Verallgemeinerte Implizite Volatilität:

Ein inverses Problem in der Optionsbewertung

Diplomarbeit

Stefan Klößner

Themensteller: Prof. Dr. Alfred K. Louis

Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 Mathematik

Institut für Angewandte Mathematik

Juli 2001

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

A	Zu invertierender Operator beim Rückwärtsproblem	74
$\mathrm{abz}(t)$	Abzinsungsfaktor zum Zeitpunkt t	43
$(B_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$	Brownsche Bewegung	7
b_t	Wert einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t	18
c^r	Koeffizienten bei expliziten Differenzenverfahren	50
$\mathrm{di}(t)$	Momentandividende zum Zeitpunkt t	12
$\widetilde{\mathrm{di}}(\tilde{t})$	Transformierte Dividendenrate	23
$\widetilde{D}^1$	Dini-Klasse v. Grad 1	24
$\widetilde{D}^2$	Dini-Klasse v. Grad 2	25
f_m	Rekonstruktionspunkte beim Rückwärtsproblem	81
$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$	Filtration	13
h	Schrittweite der „Orts“variablen bei Differenzenverfahren	49
K	Ausübungspreis einer Option .. 5, Terminkurs eines Terminkontrakts	6
k	Schrittweite der „Zeit“variablen bei Differenzenverfahren	49
λ	Quotient $\frac{k}{h^2}$ bei Differenzenverfahren	49
$\mu(t)$	Nettodividendenrate zum Zeitpunkt t	43
$\tilde{\mu}(\tilde{t})$	Transformierte Nettodividendenrate	23
$\mathrm{ndf}(t)$	Nettodividendenfaktor zum Zeitpunkt t	43
$\widetilde{\mathrm{ndf}}$	Transformierte Nettodividendenrate	44

τ	„Rückwärts“verfalltermin	23
$\overline{T}$	Ende des Betrachtungszeitraums	7
t^*	Unterer Randpunkt des Gitters bei impliziten Differenzenverfahren bzgl. der „Zeit“variablen	58
$\tilde{t}$	„Rückwärts“zeit	23
u_{call}	Transformierter Preis eines Calls	26
$\tilde{u}_{\text{call}}$	Transformierter Preis eines Calls	45
u_{put}	Transformierter Preis eines Puts	26
$\tilde{u}_{\text{put}}$	Transformierter Preis eines Puts	45
v_{call}	Wert einer europäischen Kaufoption	6
v_{put}	Wert einer europäischen Verkaufsoption	6
V_t	Wert des Portefeuilles zum Zeitpunkt t	19
v_{TK}	Wert eines Terminkaufs	27
v_{TV}	Wert eines Terminverkaufs	27
w_{call}	Transformierter Preis eines Calls	78
x	Logarithmierter Preis des Basistitels	23
ξ	Logarithmierter Ausübungspreis	23
$\tilde{\xi}$	Transformation von K, t, T beim Rückwärtsproblem	78
$\tilde{x}_l$	Linker Randpunkt des Gitters bei impliziten Differenzenverfahren bzgl. der „Orts“variablen	57
$\tilde{x}_r$	Rechter Randpunkt des Gitters bei impliziten Differenzenverfahren bzgl. der „Orts“variablen	57
$\tilde{x}$	Transformation von S, t, T beim Vorwärtsproblem	44
$Z(x,t;y,\tau)$	Fundamentallösung von (3.6)	24
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	49
$\widetilde{Z}(x,\tilde{t};\xi,\tau)$	Fundamentallösung von (3.20)	32

Einleitung

Während die Mathematik schon seit Jahrhunderten mit den Natur- und Ingenieurwissenschaften in einem gegenseitig befruchtenden Dialog steht, wurde eine Zusammenarbeit mit den Wirtschaftswissenschaften lange Zeit vernachlässigt. Erst gegen Ende des 20. Jahrhunderts - wesentlich inspiriert durch das Aufkommen großer, zum Teil weltumspannender Finanzmärkte - begann sich daran etwas zu ändern. Mittlerweile ist diese Entwicklung soweit fortgeschritten, daß in fast jedem Buch, das sich mit der Bewertung derivativer Finanzinstrumente wie z.B. Optionen befaßt, eine Abhandlung der mathematischen Begriffe des Itô-Integrals sowie parabolischer Differentialgleichungen zu finden ist; häufig wird der Leser sogar mit Martingal-Theorie oder numerischen Methoden zur Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung konfrontiert.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Verallgemeinerung eines Modells, das den oben beschriebenen Prozeß der Kooperation von Mathematik und Wirtschaftswissenschaften mit in Gang gesetzt hat: das Modell von Black und Scholes. Dieses Modell hat, nicht erst mit der Vergabe des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften an Robert Merton[1] und Myron Scholes im Jahre 1997[2], die Finanzwelt derart revolutioniert, daß heutzutage jeder Börsianer mit der Black-Scholes-Formel vertraut ist. Allerdings hat sich inzwischen herausgestellt, daß die Annahmen, mit denen in diesem Modell gearbeitet wird, zu Schlußfolgerungen führen, die zu empirischen Ergebnissen im Widerspruch stehen. Vielfacher Forschungsgegenstand sind daher Verallgemeinerungen des Black-Scholes-Modells wie beispielsweise Modelle mit lokaler Volatilität. Auch die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dieser Verallgemeinerung der im ursprünglichen Modell von Black und Scholes als konstant angenommenen Volatilität; gleichzeitig jedoch wird die Annahme konstanter Zinssätze fallengelassen und dem Anfallen von Dividendenzahlungen mit nicht-konstanter Dividendenrate Rechnung getragen.

[1] Merton hatte unabhängig von Black und Scholes ähnliche Forschungsergebnisse erzielt.

[2] Fischer Black war 1995 verstorben.

Sollen Modelle mit lokaler Volatilität in der Praxis eingesetzt werden, so ist es erforderlich, die lokale Volatilität zu kennen. Eine Möglichkeit ihrer Bestimmung besteht darin, aus am Markt beobachteten Optionspreisen auf die Volatilität zurückzuschließen, dabei die implizite Volatilität des Black-Scholes-Modells verallgemeinernd, was dieser Arbeit ihren Namen gab. Hierbei handelt es sich um ein inverses Problem, das, wie für solche Probleme typisch, schlecht gestellt ist. Um dieses sog. Rückwärtsproblem angehen zu können, war es - da es keine Veröffentlichungen gibt, in denen alle oben angesprochenen Verallgemeinerungen simultan betrachtet werden - erforderlich, die Anwendung der Theorie der Optionsbewertung auf das verallgemeinerte Modell vom Anfang bis zum Ende darzulegen. Die Arbeit nimmt dieses Ziel wie folgt in Angriff:

Im ersten Kapitel wird eine kurze Einführung in die Problemstellung der Optionspreisbestimmung gegeben. Nach der Vorstellung des klassischen Modells von Black und Scholes schließt das erste Kapitel mit der Betrachtung der impliziten Volatilität und des sog. Smile-Effekts, der in der Literatur häufig als Begründung dafür angeführt wird, daß das Black-Scholes-Modell die Realität nicht adäquat beschreibt.

Das zweite Kapitel beginnt mit der Einführung eines verallgemeinerten Black-Scholes-Modells, welches in der Lage ist, den Smile-Effekt zu erklären. Dieses Kapitel ist im wesentlichen der Überprüfung der Wohldefiniertheit des Modells sowie der Herleitung des Zusammenhangs zwischen dem Optionspreis und der sog. Black-Scholes-Differentialgleichung gewidmet.

Gegenstand des dritten Kapitels ist das Studium der (verallgemeinerten) Black-Scholes-Differentialgleichung. Während in der Literatur entweder gar nichts über die mathematischen Voraussetzungen an die lokale Volatilität gesagt oder aber Hölder-Stetigkeit angenommen wird, zeigen die Ergebnisse dieses Kapitels, daß sämtliche relevanten Ergebnisse unter schwächeren Annahmen an die lokale Volatilität gültig bleiben. Dies betrifft insbesondere die adjungierte Gleichung, die sich als Schlüssel zur numerischen Lösung des Rückwärtsproblems erweist.

Das vierte Kapitel befaßt sich mit der Bestimmung von Optionspreisen bei bekannter lokaler Volatilität. Dieses sog. Vorwärtsproblem ist nicht nur von eigenständigem Interesse, sondern wird auch im Hinblick darauf studiert, daß das

Hauptergebnis dieser Arbeit, ein iterativer Algorithmus zur Lösung des Rückwärtsproblems, in jedem Iterationsschritt die Lösung eines Vorwärtsproblems beinhaltet.

Das fünfte Kapitel präsentiert neben einigen Überlegungen zur Schlechtgestelltheit des Rückwärtsproblems einen Algorithmus zu dessen Lösung. Weiterhin wird anhand von Ergebnissen von Beispielrechnungen demonstriert, daß der vorgeschlagene Algorithmus im wesentlichen zufriedenstellende Resultate liefert.

Im sechsten Kapitel schließlich werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefaßt sowie ein Ausblick gewagt, in welche Richtung ausgehend von dieser Arbeit weitere Forschung von Interesse sein könnte.

Einige Definitionen und Beweise, die für das Verständnis des Haupttextes nicht notwendig sind, und die - stünden sie im Haupttext - den Lesefluß unnötig störten, sind im Anhang A zu finden.

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Herrn Professor Dr. Alfred K. Louis für die interessante Themenstellung im Schmelztiegel von Mathematik und Wirtschaftswissenschaft, die Betreuung dieser Arbeit sowie für die Möglichkeit, die entwickelten Verfahren auf den Rechnern seiner Arbeitsgruppe zu implementieren und zu testen. In diesem Zusammenhang gilt mein Dank auch Herrn Prof. Dr. Volker Steinmetz für die Erlaubnis, die an seinem Lehrstuhl vorhandene Infrastruktur zu nutzen und die Software X-WinPro auf meinem Arbeitsplatzrechner zu installieren, wodurch es mir ermöglicht wurde, mich nach Dienstschluß ohne Ortswechsel oder Zeitverlust dieser Arbeit zu widmen. An dieser Stelle sind auch Dr. Peter Dörr und Dr. Uwe Schmitt zu nennen, ohne deren Hilfe zu teilweise später Stunde ich sicherlich bei der Bekämpfung von Problemen mit X-WinPro, Firewalls und Matlab verrückt geworden wäre. Ferner gilt mein Dank meinen Kollegen Dr. Volker Krätschmer, Dr. Nikolaus Petry und Dipl.-Math. Christoph Stahl für ihre stete Diskussionsbereitschaft, sowie den Herren Dr. Klaus Schindler und Dr. Michael Langenbahn für Literaturhinweise und einige anregende Diskussionen. Vor allem aber gilt mein Dank meinen Eltern, die mich nicht nur in letzter Zeit logistisch unterstützten, sondern auf deren Rat und Hilfe ich seit meiner Geburt stets bauen konnte.

Kapitel 1

Einführung in die Theorie der Optionsbewertung

Ziel dieses Kapitels ist es, die grundlegenden Begriffe und Konzepte, welche zum Verständnis der Theorie der Optionsbewertung benötigt werden, bereitzustellen. Dazu ist eine Unterteilung in drei Abschnitte zweckmäßig:

Im ersten Abschnitt wird erklärt, was unter einer Option, insbesondere einer europäischen Option, zu verstehen ist; ferner wird der Wert einer europäischen Option zum Verfalltermin hergeleitet. Im Hinblick auf die Put-Call-Parität wird außerdem der Begriff des Terminkontraktes eingeführt.

Gegenstand des zweiten Abschnitts ist die Betrachtung des Black-Scholes-Modells. Diese beschränkt sich im wesentlichen darauf, das Modell und dessen Parameter vorzustellen sowie den Ansatz von Black und Scholes[3] zur Bewertung einer Option kurz zu erläutern.

Im dritten Abschnitt schließlich wird auf das Problem eingegangen, die Parameter des Black-Scholes-Modells zu bestimmen, wobei insbesondere der Begriff der impliziten Volatilität von großer Bedeutung ist. Zum Abschluß des Kapitels wird dann auf den Smile-Effekt eingegangen, der ein Indiz dafür ist, daß die Annahmen des Black-Scholes-Modells zu restriktiv zur Beschreibung der Realität sind.

