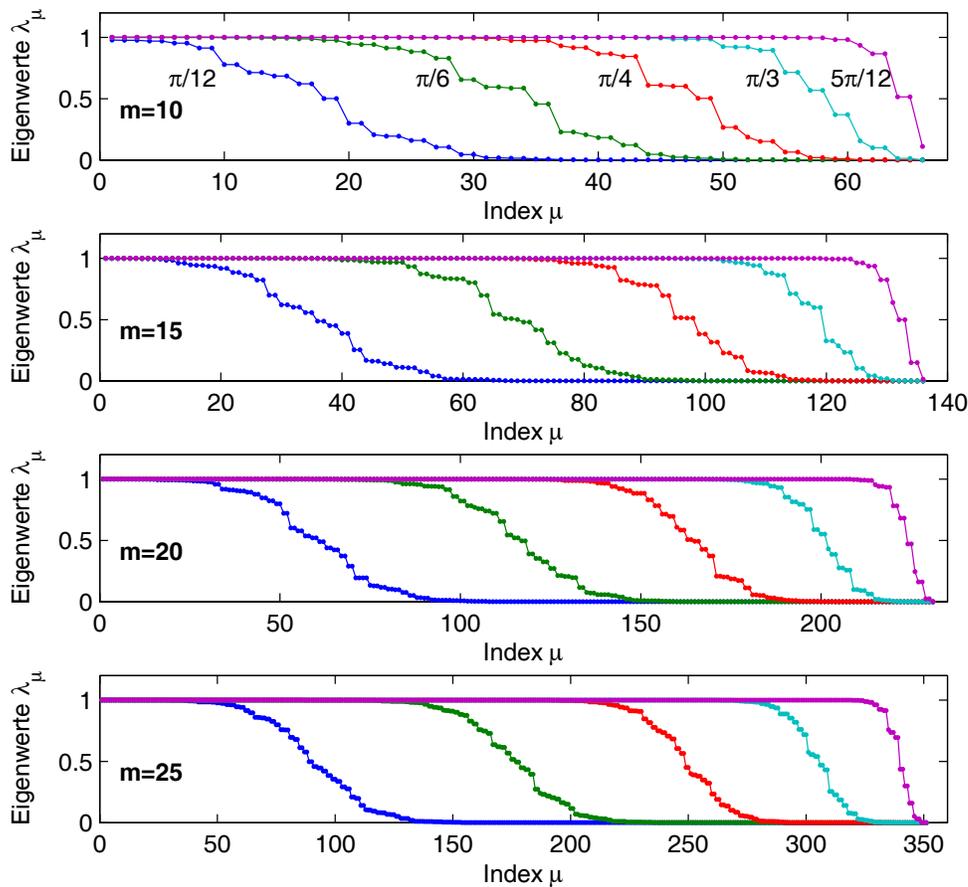


Abbildung 3.1: Darstellung der Eigenwerte von $B(m; \vartheta, \pi/2)$ für $m = 10, 15, 20, 25$ und $\vartheta = \pi/12$ (blau), $\pi/6$ (grün), $\pi/4$ (rot), $\pi/3$ (türkis) und $5\pi/12$ (violett).

Abbildung 3.1 zeigt, dass die Mehrzahl der Eigenwerte von $B(m; \vartheta, \pi/2)$ wieder nahe bei 0 bzw. 1 liegt, und dass die Anzahl der Eigenwerte bei 1 zur Menge der vorliegenden Daten proportional ist. Zudem lässt sich vor allem

³Dies stellt natürlich keinerlei Einschränkung dar, weil Eigenwerte invariant unter Basiswechseln sind.

für $m = 10$ und $m = 15$ im Übergangsbereich deutlich erkennen, dass fast alle Eigenwerte doppelt vertreten sind. Die Ausnahmen rühren jeweils von der Matrix $A(3, \vartheta; m, 0)$ her, die nur einmal auf der Diagonalen von $B(m; \vartheta, \pi/2)$ auftritt.

Des Weiteren ist klar erkennbar, dass der Übergangsbereich vor allem für kleinere Winkel einen beträchtlichen Anteil der Eigenwerte beinhaltet und keineswegs mehr als Sprung bezeichnet werden kann. Dafür gibt es im wesentlichen zwei Gründe:

Die Matrix $B(m; \vartheta, \pi/2)$ besteht aus sämtlichen Matrizen $A(3, \vartheta; m, |k|)$, $k = -m, \dots, m$. Deren Größe nimmt mit wachsendem $|k|$ ab, anteilmäßig wächst damit der Übergangsbereich in den jeweiligen Eigenwertverteilungen an (sofern es noch einen solchen Bereich gibt), vgl. Abschnitt 2.3. Da sich die Eigenwerte der Blockmatrix $B(m; \vartheta, \pi/2)$ aus denen der einzelnen Blöcke $A(3, \vartheta; m, |k|)$ zusammensetzen, vergrößert sich damit insgesamt der Anteil der „Übergangs-Eigenwerte“.

Dies liefert auch eine Erklärung dafür, warum der Übergangsbereich bei größeren Werten von ϑ in der Regel kleiner und somit steiler ausfällt: Bei den entsprechenden Matrizen $A(3, \vartheta; m, |k|)$ ist der Punkt, an dem alle Eigenwerte bei 1 liegen und es keinen Übergangsbereich mehr gibt, früher erreicht, vgl. wieder Abschnitt 2.3.

Darüber hinaus sind die betrachteten Beispielmatrizen trotz allem eher klein, was den beobachteten Effekt in diesen konkreten Beispielen zusätzlich verstärkt: Zwar hat beispielsweise für $m = 25$ die zugehörige Matrix $B(m; \vartheta, \pi/2)$ die Dimension 351×351 (und ist damit größer als jede der in Abschnitt 2.3 herangezogenen Matrizen); die entsprechende Matrix $A(3, \vartheta; 25, 0)$ ist allerdings nur eine 13×13 Matrix und besitzt somit nach den Beobachtungen in Abschnitt 2.3 von vornherein in ihrer Eigenwertverteilung einen verhältnismäßig großen Zwischenbereich.

Zuletzt ist noch anzumerken, dass die Übergangsbereiche der einzelnen Eigenwertverteilungen bei festem m mit wachsendem Winkel ϑ näher zusammenrücken, obwohl in Abbildung 3.1 die verschiedenen Werte für ϑ wieder äquidistant gewählt wurden. Eine Erklärung dafür werden wir im folgenden Abschnitt finden.

3.3.2 Einschränkung des Azimutal- und Polarwinkels

Nun wenden wir uns den Fällen zu, bei denen echte Lücken bzgl. der Azimutalwinkeldaten bestehen, bei denen also $\phi < \pi/2$ ist. Dies sind die eigentlich neuen und interessanten Fälle, da wir hier im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt keine Möglichkeit mehr haben, die Matrizen $B(m; \vartheta, \phi)$ zu umgehen.

Wir beginnen mit dem Spezialfall, dass alle Daten bzgl. des Polarwinkels

θ vorhanden sind, also gerade $\vartheta = \pi/2$ gilt. Dabei beschränken wir uns bei der Darstellung der Ergebnisse auf die Matrizen für $m = 10$ und $m = 25$, weil wir damit alle wesentlichen Eigenschaften veranschaulichen können und gleichzeitig der Unterschied zwischen Matrizen unterschiedlicher Größe besser ins Auge fällt.

