

Approximative Inverse zur numerischen  
Lösung eines eindimensionalen inversen  
Wärmeleitungsproblems

Diplomarbeit  
zur Erlangung des akademischen Grades einer  
Diplom-Mathematikerin  
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I  
der Universität des Saarlandes

von  
Yvonne Johann

Saarbrücken  
November 2006

Betreuer: Univ.-Prof. Dr. A. K. Louis

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Mathematische Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Inverse Probleme . . . . .	5
1.2 Differenzenverfahren . . . . .	10
1.2.1 Herleitung der Differenzenverfahren . . . . .	11
1.2.2 Stabilität der Differenzenverfahren . . . . .	16
1.3 Der Zerlegungsansatz von Adomian . . . . .	18
1.3.1 Herleitung des Zerlegungsansatzes . . . . .	18
1.3.2 Konvergenz des Verfahrens . . . . .	20
1.4 Approximative Inverse . . . . .	22
1.4.1 Herleitung der Approximativen Inversen . . . . .	23
1.4.2 Reduzierung des Speicherbedarfs . . . . .	23
<b>2 Das inverse Wärmeleitungsproblem</b>	<b>26</b>
2.1 Mathematische Modellierung der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	26
2.2 Rand- und Anfangswertbedingungen . . . . .	27
2.3 Typische Problemstellungen . . . . .	29
<b>3 Lösungsverfahren für inverse Wärmeleitungsprobleme</b>	<b>31</b>
3.1 Die approximative Inverse . . . . .	31
3.1.1 Problembeschreibung . . . . .	31
3.1.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	32
3.1.3 Das adjungierte Problem . . . . .	33
3.1.4 Berechnung der approximativen Inversen . . . . .	34
3.1.5 Wahl eines konkreten Mollifiers . . . . .	39
3.1.6 Algorithmus . . . . .	40
3.2 Function–Specification–Verfahren . . . . .	42
3.2.1 Globale Approximation . . . . .	42
3.2.2 Sequentielle Approximation . . . . .	46
3.2.3 Algorithmus . . . . .	47
<b>4 Numerische Ergebnisse</b>	<b>48</b>
<b>Fazit</b>	<b>59</b>

# Notationen

$u(x, t)$	Temperaturverteilung eines Körpers an der Stelle $x$ zur Zeit $t$
$u_{xx}(x, t)$	Zweite partielle Ableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$
$u_t(x, t)$	Erste partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$
$u_{\mathbf{n}}(x, t)$	Ableitung in äußere Normalenrichtung $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t)$
$\rho$	Dichte eines Körpers
$c$	Spezifische Wärme eines Körpers
$\kappa$	Wärmeleitfähigkeit eines Körpers
$f(t)$	Gesuchter Wärmefluss
$g$	Datenfunktion
$g^\varepsilon$	Durch Fehler $\varepsilon$ verfälschte Datenfunktion
$\varepsilon$	Obere Schranke für Datenfehler
$X, Y$	Topologische Räume
$L$	Linearer kompakter Operator von $X$ nach $Y$
$L^*$	Adjungierter Operator zu $L$
$\mathcal{R}(L)$	Bild von $L$
$\mathcal{R}(L)^\perp$	Orthogonalkomplement von $\mathcal{R}$
$\Delta t$	Schrittweite bzgl. der Zeit
$\Delta x$	Schrittweite bzgl. des Ortes
$\ f(x)\ _\infty$	Maximum-Norm $\sup_{t \in \mathbb{R}}  f(x) $

# Einleitung

Die Untersuchung von Wärmeleitungsproblemen ist Bestandteil vieler technischer Branchen. So ist das Aufwärm- und Abkühlverhalten verwendeter Materialien entscheidend in der Weiterentwicklung von Konstruktionen. Solche thermophysikalischen Eigenschaften spielen in der Raumfahrt zur Beurteilung neuer Materialien für Hitzeschilde oder auch in der Motorproduktion eine Rolle.

Wärmeleitungsprobleme können in zwei Klassen unterteilt werden: In direkte und inverse Wärmeleitungsprobleme. Die erste Klasse beinhaltet Fragestellungen, bei denen die Anfangstemperatur oder der Wärme(ein)fluss an einer bestimmten Stelle eines Körpers gegeben ist und die daraus resultierende Temperaturverteilung gesucht wird.

Im Gegensatz zu dieser Klasse befinden sich in der zweiten Klasse solche Fragestellungen, bei denen man z.B. den einer Temperaturverteilung zugrunde liegenden Wärmefluss bestimmen will. Ebenfalls charakteristisch für diese Klasse sind jene Probleme, deren Ziel die Bestimmung der Wärmeleitkoeffizienten an der Oberfläche ist. Bei all diesen Problemen ist zu beachten, dass die Intensität des Wärmetransfers innerhalb eines Zeitintervalls  $[0, T]$  variieren kann. Leider ist es in der Mehrzahl der Fälle nicht möglich, den ständig wechselnden Wärmefluss und auch die Wärmeleitkoeffizienten laufend zu aktualisieren, weil die Oberflächentemperatur an der gewünschten Stelle für direkte Messungen in der Regel nicht zugänglich ist. Dafür kann man aber an einer anderen Stelle der Oberfläche oder innerhalb des untersuchten Objekts Messungen durchführen.

Erste Formulierungen solcher Probleme tauchten bereits im 19. Jahrhundert auf. Fourier, Poisson und Kelvin wollten damals die thermische Leitfähigkeit der Erdoberfläche untersuchen und Rückschlüsse auf das Klima vergangener Zeiten ziehen [4]. Obwohl damals schon einige Ansätze, wie z.B. das Prinzip von Duhamel, entwickelt wurden, die auch noch heute verwendet werden, hatten solche Probleme zu dieser Zeit keine große Bedeutung. Dies lag wohl auch daran, dass solche Probleme aus Sicht der reinen Mathematik lange Zeit als unlösbar galten. Ausserdem sah man keine praktische Notwendigkeit, diese zu untersuchen. Erst mit dem Start des Raumfahrtprogramms 1956 erkannte man die Wichtigkeit dieser Probleme in praktischen Anwen-

dungen.

Aufgrund der vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten wurden seit dieser Zeit viele verschiedene Lösungsverfahren ausgearbeitet, wie z.B. iterative Verfahren [4], [10], Tikhonov – Phillips Regularisierung [5], Wavelet– und Fourier–Verfahren [8], Function–Specification–Verfahren [5] oder auch die approximative Inverse [13].

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Anwendung der beiden zuletzt genannten Ansätze auf ein lineares eindimensionales inverses Wärmeleitungsproblem.

Im ersten Kapitel werden einige mathematische Werkzeuge bereitgestellt. Zunächst wird eine kurze Einführung in die Thematik inverser Probleme gegeben. Anschließend wird mit den Differenzenverfahren ein klassischer Ansatz zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen präsentiert. Der Zerlegungsansatz von Adomian bietet eine weitere Alternative zur Lösung von Randwertaufgaben. Abschließend wird das Konzept der Approximativen Inversen vorgestellt.

Das zweite Kapitel gibt nach der physikalisch motivierten Herleitung der Wärmeleitungsgleichung einen Überblick über mögliche Randwertbedingungen und typische Problemstellungen.

In Kapitel drei werden die Approximative Inverse und die Function–Specification–Verfahren auf ein konkretes Randwertproblem angewendet.

Das vierte Kapitel beinhaltet die numerischen Ergebnisse der beiden vorgestellten Verfahren.

### **Danksagung.**

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mich bei der Fertigstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Louis für die Überlassung des interessanten Themas und die umfassende Betreuung bei der Durchführung der vorliegenden Arbeit.

Ebenfalls möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Arbeitskreises, besonders bei Dipl.-Math. Thomas Weber für das gute, von Hilfsbereitschaft geprägte, angenehme Arbeitsklima bedanken.

Dank gebührt auch Herrn PD Dr. Thomas Schuster, der mit fachlich kompetentem und persönlichem Rat zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat. Desweiteren bedanke ich mich ganz herzlich bei Dipl.-Math. Oliver Schirra für seine Geduld, mit der er meine Fragen zu  $\text{\LaTeX}$  und diversen mathematischen Formulierungen beantwortet hat.

Ein großer Dank gilt meiner Familie und meinem Freund Markus, die mich während meines Studiums ohne Einschränkung unterstützt und gefördert haben. Ohne sie wäre diese Arbeit nicht realisierbar gewesen.

# Kapitel 1

## Mathematische Grundlagen

Im folgendem Kapitel werden die für diese Arbeit notwendigen mathematischen Werkzeuge bereitgestellt. Der erste Abschnitt beinhaltet eine kurze Einführung in die Thematik inverser Probleme. Dabei wird insbesondere auf die Problematik eingegangen, die während der Lösung solcher Fragestellungen auftreten kann. Anhand eines exemplarischen Beispiels wird deutlich, dass das Ergebnis in der Regel nicht stetig von den Eingangsdaten abhängt. Tiefgehende Erläuterungen können in [14] nachgelesen werden. Im nächsten Teil wird mit den Differenzenverfahren ein klassisches numerisches Lösungsverfahren vorgestellt. Neben der Herleitung des Verfahrens wird dieses im Hinblick auf spätere Kapitel auf ein inverses Wärmeleitungsproblem angewendet. Außerdem werden Konvergenz und Stabilität dieser Verfahren untersucht. Das Konzept des Zerlegungsansatzes nach Adomian wird im dritten Teil des Kapitels verdeutlicht. Abschliessend wird die Approximative Inverse nach Louis vorgestellt. Auch hier wird das Verfahren zunächst hergeleitet und danach dessen Vorteile dargestellt.

### 1.1 Inverse Probleme

In vielen Anwendungsbereichen versucht man, aus dem Ergebnis oder einer beobachteten Wirkung eines Experimentes Rückschlüsse auf die zugrunde liegenden Ursachen zu ziehen. Solche Probleme werden *inverse Probleme* genannt. Die Bearbeitung dieser Fragestellungen erweist sich meist als schwieriger als die von direkten Problemen, bei denen man das Ergebnis aus den Anfangsdaten ableiten kann. Der Behandlung inverser Probleme liegt das folgende mathematische Modell zugrunde. Man betrachtet eine Operatorgleichung der Form

$$Lf = g$$

mit einem linearen Operator  $L : X \rightarrow Y$ , welcher die *Ursache*  $f$  auf die *Daten*  $g$  abbildet. Dabei sind  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Die Daten  $g$  sind in der Regel durch Mess- oder Rundungsfehler verfälscht und liegen

nicht exakt vor. Eine obere Schranke für diesen Fehler sei  $\varepsilon$ , d.h.

$$\|g^\varepsilon - g\|_Y \leq \varepsilon.$$

Hierbei beschreibt die Funktion  $g^\varepsilon(t)$  die durch Fehler verfälschten und  $g(t)$  die exakten Daten. Wir illustrieren die charakteristischen Eigenschaften inverser Probleme an folgendem Beispiel.

**Beispiel.** Wir betrachten die Integralgleichung

$$Lf(x) := \int_0^x f(t) dt = g(x), \quad x \in [0, 1].$$

Dabei ist  $L : C^2([0, 1]) \rightarrow C^3([0, 1])$  ein linearer Operator. Eine Lösung dieser Gleichung ist offenbar

$$f(x) = g'(x).$$

Angenommen, man hat die rechte Seite  $g(x)$  durch Messungen erhalten, d.h. die Daten  $g$  liegen nicht exakt, sondern in gestörter Form, etwa als

$$g^\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon \sin nx$$

vor. Vergleicht man die Maximum-Normen der Größen  $f$  und  $g$ ,

$$\|g^\varepsilon(x) - g(x)\|_\infty = \varepsilon \quad \text{und} \quad \|f^\varepsilon(x) - f(x)\|_\infty = n\varepsilon,$$

so erkennt man, dass der Datenfehler um den Faktor  $n$  verstärkt wird. Der zu  $L$  inverse Operator ist offensichtlich ein Differentialoperator. Die Ableitung von  $g$  wird durch den zentralen Differenzenquotienten angenähert

$$D_h g(x) = \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}.$$

Mit Hilfe einer Taylorentwicklung

$$g(x \pm h) = g(x) \pm hg'(x) + \frac{h^2}{2}g''(x) \pm \frac{h^3}{6}g'''(x) + O(h^4)$$

ergibt sich für die Ableitung

$$D_h g(x) = g'(x) + \frac{h^2}{6}g'''(x) + O(h^4) = f(x) + \frac{h^2}{6}f''(x) + O(h^4).$$

Für den Fehler zwischen der Approximation und der tatsächlichen Lösung gilt also

$$|D_h g(x) - f(x)| \leq \frac{h^2}{6} \|f''(x)\|_\infty,$$

wobei allerdings die fehlerbehafteten Daten nicht berücksichtigt wurden. Tatsächlich ist die Größe

$$|D_h g^\varepsilon(x) - f(x)|$$

abzuschätzen. Wegen

$$|D_h g^\varepsilon(x) - D_h g(x)| = \left| \frac{(g^\varepsilon - g)(x+h) - (g^\varepsilon - g)(x-h)}{2h} \right| \leq \frac{\varepsilon}{h}$$

wird

$$\begin{aligned} |D_h g^\varepsilon(x) - f(x)| &\leq |D_h(g^\varepsilon(x) - g(x))| + |D_h g(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} \|f''(x)\|_\infty. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet man  $|D_h(g^\varepsilon(x) - g(x))|$  als *Datenfehler* und  $|D_h g(x) - f(x)|$  als *Approximationsfehler*. Aus diesen beiden Komponenten setzt sich der Gesamtfehler zusammen. Vergrößert man nun die Schrittweite  $h$ , so verkleinert sich der Datenfehler zunehmend, wohingegen jedoch der Approximationsfehler wächst. Um einen akzeptablen Gesamtfehler zu erhalten, muss man einen Kompromiss zwischen glatteren Daten und der Nähe zur exakten Lösung eingehen. Dies ist in Abbildung 1.1 veranschaulicht. Problemstellungen, bei

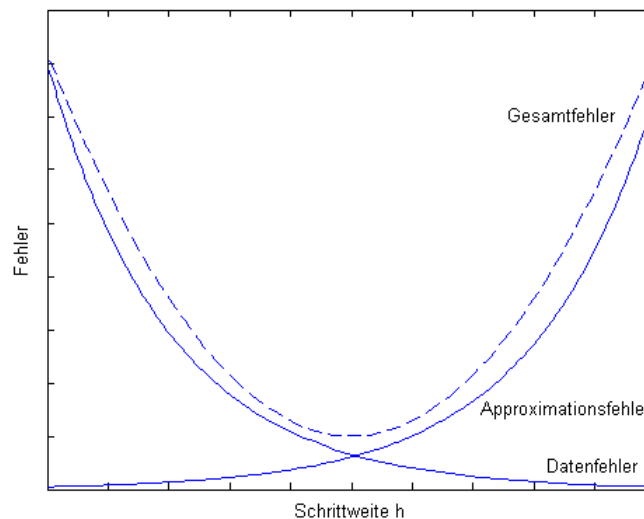


Abbildung 1.1: Der Gesamtfehler setzt sich zusammen aus Daten- und Approximationsfehler

denen kleine Störungen der Daten eine solche Wirkung haben, nennt man *schlecht gestellt*. Die mathematische Definition solcher Probleme geht auf Hadamard zurück.

### 1.1 Definition. (Hadamard)

Sei  $L : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen den topologischen Räumen  $X$  und  $Y$ . Das Problem  $(L, X, Y)$  heißt gut gestellt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:



- i) Die Gleichung  $Lf = g$  hat für jedes  $g \in Y$  eine Lösung.
- ii) Diese Lösung ist eindeutig.
- iii) Die inverse Abbildung  $L^{-1} : Y \rightarrow X$  existiert und ist stetig.

Die Bedingung *iii*) aus Definition 1.1 kann als stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten interpretiert werden. Verallgemeinert man den Lösungsbegriff, kann eine eindeutige Lösung solcher Probleme gefunden werden. Statt der exakten Lösung sucht man die Lösung  $f^+$ , die den Defekt

$$\|Lf - g\|_Y$$

minimiert. Ein Minimierer dieses Defekts ist gegeben durch  $f^+ := L^+g$ , wobei der Operator

$$L^+ : \mathcal{R}(L) \oplus \mathcal{R}(L)^\perp \subset Y \rightarrow X$$

die sogenannte *verallgemeinerte Inverse* oder *Moore-Penrose-Inverse* ist (vgl. [14]). Diese ist jedoch nur dann stetig, wenn das Bild  $\mathcal{R}(L)$  abgeschlossen ist. Die Stetigkeit des inversen Operators und damit die Stabilität des Problems kann man erreichen, indem man die Räume  $X$  und  $Y$  verändert. Dies kann auf zwei Arten geschehen: Entweder verfeinert man die Topologie von  $Y$  oder legt  $X$  eine gröbere Topologie zugrunde.

### 1.2 Definition.

Sei  $X$  eine Menge und seien  $T$  und  $T'$  Topologien auf dieser Menge. Dann heißt  $T$  *feiner als*  $T'$  bzw.  $T'$  *gröber als*  $T$ , wenn  $T' \subset T$  ist. D.h wenn jede bzgl.  $T$  offene Menge  $U \subseteq X$  auch offen bzgl.  $T'$  ist.

Es gibt eine feinere Topologie von  $Y$ , so dass das System der bzgl. dieser Topologie offenen Mengen größer wird. Dadurch erreicht man die Stetigkeit des Operators  $L^+$ . Leider ist jetzt nicht mehr garantiert, dass die gestörten Daten  $g$  in diesem neuen Raum liegen. Deshalb müssen die Daten vorher geglättet werden. Auf dieser Idee basiert z.B. das von Murio [15] untersuchte Regularisierungsverfahren, die sogenannte *Mollification*. Nachteil dieser Verfahren ist, dass man die Daten noch mehr glätten muss und der Approximationsfehler somit grösser wird.