[3] vgl. [Black/Scholes]

1.1 Der Begriff der Option

In diesem Abschnitt werden zwei spezielle derivative Finanzinstrumente betrachtet: Optionen und Terminkontrakte. Optionen lassen sich dabei in Calls (Kaufoptionen) und Puts (Verkaufsoptionen) untergliedern, Terminkontrakte in Terminkäufe und -verkäufe.

Neben der Untergliederung von Optionen in Calls und Puts unterscheidet man bei Optionen auch danach, ob sie vom europäischen oder vom amerikanischen Typ sind:[4]

- Eine Option ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, im folgenden Käufer bzw. Verkäufer genannt, der dem Käufer das zeitlich befristete Recht gibt, vom Verkäufer die Lieferung oder Abnahme eines bestimmten Gutes, im folgenden Basistitel genannt, am Ende (Verfalltermin) oder während eines festen Zeitraums (Laufzeit) zu einem festgelegten Betrag (Ausübungspreis) zu verlangen.

- Handelt es sich um das Recht, die Lieferung des Basistitels verlangen zu können, so spricht man von einer Kaufoption (Call), andernfalls von einer Verkaufsoption (Put). Als Symbol für Ausübungspreise wird im folgenden stets K, für Verfalltermine stets T - ggf. mit Indizes versehen - verwendet.

- Ist die Möglichkeit zur Ausübung des Optionsrechtes während der gesamten Laufzeit gegeben, so heißt die Option vom amerikanischen Typ, ist die Ausübung nur am Verfalltermin gestattet, so heißt die Option vom europäischen Typ. Im folgenden werden ausschließlich europäische Optionen betrachtet.

- Natürlich wird kein vernünftiger Mensch die Position des Verkäufers der Option - auch Stillhalter genannt - einnehmen, ohne daß er für die einseitige Gewährung des Optionsrechtes einen Gegenwert erhält. Ziel der Theorie der Optionsbewertung ist es, einen sowohl für den Käufer als auch für den Verkäufer fairen Preis zu bestimmen, den der Käufer der Option dem Stillhalter zu zahlen hat.

Eine Option stattet den Käufer lediglich mit Rechten aus, es besteht keine Pflicht, die Lieferung oder Abnahme des Basistitels abzuwickeln. Man spricht deshalb

[4] vgl. [Holtrode] S. 15f

von einem bedingten Termingeschäft. Im Gegensatz dazu handelt es sich bei Terminkontrakten um unbedingte Termingeschäfte:[5]

- Ein Terminkontrakt ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, im folgenden Käufer bzw. Verkäufer genannt, in dem vereinbart wird, daß der Käufer zu einem bestimmten Termin (Abwicklungstermin) vom Verkäufer ein bestimmtes Gut (Basistitel) geliefert bekommt und dafür an den Verkäufer einen vorher bestimmten Preis (Terminkurs) zahlt.

- Aus Sicht des Käufers handelt es sich um einen Terminkauf, beim Verkäufer spricht man von einem Terminverkauf. Als Symbol für Terminkurse wird in dieser Arbeit stets K, für den Abwicklungstermin stets T verwendet.

- Im Unterschied zur Option gibt es hier keine (einseitigen) Wahlrechte: zum festgelegten Termin ist der vereinbarte Preis zu zahlen und der Basistitel zu liefern.

- Auch Termingeschäfte haben einen „Wert", d.h. eine der beiden Vertragsparteien (abhängig u.a. von der Höhe des Terminkurses) wird nur gegen Zahlung eines Betrages bereit sein, einen solchen Vertrag einzugehen. Die Bestimmung eines fairen Preises für einen Terminkontrakt ist im Rahmen der in dieser Arbeit behandelten Modelle nicht schwierig und erfolgt in Abschnitt 3.2.

Unmittelbar klar ist, daß ein Terminkauf (aus Sicht des Käufers) zum Abwicklungstermin den Wert $S - K$ hat, da der Käufer den Basistitel mit Wert S zum vereinbarten Preis K erhält. Da es sich um ein unbedingtes Geschäft handelt, muß der Käufer es auch abwickeln, wenn $S - K$ negativ ist, es also für ihn günstiger wäre, den Basistitel nicht vom Verkäufer zum Preis K abzunehmen, sondern am Markt billiger für S zu erwerben. Bei einer Kaufoption hingegen kann der Käufer auf die Ausübung der Option verzichten, was er immer dann tun wird, wenn $S < K$ gilt, so daß der Wert eines Calls zum Verfalltermin durch $(S-K)^+ = \max(0, S-K)$ gegeben ist. Zusammenfassend gilt also:

1. Der Wert v_{call} einer europäischen Kaufoption mit Ausübungspreis K beträgt zum Verfalltermin $v_{\text{call}} = (S-K)^+$. Für den europäischen Put gilt dann $v_{\text{put}} = (K-S)^+$.

2. Der Wert eines Terminkaufs mit Terminkurs K zum Abwicklungstermin beträgt $S - K$, der eines Terminverkaufs ist $K - S$.

[5] vgl. [Welcker et al.] S. 23

1.2 Das Black-Scholes-Modell

In diesem Abschnitt soll kurz auf den Ansatz von Black und Scholes eingegangen werden.[6] Die Abhandlung erfolgt an dieser Stelle recht knapp, da bei der Vorstellung des verallgemeinerten Modells in Abschnitt 2.1 ausführlich auf die wichtigen Begriffe und deren Interpretation eingegangen wird.
Folgende Annahmen sollen zutreffen:

- Die Betrachtungen erfolgen für den Zeitraum $[0, \overline{T}]$.
- Es ist möglich, zu dem bekannten Zinssatz[7] r, der über die Laufzeit der Option konstant ist, beliebige Beträge anzulegen oder zu leihen.
- Leerverkäufe (short selling) von Basistitel und Optionen sind jederzeit zulässig.
- Basistitel und Optionen seien in beliebigen Teilbeträgen handelbar.
- Es fallen sowohl beim Handel mit Basistitel oder Optionen als auch bei Anlage bzw. Leihen von Kapital keine Transaktionskosten an.
- Es fallen keine Nebenrechtausgaben wie z.B. Dividenden oder Bestandshaltekosten auf den Basistitel an[8].
- Der Preis S_t des Basistitels zum Zeitpunkt $t \in [0, \overline{T}]$ bildet einen stochastischen Prozeß, und zwar eine geometrische Brownsche Bewegung[9] mit Drift a und Volatilität σ, d.h. es gibt reelle Zahlen a, σ ($\sigma > 0$) sowie eine Brownsche Bewegung[10] $(B_t)_{t \in [0, \overline{T}]}$, so daß S_t die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dS_t}{S_t} = a\,dt \,+\, \sigma\,dB_t$$

  erfüllt[11].

---

6 zu den folgenden Ausführungen vgl. [Black/Scholes] S. 640 ff

7 gemäß kontinuierlicher Verzinsung, s. [Schindler] S. 82

8 Häufig findet man auch die Einarbeitung zeitstetig anfallender Dividenden, z.B. in [Welcker et al.].

9 zur Definition s. [Øksendal] S. 61f, zu Eigenschaften s. [Welcker et al.] S. 122 ff

10 s. [Øksendal] S. 11-14

11 zur Definition stochastischer Differentialgleichungen s. [Øksendal] S. 61

Die Idee von Black und Scholes bestand nun darin, durch sog. Hedgen ein Portefeuille zu konstruieren, dessen Entwicklung im Zeitablauf nicht mehr vom Zufall abhängt, also deterministisch ist: dies geschieht dadurch, daß man zu jedem Zeitpunkt den Basistitel hält sowie eine bestimmte Anzahl von Kaufoptionen verkauft[12]. Da die Entwicklung des so gebildeten Portefeuilles deterministisch ist, muß bei Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten dieses Portefeuille dieselbe Wertentwicklung aufweisen wie eine sichere Kapitalanlage, d.h. sein Wert muß gemäß dem Zinssatz r steigen. Ergebnis der Überlegungen sind die folgenden Formeln:

- Für den Wert $v_{\text{call}}(S,t,K,T)$ eines Calls mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K zum Zeitpunkt t bei aktuellem Preis S des Basistitels gilt:

  $$v_{\text{call}}(S,t,K,T) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \ ,$$

  wobei $d_1 = \dfrac{\ln\frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ und

  $$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du$$

  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Für $t = T$ gilt $v_{\text{call}}(S,T,K,T) = (S-K)^+$.

- Für den Wert $v_{\text{put}}(S,t,K,T)$ eines Puts mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K zum Zeitpunkt t bei aktuellem Preis S des Basistitels gilt:

  $$v_{\text{put}}(S,t,K,T) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) \ ,$$

  wobei d_1, d_2, Φ wie oben. Für $t = T$ gilt $v_{\text{put}}(S,T,K,T) = (K-S)^+$.

- v_{call} und v_{put} erfüllen bei festem K und T als Funktionen von S und t die sog. Black-Scholes-Differentialgleichung

  $$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + rS\frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0$$

  mit geeigneten Endbedingungen für $t = T$.

[12] Dies ist ausführlich beschrieben in [Welcker et al.] S. 126ff.

1.3 Implizite Volatilität und der Smile-Effekt

Steht man in der Praxis vor dem Problem, eine Option zu bewerten, so liegt, will man das Black-Scholes-Modell anwenden, die Hauptschwierigkeit darin, herauszufinden, welche Werte für r und σ anzusetzen sind, da der Parameter a in der Black-Scholes-Formel nicht auftritt[13] und die Bestimmung von S, t, K, T problemlos ist. In der Literatur wird meist davon ausgegangen, daß die Bestimmung von r keine Schwierigkeiten bereite, daher soll dies hier nicht problematisiert werden.

Zur Bestimmung von σ gibt es zwei vorherrschende Vorgehensweisen[14]:

- Erfolgt die „Berechnung“ von σ mittels statistischer Schätzmethoden aus bekannten „alten“ Preisen des Basistitels, so spricht man von der sogenannten historischen Volatilität.

- Da sowohl v_{call} als auch v_{put} bei festen S, t, K, T, r streng monoton wachsend in σ sind, läßt sich bei Kenntnis dieser Parameter und von v_{call} oder v_{put} aus der Black-Scholes-Formel σ berechnen, wenn auch nicht exakt, sondern „nur“ unter Einsatz numerischer Näherungsverfahren. Auf diese Weise ermittelte Volatilitäten bezeichnet man als implizite Volatilitäten.

Zur Bestimmung der impliziten Volatilität wird häufig auf das Newton-Verfahren zurückgegriffen, so beruht z.B. auch die in der Financial Toolbox von Matlab inbegriffene Routine blsimpv auf dem Newton-Verfahren[15].

Allerdings hat sich herausgestellt, daß die Berechnung von impliziten Volatilitäten bei festem S, t, T, r und variierenden Ausübungspreisen K zu unterschiedlichen Werten σ_K für σ führt, obwohl dies bei Gültigkeit des Black-Scholes-Modells nicht der Fall sein dürfte. Wegen der typischen Gestalt der $K - \sigma_K$-Grafik, wie sie die nachfolgende Abbildung zeigt, bezeichnet man diesen Effekt als Smile-Effekt. Er ist ein Grund dafür, weshalb man die Annahmen des Black-Scholes-Modells für zu restriktiv hält und Verallgemeinerungen des Black-Scholes-Modells Gegenstand vielfältiger aktueller Forschung sind.