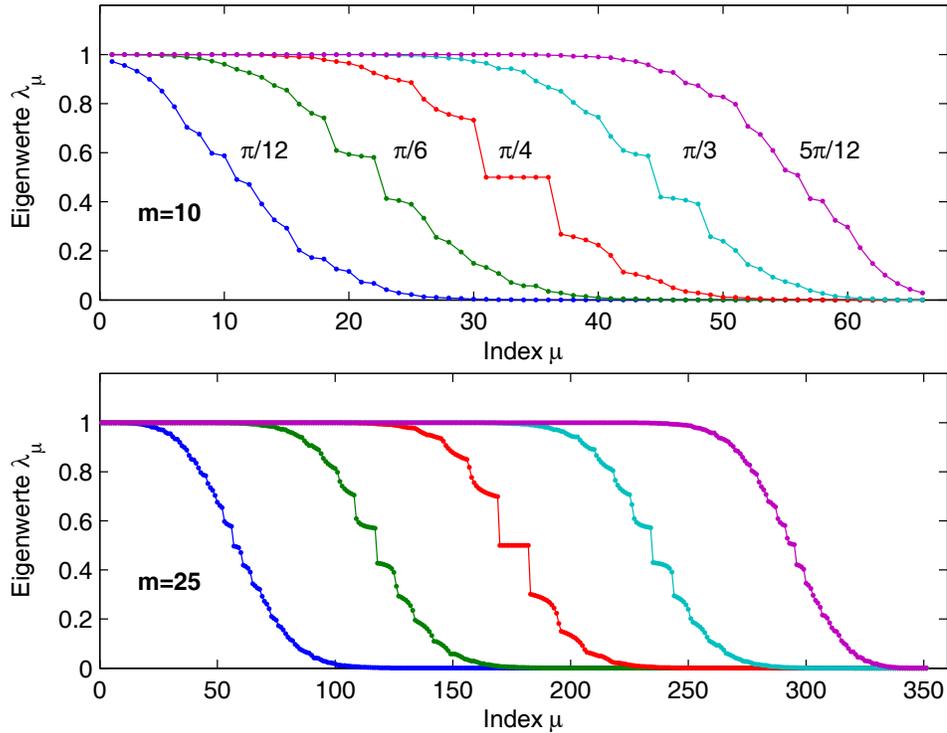


Abbildung 3.2: Darstellung der Eigenwerte von $B(m; \pi/2, \phi)$ für $m = 10$ bzw. $m = 25$ und $\phi = \pi/12$ (blau), $\pi/6$ (grün), $\pi/4$ (rot), $\pi/3$ (türkis) und $5\pi/12$ (violett).

Wie wir in Abbildung 3.2 erkennen können, lassen sich die Eigenwerte — von einem Übergangsbereich abgesehen — auch hier in je einen Teil, der nahe bei 1 bzw. 0 liegt, aufteilen. Dabei ist deutlich zu erkennen, dass der Übergang bei $m = 25$ schärfer lokalisiert ist. Darüber hinaus ist hier im Gegensatz zu Abbildung 3.1 die Breite des Übergangs bei festem m unabhängig vom jeweiligen Wert von ϕ , die Übergänge selbst haben hier auch einen ungefähr gleichen Abstand voneinander.

Wie ändert sich dieses Verhalten nun, wenn wir zusätzlich auch die Polarwinkeldaten einschränken? Zur Illustration sind in Abbildung 3.3 jeweils für $m = 25$ (in größeren Matrizen sind die Veränderungen besser zu erkennen)

die entsprechenden Eigenwertverteilungen für verschiedene Werte $\vartheta < \pi/2$ dargestellt.

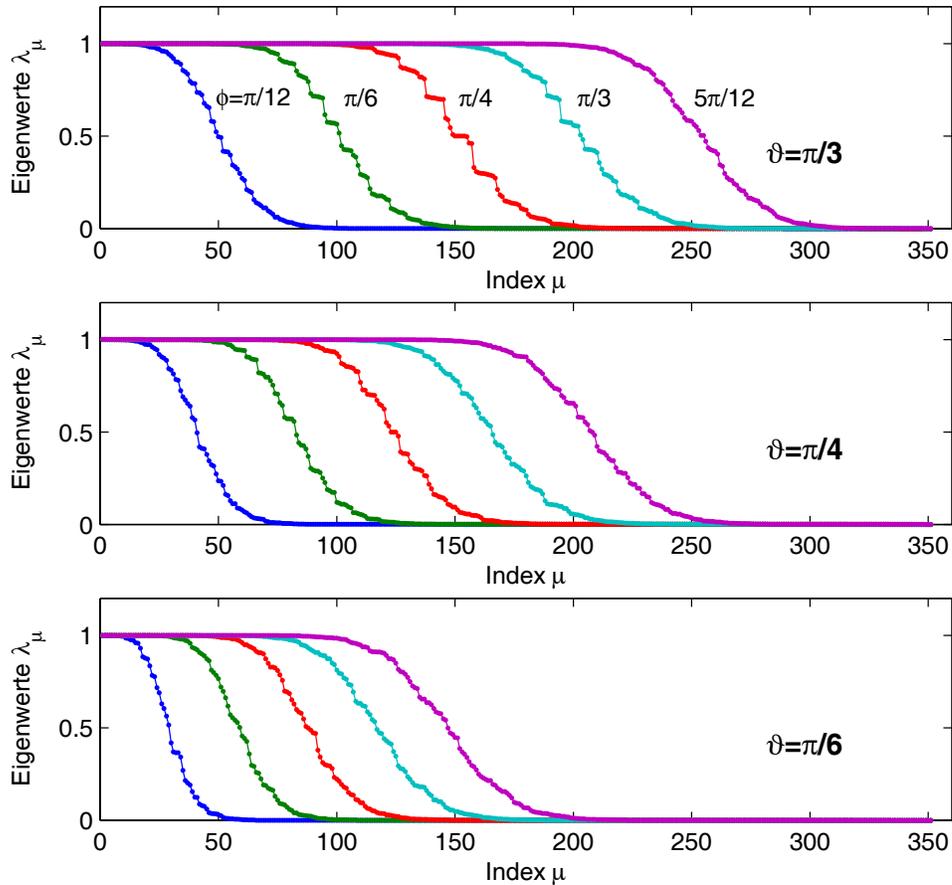


Abbildung 3.3: Darstellung der Eigenwerte von $B(25; \vartheta, \phi)$ für $\vartheta = \pi/3, \pi/4, \pi/6$ und jeweils $\phi = \pi/12$ (blau), $\pi/6$ (grün), $\pi/4$ (rot), $\pi/3$ (türkis) und $5\pi/12$ (violett).

Offensichtlich bewirkt die zusätzliche Einschränkung, dass sich die Anzahl der Eigenwerte bei 0 vergrößert, und zwar umso stärker, je weniger Daten vorhanden sind. Dies ist nicht überraschend, sondern entspricht den Erwartungen: Je weniger Daten zur Verfügung stehen, desto weniger singuläre Funktionen sollten wir rekonstruieren können. In den Matrizen spiegelt sich das gerade in einem größeren Anteil von Eigenwerten nahe 0 wider.

Insgesamt erinnern die Plots jeweils an eine gestauchte und geglättete Version von Abbildung 3.2. Allerdings verkleinert sich der Übergangsbereich bei besonders wenig Daten und erinnert dort fast wieder an eine Sprungstelle

(z. B. für $\vartheta = \pi/6$ und $\phi = \pi/12$). Der gleichbleibende Abstand zwischen den verschiedenen Übergangsbereichen bleibt dabei erhalten.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir die Situation nochmal aus einer anderen Perspektive, indem wir nun die jeweiligen Eigenwertverteilungen für festes $\phi < \pi/2$ zusammenfassen und wieder ϑ in $\pi/12$ -Schritten variieren lassen, s. Abbildung 3.4.