Die andere Option ist die Wahl einer gröberen Topologie auf  $X$ . Dadurch erhält man weniger offene Mengen in  $X$  und erreicht somit die Stetigkeit des inversen Operators bzgl. der schwächeren Topologie auf  $X$ . Die Änderungen der Topologien erreicht man durch Regularisierungsverfahren. Bei diesen Verfahren wird statt der exakten Lösung  $f$  eine Näherungslösung  $f_\gamma^\varepsilon$  der Gleichung

$$f_\gamma^\varepsilon = T_\gamma g^\varepsilon,$$

bestimmt, wobei  $T_\gamma : Y \rightarrow X$  eine sogenannte *Regularisierung* von  $L^+$  ist, für die gilt

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ g^\varepsilon \rightarrow g}} T_\gamma g^\varepsilon = L^+g.$$

Die so bestimmte Näherungslösung wird sowohl vom Datenfehler  $\varepsilon$  als auch vom Regularisierungsparameter  $\gamma > 0$  beeinflusst. Den Rekonstruktionsfehler zwischen der eigentlichen Inversen und der Regularisierung kann man abschätzen durch

$$\|L^+g - T_\gamma g^\varepsilon\|_X \leq \|L^+g - T_\gamma g\|_X + \|T_\gamma(g - g^\varepsilon)\|_X.$$

Analog zum Beispiel setzt sich dieser wieder aus Datenfehler  $\|T_\gamma(g - g^\varepsilon)\|_X$  und Approximationsfehler  $\|L^+g - T_\gamma g\|_X$  zusammen. Durch  $\gamma$  kann die Auswirkung des Datenfehlers auf die Lösung reguliert werden. Der Fehler verhält sich wie in Abbildung 1.1 skizziert. Für  $\gamma \rightarrow 0$  glättet der Regularisierungsparameter die Lösung nicht, der Datenfehler wird verstärkt und man erhält eine stark oszillierende Lösung. Dieses Verhalten wird in Abbildung 1.3 illustriert. Umgekehrt wird mit wachsendem Wert für  $\gamma$  die Lösung immer glatter (dargestellt in Abbildung 1.4). Eine Schwierigkeit dieser Verfahren besteht somit darin, einen geeigneten Wert für diesen Parameter zu finden, so dass man eine akzeptable Lösung erhält (vgl. Abbildung 1.2).

### Beispiel.

Rekonstruktion  $f_\gamma^\varepsilon$  einer Stufenfunktion  $f$  mittels der approximativen Inverse  $T_\gamma = S_\gamma$ . Die Definition der Regularisierung  $S_\gamma$  findet man in Kapitel 1.4.

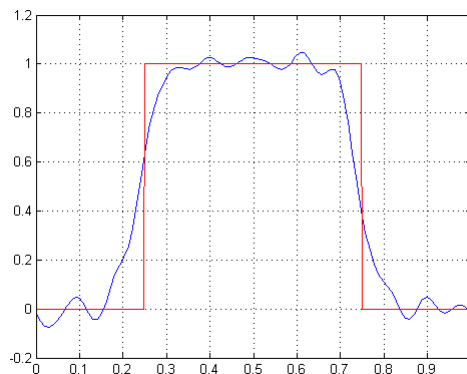


Abbildung 1.2: Für einen Fehler  $\varepsilon = 0.001$  liefert die approximative Inverse mit  $\gamma = 0.03$  eine akzeptable Lösung.

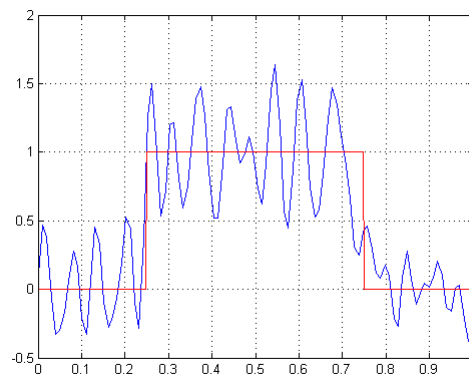


Abbildung 1.3: Für den Fehler  $\varepsilon = 0.001$  und  $\gamma = 0.015$  erhält man eine stark oszillierende Lösung.

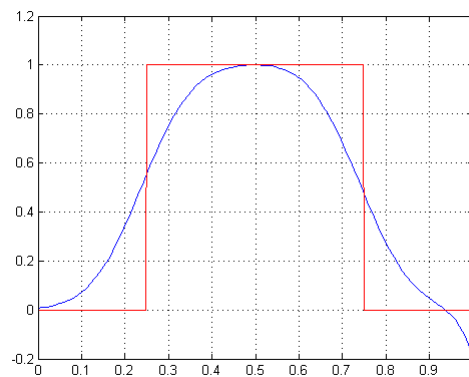


Abbildung 1.4: Für den Fehler  $\varepsilon = 0.001$  und  $\gamma = 0.09$  wird die Lösung zu stark geglättet.

## 1.2 Differenzenverfahren

Sehr nützliche mathematische Hilfsmittel zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen sind die Differenzenverfahren. Diese basieren auf der Idee, Ableitungen mittels Differenzenquotienten zu diskretisieren. Dieser Ansatz liefert im expliziten Fall eine Rekursionsformel zur Bestimmung einer Lösung. Im impliziten Fall ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das in jedem Punkt zu lösen ist. Nach der Herleitung wird auf Stabilitätsbedingungen dieser Verfahren eingegangen. Dabei lässt sich beobachten, dass implizite im Gegensatz zu expliziten Verfahren keinen Stabilitätsbedingungen unterliegen. Dies ist einer der Gründe, warum implizite Differenzenverfahren oft verwendet werden. Ein weiterer Vorteil dieser Verfahren ist die leichte Implementierung, die in akzeptabler Laufzeit gute Ergebnisse liefert.

### 1.2.1 Herleitung der Differenzenverfahren

In der Regel liegt die Funktion  $g(x)$ , die die Daten beschreibt, an endlich vielen Stellen durch Messungen vor. Auf Grund dessen ist es sinnvoll, die gesuchte Funktion  $u(x)$  nicht analytisch, sondern ebenfalls in diskreter Form zu berechnen. Bei einer Differentialgleichung werden die vorkommenden Ableitungen durch Differenzenquotienten approximiert. Dazu entwickelt man die gesuchte Funktion  $u(x)$  in eine Taylorreihe

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3).$$

Bricht man diese bereits nach dem linearen Term ab, erhält man folgende Möglichkeiten für die Approximation der ersten Ableitung:

$$u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \tag{1.1}$$

$$\text{oder } u'(x) \simeq \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \tag{1.2}$$

$$\text{oder } u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \tag{1.3}$$

Die erste Approximation nennt man *Vorwärts-Differenzenquotient*. Entsprechend dazu wird der zweite Term *Rückwärts-* und der Letztere *zentraler Differenzenquotient* genannt. Analog erhält man folgende Approximation für die zweite Ableitung, wenn man die Reihe nach dem quadratischen Term abbricht:

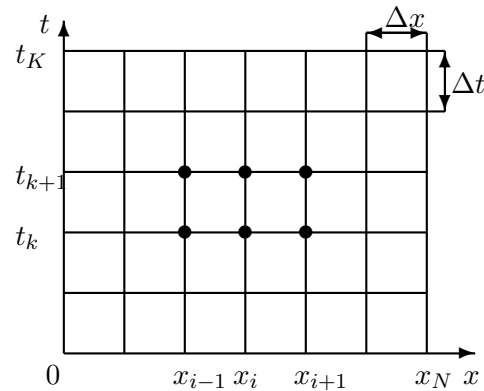
$$u''(x) \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}.$$

Die verschiedenen Approximationen unterscheiden sich in ihrer *Konsistenzordnung*. Diese gibt Auskunft darüber, wie nahe die numerische Approximation der analytischen Lösung kommt.

**1.3 Definition.** Sei  $L : X \rightarrow Y$  ein linearer Operator, der die Gleichung  $Lf = g$  löst. Weiter sei der lineare Operator  $L_h : X_h \rightarrow Y_h$  gegeben mit  $L_h f_h = g_h$ , dessen Lösung  $f_h$  die exakte Lösung  $f$  numerisch approximiert. Dann heißt  $L_h$  mit  $L$  konsistent von der Ordnung  $k$ , wenn gilt

$$\|L_h f_h - Lf\|_Y = O(h^k).$$

Die einfachen Vorwärts- bzw. Rückwärts-Differenzenquotienten nähern die erste Ableitung mit der Konsistenzordnung 1 an. Der zentrale Differenzenquotient und die Approximation der zweiten Ableitung sind konsistent von der Ordnung 2. Man kann durch entsprechend hohen Rechenaufwand Differenzenquotienten jeder Konsistenzordnung bestimmen. Dies lohnt in der

Abbildung 1.5: Äquidistante Zerlegung von  $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, T]$ .

Regel jedoch nicht. Das weitere Vorgehen der Differenzenverfahren wird nun im Hinblick auf spätere Anwendungen anhand des folgenden Anfangsrandwertproblems skizziert.

### Beispiel.

Betrachtet werde ein Stab der Länge 1 in einem Zeitintervall  $[0, T]$ . Bekannt sei der Wärmefluss an beiden Enden des Stabes. Gesucht werde die Temperaturverteilung  $u(0, t) = g(t)$  am linken Rand. Das zugehörige mathematische Modell sieht dann wie folgt aus:

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \quad (1.4)$$

$$u_x(0, t) = h(t), \quad 0 < t < T \quad (1.5)$$

$$u_x(1, t) = f(t), \quad 0 < t < T \quad (1.6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (1.7)$$

Um die Differentialgleichung zu diskretisieren, zerlegt man zunächst das Gebiet  $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$  in ein rechteckiges Gitternetz, wie in Abbildung 1.5 dargestellt. Der Diskretisierung liegt folgende Zerlegung zugrunde

$$[0, 1] = \bigcup_{i=0}^{N-1} [x_i, x_{i+1}] \quad \text{mit} \quad 0 =: x_0 < x_1 < \dots < x_N := 1,$$

$$[0, T] = \bigcup_{k=0}^{K-1} [t_k, t_{k+1}] \quad \text{mit} \quad 0 =: t_0 < t_1 < \dots < t_K := T.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, T] &= \bigcup_{i=0}^{N-1} [x_i, x_{i+1}] \times \bigcup_{k=0}^{K-1} [t_k, t_{k+1}] \\ &= \bigcup_{i,k=0}^{N-1, K-1} [x_i, x_{i+1}] \times [t_k, t_{k+1}].\end{aligned}$$

Der Einfachheit halber sei dabei eine äquidistante Zerlegung in beide Richtungen angenommen. Die Entfernung der jeweiligen Knotenpunkte  $(x_i, t_k)$  sei mit  $\Delta x$  bzw.  $\Delta t$  bezeichnet, wobei:

$$x_i = i\Delta x \quad i = 0, \dots, N-1 \quad \text{und} \quad t_k = k\Delta t \quad k = 0, \dots, K-1$$

Die gesuchte Temperaturfunktion  $u(x, t)$  wird später nur noch an diesen Knotenpunkten als Näherungslösung  $u(x_i, t_k) = u_{i,k}$  berechnet. Die Ableitungen werden gemäß Gleichung (1.1) durch

$$u_x \simeq D_x^+ u_{i,k} = \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{\Delta x} \quad (\text{vorwärts})$$

$$\text{oder} \quad u_x \simeq D_x^- u_{i,k} = \frac{u_{i,k} - u_{i-1,k}}{\Delta x} \quad (\text{rückwärts})$$

$$u_{xx} \simeq D_{xx} u_{i,k} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2}$$

$$u_t \simeq D_t^+ u_{i,k} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} \quad (\text{vorwärts})$$

$$\text{oder} \quad u_t \simeq D_t^- u_{i,k} = \frac{u_{i,k} - u_{i,k-1}}{\Delta t} \quad (\text{rückwärts})$$

approximiert. Berechnet man die Temperatur zum neuen Zeitpunkt aus drei Werten zum gegenwärtigen Zeitpunkt, wie in Abbildung 1.6 dargestellt, ergibt sich ein explizites Differenzenverfahren. Einsetzen der Differenzenquotienten in Gleichung (1.4) liefert

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

Löst man diese Gleichung nun gemäß Schema 1.6 nach  $u_{i,k+1}$  auf, erhält man für  $i = 1, \dots, N-2$

$$u_{i,k+1} = r u_{i-1,k} + (1 - 2r)u_{i,k} + r u_{i+1,k} \quad \text{mit} \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \quad (1.9)$$

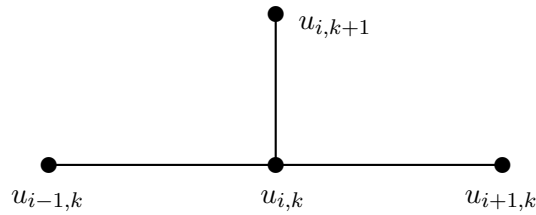


Abbildung 1.6: Explizites Schema

Da diese Gleichung nur im Gebiet  $\Omega$  gilt, müssen die Ränder  $i = 0$  und  $i = N - 1$  separat behandeln werden. Diskretisiert man die entsprechenden Randbedingungen (1.5) und (1.6), gilt für  $i = 0$ :

$$u_{1,k} - u_{0,k} = \Delta x h_k \quad \text{mit} \quad h_k = h(t_k) \quad (1.10)$$

und für  $i = N - 1$

$$u_{N,k} - u_{N-1,k} = \Delta x f_k \quad \text{mit} \quad f_k = f(t_k). \quad (1.11)$$

Kennt man nun die Anfangstemperatur  $u(x_i, 0) = u_{i,0}$ , kann man die Temperaturwerte zu den späteren Zeitpunkten gemäß Gleichung (1.9) berechnen. Bestimmt man die Temperatur an der Stelle  $i$  zum Zeitpunkt  $k$  aus drei Wer-

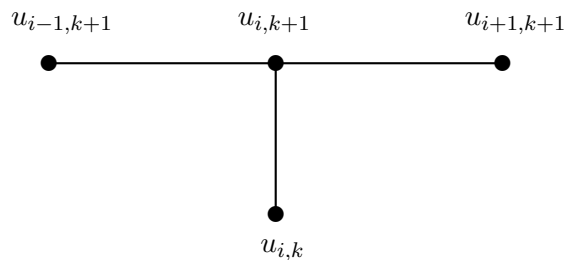


Abbildung 1.7: Implizites Schema

ten an derselben Stelle zur Zeit  $k + 1$  (dargestellt in Schema 1.7), so liefert dies ein implizites Verfahren. Die Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung an den benötigten Gitterpunkten ergibt

$$\frac{u_{i+1,k+1} - 2u_{i,k+1} + u_{i-1,k+1}}{\Delta x^2} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Auflösen dieser Gleichung nach der gesuchten Temperatur  $u_{i,k}$  liefert für  $i = 1, \dots, N - 2$

$$u_{i,k} = -r u_{i-1,k+1} + (1 + 2r) u_{i,k+1} - r u_{i+1,k+1} \quad \text{mit} \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \quad (1.13)$$

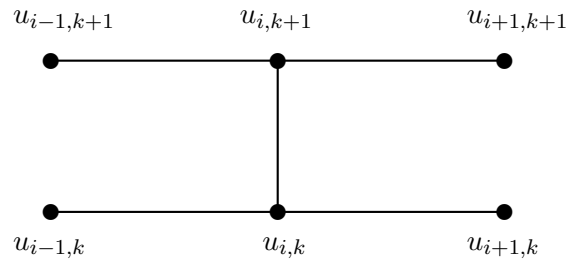


Abbildung 1.8: Sechs-Punkte Schema

Die Bedingungen am Rand berechnen sich analog zum expliziten Verfahren. Daraus resultiert in jedem Zeitschritt  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, K - 1$ , das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ -r & 1+2r & -r & & & \\ & -r & 1+2r & -r & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,k+1} \\ u_{1,k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x h_k \\ u_{1,k} \\ \vdots \\ u_{N-2,k} \\ \Delta x f_k \end{pmatrix},$$

das beispielsweise mit dem bekannten Gauß-Verfahren effizient gelöst werden kann. An dieser Stelle wird deutlich, dass man dieses Verfahren nur auf Anfangsrandwertprobleme mit Bedingungen an beiden Rändern anwenden kann, da sonst das Gleichungssystem nicht aufgestellt werden kann. Modifiziert man Gleichung (1.12), indem man zusätzliche Werte zum gegenwärtigen Zeitpunkt durch einen Gewichtungsfaktor  $\sigma$  einbezieht, erhält man

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} = \frac{\sigma(u_{i+1,k+1} - 2u_{i,k+1} + u_{i-1,k+1})}{\Delta x^2} + \frac{(1-\sigma)(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k})}{\Delta x^2}. \quad (1.14)$$

Wählt man  $\sigma = 0$  ist die Gleichung äquivalent zum expliziten Verfahren, für  $\sigma = 1$  geht die Gleichung in ein implizites Verfahren über. Durch  $\sigma = \frac{1}{2}$  erhält man ein weiteres implizites Differenzenverfahren, das *Crank-Nicolson-Verfahren*. Eine Darstellung dieses Schemas findet man in Abbildung 1.8. Eine etwas allgemeinere Schreibweise von Gleichung (1.14) lautet

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} = D_{xx}(\sigma u_{i,k+1} + (1-\sigma)u_{i,k}). \quad (1.15)$$

Auf dieser Gleichung basieren die Konvergenz- und Stabilitätsuntersuchungen.



### 1.2.2 Stabilität der Differenzenverfahren

Neben dem Begriff der Konsistenz sind zur Beurteilung der Qualität eines numerischen Verfahrens auch die Begriffe Konvergenz und Stabilität von großer Bedeutung. Während die Konsistenz Auskunft darüber gibt, wie exakt die numerische Approximation eines Operators ist, ist die Stabilität ein Maß für die Robustheit eines Verfahrens gegenüber Störungen in den Daten. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt die Konvergenz der numerischen gegen die analytische Lösung.

Im hier vorliegenden eindimensionalen Fall mit konstanten Koeffizienten findet man die Stabilitätskriterien durch die Analyse nach von Neumann [9]. Wir betrachten nun das Problem (1.4)–(1.7) und machen folgenden diskreten Separationsansatz

$$u_{i,k} = v_i w_k.$$

Dieser führt, durch Einsetzen in Gleichung (1.15), auf die Differentialgleichung

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta t} v_i = D_{xx} v_i (\sigma w_{k+1} + (1 - \sigma) w_k).$$

Diese ist äquivalent zu der Gleichung

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta t (\sigma w_{k+1} + (1 - \sigma) w_k)} = \frac{D_{xx} v_i}{v_i}.$$

Da die beiden Seiten der Gleichung von verschiedenen Variablen abhängen, müssen diese gleich einem konstanten Wert  $\lambda$  sein. Aus dieser Gleichung kann man einerseits schließen, dass die  $v_i$  die diskrete Eigenwertaufgabe

$$\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda v_i \quad (1.16)$$

lösen, und dass andererseits

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta t (\sigma w_{k+1} + (1 - \sigma) w_k)} = \lambda$$

gilt. Auflösen nach  $w_{k+1}$  liefert

$$w_{k+1} = q_k w_k \quad \text{mit} \quad q_k = \frac{1 + (1 - \sigma) \Delta t \lambda}{1 - \sigma \Delta t \lambda}.$$

Betrachtet man diese Gleichung für  $k \rightarrow \infty$ , erkennt man, dass für  $|q_k| > 1$  diese Folge nicht beschränkt ist. Dies motiviert folgende Definition.