[13] man spricht von risikoneutraler Bewertung, vgl. [Welcker et al.] S. 132

[14] s. dazu [Welcker et al.] S. 179ff sowie [Holtrode] S. 71ff

[15] s. [Financial Toolbox] S. 2-37

Die folgende Abbildung zeigt den „typischen“ Zusammenhang von impliziter Volatilität σ_K und Ausübungspreis K.[16]

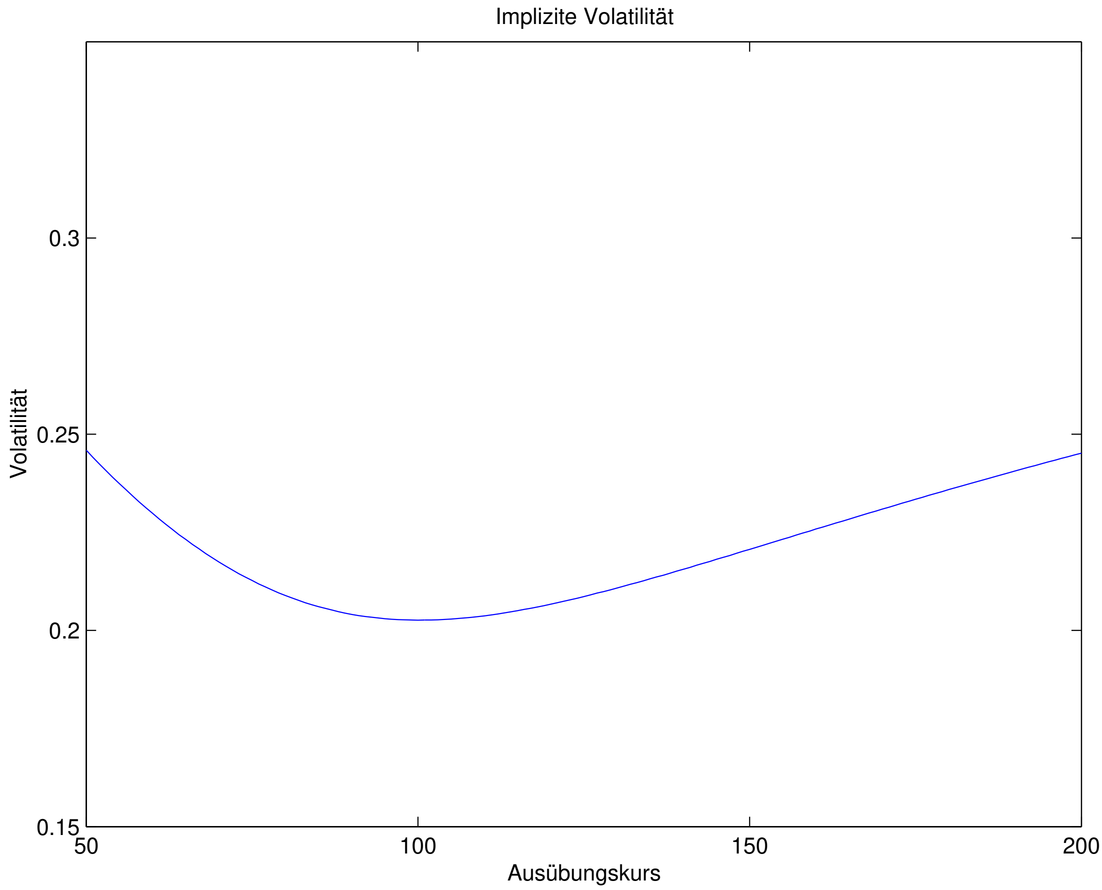

Abbildung 1.1: Implizite Volatilität

Diese Grafik entstand wie folgt:
Zuerst wurde mittels des Crank-Nicolson-Verfahrens (s. Abschnitt 4.4) eine Näherungslösung für die Werte europäischer Calls zu den Ausübungskursen $K = 50, 51, \ldots, 200$ und Fälligkeit $T = 1$ berechnet. Diese wurde mit Schrittweiten $h = 0.01$, $k = 0.01$ auf einem Gitter von 0 bis $\ln(600)$ für $x = \ln S$ und 0 bis 1 für $\tilde{t}$ ermittelt. Dabei wurde davon ausgegangen, daß die lokale Volatilität gem. dem erweiterten Modell aus Abschnitt 2.1 gerade

$$\sigma(S) = 0.6 - \frac{0.4}{1 + (\ln(\frac{S}{100}))^2}$$

beträgt und keine Zinsen oder Dividenden anfallen. Mit den so für $S = \exp(4.6) \approx 99.4843$ und $t = 0$ erhaltenen Daten wurde dann mittels der Routine blsimpv der Financial Toolbox von Matlab die implizite Volatilität errechnet.

[16] kritisch dazu z.B. [Singer] S. 295

Kapitel 2

Ein verallgemeinertes Black-Scholes-Modell

In diesem Kapitel wird ein Modell vorgestellt, das eine Erweiterung des klassischen Black-Scholes-Modells darstellt. Die Erweiterungen betreffen das Einbeziehen sowohl von zeitkontinuierlich anfallenden Dividendenzahlungen als auch von über den Betrachtungszeitraum nicht konstanten Zinssätzen sowie die Aufgabe der Annahme der konstanten Volatilität zugunsten der sog. lokalen Volatilität.
Das Kapitel ist wie folgt untergliedert:

Der erste Abschnitt dient der Vorstellung des Modells; ferner wird das Modell gegen das Black-Scholes-Modell sowie gegen Modelle, die mit stochastischen Volatilitäten arbeiten, abgegrenzt.

Gegenstand des zweiten Abschnitts ist die Untersuchung des Modells auf „mathematische“ Wohldefiniertheit: hierbei geht es darum, Existenz und Eindeutigkeit (im Sinne der „Uniqueness in law“) von Lösungen der modellbeschreibenden stochastischen Differentialgleichung nachzuweisen. Eine Untersuchung der „wirtschaftswissenschaftlichen“ Wohldefiniertheit des Modells, welche z.B. die Frage nach Arbitragefreiheit der so beschriebenen Märkte beträfe, soll jedoch in dieser Arbeit nicht vorgenommen werden.

Der dritte Abschnitt ist dem Zusammenhang zwischen Lösungen der (verallgemeinerten) Black-Scholes-Differentialgleichung und dem Preis europäischer Optionen gewidmet. Dieser ermöglicht es, das Problem der Bewertung von Optionen auf die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung zurückzuführen, die dann im dritten Kapitel ausführlich studiert wird.

2.1 Vorstellung des Modells

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einer Verallgemeinerung des Black-Scholes-Modells in dreierlei Hinsicht:

1. Die Annahme eines über den gesamten Betrachtungszeitraum konstanten Zinssatzes wird fallengelassen. An die Stelle des (üblicherweise als positiv angenommenen) Zinssatzes $r \in \mathbb{R}$ tritt eine deterministische beschränkte stetige Funktion $r : [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}$, wobei für $t \in [0, \overline{T}]$ der Momentanzins gerade $r(t)$ beträgt, d.h. legt man zu einem Zeitpunkt $t_0 \in [0, \overline{T}]$ einen Euro festverzinslich an, so beträgt der Wert dieser Anlage zum Zeitpunkt $t_1 \in]t_0, \overline{T}]$ gerade[17]

   $$\exp\left(\int_{t_0}^{t_1} r(u)du\right) \text{ Euro.}$$

   Dabei wird bewußt darauf verzichtet, von $r(\cdot)$ Positivität zu fordern, da dies, wiewohl wirtschaftswissenschaftlich sinnvoll, mathematisch nicht notwendig ist und es im Hinblick auf Analogien im Zusammenhang mit der adjungierten Gleichung, die für diese Arbeit von großer Wichtigkeit ist, von Vorteil ist, auch negatives $r(\cdot)$ zuzulassen.

2. Das zweite Aufweichen der Restriktionen des Black-Scholes-Modells betrifft die Abwesenheit von Nebenrechtausgaben wie Dividenden oder Bestandshaltekosten des Basistitels. Solche Zahlungen werden in der Literatur oft berücksichtigt, jedoch meist „nur“ in Form konstanter Dividendenraten[18]. Für diese Arbeit wird angenommen, daß sich die Dividendenzahlungen im Intervall $[t_0, t_1]$ für alle $t_0, t_1 \in [0, \overline{T}]$ mit $t_0 < t_1$ durch

   $$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{di}(u) S_u du$$

   beschreiben lassen. Dabei ist $\mathrm{di} : [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}$ eine deterministische stetige beschränkte Funktion (negatives di bedeutet „negative Dividendenraten“, also Bestandshaltekosten des Basistitels[19]) und das auftretende Integral ist

[17] Bisweilen findet man in der Literatur den Hinweis auf die Möglichkeit solcher Ansätze, z.B. in [Welcker et al.] Fußnote 1 S. 127; selten jedoch wird dies konsequent eingearbeitet.

[18] s. z.B. [Neftci] S. 360 Fußnote 3, [Welcker et al.] S. 130

[19] s. dazu [Welcker et al.], mehrere Fundstellen

im Itô-Sinne zu verstehen[20]. Dies bedeutet insbesondere, daß das obige Integral wieder eine Zufallsvariable darstellt, also nicht deterministisch ist, was auch so zu erwarten war, da die Höhe der Dividendenzahlungen ja von dem zufälligen Kurs S_t des Basistitels abhängt.

3. Die mit Abstand wichtigste Verallgemeinerung jedoch ist das Zulassen nicht-konstanter Volatilität. An die Stelle der geometrischen Brownschen Bewegung zur Beschreibung des Preisverlaufs des Basistitels tritt die Lösung $(S_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$ der stochastischen Differentialgleichung

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mathrm{roi}(S_t, t)\, dt \;+\; \sigma(S_t)\, dB_t$$

mit bekanntem deterministischen Anfangswert $\overline{S}$ und $S_t > 0 \;\forall t \in [0, \overline{T}]$. Dabei seien

   - $\mathrm{roi} : \mathbb{R}_{++} \times [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}$ eine deterministische stetige beschränkte Funktion,
   - $\sigma : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ eine deterministische stetige Funktion, die von der Null weg und nach oben beschränkt ist, für die es also Konstanten σ_u, σ_o gibt mit

   $$0 < \sigma_u \le \sigma(S) \le \sigma_o < \infty \;\forall S > 0\ ,$$

   - sowie $(B_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$ eine Brownsche Bewegung bzgl. eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ und einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$. Zur Interpretation dieser Modellierung sei auf [Holtrode] Abschnitt 2.2 verwiesen.

Es sei darauf hingewiesen, daß der Renditeprozeß des Basistitels durch

$$\mathrm{ROI}_t := \int_0^t \frac{1}{S_u}\, dS_u$$

definiert wird[21], und daher unter den hier gemachten Annahmen für den Renditeprozeß gilt:

$$d\,\mathrm{ROI}_t = \mathrm{roi}(S_t, t)\, dt \;+\; \sigma(S_t)\, dB_t\ .$$

Es gibt also $\mathrm{roi}(S_t, t)$ den „deterministischen Anteil" an der Rendite an, während $\sigma(S_t)$ ein Maß für die Streuung der Rendite darstellt.[22]

[20] s. [Øksendal] S. 24ff

[21] s. [Holtrode] S. 31

[22] s. [Holtrode] S. 56

Alle anderen Voraussetzungen des Black-Scholes-Modells sollen auch ferner gelten, d.h. es wird weiterhin davon ausgegangen, daß

- Leerverkäufe von Basistitel und Optionen zulässig sind,
- Basistitel und Option in beliebigen Teilbeträgen handelbar sind und
- beim Handel mit Basistitel, Optionen und bei Anlage bzw. Leihen von Kapital keine Transaktionskosten anfallen.

2.1.1 Bemerkungen

1. Man bezeichnet in obigem Ansatz $\sigma(S_t)$ als lokale Volatilität.

2. Wie oben bereits erwähnt wurde, gibt es in der Literatur Vorschläge, mit nicht-konstanten Zinsen zu arbeiten und auch Dividendenzahlungen zu berücksichtigen. Daneben gibt es Ansätze, die zur Beschreibung des Preises des Basistitels eine stochastische Differentialgleichung mit lokaler Volatilität annehmen[23]. Jedoch sind keine Ansätze bekannt, in denen alle drei oben beschriebenen Verallgemeinerungen simultan in ein Modell aufgenommen wurden.