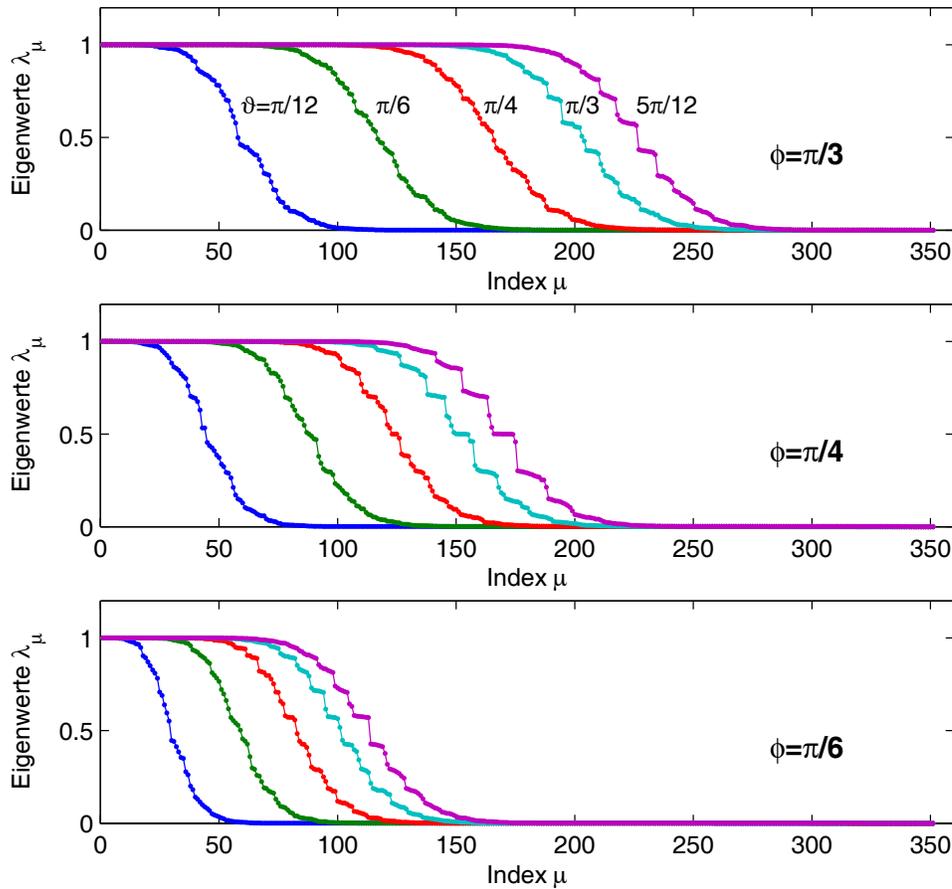


Abbildung 3.4: Darstellung der Eigenwerte von $B(25; \vartheta, \phi)$ für $\phi = \pi/3, \pi/4, \pi/6$ und jeweils $\vartheta = \pi/12$ (blau), $\pi/6$ (grün), $\pi/4$ (rot), $\pi/3$ (türkis) und $5\pi/12$ (violett).

Das Ergebnis ist ähnlich und weist die gleichen Merkmale auf: Je weniger Daten vorhanden sind, desto stärker ist der Anteil der Eigenwerte nahe 0 ausgeprägt, die Plots wirken im Vergleich mit Abbildung 3.1 wieder entsprechend gestaucht (und mit Nullen aufgefüllt). Wie in Abbildung 3.1 nimmt auch hier der jeweilige Abstand zwischen zwei Übergangsbereichen mit wach-

sendem ϑ ab.

Insgesamt wird deutlich, dass sich die Eigenwertverteilungen sämtlicher Matrizen im Aufbau ähneln und sich prinzipiell nur durch die Lage und die Breite ihrer Übergangsstelle unterscheiden.

Die Breite der Übergangsstelle lässt sich auf Basis unserer Ergebnisse nur schlecht vorhersagen. Wir können lediglich festhalten, dass sie tendenziell bei gleicher Datenverteilung mit wachsendem m schmaler wird, allerdings ohne je wirklich die Form einer Sprungstelle wie bei den Matrizen $A(n, \vartheta; m, k)$ aus Kapitel 2 anzunehmen.

Deshalb ist es umso erfreulicher, dass wir wenigstens die Lage des Übergangsbereichs recht genau beschreiben können. Entscheidend hierfür ist, den Anteil der zur Verfügung stehenden Daten passend zu quantifizieren.

In Abschnitt 2.3 haben wir als Maß für die Menge der vorhandenen Daten stillschweigend die Länge des Intervalls $[\pi - \vartheta, \pi + \vartheta]$ herangezogen. Dies war dort insofern gerechtfertigt, als dass wir dadurch immerhin für $k_1 = 0$ die Lage der Sprungstelle recht genau beschreiben konnten.

Hier stellt sich heraus, dass das richtige Maß durch $|S_{\vartheta, \phi}^2|$ gegeben ist, also durch die Fläche, die die gegebenen Winkeldaten auf der Einheitskugel S^2 einnehmen. Mit Kugelkoordinaten berechnet sich diese schnell zu

$$|S_{\vartheta, \phi}^2| = 8\phi \sin \vartheta.$$

Mit unserer Formel

$$\frac{\text{verfügbare Datenmenge}}{\text{komplette Datenmenge}} \times \text{Anzahl der Eigenwerte},$$

erhalten wir dann wegen $|S^2| = 4\pi$ das Ergebnis

$$\frac{2\phi}{\pi} \sin \vartheta \cdot \left(\frac{m^2}{2} + \frac{3m}{2} + 1 \right). \quad (3.16)$$

Tatsächlich beschreibt diese Formel die Lage der Übergangsbereiche in den jeweiligen Matrizen recht gut, der nächstliegende Eigenwert stellt jeweils den Mittelpunkt des Übergangsbereichs dar. Des Weiteren erklärt der $\sin \vartheta$ -Term auch plausibel, warum die Übergangsbereiche bei festem ϕ mit wachsendem ϑ dichter zusammenrücken, aber umgekehrt bei festgehaltenem ϑ und wachsendem ϕ einen gleichbleibenden Abstand aufweisen.

Zuletzt sei noch bemerkt, dass obige Ergebnisse ebensowenig wie in Kapitel 2 einen Beleg für Eigenwerte $\lambda_\mu = 0$ liefern. Die Werte sind zwar sehr klein, liegen aber immer noch deutlich über der Maschinengenauigkeit.

3.3.3 Eine alternative Datenverteilung

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass die Winkeldaten für $\omega \in S_{\vartheta, \phi}^2$ zur Verfügung stehen. Hier wollen wir untersuchen, wie sich die für die SWZ benötigten Matrizen und deren Eigenwerte ändern, wenn wir eine alternative Datenverteilung voraussetzen. Dafür haben wir im Wesentlichen zwei Möglichkeiten:

Einerseits können wir annehmen, dass die Azimutaldaten im Komplement der bisherigen Intervalle vorhanden sind, also für $\varphi \in [\phi, \pi - \phi] \cup [\pi + \phi, 2\pi - \phi]$. In diesem Fall ändert sich die Bedeutung von ϕ , nun sind umso weniger Daten vorhanden je größer ϕ ist. Ansonsten bleibt jedoch alles beim Alten, die Menge der dann vorhandenen Winkeldaten $\widetilde{S}_{\vartheta, \phi}^2$ entspricht bis auf eine Rotation um $\pi/2$ um die z -Achse gerade $S_{\vartheta, \pi/2 - \phi}^2$.