**1.4 Definition.** Ein Differenzenverfahren heißt  $L_2$ -stabil, falls  $|q_k| < 1$  ist, d.h. falls

$$-1 \leq \frac{1 + (1 - \sigma) \Delta t \lambda}{1 - \sigma \Delta t \lambda} \leq 1$$

für alle Eigenwerte  $\lambda$  von (1.16) ist.

Zunächst berechnen wir nun die Eigenwerte  $\lambda$  gemäß Gleichung (1.16). Dazu beachten wir die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin((i-1)\vartheta) &= \cos \vartheta \sin i\vartheta - \sin \vartheta \cos i\vartheta, \quad \text{mit } i \in \mathbb{N}, \vartheta \in [0, 2\pi] \\ \sin((i+1)\vartheta) &= \cos \vartheta \sin i\vartheta + \sin \vartheta \cos i\vartheta.\end{aligned}$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert

$$\sin((i-1)\vartheta) + \sin((i+1)\vartheta) = 2 \cos i\vartheta \sin i\vartheta.$$

Subtrahiert man nun auf beiden Seiten  $2 \sin i\vartheta$  und dividiert anschließend durch  $\Delta x^2$ , erhält man

$$\frac{1}{\Delta x^2}(\sin((i-1)\vartheta) - 2 \sin i\vartheta + \sin((i+1)\vartheta)) = \frac{2}{\Delta x^2}(\cos \vartheta - 1) \sin i\vartheta.$$

Mit  $v_i := \sin(i\vartheta)$  kann man diese Gleichung schreiben als

$$\frac{1}{\Delta x^2}(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) = \frac{2}{\Delta x^2}(\cos \vartheta - 1)v_i \iff D_{xx}v_i = \lambda v_i.$$

Daraus wird ersichtlich, dass  $\lambda = \frac{2}{\Delta x^2}(\cos \vartheta - 1)$  Eigenwert dieses Problems ist. Desweiteren gilt:

$$\cos \vartheta - 1 = \cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right) - 1 = \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Mit dieser Identität und  $\vartheta := \pi \Delta t$  berechnet sich der gesuchte Eigenwert zum Eigenvektor  $v_i = \sin(\pi i \Delta t)$  durch

$$\lambda = \frac{2}{\Delta x^2}(\cos(\pi i \Delta t) - 1) = -\frac{4}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\pi i \Delta t}{2}\right).$$

Die rechte Ungleichung in Definition 1.4

$$1 + (1 - \sigma)\Delta t \lambda \leq 1 - \sigma \Delta t \lambda \iff \Delta t \lambda \leq 0$$

ist wegen  $\lambda \leq 0$  offenbar erfüllt. Aufgrund der linken Ungleichung

$$-1 + \sigma \Delta t \lambda \leq 1 + (1 - \sigma)\Delta t \lambda$$

ergeben sich folgende Stabilitätsbedingungen:

Für das explizite Verfahren ( $\sigma = 0$ )

$$-1 \leq 1 + \Delta t \lambda \iff \frac{4\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\pi i \Delta t}{2}\right) \leq 2,$$

ergibt sich die Stabilitätsbedingung

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Für das implizite Verfahren ( $\sigma = 1$ ) hat man die Bedingung

$$-1 + \Delta t \lambda \leq 1$$

und für das Crank–Nicolson–Verfahren ( $\sigma = \frac{1}{2}$ )

$$-1 + \frac{1}{2} \Delta t \lambda \leq 1 + \frac{1}{2} \Delta t \lambda.$$

Die letzten beiden Bedingungen sind offensichtlich immer erfüllt. Der erbrachte Nachweis der Stabilität gilt lediglich in der  $L_2$ -Norm. Ebenfalls soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass die Stabilitätsanalyse nur auf eindimensionale Randwertprobleme mit konstanten Koeffizienten anwendbar ist. Eine Erweiterung des Stabilitätsbegriffs auf Probleme mit nichtkonstanten Koeffizienten und nichtlineare Probleme ist der der Stabilität in der Maximum–Norm [9].

Zusammenfassend kann man sagen, dass implizite Verfahren die bessere Alternative im Vergleich zu den expliziten sind. Desweiteren bieten implizite Differenzenverfahren eine einfache Möglichkeit, sowohl direkte als auch inverse Wärmeleitungsprobleme zu lösen. Vorteilhaft ist sicherlich die unbedingte Stabilität und die einfache Implementierung dieser Verfahren. Tridiagonale Gleichungssysteme können in linearer Laufzeit gelöst werden [16]. Ein Nachteil ist jedoch, dass diese nicht auf alle Probleme anwendbar sind, sondern nur auf solche, bei denen Bedingungen an beiden Rändern vorliegen.

### 1.3 Der Zerlegungsansatz von Adomian

Eine weitere Alternative zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen ist der Zerlegungsansatz von Adomian [12]. Der dabei zugrunde gelegte Ansatz ist sowohl auf lineare als auch auf nichtlineare Probleme anwendbar. Ebenso kann er auf mehrdimensionale Problem übertragen werden. Die Lösung  $u(x, t)$  wird in eine Potenzreihe entwickelt. Dadurch erhält man eine analytische Approximation der Lösung und benötigt infolgedessen keine Abschätzungen über die Schrittweiten der einzelnen Variablen wie bei den Differenzenverfahren. Allerdings liefert dieser Ansatz nur mit exakten Daten passable Ergebnisse.

#### 1.3.1 Herleitung des Zerlegungsansatzes

Das Konzept dieses Ansatzes wird wieder im Hinblick auf das folgende Kapitel anhand eines Wärmeleitungsproblems erläutert. Das Verfahren kann analog auf andere Probleme übertragen werden. Die Wärmeleitungsgleichung sei gegeben durch

$$L_{xx}u(x, t) = L_t u(x, t) \tag{1.17}$$

mit den Differentialoperatoren

$$L_{xx}u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) \quad \text{und} \quad L_t u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x, t).$$

Der zu  $L_{xx}$  inverse Operator ist gegeben durch

$$L_{xx}^{-1}f(\cdot) = \int_1^x \int_1^{x'} f(\cdot) dx'' dx'.$$

Eine Lösung  $u(x, t)$  kann man formal durch zweimalige Integration nach  $x$  erhalten:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + L_{xx}^{-1}L_t u \quad (1.18)$$

mit dem Startwert

$$u_0(x, t) = c_1(t)x + c_2(t). \quad (1.19)$$

Dieser lässt sich in konkreten Anwendungen aus den Randbedingungen berechnen. Die Lösung  $u(x, t)$  kann dann durch den Reihenansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (1.20)$$

bestimmt werden. Gleichung (1.18) motiviert die Iterationsvorschrift

$$u_{n+1} = L_{xx}^{-1}L_t u_n$$

Setzt man voraus, dass die Reihe in Gleichung (1.20) konvergiert, kann man leicht nachweisen, dass dieser Ansatz tatsächlich eine Lösung liefert:

$$\begin{aligned} L_t u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} L_t u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{xx} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} L_{xx} u_n(x, t) \\ &= L_{xx} u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{xx} u_n(x, t) = L_{xx} u(x, t). \end{aligned}$$

Zur Verdeutlichung der Grundidee dieses Verfahrens wenden wir die vorangegangenen Überlegungen auf ein lineares eindimensionales inverses Wärmeleitungsproblem an.

### Beispiel.

Untersucht werde wieder ein Stab der Länge 1. Am linken Rand kenne man sowohl die Temperaturverteilung als auch den Wärmefluss. Gesucht werden diese beiden Größen am anderen rechten Rand

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1 \quad (1.21)$$

$$u(0, t) = f_0(t), \quad 0 < t < T \quad (1.22)$$

$$u_x(0, t) = g_0(t), \quad 0 < t < T \quad (1.23)$$

$$u(1, t) = f_1(t), \quad 0 < t < T \quad (1.24)$$

$$u_x(1, t) = g_1(t), \quad 0 < t < T. \quad (1.25)$$

Der Startwert  $u_0(x, t)$  kann gemäß Gleichung (1.19) durch die Randbedingungen

$$(u_0)_x(1, t) = c_1(t) \stackrel{!}{=} g_1(t)$$

und

$$u_0(1, t) = c_1(t) + c_2(t) \stackrel{!}{=} f_1(t)$$

berechnet werden. Es ist dann

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= c_1(t)x + c_2(t) = g_1(t)x + f_1(t) - g_1(t) \\ &= f_1(t) + (x - 1)g_1(t) \end{aligned}$$

Bestimmt man die ersten Summanden der Reihe

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_{xx}^{-1}L_t u_0 = \frac{(x-1)^2}{2!}f_1'(t) + \frac{(x-1)^3}{3!}g_1'(t) \\ u_2(x, t) &= L_{xx}^{-1}L_t u_1 = \frac{(x-1)^4}{4!}f_1''(t) + \frac{(x-1)^5}{5!}g_1''(t), \end{aligned}$$

so folgt induktiv

$$u_n(x, t) = \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}f_1^{(n)}(t) + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}g_1^{(n)}(t).$$

Die Lösung des Problems (1.21)–(1.25) ist nun in geschlossener Form darstellbar:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}f_1^{(n)}(t) + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}g_1^{(n)}(t). \quad (1.26)$$

### 1.3.2 Konvergenz des Verfahrens

Die Reihe (1.26) konvergiert, wenn die beiden Teilreihen über die geraden und die ungeraden Exponenten von  $x$  konvergieren. Da die Konvergenzbedingungen der beiden Teilreihen analog bestimmt werden, wird hier nur die Reihe über die geraden Exponenten näher behandelt. Wir untersuchen also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}f^{(n)}(t)$$

auf Konvergenz. Diese konvergiert nach dem Quotientenkriterium, falls

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(x-1)^2| |f^{(n+1)}(t)|}{|(2n+1)(2n+2)| |f^{(n)}(t)|} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^2 |f^{(n+1)}(t)|}{(2n+1)(2n+2) |f^{(n)}(t)|} < 1 \quad \text{mit } |x-1| \leq M \end{aligned}$$

ist. Dies ist der Fall, wenn

$$|f^{(n+1)}(t)| < |f^{(n)}(t)| \frac{(2n+1)(2n+2)}{M^2}$$

gilt, woraus sich rekursiv die Bedingung

$$|f^{(n)}(t)| < |f(t)| \frac{(2n)!}{M^{2n}}$$

ergibt. Dies motiviert die folgende, auf Holmgren [6] zurückgehende Definition.

**1.5 Definition.** Eine Funktion  $f \in C^\infty(a, b)$  heißt Holmgren-Funktion, falls es Konstanten  $C, M \geq 0$  gibt, derart dass

$$|f^{(n)}(t)| < \frac{C(2n)!}{M^{2n}}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist.

**1.6 Satz.** Sind  $f(t)$  und  $g(t)$  Holmgren-Funktionen ( $t \in \mathbb{R}$ ), so konvergiert die Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!} f^{(n)}(t) + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(n)}(t)$$

absolut für  $|x-1| \leq r < M$ . In diesem Fall ist  $u(x, t)$  eine Lösung des Problems (1.21)–(1.25).

**Beweis.** Da  $f$  und  $g$  Funktionen der Holmgrenklasse sind, gilt

$$\left| \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!} f^{(n)}(t) + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(n)}(t) \right| < C \left( 1 + \frac{r}{(2n+1)} \right) \left( \frac{r}{M} \right)^{2n}$$

für  $|x-1| \leq r$ . Demzufolge ist

$$u(x, t) \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{r}{(2n+1)} \right) \left( \frac{r}{M} \right)^{2n},$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite wegen  $r < M$  absolut konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann auch die Reihe für  $u(x, t)$  absolut. Die partiellen Ableitungen  $u_t, u_x$ , und  $u_{xx}$  existieren, da  $f(t)$  und  $g(t)$  als Funktionen der Holmgrenklasse unendlich oft stetig differenzierbar sind. Dass  $u(x, t)$  Lösung des Problems (1.21)–(1.25) ist, lässt sich leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} f_1^{(n)}(t) + \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!} g_1^{(n)}(t) \\ u_{xx}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-2)!} f_1^{(n)}(t) + \frac{(x-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} g_1^{(n)}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!} f_1^{(n+1)}(t) + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} g_1^{(n+1)}(t) \\ &= u_t(x, t) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen  $u(1, t)$  und  $u_x(1, t)$  sind gerade die Summanden der Reihe bzw. der partiellen Ableitung der Reihe für  $n = 0$ .  $\square$

**Bemerkung.**

Es besteht auch die Möglichkeit, in Gleichung (1.18) nicht nur den inversen Operator bzgl.  $x$ , sondern auch bzgl.  $t$  zu berücksichtigen. Das daraus resultierende Iterationsschema kann man in [1] nachlesen. Weitere Konvergenzbetrachtungen findet man etwa in [2].

Ein Nachteil dieses Zerlegungsansatzes ist jedoch, dass dieser nur für exakte Daten eine Lösung liefert, da die gestörten Daten nicht zwingend zur Holmgrenzkategorie gehören müssen und daher die Konvergenz der Reihe nicht mehr garantiert ist.

## 1.4 Approximative Inverse

Eine Möglichkeit lineare sowie gewisse nichtlineare, schlecht gestellte Probleme zu regularisieren, ist die Konstruktion der approximativen Inversen. Durch diese kann eine stabile Näherungslösung der gesuchten Funktion berechnet werden. Ziel wird es wieder sein, die Gleichung

$$Lf = g$$

zu lösen. Hierbei sei  $L : X \rightarrow Y$  ein linearer kompakter Operator zwischen Hilberträumen  $X$  und  $Y$ . Meist wählt man  $X = L_2(\Omega)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Wie üblich liegen die Daten  $g$  nicht exakt, sondern in verrauschter Form vor. Aufgrund dessen wird nicht die exakte Funktion  $f$  berechnet, sondern es werden nun nur noch Momente von  $f$  betrachtet und man erhält eine Näherungslösung der Form

$$f_\gamma(x) = \langle f(\cdot), m_\gamma(x, \cdot) \rangle_X$$

mit einem geeignet gewählten Mollifier  $m_\gamma$ . Dieser glättet die Lösung, indem die hochfrequenten Anteile der Lösung reduziert werden, welche am stärksten von den Datenfehlern betroffen sind. Ein Beispiel für einen Mollifier ist

$$m_\gamma(x, y) = \frac{d}{\text{vol}(S^{d-1})\gamma^d} \chi_\gamma(x - y).$$

Die Funktion  $\chi_\gamma$  ist die charakteristische Funktion der Kugel um 0 mit Radius  $\gamma$  und  $\text{vol}(S^{d-1})$  das Maß der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^d$ . Der schnell fallende Gaußkern

$$m_\gamma(x, y) = (2\pi)^{-d/2} \gamma^{-d} \exp(-|x - y|^2 / (2\gamma^2))$$

wird zur Glättung der Wärmeleitungsgleichung verwendet. In allen Fällen fungiert  $\gamma$  als Regularisierungsparameter.

### 1.4.1 Herleitung der Approximativen Inversen

Um die eingangs erwähnte Näherungslösung  $f_\gamma$  zu berechnen, bestimmt man zunächst einen Rekonstruktionskern  $\psi_\gamma$ . Liegt der Mollifier  $m_\gamma(x, y)$  im Bild des adjungierten Operators  $L^*$ , erhält man den Kern als Lösung der Gleichung

$$L^*\psi_\gamma = m_\gamma.$$

Ist der Mollifier nicht im Bild von  $L^*$ , so kann man den Kern  $\psi_\gamma$  als die Funktion bestimmen, die den Defekt  $\|L^*\psi_\gamma - m_\gamma\|_X$  minimiert. Diese findet man, indem man die Normalengleichung

$$LL^*\psi_\gamma = Lm_\gamma$$

löst. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_\gamma(x) &= \langle f(\cdot), m_\gamma(x, \cdot) \rangle_X = \langle f(\cdot), L^*\psi_\gamma(x, \cdot) \rangle_X \\ &= \langle Lf(\cdot), \psi_\gamma(x, \cdot) \rangle_Y = \langle g(\cdot), \psi_\gamma(x, \cdot) \rangle_Y \\ &=: S_\gamma g(x) \end{aligned}$$

**1.7 Definition.** Sei  $m_\gamma$  eine geeignete Funktion und  $\psi_\gamma$  Lösung von

$$LL^*\psi_\gamma = Lm_\gamma.$$

Dann heißt  $S_\gamma g$  Approximative Inverse des Operators  $L$  und  $\psi_\gamma$  heißt Rekonstruktionskern.

Das Verfahren bietet einige Vorteile. Der Rekonstruktionskern  $\psi_\gamma$  ist unabhängig von den gestörten Daten  $g$  und kann deshalb a priori berechnet werden. Durch die Glättung mit  $m_\gamma$  werden, wie bereits erwähnt, die fehlerbehafteten hochfrequenten Anteile der Lösung reduziert. Die Gleichung  $L^*\psi_\gamma = m_\gamma$  ist wegen der Unstetigkeit des inversen adjungierten Operators immer noch schlecht gestellt. Jedoch ist  $m_\gamma$  nicht mehr mit Messfehlern behaftet.

Die Berechnung der Approximativen Inversen beschränkt sich auf die Berechnung eines Skalarproduktes. Dadurch wird der Rechenaufwand gering.