3. Es liegt nahe, das vorliegende Modell dahingehend zu erweitern, daß man $\sigma = \sigma(S,t)$ zuläßt. Dieser Ansatz soll jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht verfolgt werden. Ein Vorteil eines solchen Ansatzes könnte z.B. darin gesehen werden, daß man die Realität besser annähern kann, als Nachteil wäre beispielsweise zu nennen, daß es in der Praxis schwieriger wird, die i.a. unbekannte Funktion $\sigma(S,t)$, welche für die Bewertung von Optionen essentiell ist, zu bestimmen.

4. In der Literatur werden auch Modelle diskutiert, die in gewissem Sinne noch weiter gehen: Modelle mit stochastischen Volatilitäten. Dort wird eine weitere, zu der den Preisprozeß des Basistitels treibenden Brownschen Bewegung unabhängige, Brownsche Bewegung eingeführt, die wiederum die Volatilität treibt[24]. Diese sind jedoch keine Verallgemeinerungen des Black-Scholes-Modells in dem Sinne, daß sie dieses als Spezialfall enthalten. Weiter haben sie den „Nachteil", daß Optionspreise nicht mehr wie in Abschnitt 2.3 durch Anwendung des Duplikationsprinzips ermittelt werden können.

[23] s. z.B. [Bouchouev/Isakov I], [Bouchouev/Isakov II] und [Lishang/Youshan]
[24] s. [Holtrode]

2.2 Mathematische Wohldefiniertheit des Modells

Das im vorigen Abschnitt vorgestellte verallgemeinerte Modell muß nun daraufhin untersucht werden, ob es überhaupt „Sinn macht“, d.h. es ist zu überprüfen, ob die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mathrm{roi}(S_t, t)\, dt \;+\; \sigma(S_t)\, dB_t$$

überhaupt wohldefiniert ist. Dazu ist zu untersuchen,

- ob die Differentialgleichung lösbar ist und Eindeutigkeit der Lösung im Sinne der „Uniqueness in law“ vorliegt und
- ob die Lösung $(S_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$ positiv ist, da dies einerseits aus ökonomischer Sicht sinnvoll ist und andererseits oben schon gefordert wurde, da $\sigma(S_t)$ nur definiert ist für $S_t > 0$.

Als Schlüssel zur Lösung dieses Problems erweist sich das Lemma von Itô, das wegen seiner Wichtigkeit hier zitiert wird:[25]

2.2.1 Lemma (Itô)

Es sei $f : \mathbb{R} \times [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}$ eine deterministische stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen

$$f_t := \frac{\partial f}{\partial t}\,,\, f_x := \frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } f_{xx} := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ .$$

Es sei $(X_t)_{t\in[0,\overline{T}]}$ ein stochastischer Prozeß mit stochastischem Differential

$$dX_t = \mu_t\, dt \;+\; \sigma_t\, dB_t\ ,$$

wobei μ_t und σ_t vorhersagbare[26] stochastische Prozesse sind. $Y_t := f(X_t, t)$ erfüllt dann

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(f_t(X_t,t) + f_x(X_t,t)\,\mu_t + \frac{1}{2}\, f_{xx}(X_t,t)\,\sigma_t^2\right) dt \;+\; f_x(X_t,t)\,\sigma_t\, dB_t \\ &= \left(f_t(X_t,t) + \frac{1}{2}\, f_{xx}(X_t,t)\,\sigma_t^2\right) dt \;+ f_x(X_t,t)\, dX_t\ . \end{aligned}$$

[25] vgl. [Malliaris] S. 81

[26] zur Definition s. Anhang A.1

Durch Anwenden dieses Lemmas erhält man

2.2.2 Lemma

Die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} S_0 &= \overline{S} \ P\text{-fast sicher und} \\ \frac{dS_t}{S_t} &= \mathrm{roi}(S_t, t)\, dt \ + \ \sigma(S_t)\, dB_t \end{aligned} \tag{2.1}$$

hat genau dann eine positive Lösung S_t, wenn die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \ln \overline{S} \ P\text{-fast sicher und} \\ d\psi_t &= \left(\mathrm{roi}(\exp(\psi_t), t) - \frac{1}{2}\sigma^2(\exp(\psi_t)) \right) \ dt + \sigma(\exp(\psi_t))\, dB_t \end{aligned} \tag{2.2}$$

eine Lösung besitzt, und die positiven Lösungen von (2.1) lassen sich bijektiv auf die Lösungen von (2.2) abbilden.

Beweis: Ist S_t eine positive Lösung von (2.1), so ist durch $\psi_t := \ln S_t$ eine Lösung von (2.2) gegeben, wie man unmittelbar durch Einsetzen in das Lemma von Itô mit $f(x,t) := \ln x$ bestätigt. Analog sieht man, daß die Formel von Itô, angewandt auf eine Lösung ψ_t von (2.2) mit $f(x,t) := \exp(x)$, durch $S_t := \exp(\psi_t)$ eine positive Lösung von (2.1) liefert. □

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der aus der Modellierung stammenden stochastischen Differentialgleichung (2.1) sind damit zurückgeführt auf die Untersuchung von (2.2). Für diese zeigt man leicht, daß Existenz und Eindeutigkeit im Sinne der „Uniqueness in law“ vorliegen, so daß man zusammenfassend folgenden Satz erhält:

2.2.3 Satz

Sind $\sigma : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{roi} : \mathbb{R}_{++} \times [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}$ deterministische stetige beschränkte Funktionen, so daß es Konstanten σ_u, σ_o gibt mit

$$0 < \sigma_u \le \sigma(S) \le \sigma_o < \infty \ \forall S > 0 \ ,$$

so ist die stochastische Differentialgleichung (2.1) lösbar, und es gilt für (2.1) „Uniqueness in law“, d.h. sind S und $\widetilde{S}$ jeweils Lösungen von (2.1) (evtl. bzgl.

unterschiedlicher Wahrscheinlichkeitsräume), so genügen S und $\widetilde{S}$ der gleichen Verteilung.

Beweis: Nach Lemma 2.2.2 genügt es, die Aussagen des Satzes für die stochastische Differentialgleichung (2.2) zu beweisen. Dazu muß man sich zunächst einmal davon überzeugen, daß (2.2) überhaupt wohldefiniert ist, d.h. daß

$$\mathbb{R} \times [0, \overline{T}], (\psi, t) \mapsto \sigma(\exp(\psi)) \text{ sowie}$$

$$\mathbb{R} \times [0, \overline{T}], (\psi, t) \mapsto \mathrm{roi}(\exp(\psi), t) - \frac{1}{2}\,\sigma^2(\exp(\psi))$$

vorhersagbare Abbildungen sind. Da diese Abbildungen als Kompositionen stetiger Abbildungen stetig sind, folgt dies aus Lemma A.1.4. Zum Beweis von Existenz und „Uniqueness in law" wird Korollar 1.14 aus [Revuz/Yor] S. 346 benutzt: dieses sagt aus, daß die behaupteten Aussagen korrekt sind, wenn

$$(\psi, t) \mapsto \sigma(\exp(\psi))$$

sowohl nach oben als auch von der Null weg beschränkt und

$$(\psi, t) \mapsto \mathrm{roi}(\exp(\psi), t) - \frac{1}{2}\,\sigma^2(\exp(\psi))$$

beschränkt ist. Dies ist hier aber offensichtlich der Fall. □

2.2.4 Bemerkung

Für die Anwendung sind - ähnlich wie in der Statistik - die Menge Ω sowie $\mathcal{F}$ und P eigentlich nicht von Interesse; dort interessiert man sich für die Eigenschaften (insbesondere die Verteilung) von S; diese ist nach obigem Satz jedoch eindeutig bestimmt und unabhängig davon, wie der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ aussieht.

2.3 Optionsbewertung mit Hilfe der Black-Scholes-Differentialgleichung

Ziel dieses Abschnitts ist die Darstellung des Zusammenhangs zwischen der sog. Black-Scholes-Differentialgleichung und dem Preis einer europäischen Option. Um diesen Zusammenhang herzuleiten, wird die Vorgehensweise von Black und Scholes, die durch Konstruktion eines Portefeuilles aus Basistitel und Optionen eine risikolose Anlage konstruierten, insofern variiert, als nunmehr ein Portefeuille aus Basistitel und Kapitalanlage gebildet wird, welches einerseits zum Verfalltermin der Option denselben Wert wie diese aufweist, andererseits jedoch so gebildet wird, daß beim Umschichten des Portefeuilles weder Kapitalzuflüsse noch -abflüsse entstehen. Da sich die Umschichtungen „von selbst“ finanzieren, nennt man solche Portefeuilles selbstfinanzierend; weisen ein selbstfinanzierendes Portefeuille und eine Option zum Verfalltermin denselben Wert auf, so spricht man von einem die Option duplizierenden Portefeuille. Das Duplikationsprinzip besagt nun, daß zu jedem Zeitpunkt der Wert des duplizierenden Portefeuilles gleich dem Wert der Option sein muß: wäre z.B. der Wert der Option höher als der des Portefeuilles, so könnte man die Option (ggf. leer-) verkaufen, mit dem Preis für die verkaufte Option das Portefeuille erwerben und die Differenz als sicheren Gewinn einstreichen. Für den Fall, daß die Option niedriger bewertet wird als das Portefeuille, ginge man analog vor. Somit ist klar, daß als Preis für die Option nur der Wert des Portefeuilles in Frage kommt.

Um obige Überlegungen auf die Situation des hier betrachteten Modells anwenden zu können, wird üblicherweise zur Beschreibung des angelegten oder geliehenen Kapitals eine ggf. fiktive Nullkuponanleihe betrachtet, deren Wert b_t die Entwicklung einer Kapitalanlage beschreibt, d.h. es gilt $\mathrm{b}'(t) = r(t)\,\mathrm{b}(t)\ \forall t \in [0, \overline{T}]$ oder in Differentialform

$$d\,\mathrm{b}_t = r(t)\,\mathrm{b}_t\,dt\ .$$

Damit läßt sich „Investiere x Euro zum Zeitpunkt t in die Kapitalanlage“ umformulieren in „Kaufe $\dfrac{x}{\mathrm{b}_t}$ Nullkuponanleihen zum Zeitpunkt t“.

Die Konstruktion des duplizierenden Portefeuilles erfolgt am Beispiel des europäischen Calls, für den Put geht man analog vor. Sei dazu für festes $K > 0$ und $T \in [0, \overline{T}]$ $v_{\text{call}}(S, t, K, T)$ als Funktion von S und t Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung, der sog. Black-Scholes-Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
& v(S,T) = (S-K)^{+} \text{ und} \\
& \frac{1}{2}S^2\sigma^2(S)\frac{\partial^2 v(S,t)}{\partial S^2} + \big(r(t)-\mathrm{di}(t)\big)S\frac{\partial v(S,t)}{\partial S} - r(t)v(S,t) + \frac{\partial v(S,t)}{\partial t} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Das den Call duplizierende Portefeuille wird nun wie folgt gebildet:

- Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ sollen im Portefeuille gerade

  $$\phi_t := \frac{\partial v_{\text{call}}(S_t,t,K,T)}{\partial S} \tag{2.4}$$

  Einheiten des Basistitels gehalten werden, wobei negatives ϕ - dies tritt bei Calls nicht auf, wohl aber bei Puts - bedeutet, daß man die entsprechende Anzahl leerverkauft.

- Ferner halte man zum Zeitpunkt t gerade

  $$\psi_t := \frac{v_{\text{call}}(S_t,t,K,T) - S_t\phi_t}{\mathrm{b}_t} \tag{2.5}$$

  Nullkuponanleihen im Portefeuille. Hier bedeutet negatives ψ - dies tritt bei Calls auf, bei Puts nicht - daß man sich verschuldet in Höhe von $\psi_t\,\mathrm{b}_t$.