Andererseits können wir wie schon in Kapitel 2 den Komplementärbereich des Polarwinkels betrachten, dann gehen wir davon aus, dass der Polarwinkel θ aller verfügbaren Daten in $[0, \pi/2 - \vartheta] \cup [\pi/2 + \vartheta, \pi]$ liegt. Nun sind umso mehr Daten vorhanden, je kleiner ϑ ist.

Diese Winkelverteilung lässt sich nicht mehr auf den bereits betrachteten Fall zurückführen. Anschaulich wird dies folgendermaßen ersichtlich: Das Innere des Datenbereichs zerfällt nun in vier einfach zusammenhängende Bereiche, die jeweils an den „Polen“ der Einheitssphäre liegen, während zuvor lediglich zwei solcher Bereiche in der Nähe des „Äquators“ zur Verfügung standen. Folglich ist nicht von vornherein klar, ob auch hier die Eigenwertverteilungen das gewohnte Verhalten zeigen.

Die Einträge der entsprechenden Matrizen $\tilde{B}(m; \vartheta, \phi)$ sind durch

$$\tilde{b}_{jj'} = \begin{cases} 0, & k(j) + k(j') \text{ ungerade} \\ 8c(j)c(j') \int_{\sin \vartheta}^1 P_{m-2l(j)}^{|k(j)|}(x) P_{m-2l(j')}^{|k(j')|}(x) dx \\ \quad \times \begin{cases} \frac{\sin((k(j)-k(j'))\phi)}{k(j)-k(j')} & , k(j) \neq k(j') \\ \phi & , k(j) = k(j') \end{cases} & , k(j) + k(j') \text{ gerade} \end{cases} \quad (3.17)$$

gegeben. Offensichtlich unterscheiden sich die Einträge von $\tilde{B}(m; \vartheta, \phi)$ und $B(m; \vartheta, \phi)$ nur bezüglich des Integrationsintervalls: Anstatt über $[0, \sin \vartheta]$ erstreckt sich das Integral nun über $[\sin \vartheta, 1]$.

Im Gegensatz zu Kapitel 2 können wir die Eigenwerte der Matrizen $\tilde{B}(m; \vartheta, \phi)$ im Allgemeinen nicht mehr über die Eigenwerte von $\text{Id} - B(m; \vartheta, \phi)$ berechnen. Eine Ausnahme bildet dabei wieder der Spezialfall vollständiger Azimutalwinkeldaten: Für eine passend gewählte Basis hat

$\tilde{B}(m; \vartheta, \pi/2)$ Blockdiagonalgestalt, wobei die einzelnen Blöcke nun aus Matrizen der Form $\text{Id} - A(3, \vartheta; m, |k(j)|)$ bestehen. Die zugehörigen Eigenwertverteilungen haben wir exemplarisch für $m = 10$ und $m = 25$ in Abbildung 3.5 dargestellt.

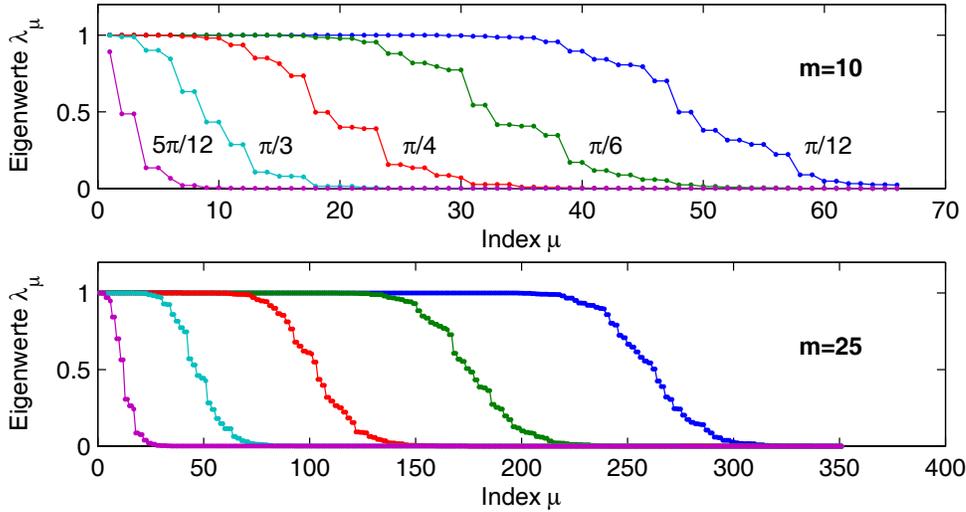


Abbildung 3.5: Darstellung der Eigenwerte von $\tilde{B}(m; \vartheta, \pi/2)$ für $m = 10$ bzw. $m = 25$ und $\vartheta = 5\pi/12$ (violett), $\pi/3$ (türkis), $\pi/4$ (rot), $\pi/6$ (grün) und $\pi/12$ (blau).

Wie erwartet entsprechen die Eigenwerte λ_μ den Werten $1 - \lambda'_\mu$, wenn λ'_μ die Eigenwerte der entsprechenden Matrizen $B(m; \vartheta, \pi/2)$ bezeichnet, vgl. Abbildung 3.1.

Allgemein bestätigt sich, dass wir diese Eigenwertverteilungen ebenfalls über die Lage des Übergangsbereichs charakterisieren können. Die Methode, die Menge der vorhandenen Winkeldaten über ihre Fläche auf S^2 zu quantifizieren, erweist sich dabei auch hier als geeigneter Ansatzpunkt. Die überdeckte Oberfläche ist nun

$$8\phi(1 - \sin \vartheta).$$

Dementsprechend wird diesmal die Lage des Mittelpunkts des Übergangsbereichs durch die Formel

$$\frac{2\phi}{\pi}(1 - \sin \vartheta) \cdot \left(\frac{m^2}{2} + \frac{3m}{2} + 1 \right) \tag{3.18}$$

beschrieben.

Das können wir so interpretieren, dass sich für die alternative Datenverteilung ungefähr gleichviele singuläre Funktionen rekonstruieren lassen wie mit den bisherigen Standarddaten, sofern nur die jeweils vorhandenen Winkeldaten eine gleichgroße Fläche auf der Einheitskugel einnehmen.

Abbildung 3.6 zeigt zwei Beispiele, bei denen die jeweiligen Polarwinkel ϑ bzw. ϑ' so gewählt wurden, dass gemäß (3.16) bzw. (3.18) in beiden Datenverteilungen bei gleichem Azimutalwinkel ϕ gleichviele Daten zur Verfügung stehen.