### 1.4.2 Reduzierung des Speicherbedarfs

Die Berechnung des Rekonstruktionskernes geschieht zwar unabhängig von der Berechnung der Approximativen Inversen, kann aber trotzdem großen Speicherbedarf benötigen. Berücksichtigt man bestimmte Invarianzen kann man diesen drastisch reduzieren. Nutzt man die Translationsinvarianz der Faltung aus, und wählt entsprechend einen Mollifier vom Faltungstyp, d.h.  $m_\gamma(x, y) = m_\gamma(x - y)$ , erhält man dadurch auch einen Rekonstruktionskern desselben Typs

$$\psi_\gamma(x, y) = \psi_\gamma(x - y) = T^y\psi_\gamma(x)$$



mit dem Translationsoperator  $T^y$ . Dann ergibt sich die approximative Inverse

$$S_\gamma g(x) = \langle \psi_\gamma(x, y), g(y) \rangle_Y = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\gamma(x - y) g(y) dy = (\psi_\gamma * g)(x)$$

ebenfalls als Faltung. Der Rekonstruktionskern  $\psi_\gamma$  ist jetzt eine Funktion, die nicht mehr von zwei Variablen  $(x, y)$ , sondern nur noch von einer Variablen  $(x - y)$  abhängt. Da in der Praxis die Daten nur an endlich vielen Punkten gegeben sind, gilt  $Y = \mathbb{R}^N$ . Betrachtet man deshalb  $y \in \mathbb{R}^N$  und  $x \in \mathbb{R}^N$ , muss man den Rekonstruktionskern statt an  $N^2$  Punkten nur noch an  $N$  Rekonstruktionsstellen berechnen. Diese Beobachtungen beruhen auf der Annahme, dass die Faltung translationsinvariant ist. Dies wird im Folgenden nachgewiesen.

**1.8 Satz.** Sei  $T^z : L_2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^N)$  der Translationsoperator mit

$$T^z f(x) = f(x - z)$$

und  $L : L_2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^N)$  der Faltungsoperator mit

$$Lf(x) = \int_{\mathbb{R}^N} k(x - y) f(y) dy.$$

Dann gilt:

$$T^z L = L T^z$$

und

$$T^z L L^* = L L^* T^z.$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} L T^z f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} k(x - y) f(y - z) dy = \int_{\mathbb{R}^N} k(x - z - u) f(u) du \\ &= L f(x - z) = T^z L f(x) \end{aligned}$$

Der adjungierte Operator  $L^*$  ist definiert durch

$$L^* g(y) = \int_{\mathbb{R}^N} k(x - y) g(x) dx.$$

Dann gilt:

$$L L^* g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) g(y) dy$$

mit

$$K(x, y) = \int_{\mathbb{R}^N} k(x - u) k(y - u) du$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} LL^*T^z g(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) g(y - z) dy = \int_{\mathbb{R}^N} K(x, z + u) g(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x - z, u) g(u) du = T^z LL^* g(x). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.**

Die Identität  $T^z LL^* = LL^*T^z$  benötigt man zur Berechnung des Rekonstruktionskernes, falls dieser nicht im Bild von  $L$  liegt. In der Regel verwendet man jedoch nicht die kontinuierliche, sondern die diskrete Faltung. Dann berechnet sich die Approximative Inverse durch

$$S_\gamma g(x) = \langle g(\cdot), \psi_\gamma(x, \cdot) \rangle_Y = \sum_{n=1}^N g_n \psi_{\gamma, n}(x) = \sum_{n=1}^N g_n \psi_{\gamma-n}(x)$$

# Kapitel 2

## Das inverse Wärmeleitungsproblem

In diesem Kapitel wird zunächst die Wärmeleitungsgleichung aus den entsprechenden physikalischen Gesetzen hergeleitet. Anschließend werden mögliche Randwertbedingungen und typische Problemstellungen vorgestellt. Zum Schluss wird ein kurzer Überblick zur Geschichte inverser Wärmeleitungsprobleme gegeben.

### 2.1 Mathematische Modellierung der Wärmeleitungsgleichung

Die mathematischen Modelle, die den in der Einleitung beschriebenen Problemen zugrunde liegen, beruhen auf einer partiellen Differentialgleichung, der *Wärmeleitungsgleichung*, die auch *Diffusions-* oder *Evolutionsgleichung* genannt wird. Zur Herleitung dieser Gleichung betrachten wir einen beliebigen Körper  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Dann gilt für die Wärmemenge  $H(t)$  in  $\Omega$  zur Zeit  $t$

$$H(t) = \int_{\Omega} c\rho u(x, t) \, dx,$$

wobei  $u : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  die Temperatur zur Zeit  $t$  im Punkt  $x$  des Körpers  $\Omega$ ,  $\rho > 0$  die *Dichte* und  $c > 0$  die *spezifische Wärme* des Körpers  $\Omega$  bezeichnen. Dabei sind die Dichte und die spezifische Wärme zeitunabhängig. Dann gilt für die zeitliche Wärmeveränderung innerhalb des Körpers

$$\frac{\partial}{\partial t} H(t) = \int_{\Omega} c\rho \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \, dx. \quad (2.1)$$

Andererseits ist nach dem Fourier'schen Gesetz die zeitliche Wärmeänderung gleich der Wärmemenge, die durch den Rand  $\partial\Omega$  in  $\Omega$  eintritt, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} H(t) = \int_{\partial\Omega} \kappa (\mathbf{n} \cdot \nabla u(x, t)) \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\kappa \nabla u(x, t)) \, dx, \quad (2.2)$$

wobei  $\kappa$  die *Wärmeleitfähigkeit* des Körpers beschreibt und  $\mathbf{n}$  die äußere Einheitsnormale an  $\partial\Omega$  bezeichnet. Hierbei gilt die zweite Gleichung nach dem Divergenzsatz von Gauß und unter der Annahme, der Rand  $\partial\Omega$  sei hinreichend glatt. Aus (2.1) und (2.2) ergibt sich somit die Bestimmungsgleichung

$$\int_{\Omega} c\rho \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \operatorname{div}(\kappa \nabla u(x, t)) \, dx = 0,$$

oder also:

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \operatorname{div}(\kappa \nabla u(x, t)) = 0. \quad (2.3)$$

Nimmt man an, dass die Wärmeleitfähigkeit des Körpers räumlich konstant ist, so vereinfacht sich (2.3) zu

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \kappa \Delta u(x, t) = 0. \quad (2.4)$$

Mit  $\Delta u(x, t)$  wird in diesem Zusammenhang der *Laplace-Operator* bzgl.  $x$  bezeichnet. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Untersuchung eindimensionaler Probleme mit konstanten Koeffizienten. Gleichung (2.4) kann deshalb auf die Gleichung

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

reduziert werden. Mit  $k = \kappa\rho^{-1}c^{-1}$  gilt

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t).$$

Im nächsten Abschnitt werden nun mögliche Randwertbedingungen vorgestellt.

## 2.2 Rand- und Anfangswertbedingungen

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  im Zeitintervall  $(0, T)$

$$u_t(x, t) = k\Delta u(x, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

mit einer Konstanten  $k \in \mathbb{R}$ . Hierbei bezeichnet  $\Delta$  wieder den Laplace-Operator. Entsprechend zu den unterschiedlichen Problemstellungen in der Praxis benötigt man verschiedene mathematische Modelle. Diese unterscheiden sich durch ihre Randwertbedingungen. Im Wesentlichen unterscheidet man zwischen drei Klassen von Randwertbedingungen.

Ist die Temperaturverteilung in einem Teilbereich der Oberfläche eines Körpers  $\Omega$  gegeben

$$u(x, t) = g_D(t) \quad \text{auf } \partial\Omega_D \times (0, T), \quad \partial\Omega_D \subset \partial\Omega,$$

so spricht man von *Dirichlet-Randbedingungen* oder *Randbedingungen der ersten Art*.

Kann man Aussagen über den Fluss am Rand treffen

$$-k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = g_N(t) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega_N \times (0, T), \quad \partial\Omega_N \subset \partial\Omega$$

spricht man von *Neumann-Randbedingungen* oder *Randbedingungen der zweiten Art*. Mit  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$  wird die Ableitung in Richtung der äußeren Einheitsnormalen  $\mathbf{n}$  an  $\partial\Omega$  bezeichnet. Durch den Wärmefluss in äußere Normalenrichtung kühlt der Körper ab. Dies spiegelt sich im negativen Vorzeichen wider. Wird die Funktion  $g_N(t) \equiv 0$  gewählt, kann dies als Isolierung des Körpers interpretiert werden.

Von *gemischten Randbedingungen*, *Robin Bedingungen* oder *Randbedingungen der dritten Art* spricht man, wenn am Rand ein Wärmeaustausch nach dem Gesetz von Newton erfolgt,

$$-k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = h(u(x, t) - \bar{u}(x, t)) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega_R \times (0, T), \quad \partial\Omega_R \subset \partial\Omega.$$

Hier beschreibt  $h$  den *Wärmeaustauschkoeffizienten* und  $\bar{u}$  die Temperatur in einer Umgebung von  $\Omega$ .

Alifanov erwähnt in [4] *Randbedingungen der vierten Art*. Bei solchen hat man Kenntnis von Temperatur und Wärmefluss an einem inneren Punkt  $x_i \in \Omega$

$$\begin{aligned} -ku_x(x_i, t) &= g_1(t) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(x_i, t) &= g_2(t) & \text{in } \Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

Desweiteren benötigt man in den meisten Fällen noch eine Anfangswertbedingung, um eine eindeutig bestimmte Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu finden. Diese ist gegeben durch

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{in } \Omega \times \{0\}.$$

Die unterschiedlichen Rand- und Anfangswertbedingungen spiegeln die unterschiedliche Natur der jeweiligen Fragestellungen wider. In der Regel sind diese schlecht gestellt. Dies erkennt man auch am folgenden Beispiel.

**Beispiel.** Gesucht werde der Wärmefluss  $u_x(1, t) = f(t)$  am rechten Rand eines Stabes der Länge 1. Das linke Ende dieses Stabes sei isoliert, dort finde also kein Wärmefluss statt. Außerdem kenne man die Temperaturverteilung an diesem Ende des Stabes. Das dazugehörige mathematische Modell lautet:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \\ u(0, t) &= \frac{2}{n} \cos(2n^2 t) & 0 < t < T, \quad n > 0 \\ u_x(0, t) &= 0 & 0 < t < T. \end{aligned}$$

Eine Lösung  $u(x, t)$  dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$u(x, t) := \frac{e^{nx}}{n} \cos(nx + 2n^2t) + \frac{e^{-nx}}{n} \cos(nx - 2n^2t).$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= e^{nx} \cos(nx + 2n^2t) - e^{nx} \sin(nx + 2n^2t) \\ &\quad - e^{-nx} \cos(nx + 2n^2t) - e^{-nx} \sin(nx + 2n^2t) \\ u_{xx}(x, t) &= -2e^{nx} \sin(nx + 2n^2t) - 2e^{-nx} \sin(nx - 2n^2t) \\ u_t(x, t) &= -2e^{nx} \sin(nx + 2n^2t) - 2e^{-nx} \sin(nx - 2n^2t). \end{aligned}$$

Die Nebenbedingungen

$$u(0, t) = \frac{\cos(2n^2t)}{n} + \frac{\cos(-2n^2t)}{n} = \frac{2 \cos(2n^2t)}{n}$$

und

$$u_x(0, t) = \cos(-2n^2t) - \cos(-2n^2t) = 0$$

sind ebenfalls erfüllt. Der gesuchte Wärmefluss an der Stelle  $x = 1$  ergibt sich dann aus der ersten Ableitung

$$u_x(1, t) = e^n (\cos(n+2n^2t) - \sin(n+2n^2t)) - e^{-n} (\cos(n-2n^2t) - \sin(n-2n^2t)).$$

Es existiert also eine Lösung des Problems. Betrachtet man nun die Maximum-Norm über die gegebenen Daten  $u(0, t)$  und die zugehörige Lösung  $f(t)$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u(0, t)\|_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t)\|_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2(e^n - e^{-n}) = \infty \end{aligned}$$

wird deutlich, dass die Daten mit wachsendem  $n$  immer kleiner werden. Bei stetiger Abhängigkeit der Lösung von den Daten, würde diese ebenfalls gegen 0 streben. Dies ist offenbar nicht der Fall. Die dritte Bedingung in der Definition von Hadamard ist also verletzt und das Problem schlecht gestellt.

## 2.3 Typische Problemstellungen

Es gibt einige typische Fragestellungen, die man immer wieder in der Literatur antrifft. Diese sollen nun kurz angeführt werden.

Eines dieser Probleme ist das Problem *Rückwärts in der Zeit*. Wie der Name schon andeutet, ist das Ziel dieser Problemstellungen, aus gegebener Wärmeverteilung an der Oberfläche zum Zeitpunkt  $\tau \in (0, T]$  die Temperaturverteilung zu einem früheren Zeitpunkt  $t_0 < \tau$  zu bestimmen. Das dazugehörige

mathematische Modell lautet:

Finde  $u(x, t_0) = f(x)$  unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= k\Delta u(x, t), & x \in \Omega, & \quad t \in (0, T) \\ u(x_r, t) &= g(t), & x_r \in \partial\Omega, & \quad t \in (0, T) \\ u(x, \tau) &= h(\tau), & x \in \Omega. & \end{aligned}$$

Dieses Problem wird unter anderem in [14] behandelt. Ebenfalls weit verbreitet ist das Problem, den Wärmefluss an einer für Messungen unzugänglichen Stelle  $x_w$  der Oberfläche zu bestimmen unter Verwendung von Informationen über den Wärmefluss an einer anderen Stelle  $x_r \in \partial\Omega$  der Oberfläche und der Temperaturverteilung an dieser Stelle oder einer Stelle  $x_i \in \Omega$  innerhalb des Körpers. Die Situation wird durch folgendes Randwertproblem beschrieben: Finde  $-ku_{\mathbf{n}}(x_w, t) = f(t)$  unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= k\Delta u(x, t), & x \in \Omega, & \quad t \in (0, T) \\ u(x_i, t) &= g_i(t), & x_i \in \partial\Omega, & \quad t \in (0, T) \\ u(x_r, t) &= g_r(t), & x_r \in \Omega, & \quad t \in (0, T) \\ -ku_{\mathbf{n}}(x_r, t) &= h(t), & x_r \in \partial\Omega, & \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega. & \end{aligned}$$

Mit  $u_{\mathbf{n}}$  wird die Ableitung in äußere Normalenrichtung bezeichnet. Desweiteren muss nur eine der beiden Temperaturverteilungen an den Stellen  $x_r$  und  $x_i$  gegeben sein. Die Anfangstemperatur ist ebenfalls nicht bei allen Verfahren notwendig. Dies ist das am häufigsten untersuchte Problem, auf das im nächsten Kapitel näher eingegangen wird. Ein weiteres Aufgabenfeld innerhalb der inversen Wärmeleitungsprobleme ist die Bestimmung der ortsabhängigen Wärmeleitkoeffizienten  $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (au_x(x, t))_x &= u_t(x, t) + bu_x + cu(x, t) + df(x, t), & x \in \Omega, & \quad t \in (0, T) \\ u(x_r, t) &= g(t), & x \in \partial\Omega, & \quad t \in (0, T) \\ u_{\mathbf{n}}(x_r, t) &= h(t), & x \in \Omega, & \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega. & \end{aligned}$$

Dieses Problem wird unter anderem von Hào in [10] behandelt.

## Kapitel 3

# Lösungsverfahren für inverse Wärmeleitungsprobleme

In diesem Kapitel wird zunächst die approximative Inverse auf ein konkretes inverses Wärmeleitungsproblem angewandt. Hierbei erweisen sich sowohl die in Kapitel 1 vorgestellten Differenzenverfahren als auch der Zerlegungsansatz von Adomian als hilfreich. Anschließend wird eine weitere Klasse von Verfahren, die Function–Specification–Methods, präsentiert.

### 3.1 Die approximative Inverse

Ziel dieses Kapitels ist es, das Konzept der approximativen Inversen anhand eines konkreten Anfangsrandwertproblem vorzustellen. Anfangs wird dieses Problem näher beschrieben. Der nächste Teil beinhaltet die wesentlichen Aussagen über die Existenz einer eindeutigen Lösung. Im dritten Unterabschnitt wird dann das zur Berechnung des Rekonstruktionskernes benötigte adjungierte Problem gelöst. Daran schließt sich die eigentliche Berechnung der approximativen Inversen an. Danach wird der zur Implementierung notwendige Mollifier bestimmt. Abschließend wird der Algorithmus zusammengefasst.

#### 3.1.1 Problembeschreibung

Betrachtet werde ein Stab der Länge 1, der an einer Seite isoliert sei. An diesem Ende des Stabes sei die Temperaturverteilung  $g(t)$  durch Messungen bekannt. Desweiteren sei die Anfangstemperatur gegeben. Gesucht sei der Wärmefluss  $u_x(1, t) = f(t)$  am anderen Ende des Stabes. Das entsprechende mathematische Modell ergibt sich dann wie folgt:

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t < T \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad 0 < t < T \quad (3.2)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (3.4)$$



Zur weiteren Untersuchung des Problems ist es sinnvoll die Differentialgleichung durch eine Operatorgleichung der Form

$$Lf = g$$

zu schreiben. Hierbei beschreibe  $L$  den Operator, der den Fluss  $f$  am rechten Rand auf die Temperatur  $g$  am linken Rand abbildet, d.h.

$$u_x(1, t) \stackrel{L}{\mapsto} u(0, t).$$

Bevor wir eine Regularisierung dieses schlecht gestellten Problems berechnen, befasst sich das nächste Unterkapitel mit der Existenz einer eindeutigen Lösung.

### 3.1.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Mit Hilfe der folgenden Definitionen gilt der unten angeführte Satz, der garantiert, dass eine eindeutig bestimmte Lösung des Problems (3.1)–(3.4) existiert. Dadurch ist sichergestellt, dass die ersten beiden Bedingungen in der Definition von Hadamard erfüllt sind und nur die dritte Bedingung Schwierigkeiten bereitet. Details und allgemeinere Aussagen findet man in [10].

#### 3.1 Definition.

Gegeben sei das Rechteck  $\Omega_T := (0, 1) \times (0, T)$ . Die Funktionenräume

$$\begin{aligned} H^{1,1}(\Omega_T) &:= \{u \in L_2(\Omega_T) : u_x \in L_2(\Omega_T), u_t \in L_2(\Omega_T)\} \\ H^{1,0}(\Omega_T) &:= \{u \in L_2(\Omega_T) : u_x \in L_2(\Omega_T)\} \end{aligned}$$

heißen Sobolevräume.

#### 3.2 Definition.

Eine Funktion  $u(x, t)$  heißt lokal schwache Lösung in  $H^{1,1}(\Omega_T)$  des Problems (3.1)–(3.4), falls eine Zahl  $l \in (0, 1)$  existiert, so dass  $u(x, t)$  zur Klasse  $H^{1,1}((0, l) \times (0, T))$  gehört und die Integralgleichung

$$\int_0^l \int_0^T (u_x \eta_x + u_t \eta) dx dt = 0$$

für alle  $\eta \in H^{1,0}((0, l) \times (0, T))$ , mit  $\eta(l, t) = 0$  und  $u(0, t) = g(t)$  für jedes  $t \in (0, T]$ , erfüllt.