Nach Konstruktion ist klar, daß der Wert V_t des Portefeuilles zum Zeitpunkt t gerade $\phi_t S_t + \psi_t\,\mathrm{b}_t = v_{\text{call}}(S_t,t,K,T)$ beträgt, weshalb der Wert des Portefeuilles zum Zeitpunkt T gleich $(S-K)^{+}$ ist. Zu klären bleibt also die Selbstfinanzierbarkeit des Portefeuilles. Bei Abwesenheit von Dividendenzahlungen wird diese durch die Bedingung[27]

$$dV_t = \phi_t dS_t \,+\, \psi_t d\,\mathrm{b}_t (= \phi_t dS_t \,+\, \psi_t r(t)\,\mathrm{b}_t\,dt)$$

definiert. Bei Berücksichtigung von Dividendenzahlungen wird dies zu[28]

$$dV_t = \phi_t dS_t \,+\, \psi_t r(t)\,\mathrm{b}_t\,dt \,+\, \mathrm{di}(t)\phi_t S_t dt \ .$$

Daß für das o.a. Portefeuille diese Gleichung erfüllt ist, zeigt die folgende Rechnung (die Abhängigkeit von K und t wird aus Gründen der Schreibökonomie

[27] s. [Baxter/Rennie] S. 81, zur Motivation S. 39f

[28] vgl. [Welcker et al.] S. 130

weggelassen):

$$
\begin{aligned}
dV_t &\overset{\text{Itô}}{=} \frac{\partial v_{call}(S_t,t)}{\partial S}\,dS_t + \frac{\partial v_{\text{call}}(S_t,t)}{\partial t}\,dt + \frac{1}{2}S_t^2\sigma^2(S_t)\frac{\partial^2 v_{\text{call}}(S_t,t)}{\partial S^2}\,dt \\
&\overset{(2.3)}{=} \phi_t\,dS_t + \left(r(t)\,v_{\text{call}}(S_t,t) + \big(\text{di}(t) - r(t)\big)S_t\frac{\partial v_{\text{call}}(S_t,t)}{\partial S}\right)dt \\
&= \phi_t\,dS_t + r(t)\,\big(v_{\text{call}}(S_t,t) - \phi_t S_t\big)dt + \text{di}(t)\,\phi_t S_t \\
&= \phi_t\,dS_t + \psi_t\,r(t)\,\text{b}_t\,dt + \text{di}(t)\,\phi_t S_t
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend ist damit der folgende Satz bewiesen:

2.3.1 Satz

Ist $v_{\text{call}}(S,t,K,T)$ Lösung von (2.3), so ist unter den in Abschnitt 2.1 gemachten Annahmen der Preis einer europäischen Kaufoption mit Ausübungspreis K und Fälligkeit T zum Zeitpunkt t bei einem Preis von S_t des Basistitels gerade gleich $v_{\text{call}}(S_t,t,K,T)$. Eine analoge Aussage gilt für v_{put} und den Preis eines entsprechenden europäischen Puts.

Aus der Anwendung in der Ökonomie ist klar, daß es höchstens einen Preis für einen europäischen Call geben kann, d.h. wenn die Modellierung sinnvoll ist, sollte es auch höchstens eine Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung (2.3) geben. In der Tat ist es möglich, über den Umweg der Martingaltheorie ein entsprechendes Resultat zu beweisen. Dieser Ansatz soll jedoch aus Platzgründen nicht in diese Arbeit aufgenommen werden, zumal im nachfolgenden Kapitel unter wenig restriktiven Bedingungen an $\sigma(\cdot)$ Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für die Black-Scholes-Differentialgleichung gegeben werden, die sich auch auf die sog. adjungierte Gleichung (s. Abschnitt 3.3) übertragen lassen.

Kapitel 3

Die Black-Scholes-Differentialgleichung

Ziel dieses Kapitels ist das Studium der Black-Scholes-Differentialgleichung, deren Lösung, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, den Preis europäischer Optionen angibt. Untergliedert ist das Kapitel in sechs Abschnitte:

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Black-Scholes-Differentialgleichung, auf die es unter recht schwachen Voraussetzungen an $\sigma(\cdot)$ eine positive Antwort gibt.

Im zweiten Abschnitt erfolgt die Übertragung der Put-Call-Parität, welche im übrigen bereits aus Arbitrage-Überlegungen herleitbar ist[29], auf die in dieser Arbeit gemachten Modellannahmen. Mittels der Put-Call-Parität ist es möglich, die Berechnung von Call-Preisen auf die Berechnung von Put-Preisen zurückzuführen und umgekehrt aus Call-Preisen die Put-Preise zu berechnen.

Von zentraler Bedeutung für die Lösung des Rückwärtsproblems in Kapitel 5 erweist sich die sog. adjungierte Gleichung. Die Herleitung dieser Gleichung beginnt im dritten Abschnitt, in dem gezeigt wird, daß für „glattes“ $\widetilde{\sigma}$ die adjungierte Gleichung erfüllt ist.

Der vierte Abschnitt liefert einen ersten Einblick in die stetige Abhängigkeit von Optionspreisen von der zugrundegelegten lokalen Volatilität $\sigma(\cdot)$. Dort wird eine Abschätzung der Differenz zwischen Optionspreisen zu unterschiedlichen lokalen

[29] s. [Welcker et al.] S. 100ff

Volatilitäten bewiesen für den Spezialfall (der, wie später gezeigt wird, keiner ist), daß die Lösung zu wenigstens einer lokalen Volatilität der adjungierten Gleichung genügt.

Im fünften Abschnitt wird mittels einer Grenzwertbetrachtung bewiesen, daß die adjungierte Gleichung auch für nicht glattes $\widetilde{\sigma}$ erhalten bleibt.

Das Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte, die zeigt, daß Optionspreise sowohl stetig als auch monoton von $\sigma(\cdot)$ abhängen. Diese Ergebnisse sind wertvolle Hilfsmittel bei der Abschätzung von Optionspreisen und daher auch für die beiden folgenden Kapitel von Bedeutung.

3.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Schaut man sich die Black-Scholes-Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}S^2\sigma^2(S)\frac{\partial^2 v(S,t)}{\partial S^2} + \big(r(t) - \mathrm{di}(t)\big)S\frac{\partial v(S,t)}{\partial S} - r(t)v(S,t) + \frac{\partial v(S,t)}{\partial t} = 0$$

näher an, so erkennt man leicht, daß es sich um eine partielle Differentialgleichung in einer „Orts"- und einer Zeitvariablen handelt. Ferner sieht man, daß sie rückwärts parabolisch und für $S = 0$ degeneriert ist. Deshalb ist es sinnvoll, ähnlich wie in Abschnitt 2.2 S durch $x := \ln S$ und weiterhin t durch $\tilde{t} := \overline{T} - t$ zu ersetzen. Im Hinblick auf die adjungierte Gleichung werden auch K durch $\xi := \ln K$ und T durch $\tau := \overline{T} - T$ ersetzt. Insgesamt hat man dann die Transformation

$$\begin{pmatrix} S \\ t \\ K \\ T \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tilde{t} \\ \xi \\ \tau \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \ln S \\ \overline{T} - t \\ \ln K \\ \overline{T} - T \end{pmatrix} , \tag{3.1}$$

so daß mit $v(S,t,K,T) = u(x,\tilde{t},\xi,\tau)$ die Black-Scholes-Differentialgleichung wegen

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{S} \;,\; \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = \frac{-1}{S^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{1}{S^2} \;,\; \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \tag{3.2}$$

transformiert wird zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,\tilde{t})}{\partial \tilde{t}} =& \frac{\sigma^2(e^x)}{2}\left(\frac{\partial^2 u(x,\tilde{t})}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,\tilde{t})}{\partial x}\right) + \Big(r(\overline{T}-\tilde{t}) - \mathrm{di}(\overline{T}-\tilde{t})\Big)\frac{\partial u(x,\tilde{t})}{\partial x} \\ &- r(\overline{T}-\tilde{t})\,u(x,\tilde{t}) \,.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Mit den abkürzenden Schreibweisen

$$\tilde{\sigma}(x) := \frac{\sigma^2(e^x)}{2}\,,\; \widetilde{\mathrm{di}}(\tilde{t}) := \mathrm{di}(\overline{T}-\tilde{t})\,,\; \tilde{r}(\tilde{t}) := r(\overline{T}-\tilde{t})\,,\; \tilde{\mu}(\tilde{t}) := \widetilde{\mathrm{di}}(\tilde{t}) - \tilde{r}(\tilde{t})^{\,31} \tag{3.4}$$

erhält man schließlich

$$\frac{\partial u(x,\tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\sigma}(x)\left(\frac{\partial^2 u(x,\tilde{t})}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,\tilde{t})}{\partial x}\right) - \tilde{\mu}(\tilde{t})\,\frac{\partial u(x,\tilde{t})}{\partial x} - \tilde{r}(\tilde{t})\,u(x,\tilde{t}) \,. \tag{3.5}$$

Aus $0 \le t \le T \le \overline{T}$ ergibt sich $\overline{T} \ge \tilde{t} \ge \tau \ge 0$ und aus den Endbedingungen $v(S,T,K,T) = (S-K)^+$ für den Call bzw. $v(S,T,K,T) = (K-S)^+$ für

[31] $\tilde{\mu}$ kann man als Nettodividendenrate interpretieren.

den Put werden die Anfangsbedingungen $u(x,\tau,\xi,\tau) = (e^x - e^\xi)^+$ (Call) bzw. $u(x,\tau,\xi,\tau) = (e^\xi - e^x)^+$ (Put). Alles in allem ist also die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u(x,\tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \widetilde{\sigma}(x)\left(\frac{\partial^2 u(x,\tilde{t})}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,\tilde{t})}{\partial x}\right) - \tilde{\mu}(\tilde{t})\,\frac{\partial u(x,\tilde{t})}{\partial x} - \tilde{r}(\tilde{t})\,u(x,\tilde{t}) \qquad (3.6)$$

für $(x,\tilde{t}) \in \mathbb{R}\times]\tau,\overline{T}]$ zu betrachten mit Anfangsbedingung

$$u(x,\tau,\xi,\tau) = (e^x - e^\xi)^+ \text{ (Call) bzw. } u(x,\tau,\xi,\tau) = (e^\xi - e^x)^+ \text{ (Put).} \qquad (3.7)$$

Die Gleichungen (3.6), (3.7) stellen ein Cauchy Problem dar[32]. Zur Lösung von (3.6), (3.7) kann man die sog. Fundamentallösung von (3.6) heranziehen. Dabei handelt es sich um eine Funktion $Z(x,\tilde{t};y,\tau)$ definiert für $x,y \in \mathbb{R}$, $0 \le \tau < \tilde{t} \le \overline{T}$ mit der Eigenschaft[33], daß für alle beschränkten stetigen Funktionen ψ auf $\mathbb{R}$

$$u(x,\tilde{t}) := \int_{\mathbb{R}} Z(x,\tilde{t};y,\tau)\,\psi(y)dy \qquad (3.8)$$

Lösung von (3.6) ist mit

$$\lim_{\tilde{t}\searrow\tau} u(x,\tilde{t}) = \psi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\ . \qquad (3.9)$$

Eine solche Fundamentallösung Z existiert für den Fall, daß zusätzlich zu den bisher gemachten Annahmen die Funktion $\widetilde{\sigma}$ in der Dini-Klasse $\widetilde{D}^2$ liegt. Formal dargestellt bedeutet dies[34]:

3.1.1 Definition

Es sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion.

1. Die Abbildung

$$\omega_f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++} \cup \{\infty\},\ h \mapsto \sup_{|x-y|\le h} |f(x) - f(y)| \qquad (3.10)$$

   heißt Stetigkeitsmodul von f.

2. Gilt für ein positives h

$$\omega_{f,1}(h) := \int_0^h \frac{\omega_f(z)}{z}\,dz < \infty\ , \qquad (3.11)$$

   so heißt f zur Dini-Klasse $\widetilde{D}^1$ gehörig.

[32] s. [Eidelman/Zhitarashu] Abschnitt VI.2, [Friedman] Kapitel 1 Abschnitt 7

[33] s. [Eidelman/Zhitarashu] S. 182

[34] vgl. [Eidelman/Zhitarashu] S. 188

3. Gilt für ein positives h

$$\omega_{f,2}(h) := \int\limits_0^h \frac{\omega_{f,1}(z)}{z}\, dz < \infty \ , \tag{3.12}$$

so heißt f zur Dini-Klasse $\widetilde{D}^2$ gehörig.