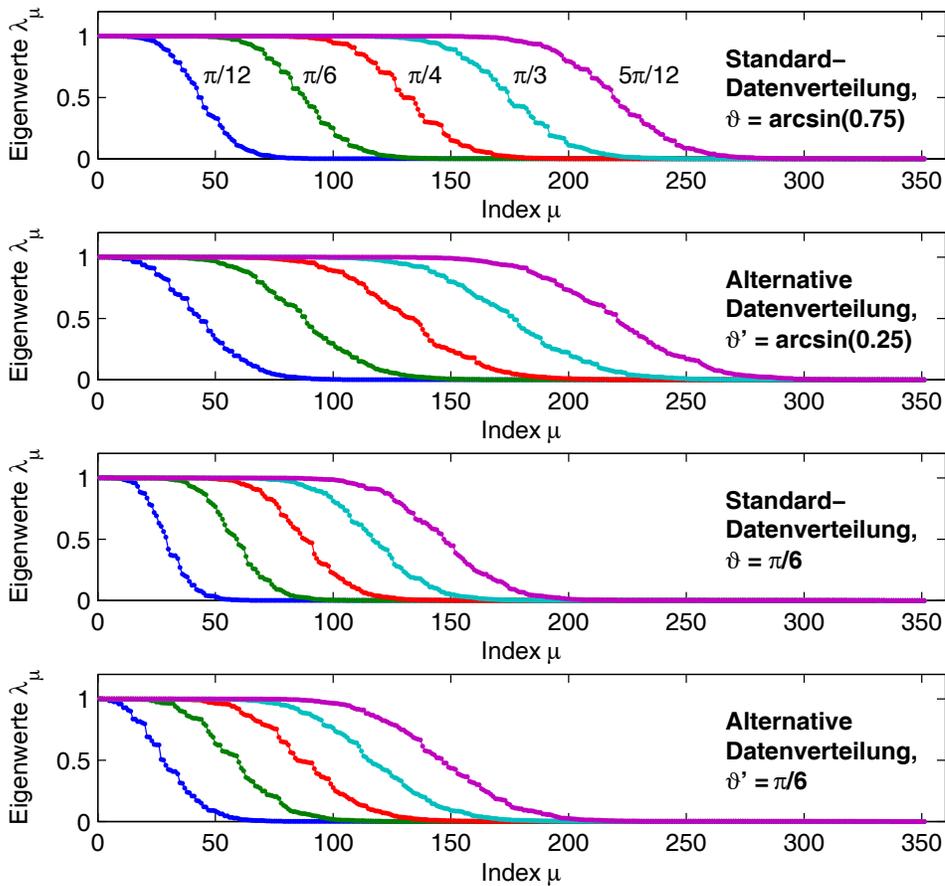


Abbildung 3.6: Gegenüberstellung der Eigenwerte von $B(25; \vartheta, \phi)$ und $\tilde{B}(25; \vartheta', \phi)$ für $\vartheta = \arcsin(0.75)$ bzw. $\vartheta' = \arcsin(0.25)$ (obere Hälfte) sowie $\vartheta = \vartheta' = \pi/6$ (untere Hälfte), jeweils für $\phi = 5\pi/12$ (violett) $\pi/3$ (türkis), $\pi/4$ (rot), $\pi/6$ (grün) und $\pi/12$ (blau).

Auch wenn die Mittelpunkte der Übergangsbereiche für beide Datenverteilungen gemäß den Formeln sehr genau übereinstimmen, gibt es dennoch

einen erkennbaren Unterschied: Die Übergangsbereiche der alternativen Datenverteilung sind breiter ausgeprägt, so dass die Anzahl der Eigenwerte nahe 0 etwas kleiner ist. Umgekehrt ist damit der Anteil der Eigenwerte, die bei der Rekonstruktion benutzt werden können, in der alternativen Datenverteilung entsprechend größer.

Da die Auswirkungen dieses Effekts jedoch insgesamt eher gering sind, können wir Abbildung 3.6 alles in allem immer noch als Bestätigung obiger Vermutung ansehen: Unabhängig von der Datenverteilung lassen sich bei gleichgroßen Datenmengen ungefähr gleichviele singuläre Funktionen rekonstruieren.

Im Nachhinein können wir damit auch das Verhalten der Eigenwerte der Matrizen $A(3, \vartheta; m, k)$ aus Kapitel 2 erklären: Zwar mag sich die Anzahl der dort rekonstruierbaren singulären Funktionen zu festem m und k je nach Datenverteilung deutlich unterscheiden, aber zumindest die Gesamtzahl aller bei festem m rekonstruierbaren Funktionen ist — gleichgroße Datenmengen im obigen Sinne vorausgesetzt — vergleichbar.

3.4 Approximative Inverse

Das weitere Vorgehen zur Bestimmung der Approximativen Inverse ist mittlerweile klar. Wir beginnen mit dem

3.4.1 Lösen von $R_{\vartheta, \phi} \psi_{\gamma}^{LA} = e_{\gamma}$

Auch hier nehmen wir an, dass wir die Gleichung $R_{\vartheta, \phi}^* \psi_{\gamma}^{LA} = e_{\gamma}$ für einen rotationssymmetrischen Mollifier $e_{\gamma} \in \text{Bild}(R_{\vartheta, \phi}^*)$ lösen. Als Ausgangspunkt erhalten wir diesmal (wobei wir die Summenzeichen wieder so verstehen, dass nur über Indizes aufsummiert wird, für die $\lambda_{\mu}(m; \vartheta, \phi) \neq 0$ gilt)

$$\psi_{\gamma}^{LA}(\omega, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{m(m+3)/2} \tau_{m\mu}^{-1} \langle e_{\gamma}, f_{m\mu} \rangle_{L^2(\Omega^3)} g_{m\mu}(\omega, s).$$

Im Ausdruck

$$\langle e_{\gamma}, f_{m\mu} \rangle_{L^2(\Omega^3)} = \sum_{j=0}^{m(m+3)/2} d_{\mu}(m; \vartheta, \phi)_j \langle e_{\gamma}, v_{mj} \rangle_{L^2(\Omega^3)}$$

tritt wieder das Skalarprodukt $\langle e_{\gamma}, v_{mj} \rangle$ auf, von dem wir bereits wissen (vgl. Abschnitte 1.3.2 und 2.4.1), dass es für einen rotationssymmetrischen Mollifier e_{γ} nur bei geradem m und $l(j) = m/2$, $k(j) = 0$ ungleich 0 ist. Bezeichnen

wir mit j_0 den Index, für den $l(j_0) = m/2$ und $k(j_0) = 0$ gilt, erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \psi_\gamma^{LA}(\omega, s) &= \sum_{\substack{m=0, \\ m \text{ gerade}}}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{m(m+3)/2} \tau_{m\mu}^{-1} d_\mu(m; \vartheta, \phi)_{j_0} \langle e_\gamma, v_{m,j_0} \rangle_{L^2(\Omega^3)} g_{m\mu}(\omega, s) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{m(2m+3)} \tau_{2m,\mu}^{-1} d_\mu(2m; \vartheta, \phi)_{j_0} \langle e_\gamma, v_{2m,j_0} \rangle_{L^2(\Omega^3)} g_{2m,\mu}(\omega, s). \end{aligned}$$

Offensichtlich gehen hier für gerades m alle zugehörigen singulären Funktionen in die Berechnung des Rekonstruktionskerns ein, s. a. Bemerkung 3.4.3. Die Rotationssymmetrie des Mollifiers e_γ bewirkt hier lediglich, dass die singulären Funktionen zu ungeradem m herausfallen. Der Aufwand zur Berechnung des Rekonstruktionskerns ist hier also deutlich höher als im Falle der θ_1 -LA-RT aus Kapitel 2, nicht zuletzt weil die hier benötigten SWZ-Matrizen deutlich größer ausfallen.