**3.3 Satz.** Ist  $g$  eine Holmgren-Funktion, dann existiert eine eindeutig bestimmte lokal schwache Lösung des Problems (3.1)–(3.4).

Holmgren-Funktionen wurden in Definition 1.5 eingeführt. Den Beweis dieses Satzes findet man in [10].

### 3.1.3 Das adjungierte Problem

Um die approximative Inverse zu berechnen, benötigt man zunächst den adjungierten Operator  $L^*$  zur Berechnung des Rekonstruktionskernes  $\psi_\gamma$ . Der Kern löst die Gleichung

$$L^*\psi_\gamma = m_\gamma.$$

Hierfür definiert man das adjungierte Problem:

Betrachtet werde ein Stab der Länge 1, gegeben sei die Temperatur am rechten isolierten Rand und gesucht werde der Fluss  $-v_x(0, t') = \tilde{f}(t')$  am linken Rand.

$$-v_{xx}(x, t') = v_{t'}(x, t'), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t' < T \quad (3.5)$$

$$v(1, t') = \tilde{g}(t'), \quad 0 < t' < T \quad (3.6)$$

$$v_x(1, t') = 0, \quad 0 < t' < T \quad (3.7)$$

$$v(x, T) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (3.8)$$

Analog zum eigentlichen Problem (3.1)–(3.4) beschreibt man auch Problem (3.5)–(3.8) durch eine Operatorgleichung der Form

$$L^*\tilde{f}(t') = \tilde{g}(t'),$$

wobei  $L^*$  der Operator ist, der den Fluss  $\tilde{f}$  am linken Rand auf die Temperatur  $\tilde{g}$  am rechten Rand abbildet, d.h.

$$v_x(0, t') \stackrel{L^*}{\mapsto} v(1, t').$$

**3.4 Satz.** *Der Operator  $L^*$  ist der zu  $L$  adjungierte Operator bezüglich des  $L_2$ -Skalarproduktes.*

**Beweis.**

Zu zeigen ist:

$$\langle Lf, \tilde{f} \rangle_{L_2} = \langle f, L^*\tilde{f} \rangle_{L_2}$$

Dabei sei

$$\langle Lf, \tilde{f} \rangle_{L_2} = \int_0^T Lf(t)\tilde{f}(t) dt \quad \text{und} \quad \langle f, L^*\tilde{f} \rangle_{L_2} = \int_0^T f(t)L^*\tilde{f}(t) dt$$

Sei  $u(x, t)$  Lösung des Problems (3.1)–(3.4) und  $v(x, t)$  Lösung des adjungierten Problems (3.5)–(3.8). Dann gilt:

$$\int_0^T \int_0^1 (u_{xx}(x, t) - u_t(x, t)) v(x, t) dx dt = 0 \quad (3.9)$$

Mittels partieller Integration und den Bedingungen (3.1)–(3.8) wird

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 u_{xx}(x, t) v(x, t) dx dt \\
&= \int_0^T u_x(1, t) v(1, t) - u_x(0, t) v(0, t) dt \\
&\quad - \int_0^T u(1, t) v_x(1, t) - u(0, t) v_x(0, t) dt + \int_0^T \int_0^1 u(x, t) v_{xx}(x, t) dx dt \\
&= \int_0^T f(t) \tilde{g}(t) dt - \int_0^T g(t) \tilde{f}(t) dt + \int_0^T \int_0^1 u(x, t) v_{xx}(x, t) dx dt.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 u_t(x, t) v(x, t) dx dt \\
&= \int_0^1 u(x, T) v(x, T) - u(x, 0) v(x, 0) dx - \int_0^1 \int_0^T u(x, t) v_t(x, t) dt dx \\
&= - \int_0^T u(x, t) v_t(x, t) dt dx,
\end{aligned}$$

wobei die Bedingungen (3.1)–(3.8) benutzt wurden. Beides zusammen genommen führt gemäß (3.9) auf die Gleichung

$$\begin{aligned}
& \int_0^T f(t) \tilde{g}(t) dt - \int_0^T g(t) \tilde{f}(t) dt \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^T u(x, t) (v_{xx}(x, t) + v_t(x, t)) dt dx = 0 \\
&\iff \int_0^T f(t) \tilde{g}(t) dt = \int_0^T g(t) \tilde{f}(t) dt \\
&\iff \langle f(t), \tilde{g}(t) \rangle_{L_2} = \langle g(t), \tilde{f}(t) \rangle_{L_2} \\
&\iff \langle f(t), L^* \tilde{f}(t) \rangle_{L_2} = \langle Lf(t), \tilde{f}(t) \rangle_{L_2} \quad \text{für alle } t.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

### 3.1.4 Berechnung der approximativen Inversen

Betrachtet man die Gleichung

$$L^* \tilde{f}(t) = L^* v_x(0, t, t') = m_\gamma(t, t') \quad \text{für alle } t, t' \in [0, T], \quad (3.10)$$

sieht man, dass der Rekonstruktionskern  $\psi_\gamma$  bestimmt wird durch die Bedingung

$$\psi_\gamma(t, t') = v_x(0, t, t') \quad \text{für alle } t, t' \in [0, T].$$

Die Approximative Inverse berechnet sich dann wie folgt

$$S_\gamma g(t, t') = \langle g(t, t'), \psi_\gamma(t, t') \rangle = \langle g(t, t'), v_x(0, t, t') \rangle.$$

Wie in Kapitel 1.4 bereits erwähnt wurde, kann der Rechenaufwand drastisch reduziert werden, wenn man einen Mollifier vom Faltungstyp wählt,

$$m_\gamma(t, t') = m_\gamma(t - t') = L^* \psi_\gamma(t - t').$$

Dann erhält man auch einen Rekonstruktionskern desselben Typs und für  $\psi_\gamma$  gilt:

$$\psi_\gamma(t - t') = v_x(0, t - t').$$

Da in Gleichung (3.10) der Mollifier exakt gegeben ist, kann man diesen mithilfe des Zerlegungsansatzes von Adomian berechnen, mit den Randbedingungen

$$v(1, t') = \tilde{g}(t') \quad \text{und} \quad v_x(1, t') = 0.$$

Dann erhält man nach Gleichung (1.26):

$$v(x, t - t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!} \tilde{g}^{(n)}(t - t').$$

Ableiten nach  $x$  ergibt

$$v_x(x, t - t') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \tilde{g}^{(n)}(t - t'),$$

insbesondere also

$$v_x(0, t - t') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \tilde{g}^{(n)}(t - t').$$

Wegen

$$\tilde{g}(t, t') = L^* \tilde{f}(t, t') = -L^* v_x(0, t - t') = -m_\gamma(0, t - t').$$

erhält man den Rekonstruktionskern  $v_x$  als

$$v_x(0, t - t') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} m_\gamma(t - t'). \quad (3.11)$$

Statt an allen Punkten  $(t, t')$ , muss man  $\psi_\gamma$  nur noch an den Stellen  $(t - t')$  für ein  $t$  bestimmen; geeignet wäre  $t = 0$ . Die approximative Inverse berechnet sich dann als

$$S_\gamma g(t - t') = (g * v_x)(t - t'). \quad (3.12)$$

Vorausgesetzt, Gleichung (3.12) ist eine Regularisierung des Problems (3.1)–(3.4), kann eine Lösung des inversen Wärmeleitungsproblems bestimmt werden. D.h. die berechnete Lösung

$$f_\gamma = S_\gamma g = \langle g, v_x \rangle$$

sollte also gegen die exakte Lösung  $f$  konvergieren, falls der Datenfehler  $\varepsilon$  gegen 0 strebt. Dies zeigen wir im nächsten Satz.

**3.5 Satz.** Sei  $m_\gamma$  ein Mollifier vom Faltungstyp, d.h.  $m_\gamma(t, t') = m_\gamma(t - t')$  mit  $\gamma > 0$  und  $t, t' \in [0, T]$ , der die folgenden Bedingungen erfüllt:

- i)  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{m}_\gamma(\xi)e^{\sqrt{\xi}}| \leq c(\gamma) < \infty$
- ii)  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{\xi \in K} (1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma(\xi)) = 0 \quad K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt}$
- iii)  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{m}_\gamma(\xi)| \leq M.$

Dann ist die approximative Inverse  $S_\gamma g$  ein Regularisierungsverfahren für das inverse Wärmeleitungsproblem.

Im Beweis dieses Satzes benötigen wir das folgende Lemma.

**3.6 Lemma.** Gegeben seien  $m_\gamma$  wie in Satz 3.5 und  $f \in L_2(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\|\hat{f} \cdot (1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma)\|_{L_2} \rightarrow 0$$

**Beweis.** Wegen  $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$  kann man für jedes  $\delta > 0$  eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}$  finden, so dass gilt

$$\int_{\mathbb{R} \setminus K} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \delta$$

und wegen ii) existiert ein  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$  mit

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma(\xi)| \leq \delta$$

Dann folgt mit ii) und iii)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma(\xi)|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_K |1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma(\xi)|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R} \setminus K} |1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma(\xi)|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \|\hat{f}\|_{L_2}^2 \delta + (1 - (2\pi)^{1/2} M)^2 \delta. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Desweiteren wird im Beweis des Satzes 3.5 die Fouriertransformation

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

verwendet.

**Beweis von Satz 3.5.** Im Laufe des Beweises benötigt man die Fouriertransformierte des Rekonstruktionskernes  $\psi_\gamma(t - t') = v_x(0, t - t')$ . Diese existiert wegen der Konvergenz der Reihe in (3.11) und ist gegeben durch

$$\hat{v}_x(0, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(2n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \hat{m}_\gamma(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{(2n-1)!} \xi^n \hat{m}_\gamma(\xi).$$

Desweiteren kann man zeigen, dass diese Reihe absolut konvergiert:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{-i^n}{(2n-1)!} \xi^n \hat{m}_\gamma(\xi) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\xi^n}{(2n-1)!} \right| |\hat{m}_\gamma(\xi)| \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\xi^{(k+1)/2}}{k!} \right| |\hat{m}_\gamma(\xi)| \quad \text{mit } k = 2n-1 \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\xi^{k/2}}{k!} \right| |\hat{m}_\gamma(\xi)| \leq e^{\sqrt{\xi}} |\hat{m}_\gamma(\xi)| \stackrel{i)}{\leq} c(\gamma) < \infty \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Plancherel ist somit

$$\|v_x(0, t - t')\|_{L_2} = \|\hat{v}_x(0, t - t')\|_{L_2} \leq c(\gamma).$$

Wir wollen nun nachweisen, dass die numerische Lösung

$$f_\gamma = \langle v_x(0, t, \cdot), g^\varepsilon(\cdot) \rangle$$

tatsächlich gegen die exakte Lösung  $f$  konvergiert. Dabei sei  $\varepsilon$  wieder eine obere Schranke für die verrauschten Daten  $g^\varepsilon$ ,

$$\|g^\varepsilon - g\| \leq \varepsilon.$$

Weiter gilt

$$\langle g, v_x \rangle = \langle Lf, v_x \rangle = \langle f, L^*v_x \rangle = \langle f, m_\gamma \rangle.$$

Wir betrachten deshalb

$$\begin{aligned} \|f - f_\gamma\| &= \|f - \langle v_x(0, t, \cdot), g^\varepsilon \rangle\| \\ &\leq \|f - \langle v_x(0, t, \cdot), g \rangle\| + \|\langle v_x(0, t, \cdot), g^\varepsilon - g \rangle\| \\ &= \|f - \langle f, m_\gamma \rangle\| + \|\langle v_x(0, t, \cdot), g^\varepsilon - g \rangle\| \\ &= \|\hat{f} - (2\pi)^{1/2} \hat{f} \hat{m}_\gamma\| + \|\hat{v}_x(\hat{g}^\varepsilon - \hat{g})\| \quad (\text{Plancherel, Faltungssatz}) \\ &\leq \|\hat{f}(1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma)\| + \varepsilon c(\gamma). \end{aligned}$$

Als nächstes definieren wir die Menge

$$M_\eta = \{(\gamma, \varepsilon) \mid \|\hat{f}(1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma)\| \leq \eta/2 \text{ und } c(\gamma)\varepsilon \leq \eta/2\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, weil man wegen Lemma 3.6 ein  $\gamma_0 > 0$  finden kann, so dass

$$\|\hat{f}(1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma)\| \leq \eta$$

und wegen  $c(\gamma) \leq \infty$  kann man für dieses  $\gamma_0$  ein  $\varepsilon > 0$  finden, so dass

$$c(\gamma) \varepsilon \leq \eta/2.$$

Dann enthält diese Menge Punkte  $(\gamma, \varepsilon)$  für die gilt

$$\|f - f_\gamma\| \leq \eta.$$

Daraus folgt

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ (\gamma, \varepsilon) \in M_\eta}} \|f - \langle v_x(0, t, \cdot), g^\varepsilon(\cdot) \rangle\| = 0$$

und somit die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.**

Die erste Bedingung des Satzes gewährleistet, dass  $m_\gamma$  eine Funktion der Holmgrenklasse ist. Dann hat die Gleichung  $L^*\psi_\gamma = m_\gamma$  eine eindeutige Lösung.

**3.7 Satz.** Erfüllt die Funktion  $f$  neben den Voraussetzungen des Satzes 3.5 die Glattheitsbedingung

$$f \in H^\alpha := \left\{ f \in L_2 \left| \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^\alpha |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right. \right\}$$

mit  $\alpha > 0$ , so gilt für den Fehler zwischen der exakten und der numerisch berechneten Lösung

$$\begin{aligned} \|f - \langle v_x(0, \cdot), g^\varepsilon(\cdot) \rangle\|_{L_2} &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{(1 + |\xi|^2)^{-\alpha} (1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma(\xi))\} \|f\|_{H^\alpha} \\ &\quad + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{m}_\gamma(\xi) e^{\sqrt{\xi}}| \varepsilon. \end{aligned}$$

**Beweis.** Analog zum Beweis des Satzes 3.5 gilt

$$\begin{aligned} \|f - \langle v_x(0, \cdot), g^\varepsilon(\cdot) \rangle\|_{L_2} &\leq \|\hat{f} \cdot (1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma)\|_{L_2} + \varepsilon \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{m}_\gamma(\xi) e^{\sqrt{\xi}}| \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^\alpha |\hat{f}(\xi)|^2 (1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma(\xi))^2 (1 + |\xi|^2)^{-\alpha} d\xi + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{m}_\gamma(\xi) e^{\sqrt{\xi}}| \varepsilon \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \{(1 + |\xi|^2)^{-\alpha} (1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma(\xi))\} \|f\|_{H^\alpha} + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{m}_\gamma(\xi) e^{\sqrt{\xi}}| \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

### 3.1.5 Wahl eines konkreten Mollifiers

Zur Implementierung des Verfahrens müssen wir einen geeigneten Mollifier wählen. Es erscheint sinnvoll, aufgrund der Speicherplatzreduzierung eine Funktion vom Faltungstyp zu wählen, d.h.

$$m_\gamma(t, t') = (2\pi)^{-1/2} \gamma^{-1} e^{-\frac{(t-t')^2}{2\gamma^2}}.$$

Zunächst muss natürlich der Nachweis erbracht werden, dass der so gewählte Mollifier tatsächlich eine Regularisierung für Problem (3.1)–(3.4) liefert, indem wir die Bedingungen des Satzes 3.5 überprüfen. Dazu benötigen wir zuerst die Fouriertransformation von  $m_\gamma$

$$\hat{m}_\gamma(\xi) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{\gamma^2 \xi^2}{2}}.$$

Die erste Bedingung

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} (|\hat{m}_\gamma(\xi) e^{\sqrt{\xi}}|) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} ((2\pi)^{-1/2} |e^{-\gamma^2 \xi^2 / 2} e^{\sqrt{\xi}}|) < \infty$$

ist wegen der Stetigkeit von  $e^{-\gamma^2 \xi^2 / 2} e^{\sqrt{\xi}}$  und

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} e^{-\gamma^2 \xi^2 / 2} e^{\sqrt{\xi}} \rightarrow 0$$

erfüllt. Jetzt betrachten wir die zweite Bedingung

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{\xi \in K} (1 - (2\pi)^{1/2} \hat{m}_\gamma(\xi)) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{\xi \in K} (1 - e^{-\gamma^2 \xi^2 / 2}) \\ &\leq \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{\xi \in [-b, b]} (1 - e^{-\gamma^2 \xi^2 / 2}) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} (1 - e^{-\gamma^2 b^2 / 2}) = 0. \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt, weil man für jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}$  ein  $b > 0$  finden kann mit  $K \subset [-b, b]$ . Damit ist auch diese Bedingung erfüllt.

Die letzte Bedingung

$$|\hat{m}_\gamma(\xi)| = |(2\pi)^{-1/2} e^{-\gamma^2 \xi^2 / 2}| \leq M$$

gilt offensichtlich. Der oben angegebene Mollifier erfüllt also alle Voraussetzungen des Satzes 3.5 und die so berechnete approximative Inverse ist ein Regularisierungsverfahren für das inverse Wärmeleitungsproblem (3.1)–(3.4).



### 3.1.6 Algorithmus

Abschließend wird nun der Algorithmus zur Rekonstruktion einer Lösung mittels der approximativen Inversen zusammengefasst. Im Wesentlichen besteht der Algorithmus aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden Mollifier und Rekonstruktionskern vorberechnet, da diese nicht von den Daten abhängen. Im zweiten Teil berechnet man dann die Inverse wie in Gleichung (3.12) dargestellt durch eine Faltung zwischen Daten und Rekonstruktionskern.

Da die Daten nur an endlich vielen Zeitpunkten vorliegen, muss man zunächst das Zeitintervall  $[0, T]$  diskretisieren. Das Intervall wird in  $N$  äquidistante Teilintervalle zerlegt, die Schrittweite zwischen den einzelnen Knotenpunkten  $t_k, k = 0, \dots, N$  beträgt  $h = \frac{1}{N-1}$ . Die Funktionswerte an den Knotenpunkten werden entsprechend mit  $f(t_j) = f_j$  bezeichnet. Um die unendliche Summe in der Berechnung von  $v_x$  abzurechnen, wählt man  $M$  als obere Schranke des Summenindexes.