Zur Einordnung der Dini-Klasse dient das folgende Lemma:

3.1.2 Lemma

Es sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion mit Stetigkeitsmodul ω_f. Dann gilt:

1. f ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn $\lim\limits_{h\searrow 0} \omega_f(h) = 0$.

2. f Hölder-stetig $\Rightarrow f \in \widetilde{D}^2 \Rightarrow f \in \widetilde{D}^1 \Rightarrow f$ gleichmäßig stetig.

Beweis:

1. Dies ist klar nach Definition von Stetigkeitsmodul und gleichmäßiger Stetigkeit.

2. f sei Hölder-stetig. Dann gibt es $\lambda, L > 0$ mit $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}|^\lambda$ für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$. Daher gilt $\omega_f(h) \leq Lh^\lambda$ für alle $h > 0$. Daraus folgt $\omega_{f,1}(h) = \int\limits_0^h \frac{\omega_f(z)}{z}\, dz \leq \int\limits_0^h Lz^{\lambda-1} dz = \frac{L}{\lambda} h^\lambda$, d.h. $f \in \widetilde{D}^1$ und $\omega_{f,1}$ erfüllt bis auf einen Faktor $(\frac{1}{\lambda})$ dieselbe Abschätzung wie ω_f. Völlig analog sieht man nun, daß dies auch für $\omega_{f,2}$ gilt.
   $\widetilde{D}^2 \subseteq \widetilde{D}^1$ ist nach Konstruktion klar. Somit bleibt noch zu zeigen, daß zur Dini-Klasse $\widetilde{D}^1$ gehörige Funktionen f gleichmäßig stetig sind. Für den Beweis durch Widerspruch sei f nicht gleichmäßig stetig: wegen 1. muß dann $\lim\limits_{h\searrow 0} \omega_f(h) = \varepsilon > 0$ sein (der Limes existiert aufgrund der Isotonie[35] von ω_f). Daraus folgt jedoch für beliebiges $h > 0$:

$$\omega_{f,1}(h) = \int\limits_0^h \frac{\omega_f(z)}{z}\, dz \geq \int\limits_0^h \frac{\varepsilon}{z}\, dz = \infty \ ,$$

   im Widerspruch zur Annahme $f \in \widetilde{D}^1$.

□

[35] für Eigenschaften des Stetigkeitsmoduls s. Anhang A.2

Es gilt der folgende Satz:

3.1.3 Satz

Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Kapitel 2 $\widetilde{\sigma}$ aus der Dini-Klasse $\widetilde{D}^2$, so gilt:

1. Es existiert eine eindeutige Fundamentallösung $Z(x,\tilde{t};y,\tau)$ von (3.6) und es gilt für $k = 0,1,2$
$$\left|\frac{\partial^k Z(x,\tilde{t};y,\tau)}{\partial x^k}\right| \le C_k(\tilde{t}-\tau)^{-\frac{1+k}{2}} \exp(-c\frac{(x-y)^2}{\tilde{t}-\tau}) \ . \tag{3.13}$$
Dabei sind C_k von $\tilde{t}, \sigma_u,\ \omega_{\widetilde{\sigma}},\ \omega_{\widetilde{\sigma},1}$ (C_0 kann in Abhängigkeit von $\overline{T}$, jedoch unabhängig von $\tilde{t}$ gewählt werden) sowie den Schranken für $\tilde{\mu}$ und $\tilde{r}$ abhängende und c von σ_u abhängende Konstanten.

2. Die eindeutigen Lösungen u_{call} und u_{put} von (3.6),(3.7) besitzen die Darstellung
$$u_{\text{call}}(x,\tilde{t},\xi,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x,\tilde{t};y,\tau)\,(e^y - e^\xi)^+ dy = \int\limits_{\xi}^{\infty} Z(x,\tilde{t};y,\tau)\,(e^y - e^\xi) dy \ , \tag{3.14}$$
$$u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x,\tilde{t};y,\tau)\,(e^\xi - e^y)^+ dy = \int\limits_{-\infty}^{\xi} Z(x,\tilde{t};y,\tau)\,(e^\xi - e^y) dy \ . \tag{3.15}$$

Beweis:

1. Dies ist die Übertragung von Theorem VI.3 aus [EIDELMAN/ZHITARASHU] S. 188 auf die hier vorliegende Situation. Die Unabhängigkeit von C_0 ergibt sich aus Theorem VI.6 aus [EIDELMAN/ZHITARASHU] S. 193.

2. Für den Wert u_{put} des Puts ist dies klar nach Definition der Fundamentallösung. Aufgrund der Abschätzungen aus 1. gilt eine (3.8), (3.9) entsprechende Aussage auch für alle Funktionen ψ, die für $|x| \to \infty$ nicht schneller wachsen als $\exp(ax^2)$ mit $a > 0$.[36] Daraus folgt die Behauptung für u_{call}. □

3.1.4 Vereinbarung

Im folgenden soll zusätzlich zu den Annahmen aus Kapitel 2 stets $\widetilde{\sigma}$ aus der Dini-Klasse $\widetilde{D}^2$ sein.

[36] s. [EIDELMAN/ZHITARASHU] S. 203

3.2 Die Put-Call-Parität

Mit der Put-Call-Parität wird in diesem Abschnitt eine Möglichkeit bereitgestellt, aus Put-Preisen Call-Preise zu berechnen und umgekehrt. Ferner erlaubt es die Put-Call-Parität, sich bei Herleitungen in späteren Abschnitten auf die Betrachtung von Puts (oder Calls) zu beschränken.

3.2.1 Satz

Unter den Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 gilt:

1. Der Wert v_{TK} eines Terminkaufs mit Abwicklungstermin T und Terminkurs K beträgt zum Zeitpunkt t bei einem Preis des Basistitels von S_t
$$v_{TK} = S_t \exp(-\int_t^T \mathrm{di}(u)du) - K \exp(-\int_t^T r(u)du)\ . \tag{3.16}$$

2. Für den Wert v_{TV} eines analog zu 1. gebildeten Terminverkaufs gilt
$$v_{TV} = -v_{TK} = K \exp(-\int_t^T r(u)du) - S_t \exp(-\int_t^T \mathrm{di}(u)du)\ . \tag{3.17}$$

3. Es gilt die sog. Put-Call-Parität:
$$v_{\text{call}} - v_{\text{put}} = v_{TK} = S_t \exp(-\int_t^T \mathrm{di}(u)du) - K \exp(-\int_t^T r(u)du)\ . \tag{3.18}$$

Beweis:

1. Wie in Abschnitt 2.3 kann man durch Konstruktion eines den Terminkauf duplizierenden selbstfinanzierenden Portefeuilles zeigen, daß v_{TK} die Black-Scholes-Differentialgleichung erfült mit Endbedingung $v_{TK}(S, T, K, T) = S - K$. Existenz und Eindeutigkeit von v_{TK} ergeben sich aus zum Beweis von 3.1.3 analogen Überlegungen. Daß die Lösung die behauptete Form hat, sieht man durch „simples Nachrechen" der Black-Scholes-Differentialgleichung.

2. Trivial.

3. $v_{\text{call}} - v_{\text{put}}$ erfüllt die Black-Scholes-Differentialgleichung mit der Randbedingung $(v_{\text{call}} - v_{\text{put}})(S, T, K, T) = (S - K)^+ - (K - S)^+ = S - K$. Die Behauptung folgt daher aus 1.. $\square$

3.3 Die adjungierte Gleichung für glattes $\widetilde{\sigma}(\cdot)$

Eines der Ziele dieses Kapitels ist es, zu beweisen, daß sowohl der Preis v_{call} eines europäischen Calls als auch der Preis v_{put} eines europäischen Puts als Funktionen von Ausübungskurs K und Verfalltermin T die sog. adjungierte Gleichung[37]

$$\frac{\partial v(K,T)}{\partial T} = \frac{1}{2}K^2\sigma^2(K)\frac{\partial^2 v(K,T)}{\partial K^2} + \mu(T)K\frac{\partial v(K,T)}{\partial K} - \mathrm{di}(T)v(K,T) \tag{3.19}$$

erfüllen. Mit der Transformation (3.1) aus Abschnitt 3.1 ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \tau} &+ \widetilde{\sigma}(\xi)\left(\frac{\partial^2 u(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi}\right) \\ &+ \tilde{\mu}(\tau)\frac{\partial u(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi} - \widetilde{\mathrm{di}}(\tau)\, u(x,\tilde{t},\xi,\tau) = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Die adjungierte Gleichung ist von zentraler Bedeutung für das Problem, aus der Beobachtung des Preises des Basistitels und von Optionspreisen zu verschiedenen Ausübungskursen auf die lokale Volatilität $\sigma(\cdot)$ zurückzuschließen. In diesem Abschnitt wird die adjungierte Gleichung für einen Spezialfall, nämlich besonders glattes $\widetilde{\sigma}$, bewiesen. Zuerst jedoch werden einige Hilfsaussagen - der Einfachheit halber nur für den Wert u_{put} eines Puts - hergeleitet; man kann analoge Aussagen auch für den Wert u_{call} eines Calls beweisen.

3.3.1 Lemma

Sind die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt, so gilt für die Lösung u_{put} von (3.6), (3.7) und die Fundamentallösung $Z(x,\tilde{t};y,\tau)$ von (3.6)

$$\frac{\partial u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi} = e^{\xi}\int_{-\infty}^{\xi} Z(x,\tilde{t};y,\tau)dy \tag{3.21}$$

sowie

$$\frac{\partial^2 u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi} = e^{\xi}Z(x,\tilde{t};\xi,\tau) \tag{3.22}$$

jeweils für alle $x,\xi \in \mathbb{R}, \tilde{t},\tau \in [0,\overline{T}]$ mit $\tilde{t} > \tau$.

[37] Die adjungierte Gleichung zur Black-Scholes-Differentialgleichung darf nicht verwechselt werden mit dem Begriff der adjungierten Differentialgleichung, der in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine Rolle spielt.

Beweis: Die beiden Aussagen folgen unmittelbar aus den Differentiationsregeln für Summen bzw. Produkte sowie dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, wenn man beachtet, daß nach (3.15) gilt:

$$u_{\text{put}}(x, \tilde{t}, \xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} Z(x, \tilde{t}; y, \tau)\,(e^{\xi} - e^{y})dy$$

$$= e^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi} Z(x, \tilde{t}; y, \tau)\,dy - \int_{-\infty}^{\xi} Z(x, \tilde{t}; y, \tau)e^{y}dy\ .$$

□

3.3.2 Lemma

Ist zusätzlich zu den Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 $\widetilde{\sigma}$ zweimal stetig differenzierbar und sind $\widetilde{\sigma}', \widetilde{\sigma}''$ beschränkt sowie $\widetilde{\sigma}''$ Hölder-stetig, so gilt für alle $x, \xi, y \in \mathbb{R}, \tilde{t}, \tau \in [0, \overline{T}]$ mit $\tilde{t} > \tau$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Z(x, \tilde{t}; y, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(\widetilde{\sigma}(y) Z(x, \tilde{t}; y, \tau)\big) \\ +&\frac{\partial}{\partial y}\big((\widetilde{\sigma}(y) + \tilde{\mu}(\tau))Z(x, \tilde{t}; y, \tau)\big) - \tilde{r}(\tau)Z(x, \tilde{t}; y, \tau) = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

und

$$\frac{\partial u_{\text{put}}(x, \tilde{t}, \xi, \tau)}{\partial \tau} = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial Z(x, \tilde{t}; y, \tau)}{\partial \tau}(e^{\xi} - e^{y})dy \tag{3.24}$$

sowie

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{\partial}{\partial y}\big(\widetilde{\sigma}(y) Z(x, \tilde{t}; y, \tau)\big) = 0\ . \tag{3.25}$$

Beweis: Aufgrund der Voraussetzungen an $\widetilde{\sigma}$ ist $Z(x, t; y, \tau)$ Fundamentallösung der adjungierten Differentialgleichung[38]

$$\frac{\partial w(y, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(\widetilde{\sigma}(y) w(y, \tau)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big((\widetilde{\sigma}(y) + \tilde{\mu}(\tau)) w(y, \tau)\big) - \tilde{r}(\tau) w(y, \tau) = 0 \tag{3.26}$$

und erfüllt daher die behauptete Differentialgleichung.
Zum Beweis von (3.24) ist nach (3.15) lediglich zu begründen, warum Differentiation und Integration vertauscht werden dürfen. Da Z Fundamentallösung von (3.26) ist, erfüllen die Ableitungen von Z nach y zu (3.13) analoge Abschätzungen.