Ansonsten erhalten wir nach einer von hier an zu Abschnitt 2.4.1 vollkommen analogen Rechnung das Ergebnis

$$\begin{aligned} \psi_\gamma^{LA}(\omega, s) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 3/4) \tilde{I}_{m,\gamma} C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) w(s) q_{2m}(\omega) \\ \text{bzw. } \psi_\gamma^{LA}(\omega, s) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 3/4) I_{2m,\gamma} C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) w(s) q_{2m}(\omega), \end{aligned}$$

wobei wie üblich

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{m,\gamma} &= \int_0^1 e_\gamma(r) P_m^{(0,1/2)}(2r^2 - 1) r^2 dr \\ I_{2m,\gamma} &= \int_0^1 Re_\gamma(s) C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) ds \end{aligned}$$

bezeichne und q_{2m} diesmal definiert ist als

$$q_{2m}(\omega) := |S^2|^{1/2} \sum_{l=0}^{m(2m+3)} \Lambda_l(m) Y_l(\omega) = 2\sqrt{\pi} \sum_{l=0}^{m(2m+3)} \Lambda_l(m) Y_l(\omega),$$

mit

$$\Lambda_l(m) = \sum_{\mu=0}^{m(2m+3)} \lambda_\mu(2m; \vartheta, \phi)^{-1} d_\mu(2m; \vartheta, \phi)_{j_0} d_\mu(2m; \vartheta, \phi)_l. \quad (3.19)$$

Gemäß Abschnitt 3.3 wird man hier ebenfalls die Berechnung der Λ_l regularisieren müssen, so dass es abermals Sinn macht, den Rekonstruktionskern in der Form

$$\psi_\gamma^{LA}(\omega, s) = \psi_\gamma^{FD}(s) + \zeta(\omega, s)$$

zu schreiben. Dabei bezeichnet $\zeta(\omega, s)$ wieder die Differenz aus Full-Data und Limited-Angle Rekonstruktionskern. Wir halten unsere Ergebnisse fest in folgendem

Satz 3.4.1.

Es sei $e_\gamma \in \text{Bild}(R_{\vartheta, \phi}^*)$ ein rotationssymmetrischer Mollifier. Dann gilt für den Rekonstruktionskern ψ_γ^{LA} der allgemeinen 3D Limited-Angle Radon Transformation $R_{\vartheta, \phi}$ als Lösung von $R_{\vartheta, \phi} \psi_\gamma^{LA} = e_\gamma$ die Darstellung

$$\psi_\gamma^{LA}(\omega, s) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 3/4) \tilde{I}_{m, \gamma} C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) w(s) q_{2m}(\omega) \quad (3.20)$$

$$\text{bzw. } \psi_\gamma^{LA}(\omega, s) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 3/4) I_{2m, \gamma} C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) w(s) q_{2m}(\omega), \quad (3.21)$$

wobei

$$q_{2m}(\omega) = 2\sqrt{\pi} \sum_{l=0}^{m(2m+3)} \Lambda_l(m) Y_l(\omega) \quad \text{mit} \quad (3.22)$$

$$\Lambda_l(m) = \sum_{\mu=0}^{m(2m+3)} \lambda_\mu(2m; \vartheta, \phi)^{-1} d_\mu(2m; \vartheta, \phi)_{j_0} d_\mu(2m; \vartheta, \phi)_l \quad (3.23)$$

gilt. Ebenso können wir ψ_γ^{LA} in der numerisch günstigeren Form

$$\psi_\gamma^{LA}(\omega, s) = \psi_\gamma^{FD}(s) + \zeta(\omega, s) \quad (3.24)$$

ausdrücken. Dabei ist der Korrekturterm $\zeta(\omega, s)$ gegeben durch

$$\zeta(\omega, s) = \psi_\gamma^{LA}(\omega, s) - \psi_\gamma^{FD}(s) \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 3/4) \tilde{I}_{m, \gamma} C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) w(s) (q_{2m}(\omega) - 1) \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + 3/4) I_{2m, \gamma} C_{2m}^{\frac{3}{2}}(s) w(s) (q_{2m}(\omega) - 1). \quad (3.27)$$

□

Korollar 3.4.2.

Es gelten die Symmetrierelationen

$$\psi_\gamma^{LA}(\omega, -s) = \psi_\gamma^{LA}(\omega, s) = \psi_\gamma^{LA}(-\omega, s) \quad (3.28)$$

$$\text{sowie} \quad \zeta(\omega, -s) = \zeta(\omega, s) = \zeta(-\omega, s). \quad (3.29)$$

Beweis. Analog zum Beweis von Korollar 2.4.3: Das erste Gleichheitszeichen gilt, weil die auftretenden Gegenbauer-Polynome und das Gewicht w gerade sind. Das zweite Gleichheitszeichen gilt, weil die q_{2m} gerade Funktionen sind. Um letzteres einzusehen, müssen wir uns lediglich daran erinnern, dass wegen $Y_s = Y_{2(m-l(s))}^{k(s)}$ auch diesmal alle beteiligten Kugelflächenfunktionen immer noch gerade sind, vgl. (1.1.1). \square

Bemerkung 3.4.3.

Wie schon oben erwähnt, sind hier für ein gerades m alle $m(m+3)/2+1$ singulären Funktionen bei der Berechnung des Rekonstruktionskerns notwendig — im Gegensatz zum Rekonstruktionskern der θ_1 -LA-RT (vgl. Abschnitt 2.4.1), wo sich die Anzahl der beteiligten singulären Funktionen auf $\frac{m}{2}+1$ reduzierte.

Formal gesehen liegt das natürlich daran, dass wir bei der Konstruktion der singulären Funktionen $f_{m\mu}$ für festes m auf alle $m(m+3)/2+1$ singulären Funktionen v_{mj} zurückgreifen müssen und dementsprechend jede Funktion $f_{2m,\mu}$ einen Anteil von v_{2m,j_0} besitzt. In Kapitel 2 konnten wir uns hingegen auf jeweils $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ Funktionen beschränken, weil wir dort nur bzgl. eines Indexes orthogonalisieren mussten.

Anschaulich benötigt man hier für den Rekonstruktionskern eine größere Anzahl von Funktionen, um die fehlende Azimutalsymmetrie von $S_{\vartheta,\phi}^2$ im Vergleich zu S_ϑ^2 auszugleichen. Denn nun gehen auch Kugelflächenfunktionen $Y_j = Y_{2(m-l(j))}^{k(j)}$ mit $k(j) \neq 0$ ein, die demzufolge keine Symmetrie bzgl. φ aufweisen. Dies spiegelt sich auch in der Tatsache wieder, dass die q_{2m} (und damit ganz ψ_γ^{LA}) nun nicht nur von θ , sondern auch von φ abhängen.⁴

3.4.2 Rekonstruktionsformel

Zum Schluss wollen wir auch hier die eigentliche Rekonstruktionsformel für die allgemeine 3D Limited-Angle Radon Transformation angeben. Auf Grund der vorhandenen Translationsinvarianz und der entsprechenden Symmetrierelationen des Rekonstruktionskerns (vgl. Korollar 3.4.2) verläuft die Rech-

⁴Dies gilt auch dann noch, wenn bzgl. θ alle Daten vorhanden sind. Dann haben wir den bereits in Bemerkung 2.4.4 angesprochenen Fall vorliegen, dass die Daten bzgl. eines Winkels eingeschränkt sind, der Rekonstruktionskern jedoch von zwei Winkeln abhängt.

nung vollkommen analog zu derjenigen in Abschnitt 2.4.2, so dass wir uns darauf beschränken, das entsprechende Ergebnis zu formulieren:

Satz 3.4.4.

Sei $e_\gamma^0 \in \text{Bild}(R_{\vartheta,\phi}^*) \cap C^\infty(\Omega^n)$ ein rotationssymmetrischer Mollifier und $\psi_\gamma^{LA,0} = \tilde{\psi}_\gamma^{LA,0} w$ der zugehörige Rekonstruktionskern aus Satz 3.4.1. Für die zur Rekonstruktion an der Stelle x benutzten Mollifier gelte $e_\gamma(x, \cdot) = T_1^x e_\gamma^0$.