Die Berechnung des Rekonstruktionskernes erfolgt summandenweise. Deshalb initialisiert man den Summenwert  $\psi_l = 0$ . Der Mollifier wird anfangs in allen Punkten  $t_j$  berechnet. Dann wird die Ableitung durch Differenzenquotienten approximiert. Im Innern des Intervalls verwendet man aufgrund der höheren Konsistenz den zentralen Differenzenquotienten, die Ränder müssen durch Vorwärts- bzw. Rückwärts Quotienten genähert werden. Hat man die  $n$ -te Ableitung berechnet, kann man den  $n$ -ten Summanden der Summe zur Berechnung des Rekonstruktionskernes hinzufügen und die im vorangegangenen Schritt berechneten Werte durch die neuen Werte überschreiben. Dann erhöht man  $n$  um 1 und wiederholt das Verfahren.

Im zweiten Teil kann man jetzt leicht den gesuchten Wärmefluss als Faltung zwischen den gegebenen Daten und dem vorberechneten Rekonstruktionskern bestimmen.

**Vorbereitung**

- Setze für alle  $-N \leq l \leq N$  die Werte

$$\psi_l = 0, \quad \text{und} \quad m_l = (2\pi)^{-1/2} \gamma^{-1} \exp(-(lh)^2/(2\gamma^2)).$$

- Für  $n = 1, \dots, M$

- Berechne für alle  $-N \leq l \leq N$

$$\tilde{m}_l := -\frac{m_{l+1} - m_{l-1}}{2h}.$$

- Berechne für alle  $-N \leq l \leq N$

$$\tilde{\psi}_l := \psi_l + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \tilde{m}_l.$$

- Überschreibe die alten Vektoren

$$m_l := \tilde{m}_l \quad \text{und} \quad \psi_l := \tilde{\psi}_l.$$

**Inversion**

- Berechne für alle  $0 \leq j \leq N$  die Faltung

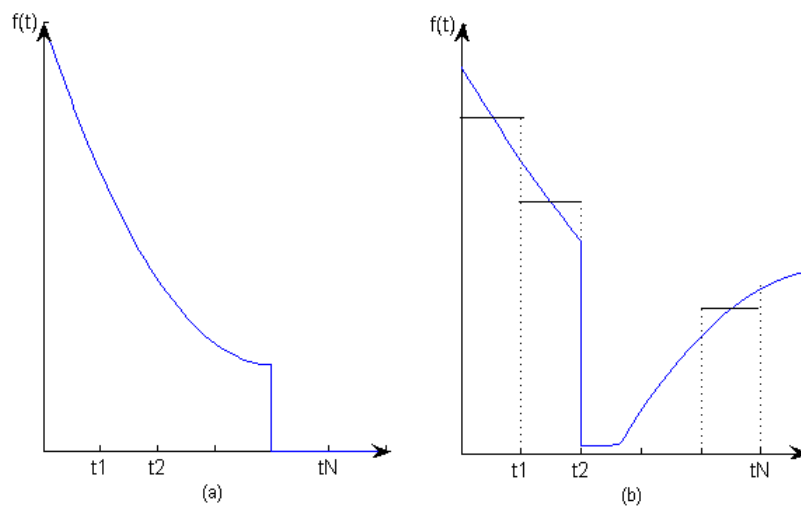
$$f_j = h \sum_{l=0}^N \psi_{j-l} g_l.$$

**Bemerkung:**

Der Term  $(-1)^n$  in der Berechnung der Summe ergibt sich aus der inneren Ableitung von  $m_\gamma(t-t')$  nach  $t'$ . Will man die Faltung mittels einer schnellen Fouriertransformation (FFT) berechnen, muss man den Datenvektor mit Nullen auffüllen, damit dieser die gleiche Länge wie der Rekonstruktionskern hat.

Die Laufzeit des Algorithmus berechnet sich wie folgt:

Die Berechnung der  $n$ -ten Ableitung ist von der Größenordnung  $O(NM)$ . Diese geschieht unabhängig von den gestörten Daten und kann deshalb vorberechnet werden. Die eigentliche Berechnung des inversen Operators als Faltung kann durch die schnelle Fouriertransformation in  $O(N \log_2 N)$  berechnet werden.

Abbildung 3.1: Möglicher Verlauf des Wärmeflusses  $f(t)$ 

## 3.2 Function–Specification–Verfahren

Einer der ersten Wissenschaftler, der das inverse Wärmeleitungsproblem intensiv untersucht hat ist Beck. Er entwickelte Anfang der 60er Jahre das sogenannte *Function–Specification–Verfahren (FSM)*. Dieses Verfahren basiert auf der Annahme, dass der gesuchte Wärmefluss als eine ortsunabhängige Funktion der Zeit darstellbar und approximierbar ist. Diese Funktion kann eine Folge konstanter, linearer, quadratischer, kubischer oder auch exponentieller Funktionen sein. Die FSM können in zwei Klassen von Verfahren unterteilt werden: Die *globale Approximation* und die *sequentielle Approximation*. Wie der Name schon andeutet, wird bei der *globalen Approximation* die Funktion als eine Einheit über das gesamte Zeitintervall betrachtet und die Funktionswerte zu allen Zeitpunkten simultan bestimmt. Bei Letzteren werden die Funktionswerte nacheinander bestimmt, beginnend mit dem frühesten Zeitpunkt. Wie man später sehen wird, ist die stückweise Bestimmung die effizientere Alternative.

### 3.2.1 Globale Approximation

Dieses Verfahren ist eines der ersten, das entwickelt wurde, um inverse Wärmeleitungsprobleme zu behandeln. Man wählt zunächst einen Funktionstyp, der den Verlauf des gesuchten Wärmeflusses  $f(t)$  beschreiben soll. Dieser kann z.B. durch ein Polynom  $n$ -ten Grades, eine Exponentialfunktion oder auch durch eine trigonometrische Funktion dargestellt werden. Anschließend minimiert man den Fehler zur tatsächlichen Lösung z.B. durch das Verfahren der kleinsten Quadrate. Ein großer Nachteil dieser Methode ist sicherlich, dass man diese Ansatzfunktion wählt, ohne Informationen über den tatsächlichen Verlauf der gesuchten Funktion.

Um einen gekrümmten Verlauf der Flussfunktion, wie in Abbildung 3.1(a), zu berücksichtigen, ist es sinnvoll, quadratische, exponentielle oder trigonometrische Ansatzfunktionen zu wählen wie

$$f(t) = \beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3 \quad \text{oder} \quad f(t) = \beta_1 e^{-\beta_2 t} \quad \text{mit } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}, t \in [0, T].$$

Zur Veranschaulichung des Verfahrens sind diese nichtlinearen Funktionen jedoch zu komplex. Deshalb begnügen wir uns mit dem linearen Ansatz

$$f(t) = \beta_1 + \beta_2 t \quad \text{mit } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, t \in [0, T],$$

der für unsere Zwecke ausreichend ist.

Das Problem kann wie im vorherigen Abschnitt beschrieben werden:

Betrachtet werde ein Stab der Länge 1, an dessen einem Rand die Temperaturverteilung  $g(t)$  durch Messungen gegeben sei. Desweiteren kenne man die Anfangstemperaturverteilung  $u_0(x)$ . Gesucht werde der Wärmefluss  $u_x(0, t) = f(t)$

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \quad (3.13)$$

$$u(1, t) = g(t), \quad 0 < t < T \quad (3.14)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad 0 < x < 1. \quad (3.15)$$

Die Bedingungen am rechten Rand können auch als Neumann- oder Robinbedingungen gewählt werden. Durch Nachrechnen kann man zeigen, dass durch

$$u(x, t) = u_0(x) + \beta_1 \varphi(x, t) + \beta_2 \psi(x, t)$$

eine Lösung des Problems (3.13)–(3.15) gegeben ist. Dabei sind  $\varphi(x, t)$  und  $\psi(x, t)$  Lösungen des Problems mit den Randbedingungen  $g(t) = 0$  und  $f(t) = 1$  bzw.  $f(t) = t$ . Diese können z.B. durch ein Differenzenverfahren berechnet werden. Angenommen, man kann die Temperatur an der Stelle  $x = x_i$  messen und bezeichnet diese mit  $\tilde{u}(x_i, t_k) = \tilde{u}_k, k = 1, \dots, N$ , dann kann man die Koeffizienten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  bestimmen, indem man den Fehler zwischen den gemessenen und den berechneten Werten durch das Verfahren der kleinsten Quadrate minimiert, d.h.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (\tilde{u}(x_i, t_k) - u(x_i, t_k))^2 \\ &= \sum_{k=1}^N (\tilde{u}(x_i, t_k) - u_0(x_i) - \beta_1 \varphi(x_i, t_k) - \beta_2 \psi(x_i, t_k))^2 \rightarrow \min_{\beta_1, \beta_2}. \end{aligned}$$

Minimieren bzgl.  $\beta_1$  und  $\beta_2$  liefert

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N [\tilde{u}_k - u_0(x_i) - \beta_1 \varphi_k - \beta_2 \psi_k] \varphi_k = 0, \\ & \sum_{k=1}^N [\tilde{u}_k - u_0(x_i) - \beta_1 \varphi_k - \beta_2 \psi_k] \psi_k = 0, \end{aligned}$$

mit  $\varphi_k = \varphi(x_i, t_k)$ ,  $\psi_k = \psi(x_i, t_k)$ . Schreibt man dieses Gleichungssystem als Matrix ergibt sich

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{k=1}^N \varphi_k^2 & A_{12} &= \sum_{k=1}^N \varphi_k \psi_k & A_{22} &= \sum_{k=1}^N \psi_k^2 \\ d_1 &= \sum_{k=1}^N (\tilde{u}_k - u_0(x_i)) \varphi_k & d_2 &= \sum_{k=1}^N (\tilde{u}_k - u_0(x_i)) \psi_k. \end{aligned}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems ergibt sich

$$\beta_1 = \frac{d_1 A_{22} - d_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{d_2 A_{22} - d_1 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}.$$

Ein sprunghafter Wärmefluss, wie in Abbildung 3.1(b) dargestellt, wird in diesem Ansatz jedoch nicht berücksichtigt. Aufgrund dessen können die Ergebnisse verbessert werden, indem der Fluss nicht mehr als eine Funktion über das gesamte Zeitintervall abschätzt, sondern das Intervall in äquidistante Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  zerlegt, und die Funktion innerhalb dieser Teilintervalle als konstant vorausgesetzt,

$$f_k = \beta_k.$$

Eine Lösung des Wärmeleitungsproblems mit konstantem Wärmefluss findet man mit dem Prinzip von Duhamel, das nachfolgend erläutert wird.

### Das Prinzip von Duhamel:

Sei  $\varphi(x, t)$  eine Lösung des Problems (3.13)–(3.15) mit

$$f(t) = 1 \quad \text{und} \quad u_0(x) = 0.$$

Dann ist eine Lösung dieses Problems mit Wärmefluss

$$f(t) = f_1 = \text{const}$$

gegeben durch

$$u(x, t) = f_1 \varphi(x, t).$$

Eine Lösung über das gesamte Teilintervall der Länge  $\Delta t$  ist dann

$$u(x, t) = f_1 (\varphi(x, t) - \varphi(x, t - \Delta t)) \quad (3.16)$$

Eine Lösung zum Zeitpunkt  $t_k$  erhält man, indem man die Lösungen der einzelnen vorherigen Teilintervalle aufsummiert.

$$\begin{aligned}
u(x, t_k) &= u_0 + f_1(\varphi(x, t_k) - \varphi(x, t_k - \Delta t)) \\
&\quad + f_2(\varphi(x, t_k - \Delta t) - \varphi(x, t_k - 2\Delta t)) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + f_k(\varphi(x, t_k - (k-1)\Delta t) - \varphi(x, t_k - k\Delta t)) \\
&= u_0 + \sum_{l=1}^k f_l(\varphi(x, t_k - (l-1)\Delta t) - \varphi(x, t_k - l\Delta t)) \\
&= u_0 + \sum_{l=1}^k f_l(\varphi(x, t_{k-l+1}) - \varphi(x, t_{k-l})) \\
&= u_0 + \sum_{l=1}^k f_l \Delta \varphi_{k-l} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

mit

$$\Delta \varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k = \varphi(x, t_{k+1}) - \varphi(x, t_k).$$

Man muss also in jedem Zeitpunkt das Gleichungssystem

$$Af + u_0 = u$$

lösen mit der Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \Delta \varphi_0 & & & & \\ \Delta \varphi_1 & \Delta \varphi_0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \Delta \varphi_{k-1} & \cdots & \Delta \varphi_1 & \Delta \varphi_0 & \end{pmatrix}.$$

Diese untere Dreiecksmatrix ist jedoch schlecht konditioniert und das Verfahren muss regularisiert werden. Minimiert man nun den Fehler zwischen gemessener und berechneter Temperatur wieder durch das Verfahren kleinsten Quadrate und regularisiert anschließend mit Tikhonov-Phillips, erhält man

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^N (\tilde{u}(x_i, t_k) - u(x_i, t_k))^2 + \alpha \sum_{k=1}^N f_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^N (\tilde{u}(x_i, t_k) - u_0 - \sum_{l=1}^k f_l \Delta \varphi_{k-l})^2 + \alpha \sum_{k=1}^N f_k^2.
\end{aligned}$$

Durch das daraus resultierende Gleichungssystem können die Koeffizienten  $f_k$  bestimmt werden. Der Rechenaufwand dieses Gleichungssystems beträgt  $O(n^3)$ . Dies ist ein weiterer Nachteil. Eine Verbesserung der Laufzeit wurde durch die Entwicklung der stückweisen Approximation erreicht.

### 3.2.2 Sequentielle Approximation

Im Gegensatz zu der vorigen Klasse dieser Verfahren, werden jetzt nicht mehr alle Komponenten des Wärmeflusses gleichzeitig bestimmt, sondern nacheinander. Dabei beginnt man mit dem frühesten Zeitpunkt  $t_0$ . Das Zeitintervall wird wiederum in gleichgroße Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  unterteilt. Auch wird der Wärmefluss wie im vorigen Abschnitt innerhalb dieser Teilstücke als konstant vorausgesetzt. Eine Lösung ist dann nach Duhamel gemäß Gleichung (3.17) gegeben:

$$u(x, t_k) = u_k = u_0 + \sum_{l=1}^k f_l \Delta \varphi_{k-l}.$$

Statt Tikhonov-Philppis verwendet man nun aber eine andere Regularisierung. Beck entwickelte den Ansatz, den Wärmefluss zur Zeit  $t_k$  unter der Annahme zu berechnen, der Wärmefluss an den folgenden  $r$  Zeitpunkten sei gleich dem gegenwärtigen Wärmefluss

$$f_k = f_{k+1} = \dots = f_{k+r-1}.$$

Die Rolle des Regularisierungsparameters übernimmt jetzt  $r$ . Dann gilt für die Temperaturverteilung an den zusätzlichen Zeitpunkten

$$\begin{aligned} u_k &= u_0 + \sum_{l=1}^{k-1} f_l \Delta \varphi_{k-l} + f_k \Delta \varphi_0 = u_0 + \sum_{l=1}^{k-1} f_l \Delta \varphi_{k-l} + f_k \varphi_1 \\ u_{k+1} &= u_0 + \sum_{l=1}^{k-1} f_l \Delta \varphi_{k-l} + f_k \delta \varphi_0 + f_{k+1} \Delta \varphi_1 \\ &= u_0 + \sum_{l=1}^{k-1} f_l \Delta \varphi_{k-l} + f_k \varphi_1 + f_k (\varphi_2 - \varphi_1) \\ &= u_0 + \sum_{l=1}^{k-1} f_l \Delta \varphi_{k-l} + f_k \varphi_2 \\ &\vdots \\ u_{k+r-1} &= u_0 + \sum_{l=1}^{k-1} f_l \Delta \varphi_{k-l} + f_k \varphi_r. \end{aligned}$$

Angenommen, man kennt den Wärmefluss bis zum Zeitpunkt  $t_{k-1}$ , dann kann man den Wärmefluss zum gegenwärtigen Zeitpunkt  $t_k$  berechnen, indem man den Fehler zwischen den gemessenen und den berechneten Werten bis zum Zeitpunkt  $t_{k+r-1}$  wieder mit dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate minimiert.

$$\sum_{i=1}^r (\tilde{u}_{k+i-1} - u_{k+i-1})^2 \rightarrow \min_{f_k}.$$

Einsetzen von Gleichung (3.17) liefert

$$\sum_{i=1}^r \left[ \tilde{u}_{k+i-1} - u_0(x_i) - \sum_{l=1}^{k-1} f_l \Delta \varphi_{k+i-1-l} - f_k \varphi_i \right] \varphi_i = 0.$$

Auflösen nach der gesuchten Größe ergibt

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^r \left( \tilde{u}_{k+i-1} - u_0(x_i) - \sum_{l=1}^{k-1} q_l \Delta \varphi_{k+i-1-l} \right) \varphi_i}{\sum_{i=1}^r \varphi_i^2}.$$

### 3.2.3 Algorithmus

Der Algorithmus kann wieder in zwei Abschnitte unterteilt werden. Zuerst berechnet man die Lösung  $\varphi(x, t)$  durch ein finites Differenzenverfahren, die in Kapitel 1.2 behandelt wurden. Diese Rechnung kann unabhängig von den Daten im Vorfeld der eigentlichen Bestimmung des gesuchten Wärmeflusses durchgeführt werden. Anschließend wird für jeden Zeitpunkt  $t_k$  der zugehörige Wärmefluss  $f(t_k) = f_k$  berechnet.

#### Vorbereitung

- Berechne  $\varphi(x, t)$  als Lösung von

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(x, t) &= \varphi_t(x, t), & 0 < x < 1, & \quad 0 < t < T \\ \varphi_t(1, t) &= 0, & 0 < t < T \\ -\varphi_t(0, t) &= 1, & 0 < t < T \\ \varphi(x, 0) &= 0 & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

#### Berechnung des Wärmeflusses

- Für  $k = 1, \dots, N$

– Berechne für alle  $i = 1, \dots, r$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l=1}^{k-1} f_l (\varphi_{k+i-l} - \varphi_{k+i-l-1}) \\ f_k &= \frac{\sum_{i=1}^r (\tilde{u}_{k+i-1} - u_0 - S) \varphi_i}{\sum_{i=1}^r \varphi_i^2} \end{aligned}$$

Die Laufzeit des Algorithmus berechnet sich wie folgt:

Die Funktion  $\varphi(x, t)$  kann durch ein implizites Differenzenverfahren in  $O(N)$  vorberechnet werden. Der gesuchte Wärmefluss kann in einer Laufzeit der Größenordnung  $O(N^2 r)$ .