[38] s. hierzu und zum folgenden [Eidelman/Zhitarashu] S. 186f

Daher kann $\frac{\partial Z(x,\tilde{t};y,\tau)}{\partial\tau}(e^\xi - e^y)$ dem Betrage nach gegen $C_\xi \exp(-c_\xi(x-y)^2))$ abgeschätzt werden mit positiven zusätzlich von ξ abhängenden Konstanten C_ξ und c_ξ, und diese Majorante ist integrierbar. Damit sind die Voraussetzungen des Differentiationslemmas aus [Bauer] S. 102 erfüllt und man kann Integration und Differentiation vertauschen.
Zum Beweis der letzten Behauptung beachte man, daß $\widetilde{\sigma}$ und $\widetilde{\sigma}'$ beschränkt sind und Z sowie $\frac{\partial Z(x,\tilde{t};y,\tau)}{\partial y}$ wegen der zu (3.13) analogen Abschätzungen für $y \to -\infty$ gegen Null konvergieren. □

Nach diesen Vorbereitungen kann die adjungierte Gleichung für glattes $\widetilde{\sigma}$ bewiesen werden.

3.3.3 Proposition

Zusätzlich zu den Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 sei $\widetilde{\sigma}$ zweimal differenzierbar, $\widetilde{\sigma}', \widetilde{\sigma}''$ beschränkt und $\widetilde{\sigma}''$ Hölder-stetig. Dann erfüllt die Lösung u_{put} von (3.6), (3.7) als Funktion von ξ, τ die adjungierte Gleichung (3.20).

Beweis: Es gilt unter Benutzung der vorangegangenen Lemmata und nach partieller Integration (aus Gründen der Schreibökonomie wird die Abhängigkeit von x und $\tilde{t}$ unterdrückt)

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial u_{\text{put}}(\xi,\tau)}{\partial\tau} &\overset{(3.24)}{=} -\int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial Z(y,\tau)}{\partial\tau}(e^\xi - e^y)dy \\
&\overset{(3.23)}{=} \int_{-\infty}^{\xi} \Big\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(\widetilde{\sigma}(y)Z(y,\tau)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big((\widetilde{\sigma}(y)+\tilde{\mu}(\tau))Z(y,\tau)\big) \\
&\qquad\qquad - \tilde{r}(\tau)Z(y,\tau)\Big\}(e^\xi - e^y)dy \\
&= \left[\left\{\frac{\partial}{\partial y}\big(\widetilde{\sigma}(y)Z(y,\tau)\big) + \big(\widetilde{\sigma}(y)+\tilde{\mu}(\tau)\big)Z(y,\tau)\right\}(e^\xi - e^y)\right]\Bigg|_{-\infty}^{\xi} \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\xi} \left\{\frac{\partial}{\partial y}\big(\widetilde{\sigma}(y)Z(y,\tau)\big) + \big(\widetilde{\sigma}(y)+\tilde{\mu}(\tau)\big)Z(y,\tau)\right\} e^y dy \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{r}(\tau)Z(y,\tau)(e^\xi - e^y)dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3.25)}{=} \left[\widetilde{\sigma}(y)Z(y,\tau)e^{y}\right]\Big|_{-\infty}^{\xi} - \int\limits_{-\infty}^{\xi} \widetilde{\sigma}(y)Z(y,\tau)e^{y}dy \\
&\qquad + \int\limits_{-\infty}^{\xi} \left\{\left(\widetilde{\sigma}(y)+\tilde{\mu}(\tau)\right)Z(y,\tau)e^{y} - \tilde{r}(\tau)Z(y,\tau)(e^{\xi}-e^{y})\right\}dy \\
&= \widetilde{\sigma}(\xi)e^{\xi}Z(\xi,\tau) + \int\limits_{-\infty}^{\xi} \left\{\tilde{\mu}(\tau)Z(y,\tau)e^{y} - \tilde{r}(\tau)Z(y,\tau)(e^{\xi}-e^{y})\right\}dy \\
&= \widetilde{\sigma}(\xi)e^{\xi}Z(\xi,\tau) + \int\limits_{-\infty}^{\xi} \tilde{\mu}(\tau)Z(y,\tau)e^{\xi}dy \\
&\qquad - \int\limits_{-\infty}^{\xi} \left(\tilde{\mu}(\tau)+\tilde{r}(\tau)\right)Z(y,\tau)(e^{\xi}-e^{y})dy \\
&\overset{(3.15),(3.21),(3.22)}{=} \widetilde{\sigma}(\xi)\left(\frac{\partial^2 u_{\mathrm{put}}(\xi,\tau)}{\partial\xi^2} - \frac{\partial u_{\mathrm{put}}(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right) \\
&\qquad\qquad + \tilde{\mu}(\tau)\frac{\partial u_{\mathrm{put}}(\xi,\tau)}{\partial\xi} - \widetilde{\mathrm{di}}(\tau)\, u_{\mathrm{put}}(\xi,\tau)
\end{aligned}
$$

□

3.4 Stetigkeit in $\sigma(\cdot)$ im Spezialfall

Das nachfolgende Lemma faßt einige später benötigte Eigenschaften zusammen, die immer dann gelten, wenn u_{put} die adjungierte Gleichung (3.20) erfüllt.

3.4.1 Lemma

Es seien die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt und u_{put} erfülle die adjungierte Gleichung (3.20). Bezeichnet $\widetilde{Z}(x,\tilde{t};\xi,\tau)$ die Fundamentallösung der adjungierten Gleichung (3.20)[39], so gilt

1. $u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau) = \int_x^\infty \widetilde{Z}(y,\tilde{t};\xi,\tau)(e^y - e^x)dy$,

2. $\dfrac{\partial u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial x} = -e^x \int_x^\infty \widetilde{Z}(y,\tilde{t};\xi,\tau)dy < 0$,

3. $\dfrac{\partial u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial x} - u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau) = -\int_x^\infty \widetilde{Z}(y,\tilde{t};\xi,\tau)e^y dy < 0$,

4. $\dfrac{\partial^2 u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial x} = e^x \widetilde{Z}(x,\tilde{t};\xi,\tau) > 0$,

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\partial u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial x} - u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau) \right) = 0$,

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{\partial u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial x} - u_{\text{put}}(x,\tilde{t},\xi,\tau) \right) = -e^\xi \exp\big(-\int_\tau^{\tilde{t}} \tilde{r}(u)\,du\big)$.

Beweis:

1. Dies ist klar nach Definition der Fundamentallösung $\widetilde{Z}$ und Proposition 3.3.3.

2. Der Beweis erfolgt analog zu dem von Lemma 3.3.1. Das negative Vorzeichen folgt aus der Positivität von $\widetilde{Z}$.[40]

3. Folgt direkt aus 1. und 2..

4. Klar mit 3. sowie dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

5. Folgt direkt aus 3..

[39] Existenz und Eindeutigkeit von $\widetilde{Z}$ sind analog zu Satz 3.1.3 gegeben.

[40] s. [Eidelman/Zhitarashu] S. 192

6. Aus 3. folgt

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\partial u_{\text{put}}(x,\tilde t,\xi,\tau)}{\partial x}-u_{\text{put}}(x,\tilde t,\xi,\tau)\right)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde Z(y,\tilde t;\xi,\tau)e^{y}dy\ .$$

Nach Definition der Fundamentallösung ist dies eine Darstellung der Lösung w der adjungierten Gleichung (3.20) mit Endbedingung $w(x,\tilde t,\xi,\tilde t)=-e^{\xi}$. Die Behauptung folgt nun aus der eindeutigen Lösbarkeit der adjungierten Gleichung (3.20) (die analog zu Satz 3.1.3 gegeben ist), da

$$-e^{\xi}\exp\bigl(-\int\limits_{\tau}^{\tilde t}\tilde r(u)\,du\bigr)$$

diese mit der vorgegebenen Endbedingung löst, wie man leicht nachrechnet.

□

Damit sind die Voraussetzungen geschaffen, den folgenden Satz, eines der Hauptergebnisse dieses Kapitels, zu beweisen.

3.4.2 Satz

Es seien die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt für $\widetilde\sigma_1$ und $\widetilde\sigma_2$. Die zugehörigen Put-Preise seien mit u_1 und u_2 bezeichnet, u_2 erfülle die adjungierte Gleichung (3.20). Weiter seien $\psi := u_2-u_1$, $\Delta\widetilde\sigma := \widetilde\sigma_2-\widetilde\sigma_1$ und Z_1 die Fundamentallösung zur Black-Scholes-Differentialgleichung (3.6) für $\widetilde\sigma_1$. Dann gilt für ψ die Integraldarstellung

$$\psi(x,\tilde t,\xi,\tau)=\int\limits_{\tau}^{\tilde t}\int\limits_{\mathbb R}Z_1(x,\tilde t;y,\varrho)\Delta\widetilde\sigma(y)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\right)u_2(y,\varrho,\xi,\tau)\,dy\,d\varrho\ , \quad (3.27)$$

wobei das Integral als iteriertes Integral zu verstehen ist, d.h. es wird erst bzgl. y, dann bzgl. ϱ integriert. Ferner gilt für festes ξ,τ die Abschätzung

$$||\psi||_\infty=||u_1-u_2||_\infty=\sup_{x\in\mathbb R,\,\tilde t\in[\tau,\overline T]}|\psi(x,\tilde t,\xi,\tau)|\le 2\,C_0Me^{\xi}||\Delta\widetilde\sigma||_\infty\sqrt{\tilde t-\tau}\ , \quad (3.28)$$

wobei C_0 die Konstante aus Abschätzung (3.13) bzgl. $\widetilde\sigma_1$ und M eine nur von $r(\cdot)$ und $\overline T$ abhängende Konstante ist.

Beweis: Im folgenden seien ξ und τ fest und ψ sei durch die Darstellung (3.27) gegeben. Zum Beweis der Wohldefiniertheit und von (3.28) werden die Aussagen des vorangegangenen Lemmas benutzt:

$$
\begin{aligned}
|\psi(x,\tilde{t},\xi,\tau)| &\leq \int_\tau^{\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}} \left| Z_1(x,\tilde{t};y,\varrho)\Delta\widetilde{\sigma}(y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2(y,\varrho,\xi,\tau) \right| dy\, d\varrho \\
&\overset{4.}{=} \int_\tau^{\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}} Z_1(x,\tilde{t};y,\varrho)|\Delta\widetilde{\sigma}(y)| \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2(y,\varrho,\xi,\tau)\, dy\, d\varrho \\
&\leq ||\Delta\widetilde{\sigma}||_\infty \int_\tau^{\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}} Z_1(x,\tilde{t};y,\varrho) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2(y,\varrho,\xi,\tau)\, dy\, d\varrho \\
&\overset{(3.13)}{\leq} ||\Delta\widetilde{\sigma}||_\infty \int_\tau^{\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}} C_0\,(\tilde{t}-\varrho)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2(y,\varrho,\xi,\tau)\, dy\, d\varrho \\
&\overset{5.,6.}{=} ||\Delta\widetilde{\sigma}||_\infty \int_\tau^{\tilde{t}} C_0\,(\tilde{t}-\varrho)^{-\frac{1}{2}} e^\xi \exp\Big(-\int_\tau^{\varrho} \tilde{r}(u)\,du\Big) d\varrho \\
&\leq C_0 ||\Delta\widetilde{\sigma}||_\infty e^\xi \int_\tau^{\tilde{t}} (\tilde{t}-\varrho)^{-\frac{1}{2}} M\, d\varrho \\
&= 2\,C_0 M e^\xi ||\Delta\widetilde{\sigma}||_\infty \sqrt{\tilde{t}-\tau}\ .
\end{aligned}
$$