Dann lässt sich die Approximative Inverse S_γ der allgemeinen 3D Limited-Angle Radon Transformation $R_{\vartheta,\phi}$ in der Form

$$S_\gamma(x) = f_\gamma(x) = \frac{1}{4} \int_{S_{\vartheta,\phi;+}^2} \int_{-1}^1 g(\omega, s) \tilde{\psi}_\gamma^{LA,0} \left(\omega, \frac{s - x^\top \omega}{2} \right) ds d\omega \quad (3.30)$$

darstellen, wobei

$$S_{\vartheta,\phi;+}^2 := \{\omega \in S_{\vartheta,\phi}^2 \mid \omega_3 > 0\} \quad (3.31)$$

bezeichnet. □

Anhang A

Spezielle Funktionen

Um ständiges Nachschlagen zu vermeiden und gleichzeitig alle in der vorliegenden Arbeit benutzten Relationen spezieller Funktionen im Überblick verfügbar zu haben, werden hier stichwortartig ihre wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt.

A.1 Die Gamma-Funktion Γ

Für uns sind hier nur wenige Eigenschaften der Γ -Funktion wichtig: Sie hat keine Nullstellen und interpoliert die Fakultät für Werte $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, es gilt nämlich (vgl. [8], 8.331 und 8.339):

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N} \qquad (\text{A.1})$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^- \qquad (\text{A.2})$$

Zudem wird des Öfteren benutzt, dass

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad (\text{A.3})$$

(vgl. [8], 8.338) gilt.

A.2 Die Jacobi-Polynome $P_m^{(\alpha,\beta)}$

Die *Jacobi-Polynome* $P_m^{(\alpha,\beta)}$, $m \geq 0$, $\alpha, \beta > -1$, sind über dem Intervall $[-1, 1]$ orthogonal bzgl. der Gewichtsfunktion $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ und

erfüllen (vgl. [8] 7.391)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx \\ &= \delta_{mn} \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Sie bilden ein vollständiges orthogonales System im gewichteten L^2 -Raum $L^2([-1, 1], w)$ (vgl. [9], Chapter 1.9). Abhängig von ihrem Grad haben sie gerade bzw. ungerade Parität, d.h. es gilt

$$P_m^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^m P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (\text{A.5})$$

(vgl. [8], 8.961).

A.3 Die Gegenbauer-Polynome C_m^λ

Die *Gegenbauer-Polynome* C_m^λ , $m \geq 0$, $\lambda > -\frac{1}{2}$, entsprechen bis auf Umnormierung den Jacobi-Polynomen $P_m^{(\alpha,\beta)}$ für den Spezialfall $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$. Sie sind definiert als

$$C_m^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(m+2\lambda)}{(m+\lambda + \frac{1}{2})} P_m^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x) \quad (\text{A.6})$$

(s. [1], 22.5.20) und erfüllen demgemäß die entsprechende Orthogonalitätsrelation bzgl. der Gewichtsfunktion $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_m^\lambda(x) C_n^\lambda(x) dx \\ &= \delta_{mn} 2^{1-2\lambda} \frac{\pi \Gamma(m+2\lambda)}{(m+\lambda)\Gamma^2(\lambda)m!}, \quad \lambda \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

(vgl. [1], 22.2.3). Darüber hinaus erben sie neben der Vollständigkeit in $L^2([-1, 1], w)$ natürlich auch die Symmetrierelationen der Jacobi-Polynome, es gilt also

$$C_m^\lambda(-x) = (-1)^m C_m^\lambda(x). \quad (\text{A.8})$$

Des Weiteren sind hier noch die Eigenschaften

$$C_0^\lambda(x) = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d^k}{dx^k} C_m^\lambda(x) = 2^k \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} C_{m-k}^{\lambda+k}(x) \quad (\text{A.10})$$

(vgl. [8] 8.935, 8.937) von Nutzen.

A.4 Die Legendre-Polynome P_m und die assoziierten Legendre-Funktionen P_m^l

Die *Legendre-Polynome* P_m sind wiederum ein Spezialfall der Gegenbauer-Polynome, es gilt nämlich

$$P_m(x) = C_m^{1/2}(x) \quad (\text{A.11})$$

(vgl. [8] 8.936). Sie bilden also ein vollständiges orthogonales System in $L^2(-1, 1)$, haben die Symmetrie-Eigenschaft

$$P_m(-x) = (-1)^m P_m(x) \quad (\text{A.12})$$

und erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \delta_{mn} \frac{2}{2m+1}. \quad (\text{A.13})$$

Die *assozierten Legendre-Funktionen* P_m^l (mit $m \in \mathbb{N}_0$, $l = -m, \dots, m$) erhalten wir im Wesentlichen durch Ableiten der Legendre-Polynome P_m . Zunächst setzen wir für $m \geq l \geq 0$

$$P_m^l(x) := (-1)^l (1-x^2)^{l/2} \frac{d^l}{dx^l} P_m(x) \quad (\text{A.14})$$

und definieren P_m^l für negative Ordnungen l über

$$P_m^l(x) := (-1)^l \frac{(m-|l|)!}{(m+|l|)!} P_m^{|l|}(x) \quad (\text{A.15})$$

(vgl. [9], Chapter 5.1 (6) und 5.3 (11)). Die P_m^l erfüllen dann die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_{-1}^1 P_m^k(x) P_n^k(x) dx = \delta_{mn} \frac{2}{2m+1} \frac{(m+k)!}{(m-k)!} \quad (\text{A.16})$$

sowie

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1} P_m^k(x) P_m^l(x) dx = \delta_{kl} \frac{(m+k)!}{k(m-k)!} \quad (\text{A.17})$$

(vgl. [1], 8.14.11 – 8.14.14). Für ihre Parität ist die Summe aus Grad m und Ordnung l entscheidend, es gilt nämlich

$$P_m^l(-x) = (-1)^{m+l} P_m^l(x) \quad (\text{A.18})$$

(vgl. [8], 8.737), s. a. (A.8), (A.10) und (A.11).

A.5 Die Tschebyscheff-Polynome 2. Art U_m

Die *Tschebyscheff-Polynome 2. Art* ergeben sich als weiterer Spezialfall der Gegenbauer-Polynome C_m^λ für $\lambda = 1$, es gilt also

$$U_m(x) = C_m^1(x) \quad (\text{A.19})$$

(vgl. [1], 22.5.34). Demgemäß bilden sie ein vollständiges orthogonales System in $L^2([-1, 1], w)$, $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$, und erfüllen die Symmetrierelation

$$U_m(-x) = (-1)^m U_m(x) \quad (\text{A.20})$$

sowie die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 U_m(x) U_n(x) \sqrt{1 - x^2} dx = \delta_{mn} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.21})$$

Anhang B

Kugelkoordinaten in n Dimensionen

Kugelkoordinaten stellen im \mathbb{R}^3 ein vertrautes Hilfsmittel dar und bedürften keiner weiteren Erläuterung. Anders hingegen sieht es mit Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^n für $n \geq 4$ aus. Diese werden nur selten benötigt, ihr genaues Aussehen ist daher eher unbekannt. Deshalb werden wir an dieser Stelle ihre allgemeine Definition und die zur Rechnung notwendigen Eigenschaften bereitstellen. Details können dabei z. B. in [26] nachgelesen werden.