## Kapitel 4

# Numerische Ergebnisse

Die Qualität der beiden Verfahren wird in diesem Kapitel an zwei Beispielen verdeutlicht. Zuerst soll der durch

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0.25, 0.75] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegebene Fluss rekonstruiert werden. Dieser Fluss kann so interpretiert werden, dass zur Zeit  $t = 0.25$  eine Wärmequelle, beispielsweise ein Feuerzeug, den Stab bis zur Zeit  $t = 0.75$  erhitzt. Dies ist deshalb ein gutes Beispiel, weil die Funktion  $f$  nicht im ganzen Intervall  $[0, 1]$  stetig ist. Im zweiten Beispiel soll eine Dreiecksfunktion berechnet werden. Dieser Fluss entsteht, wenn man den Stab vom Zeitpunkt  $t = 0.1$  bis zu einem Zeitpunkt  $t = 0.5$  gleichmäßig erhitzt und dann bis  $t = 0.9$  gleichmäßig abkühlt. Die Funktion ist gegeben durch

$$f_2(t) = \begin{cases} t - 0.1 & , t \in [0.1, 0.5] \\ 0.9 - t & , t \in [0.5, 0.9] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Die Daten  $g(t)$ , die benötigt werden, erhält man durch Lösen des direkten Problems (4.1)–(4.4). Der Kurvenverlauf der Datenfunktion ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Dies kann wie folgt beschrieben werden:

Betrachtet werde ein Stab der Länge 1. Bekannt sei der Wärmefluss  $u_x(0, t)$  und  $u_x(1, t)$  an beiden Rändern dieses Stabes. Desweiteren kenne man die Anfangstemperatur  $u(x, 0)$ . Gesucht werde die Temperaturverteilung  $u(0, t) = g(t)$  am linken Rand des Stabes,

$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t < T \quad (4.1)$$

$$u_x(1, t) = f(t), \quad 0 < t < T \quad (4.2)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (4.3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (4.4)$$

Es bietet sich an, dieses durch ein implizites Differenzenverfahren zu lösen, da Bedingungen an beiden Rändern bekannt sind. Die Schrittweite sei

$$h = \frac{1}{(N-1)}.$$

In [7] hat Elden gezeigt, dass es nicht gelingt, eine Funktion an der Grenze  $t = T$  akzeptabel zu rekonstruieren, wenn man nur Daten aus dem Intervall  $[0, T]$  verwendet. Dies wird in Abbildung 4.4 dargestellt. Er hat nachgewiesen, dass die Daten die Zeit  $t = T$  um 30 % überschreiten müssen.

Wir verwenden die Algorithmen des vorigen Abschnittes mit  $N = 100$  Zeitschritten. Der obere Summenindex in der Berechnung des Rekonstruktionskernes der Approximativen Inversen wählen wir  $M = 20$ . Die Daten  $g^\varepsilon(t)$  sind durch einen Fehler  $\varepsilon$  verrauscht, es gilt:

$$\|g^\varepsilon(t) - g(t)\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g^\varepsilon(t) - g(t)| \leq \varepsilon$$

Die fehlerbehafteten Daten wurden erzeugt, indem zum Datenvektor im Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariablen hinzu addiert wurden.

Abbildung 4.3 zeigt den Rekonstruktionskern für  $\gamma = 0.015$ . In den Abbildungen 4.5 – 4.8 werden die Ergebnisse der Rekonstruktion mittels der approximativen Inversen und verschiedenen Werten für  $\varepsilon$  und  $\gamma$  dargestellt. Wie in Abbildung 4.5 erkenntlich, wird der Wärmefluss durch exakte Daten sehr gut rekonstruiert. Werden die Daten mit einem Fehler  $\varepsilon = 0.001$  gestört, sieht man in Abbildung 4.6, dass die Rekonstruktion mit demselben Regularisierungsparameter völlig unbrauchbar wird, weil die Lösung stark oszillierend ist. Man muss also einen größeren Wert für  $\gamma$  suchen. Dass  $\gamma = 0.03$  eine geeignete Lösung liefert, sieht man in Abbildung 4.7. Die nächste Abbildung zeigt eine Rekonstruktion mit Daten, die mit einem Fehler der Größenordnung  $\varepsilon = 0.002$  gestört sind.

Die Abbildungen 4.9 – 4.11 zeigen eine Rekonstruktion der Stufenfunktion durch die sequential function estimation. Bei der Rekonstruktion mit exakten Daten entstehen hier im Gegensatz zum anderen Verfahren Ober- und Unterschwinger. Die Rekonstruktion mit verrauschten Daten liefert jedoch wieder ähnlich gute Ergebnisse. Auch hier muss der Regularisierungsparameter dem Fehler angepasst werden.

Die Abbildungen 4.12 – 4.14 veranschaulichen die Rekonstruktion eines dreieckigen Wärmeflusses durch die Approximative Inverse. Die Abbildungen 4.15 – 4.17 stellen die Rekonstruktion dieses Flusses durch die sequential function estimation dar. Im Vergleich zur Stufenfunktion werden hier bessere Ergebnisse erzielt, insbesondere die Berechnung mit exakten Daten liefert hier sehr gute Ergebnisse.

Vergleicht man die Laufzeiten der beiden Algorithmen, liefert die Approximative Inverse bessere Ergebnisse. Während die sequential function specification bei  $N = 100$  Zeitschritten und  $r = 20$  zusätzlichen Zeitschritten  $N^2 r = 2 \cdot 10^5$  Operationen benötigt, erhält man mit der Approximativen Inversen nach  $N^2 = 10^4$  Operationen, durch Berechnung der Faltung mit FFT sogar nach  $N \log_2(N) \simeq 665$  Operationen gute Ergebnisse. Desweiteren kann man feststellen, dass die Rekonstruktion durch die approximative Inverse glatter ist.

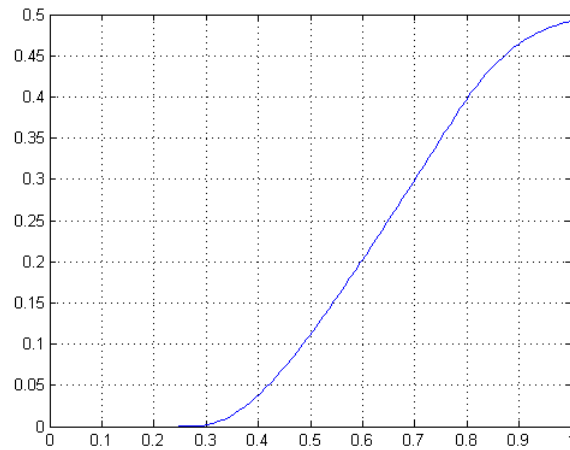


Abbildung 4.1: Temperaturverlauf an der Stelle  $x = 0$ .

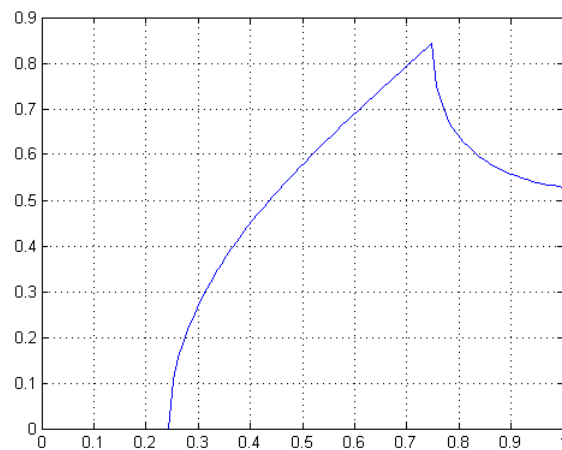
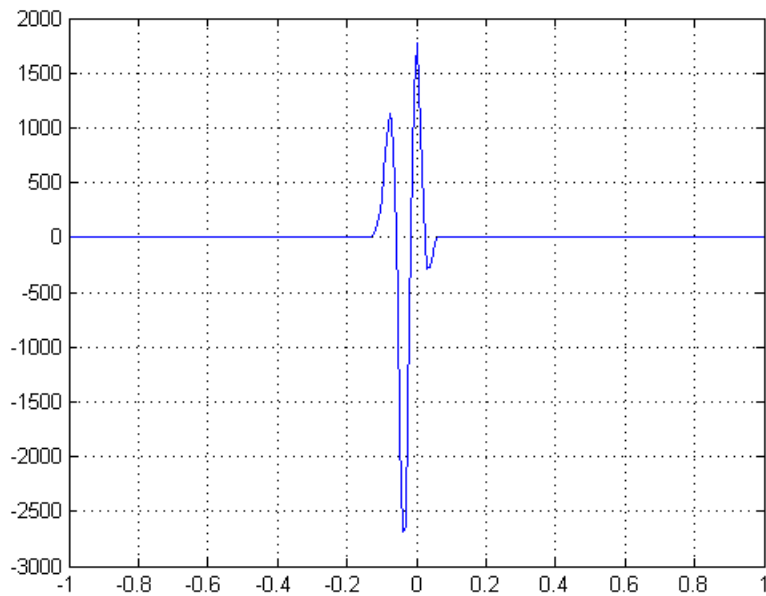
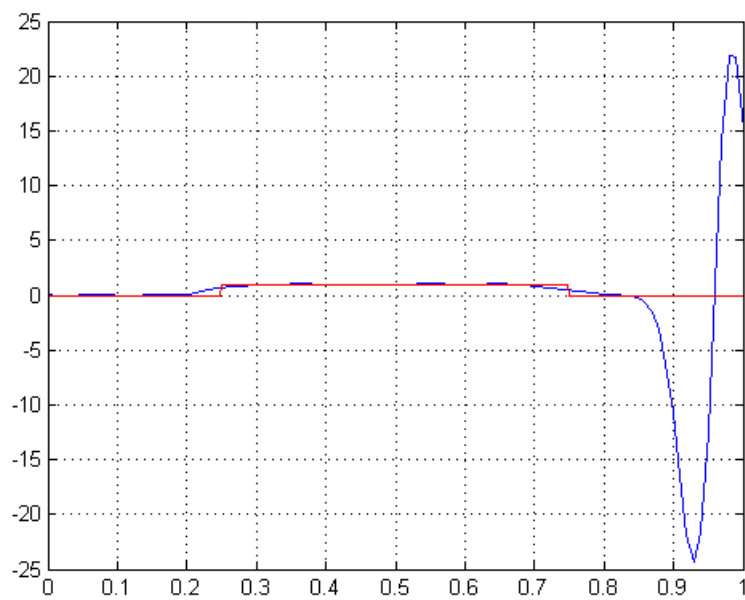
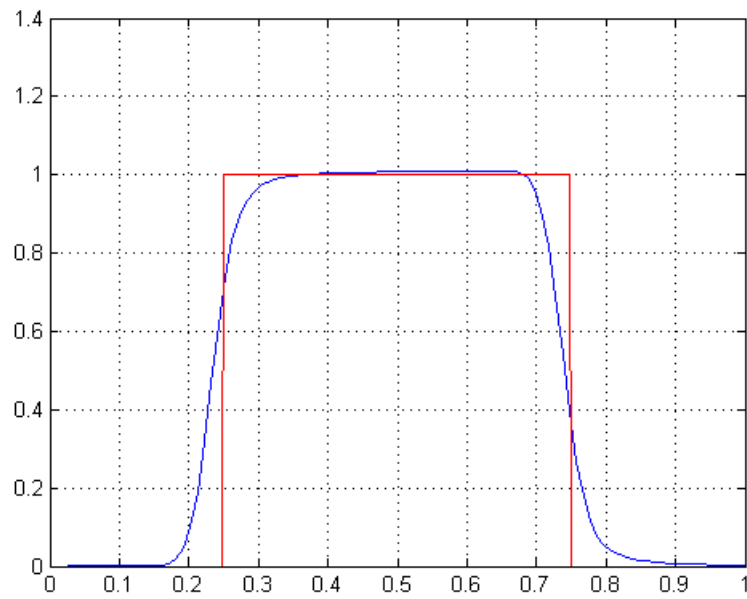
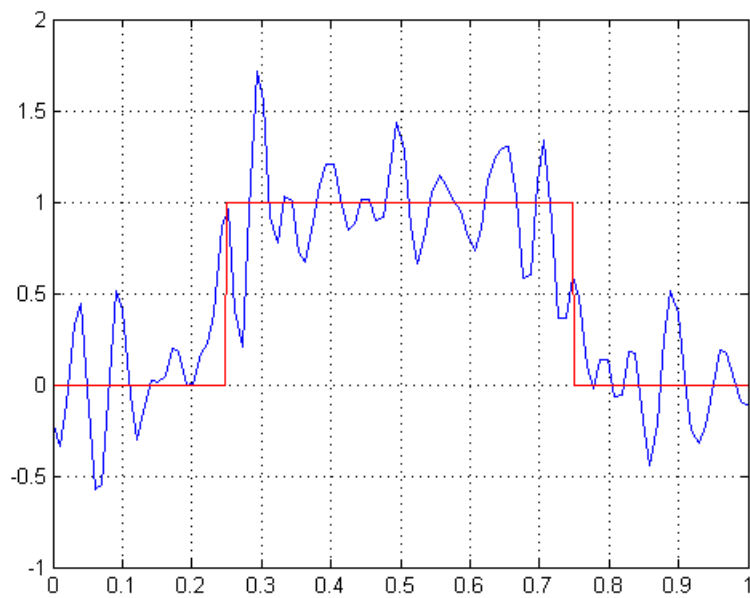
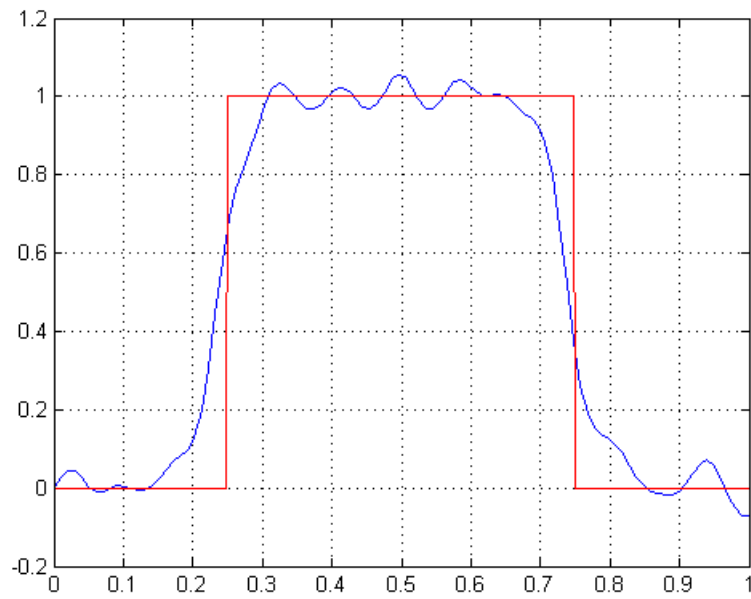
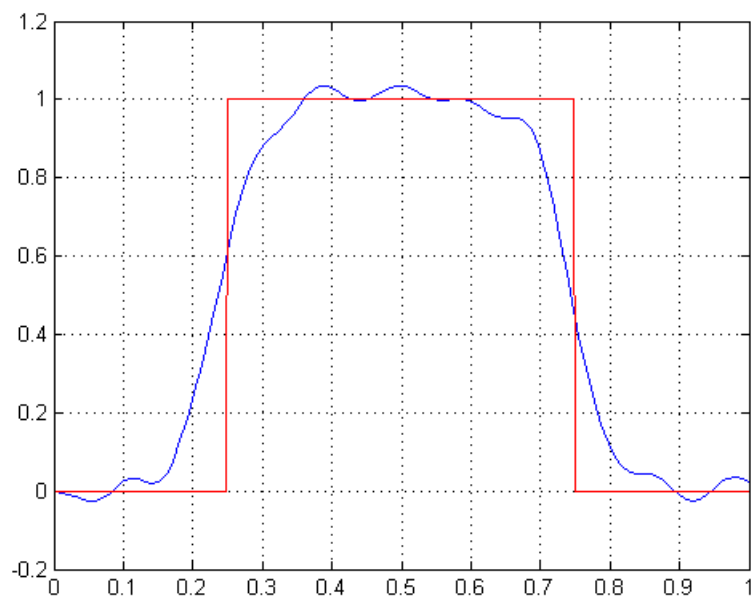
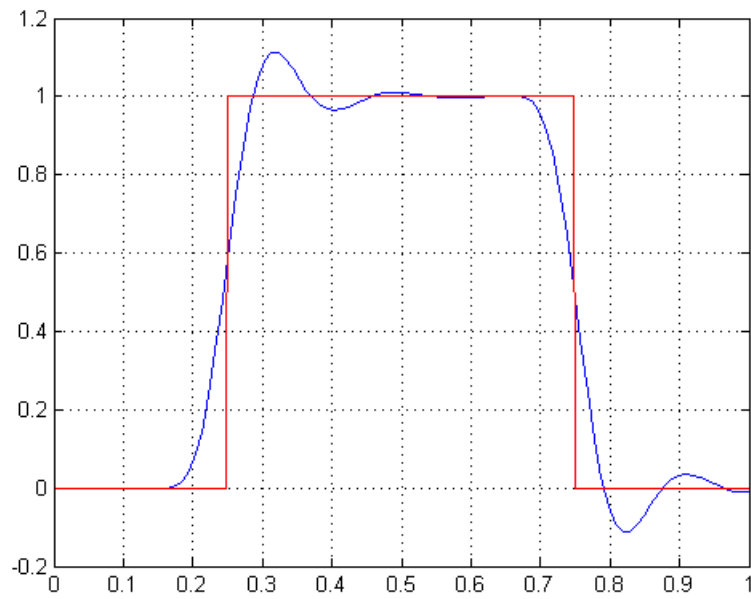
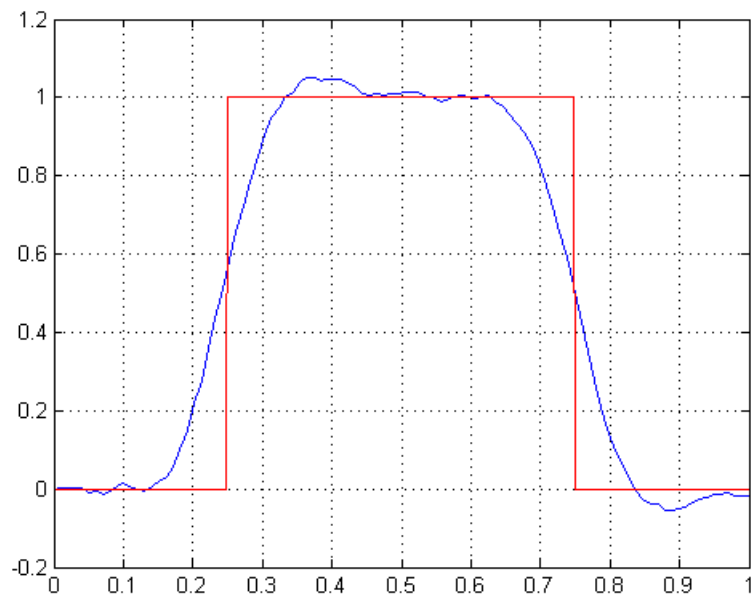


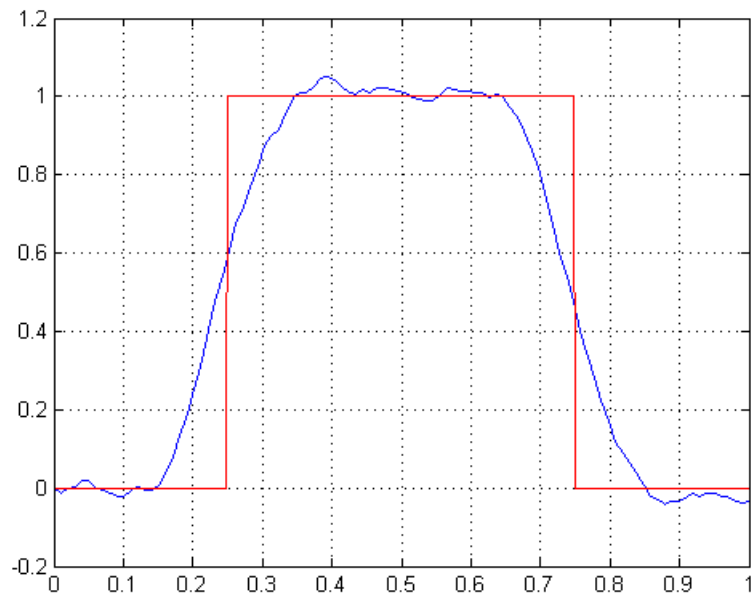
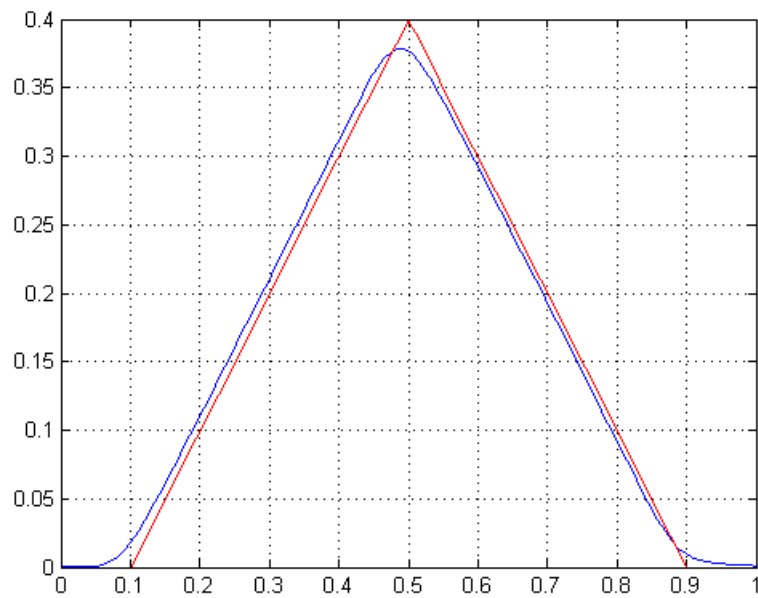
Abbildung 4.2: Temperaturverlauf an der Stelle  $x = 1$ .

Abbildung 4.3: Rekonstruktionskern für  $\gamma = 0.015$ .Abbildung 4.4: Rekonstruktion mit exakten Daten und  $\gamma = 0.015$ .

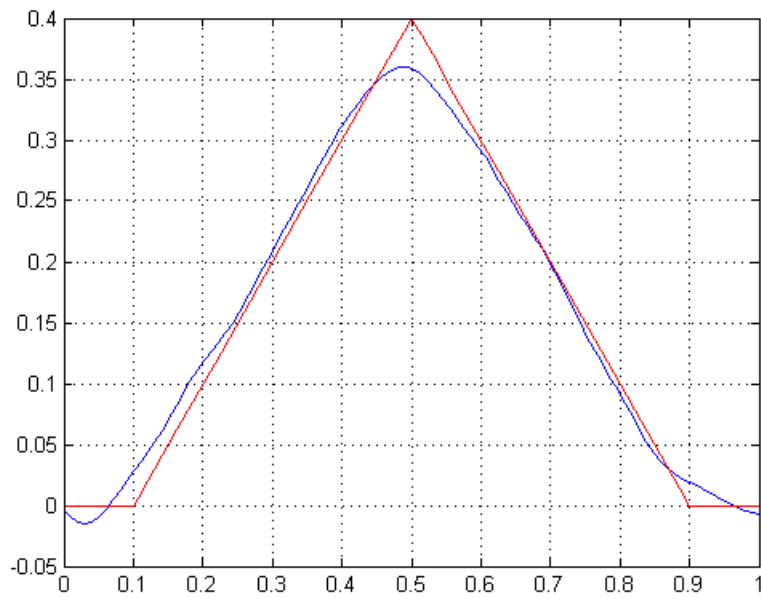
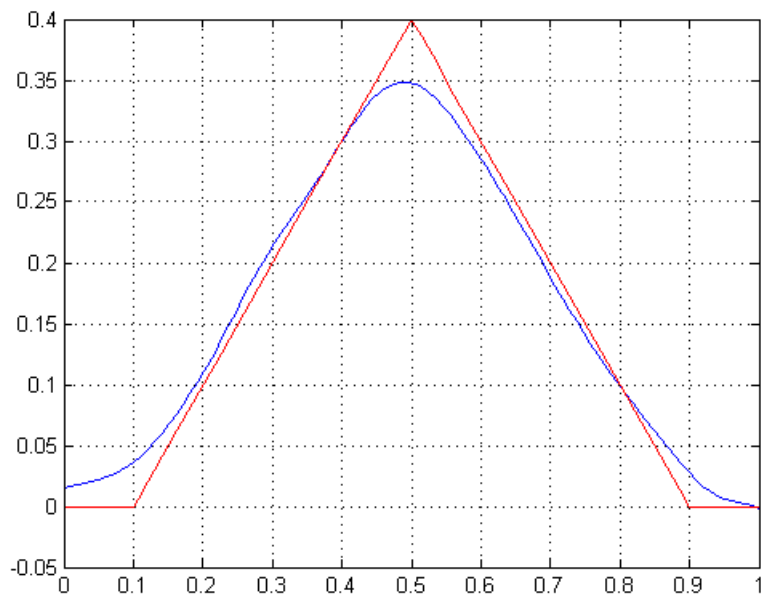
Abbildung 4.5: Rekonstruktion mit exakten Daten und  $\gamma = 0.015$ Abbildung 4.6: Rekonstruktion mit  $\gamma = 0.015$  und  $\epsilon = 0.001$

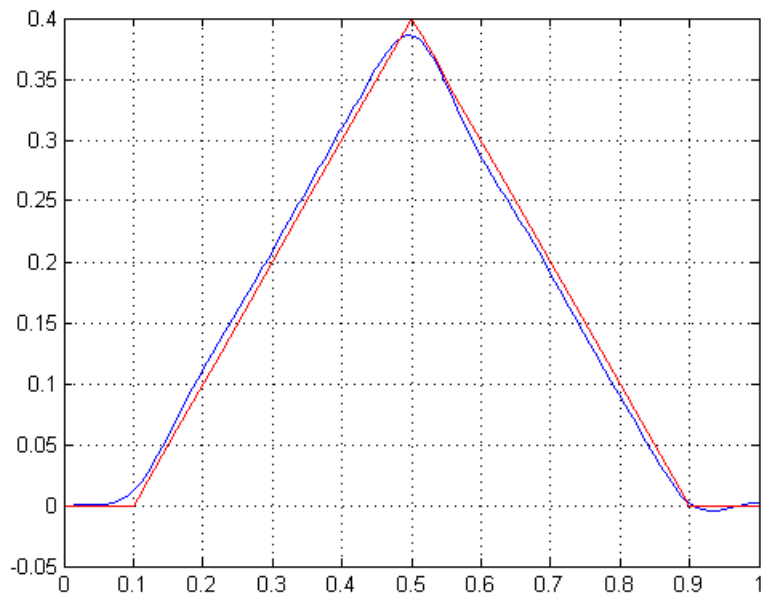
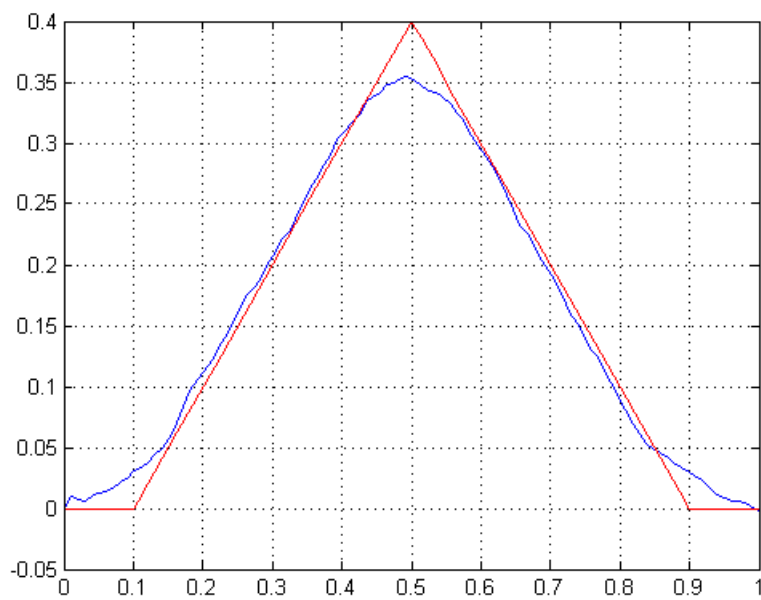
Abbildung 4.7: Rekonstruktion mit  $\gamma = 0.03$  und  $\varepsilon = 0.001$ Abbildung 4.8: Rekonstruktion mit  $\gamma = 0.04$  und  $\varepsilon = 0.002$

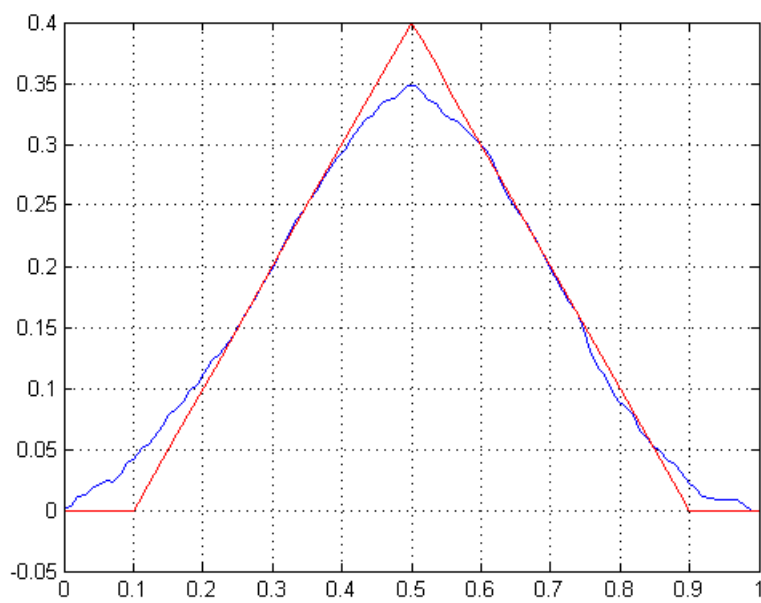
Abbildung 4.9: Rekonstruktion mit exakten Daten und  $r = 11$ Abbildung 4.10: Rekonstruktion mit  $\varepsilon = 0.001$  und  $r = 16$

Abbildung 4.11: Rekonstruktion mit  $\epsilon = 0.002$  und  $r = 17$ Abbildung 4.12: Rekonstruktion mit exakten Daten und  $\gamma = 0.015$



Abbildung 4.13: Rekonstruktion mit  $\varepsilon = 0.001$  und  $\gamma = 0.05$ Abbildung 4.14: Rekonstruktion mit  $\varepsilon = 0.002$  und  $\gamma = 0.07$

Abbildung 4.15: Rekonstruktion mit exakten Daten und  $r = 10$ Abbildung 4.16: Rekonstruktion mit  $\varepsilon = 0,001$  und  $r = 21$

Abbildung 4.17: Rekonstruktion mit  $\varepsilon = 0.002$  und  $r = 24$

# Fazit und Ausblick

Im Laufe dieser Arbeit wurden verschiedene Verfahren zur numerischen Lösung von eindimensionalen inversen Wärmeleitungsproblemen vorgestellt. Die impliziten Differenzenverfahren bieten eine schnelle Alternative zur Lösung solcher Probleme, die Randwertbedingungen an beiden Rändern gegeben haben. Löst man das entstandene lineare Gleichungssystem mit dem Verfahren von Gauß, liefern diese Verfahren bereits in linearer Laufzeit akzeptable Ergebnisse.

Unter der Voraussetzung, dass die gegebenen Randbedingungen bzw. die Daten exakt vorliegen, kann mit dem Zerlegungsansatz von Adomian eine analytische Lösung von partiellen Differentialgleichungen ermittelt werden. Wie in den letzten beiden Kapiteln verdeutlicht wurde, regularisiert die approximative Inverse in schneller Laufzeit lineare schlecht gestellte Probleme. Die Berechnung des gesuchten inversen Operators reduziert sich dabei auf die Berechnung eines Skalarproduktes. Berücksichtigt man die Translationsinvarianz der Faltung, kann dieses Skalarprodukt durch eine Faltung bestimmt werden. Diese kann mittels der schnellen Fouriertransformation in einer Laufzeit von  $O(N \log_2 N)$  berechnet werden.

Desweiteren wurde mit der FSM von Beck eines der ersten Verfahren vorgestellt, das zur Lösung inverser Wärmeleitungsprobleme entwickelt wurde. Unter Zuhilfenahme *zukünftiger* Zeitpunkte liefert dieses Verfahren eine Regularisierung in einer Laufzeit von  $O(N^2 r)$ .

In dieser Arbeit wurden lediglich eindimensionale inverse Wärmeleitungsprobleme untersucht. In der Praxis trifft man jedoch oft auf nichtlineare oder mehrdimensionale Probleme. Deshalb stellt sich die Frage, inwiefern sich die hier vorgestellten Verfahren auf derartige Problemstellungen erweitern lassen. Die approximative Inverse kann, wie in [13] gezeigt wurde, auf gewisse nichtlineare und mehrdimensionale Probleme übertragen werden. Der Zerlegungsansatz von Adomian, der zur Berechnung des Rekonstruktionskernes verwendet wurde, ist sowohl auf nichtlineare als auch auf mehrdimensionale Probleme übertragbar.

Von Interesse ist auch die Verbesserung der Function–Specification–Verfahren von Beck. Stabilisiert man diese statt mit Thikonov–Phillips mit der Lavrentiev–Regularisierung, kann man die Laufzeit dieser Verfahren reduzieren [17].

# Literaturverzeichnis

- [1] G. ADOMIAN *A New Approach to the Heat Equation - an Application of the Decomposition Method*. J. Math. Anal. Appl. **113**, 202-209 (1986).
- [2] G. ADOMIAN *Convergent Series Solution of Nonlinear Equations*. J. Comp. Appl. Math. **2**, 225-230 (1984).
- [3] G. ADOMIAN *Convergent Series Solution of Nonlinear Equations*. J. Comp. Appl. Math. **2**, 225-230 (1986).
- [4] O. M. ALIFANOV *Inverse Heat Transfer Problems*. John Wiley and Sons, New York (1994).
- [5] J. V. BECK, B. BLACKWELL, C. R. S. CLAIR *Inverse Heat Conduction Problems*. John Wiley and Sons, New York (1985).
- [6] H. R. CANNON *The One-dimensional Heat Equation*. Addison-Wesley, Reading MA (1984).
- [7] L. ELDÉN *The Numerical Solution of a Non-characteristic Cauchy Problem for a Parabolic Equation*. In: Numerical Treatment of Inverse Problems in Differential and Integral Equations (Eds. P. Deuffhard and E. Hairer), Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart (1983).
- [8] L. ELDÉN, F. BERNTSSON, T. REGINSKA *Wavelet and Fourier Methods for Solving Sideways Equation*. SIAM J. Sci. Comput. **21**, 2187-2205 (2000).
- [9] CH. GROSSMANN, H.-G. ROOS *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart (1994).
- [10] DINH NHO HÀO *Methods for Inverse Heat Conduction*. Methoden und Verfahren der math. Physik **43** (1998).
- [11] P. JONAS, A. K. LOUIS. *Approximate Inverse for a One-dimensional Inverse Heat Conduction Problem*. Inv. Problems **16**, 175-185 (2000).
- [12] D. LESNIC, L. ELLIOTT *The Decomposition Approach to Inverse Heat Conduction*. J. Math. Anal. Appl. **232**, 82-98 (1999).

- [13] A. K. LOUIS *Approximate Inverse for a linear and some nonlinear problems*. Inv. Problems **12**, 175-190 (1996).
- [14] A. K. LOUIS *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart (1996).
- [15] D. A. MURIO *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*. John Wiley and Sons, New York (1993).
- [16] H. R. SCHWARZ *Numerische Mathematik*. Teubner Verlag, Stuttgart (1993).
- [17] U. TAUTENHAHN *On the Method of Lavrentiev Regularisation for non-linear Ill-Posed Problems*. Inv. Problems **18**, 191-207 (2002).

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und ausschließlich mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt habe.

Saarbrücken, den 17.11.2006

Yvonne Johann