B.1 Definition

Ausgehend von den bekannten „Kugelkoordinaten in \mathbb{R}^2 “, den Polarkoordinaten

$$x^{(2)}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

(wobei $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ gilt), kann man induktiv die höherdimensionalen Kugelkoordinaten definieren. Dazu setzen wir für $n \geq 3$ komponentenweise

$$\begin{aligned} & x_i^{(n)}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) \\ & := \begin{cases} \sin \theta_1 x_i^{(n-1)}(r, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) & , i \in \{1, \dots, n-1\} \\ r \cos \theta_1 & , i = n \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Dabei gilt nun $r \geq 0$, die *Polarwinkel* θ_j sind jeweils aus $[0, \pi]$, und der *Azimuthalwinkel* φ liegt in $[0, 2\pi]$.¹

¹In dieser Form ist (B.2) offensichtlich nicht injektiv. Um dies zu erreichen (etwa um die Transformationsformel anzuwenden), müssen noch gewisse Lebesgue-Nullmengen her-

Auf diese Weise erhalten wir z. B. die bekannten dreidimensionalen Kugelkoordinaten

$$x^{(3)}(r, \theta_1, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta_1 \cos \varphi \\ r \sin \theta_1 \sin \varphi \\ r \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

mit $r \geq 0$, $\theta_1 \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Beschränken wir uns auf Punkte der Einheitskugel S^{n-1} , schreiben wir

$$\omega^{(n)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) := x^{(n)}(r = 1, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi). \quad (\text{B.4})$$

B.2 Eigenschaften

Der Betrag der entsprechenden Funktionaldeterminanten bzw. — anschaulich gesprochen — das Volumenelement der Kugelkoordinaten ergibt sich zu

$$dx^{(n)} = r^{n-1} dr dS^{n-1}, \quad (\text{B.5})$$

wobei

$$\begin{aligned} dS^{n-1} &:= dS_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)}^{n-1} \\ &= \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\varphi \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$= \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 dS_{(\theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)}^{n-2} \quad (\text{B.7})$$

das Flächenelement der n -dimensionalen Einheitskugel (d. h. $r = 1$) ist, deren gesamte Oberfläche durch

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (\text{B.8})$$

gegeben ist. Mit Hilfe von (B.5) können wir schnell das Volumen einer n -dimensionalen Kugel mit Radius r zu

$$\text{Vol}(B_r) = \frac{|S^{n-1}|}{n} r^n \quad (\text{B.9})$$

bestimmen (s. a. [3]), es ist also proportional zur n -ten Potenz des Radius. Eine weitere nützliche Eigenschaft notieren wir im

ausgenommen werden, s. [26].

Lemma B.2.1.

Mit obigen Bezeichnungen gilt²

$$-\omega^{(n)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) = \omega^{(n)}(\pi - \theta_1, \pi - \theta_2, \dots, \pi - \theta_{n-2}, \varphi + \pi). \quad (\text{B.10})$$

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis nach n .

Für $n = 2$ reduziert sich die Behauptung auf

$$-\omega^{(2)}(\varphi) = \omega^{(2)}(\varphi + \pi),$$

was wegen $\sin(\varphi + \pi) = -\sin \varphi$ und $\cos(\varphi + \pi) = -\cos \varphi$ unmittelbar aus (B.1) folgt.

Nun sei $n \geq 3$ und die Behauptung gelte für $n - 1$. Dann ergibt sich wegen $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ und $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$

$$\begin{aligned} & \omega_i^{(n)}(\pi - \theta_1, \dots, \pi - \theta_{n-2}, \varphi + \pi) \\ &= \begin{cases} \sin(\pi - \theta_1) \omega_i^{(n-1)}(\pi - \theta_2, \dots, \pi - \theta_{n-2}, \varphi + \pi) & , i \in \{1, \dots, n-1\} \\ r \cos(\pi - \theta_1) & , i = n \end{cases} \\ &\stackrel{I.V.}{=} \begin{cases} \sin \theta_1 (-\omega_i^{(n-1)}(\theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)) & , i \in \{1, \dots, n-1\} \\ -r \cos \theta_1 & , i = n \end{cases} \\ &= -\omega_i^{(n)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

²Dabei ist $\varphi + \pi$ natürlich als $\varphi + \pi$ modulo 2π zu verstehen.

Literaturverzeichnis

- [1] M. ABRAMOWITZ UND I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965
- [2] H. W. ALT, *Lineare Funktionalanalysis – Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Berlin, 1985
- [3] I. N. BRONSTEIN UND K. A. SEMENDJAJEW, *Teubner Taschenbuch der Mathematik*, Teubner, Leipzig, 1996
- [4] W. E. BYERLY, *An Elementary Treatise on Fourier's Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics, with Applications to Problems in Mathematical Physics*, Dover Publications, New York, 1959
- [5] R. L. DIETZ, *Die Approximative Inverse als Rekonstruktionsmethode in der Röntgen-Computertomographie*, Dissertation, Universität des Saarlandes, 1999
- [6] A. ERDÉLYI (Hrsg.), *Higher Transcendental Functions, Vol. II*, McGraw Hill, 1953
- [7] I. M. GELFAND, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Vol. I*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960
- [8] I. S. GRADSHTEYN UND I. M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1980. Corrected and enlarged edition.
- [9] H. HOCHSTADT, *The Functions of Mathematical Physics*, Dover 1986
- [10] P. JONAS UND A.K. LOUIS, *A Sobolev Space Analysis of Linear Regularization Methods for Ill-Posed Problems*, Journal of Inverse Ill-Posed Problems, Vol. 9, Nr. 1, S. 59-74, 2001

- [11] P. KUPPUSAMY ET AL., *Three-dimensional Spectral-Spatial EPR Imaging of Free Radicals in the Heart: a Technique for Imaging Tissue Metabolism and Oxygenation*, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, Vol. 91 (1994), S. 3388-3392
- [12] P. KUPPUSAMY ET AL., *Mapping the Spin-Density and Lineshape Distribution of Free Radicals Using 4D Spectral-Spatial EPR Imaging*, Journal of Magnetic Resonance, Series B, Vol. 107 (1995), S. 116-125
- [13] P. KUPPUSAMY ET AL., *EPR Imaging of Tissue Redox Status*, Current Topics in Biophysics, Vol. 26(1) (2002), S. 29-34
- [14] A. K. LOUIS, *Analytische Methoden in der Computer-Tomographie*, Habilitationsschrift, Fachbereich Mathematik der Universität Münster, 1981
- [15] A. K. LOUIS, *Orthogonal Function Series Expansions and the Null Space of the Radon Transform*, SIAM J. Math. Anal., 15 (1984), S. 621-633
- [16] A. K. LOUIS, *Incomplete Data Problems in X-Ray Computerized Tomography*, Numer. Math., 48 (1986), S. 251-262
- [17] A. K. LOUIS, *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Studienbücher Mathematik, B. G. Teubner, Stuttgart, 1989
- [18] A. K. LOUIS, *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Problems, 8 (1992), S. 175-190
- [19] A. K. LOUIS, *A Unified Approach to Regularization Methods for Linear Ill-Posed Problems*, Inverse Problems, 15 (1999), S. 489 - 498
- [20] A. K. LOUIS, *The Limited Angle Problem and its Singular Value Decomposition*, Preprint, 2005
- [21] W. MAGNUS UND F. OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, Springer, Berlin, 1948
- [22] F. NATTERER, *The Mathematics of Computerized Tomography*, John Wiley & Sons, Chichester, 1986
- [23] A. RIEDER, *Keine Probleme mit Inversen Problemen*, Vieweg, Wiesbaden, 2003
- [24] R. T. SEELEY, *Spherical Harmonics*, American Mathematical Monthly, Vol. 73, 1966, S. 115-121

- [25] D. SLEPIAN, *Prolate Spheroidal Wave Functions. Fourier Analysis and Uncertainty, V: The Discrete Case*, Bell Syst. Tech. J., 57 (1978), S. 1371-1430
- [26] W. WALTER, *Analysis 2*, 4. Auflage, Springer, Berlin, 1995
- [27] W. WALTER, *Einführung in die Theorie der Distributionen*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994
- [28] D. WERNER, *Funktionalanalysis*, 4. überarbeitete Auflage, Springer, Berlin, 2002

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und ausschließlich mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt habe.

Saarbrücken, den

Clemens Stefan Becker