Zu zeigen bleibt nun noch, daß $\psi = u_2 - u_1$ gilt. Dazu bezeichne L_k $(k = 1,2)$ den Differentialoperator

$$L_k u(x,\tilde{t}) := \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} - \widetilde{\sigma}_k(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \tilde{\mu}(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{r}(\tilde{t})u\ .$$

Wenn gezeigt ist, daß $L_1(\psi + u_2) = 0$ ist, dann ist klar, daß $\psi + u_2$ Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung (3.6) mit der Anfangsbedingung für den Put ist, also wegen der eindeutigen Lösbarkeit dieser partiellen Differentialgleichung $\psi + u_2 = u_1$ sein muß. Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$L_1 u_2(x,\tilde{t},\xi,\tau) = -\Delta\widetilde{\sigma}(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u_2(x,\tilde{t},\xi,\tau)\ .$$

Daher genügt es zu zeigen, daß

$$L_1 \psi(x,\tilde{t},\xi,\tau) = \Delta\widetilde{\sigma}(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u_2(x,\tilde{t},\xi,\tau) \tag{3.29}$$

gilt. Zum Beweis wird das ψ definierende Integral in zwei Summanden aufgespalten:

$$\psi(x,\tilde{t},\xi,\tau) = \int_{\tau}^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} Z_1(x,\tilde{t};y,\varrho)\Delta\widetilde{\sigma}(y)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\right)u_2(y,\varrho,\xi,\tau)dy\,d\varrho$$

$$+\int_{\varepsilon}^{\tilde{t}}\int_{\mathbb{R}} Z_1(x,\tilde{t};y,\varrho)\Delta\widetilde{\sigma}(y)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\right)u_2(y,\varrho,\xi,\tau)dy\,d\varrho =: I_1 + I_2 \ .$$

Dabei sei $\tau < \varepsilon < \tilde{t}$. Bei der Berechnung von $L_1 I_1$ können Differentiation und Integration vertauscht werden, da die Voraussetzungen zur Anwendung des Differentiationslemmas erfüllt sind, weil sämtliche auftretenden Ableitungen von Z_1 wegen (3.13) und $\varrho \le \varepsilon < \tilde{t}$ gleichmäßig durch eine integrierbare Funktion beschränkt sind. Da Z_1 als Fundamentallösung $L_1 Z_1 = 0$ erfüllt, ist $L_1 I_1 = 0$.
$L_1 I_2 = \Delta\widetilde{\sigma}(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u_2(x,\tilde{t},\xi,\tau)$ gilt wegen Teil 2) von Theorem VI.13 aus [Eidelman/Zhitarashu] S. 205. Dieses Theorem kann angewandt werden, weil folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. $\widetilde{\sigma}_1 \in \widetilde{D}^2$.

2. Es existiert ein ω vom Typ Stetigkeitsmodul[41] mit

   (a) $\widetilde{\sigma}_1$ ist „glatt vom Grad ω“, d.h.

   $$\sup_{x,\tilde{x}\in\mathbb{R}} \frac{|\widetilde{\sigma}_1(x)-\widetilde{\sigma}_1(\tilde{x})|}{\omega(|x-\tilde{x}|)} < \infty \ ,$$

   (b) auf ω kann der Dini-Operator einmal angewandt werden, d.h.

   $$F(h) := \int_0^h \frac{\omega(z)}{z}\,dz < \infty \ \forall h > 0 \ ,$$

   (c) $\Delta\widetilde{\sigma}(y)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\right)u_2(y,\varrho,\xi,\tau)$ ist „glatt vom Grad F“, d.h. es muß mit der abkürzenden Schreibweise $\Delta_y^{\tilde{y}} g(\cdot,\tilde{t},\xi,\tau) := g(y,\tilde{t},\xi,\tau) - g(\tilde{y},\tilde{t},\xi,\tau)$ gelten:

   $$\sup_{(y,\varrho),(\tilde{y},\varrho)\in\mathbb{R}\times[\varepsilon,\tilde{t}]} \frac{\Delta_y^{\tilde{y}}\left\{\Delta\widetilde{\sigma}(\cdot)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\right)u_2(\cdot,\varrho,\xi,\tau)\right\}}{F(|y-\tilde{y}|)} < \infty \ .$$

[41] s. dazu Anhang A.2

Die erste Voraussetzung ist offensichtlich erfüllt, der zweiten kann genüge getan werden durch die folgende Wahl von ω: sind σ_1 und σ_2 nicht beide konstant, so setzt man $\omega := \omega_{\sigma_1} + \omega_{\sigma_2}$, andernfalls kann ω beliebig vom Typ Stetigkeitsmodul gewählt werden. Durch diese Wahl sind die Abschätzungen 2.(a) und (b) gewährleistet; daß auch (c) gilt, sieht man wie folgt:
Aufgrund der speziellen Wahl von ω ist $\Delta\widetilde{\sigma}$ glatt vom Grad ω. Da das Produkt beschränkter Funktionen vom Glattheitsgrad ω wieder glatt vom Grad ω ist und Glattheit vom Grad ω Glattheit vom Grad F impliziert[42], bleibt nur noch zu zeigen, daß für

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2(y, \varrho, \xi, \tau)$$

Beschränktheit und eine entsprechende Glattheit für $y \in \mathbb{R}$, $\varrho \in [\varepsilon, \tilde{t}]$ vorliegen. Nach 4. des vorigen Lemmas und der zu (3.13) analogen Abschätzung von $\frac{\partial \tilde{Z}_1}{\partial y}$ und wegen $\varrho \geq \varepsilon > \tau$ ist die partielle Ableitung dieser Funktion nach y gleichmäßig (bzgl. y und ϱ) beschränkt und die Abbildung daher Lipschitz-stetig in y gleichmäßig bzgl. y und ϱ. Die erforderliche Glattheit folgt nun durch Anwendung der im Anhang A.2 zu findenden Hilfsaussage für Lipschitz-stetige Funktionen. $\square$

3.4.3 Bemerkung

Im Anhang A.2 sind sämtliche Formulierungen auf Funktionen einer Variablen zugeschnitten, um nicht unnötig notationellen Aufwand zu treiben. Sämtliche Ergebnisse des Anhangs übertragen sich nämlich ohne Änderung in den Beweisen auf Funktionen mehrerer Variablen, wenn die entsprechenden Eigenschaften jeweils gleichmäßig bzgl. der nicht die Glattheit betreffenden Variablen gelten.

[42] zum Beweis dieser Behauptungen s. Anhang A.2

3.5 Die adjungierte Gleichung

Mit Hilfe der Ergebnisse der beiden vorangegangenen Abschnitte wird in diesem Abschnitt gezeigt, daß die adjungierte Gleichung nicht nur für glattes $\widetilde{\sigma}$ gilt. Zur Vorbereitung wird ein Lemma benötigt, welches zeigt, daß beschränkte $\widetilde{\sigma}$ aus $\widetilde{D}^2$ beliebig gut durch glatte $\widetilde{\sigma}$ gem. Proposition 3.3.3 angenähert werden können.

3.5.1 Lemma

Es sei $\widetilde{\sigma}$ eine stetige Funktion mit $0 < \sigma_u \leq \widetilde{\sigma}(x) \leq \sigma_o < \infty \; \forall x \in \mathbb{R}$, die zur Klasse $\widetilde{D}^2$ gehört. Dann gibt es eine Folge von „glatten" Funktionen $\widetilde{\sigma}_n$, welche die Voraussetzungen von Proposition 3.3.3 erfüllen, und auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $\widetilde{\sigma}$ konvergieren.

Beweis: Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & , |x| < 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

gegebene Funktion. Weiter sei

$$A := \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx \right)^{-1}$$

und für $\eta > 0$ sei p_η durch

$$p_\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{A}{\eta} \varphi\left(\frac{x}{\eta}\right)$$

gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\widetilde{\sigma}_n := \widetilde{\sigma} * p_{\frac{1}{n}}$ die Faltung von $\widetilde{\sigma}$ mit $p_{\frac{1}{n}}$. Nach [Jantscher] S. 31ff gilt dann:

- $\widetilde{\sigma}_n$ ist unendlich oft stetig differenzierbar.
- Die k-te Ableitung von $\widetilde{\sigma}_n$ erfüllt $\widetilde{\sigma}_n^{(k)} = \widetilde{\sigma} * p_{\frac{1}{n}}^{(k)}$.

Da $p_{\frac{1}{n}}^{(k)}$ für festes n und k beschränkt ist, erfüllt $\widetilde{\sigma}_n$ die Voraussetzungen von Proposition 3.3.3 für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen bleibt noch, daß $\widetilde{\sigma}_n$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $\widetilde{\sigma}$ konvergiert. Sei dazu $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach Satz 7.1 Eigenschaft (1) aus [Jantscher] a.a.O. gibt es dann $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $|x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{n}$ und $\widetilde{\sigma}_n(x) = \widetilde{\sigma}(\tilde{x})$. Damit folgt

$$|\widetilde{\sigma}(x) - \widetilde{\sigma}_n(x)| = |\widetilde{\sigma}(x) - \widetilde{\sigma}(\tilde{x})| \leq \omega_{\widetilde{\sigma}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

und daher ist $||\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}_n||_\infty \le \omega\left(\frac{1}{n}\right)$ und dies konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null, da $\widetilde{\sigma}$ als Funktion aus $\widetilde{D}^2$ gleichmäßig stetig ist. $\square$

3.5.2 Satz

Sind die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt, so sind die Optionspreise u_{call} und u_{put} als Funktionen von ξ und τ Lösungen der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \tau} + \widetilde{\sigma}(\xi)\left(\frac{\partial^2 u(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi}\right) + \\ + \tilde{\mu}(\tau)\frac{\partial u(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi} - \widetilde{\mathrm{di}}(\tau)\, u(x,\tilde{t},\xi,\tau) = 0\ .\end{aligned} \tag{3.30}$$

mit Endbedingung

$$u(x,\tilde{t},\xi,\tilde{t}) = (e^x - e^\xi)^+ \text{ (Call) bzw. } u(x,\tilde{t},\xi,\tilde{t}) = (e^\xi - e^x)^+ \text{ (Put).} \tag{3.31}$$

Beweis:

1. Nach Lemma 3.5.1 existiert eine Folge $\widetilde{\sigma}_n$, die auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $\widetilde{\sigma}$ konvergiert und deren Folgenglieder die Voraussetzungen von Proposition 3.3.3 erfüllen. Nach Satz 3.4.2 konvergiert dann die Folge u_n der zugehörigen Put-Preise als Funktion von x und $\tilde{t}$ (sogar gleichmäßig auf $\mathbb{R} \times [\tau, \overline{T}]$ bei festem ξ, τ) gegen u_{put}.

2. Andererseits kann man sämtliche Ergebnisse der vorigen Abschnitte auch mit vertauschten Rollen von Black-Scholes-Differentialgleichung (3.6) und adjungierter Gleichung (3.20) beweisen, weil sich diese beiden Gleichungen nur dadurch unterscheiden, daß $\tilde{r}$ durch $\widetilde{\mathrm{di}}$ ersetzt wurde und umgekehrt $\widetilde{\mathrm{di}}$ durch $\tilde{r}$. Wegen Proposition 3.3.3 und dem zu Satz 3.4.2 analogen Ergebnis konvergiert u_n demnach als Funktion von ξ und τ für festes $x, \tilde{t}$ (sogar gleichmäßig auf $\mathbb{R} \times [0, \tilde{t}]$ für festes $x, \tilde{t}$) gegen die eindeutig bestimmte Lösung von (3.30), (3.31).

Damit ist die Behauptung für u_{put} gezeigt. Die Behauptung für u_{call} folgt aus der Put-Call-Parität, da der Wert eines Terminkaufs, der in Satz 3.2.1 angegeben ist, die adjungierte Gleichung ebenfalls erfüllt, wie man leicht nachrechnet. $\square$

Die Übertragung dieses Satz in die Variablen S, t, K, T liefert den nachfolgenden Satz:

3.5.3 Satz

Sind die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt, so sind die Optionspreise v_{call} und v_{put} als Funktionen von K und T Lösungen der adjungierten Gleichung

$$\frac{\partial v(K,T)}{\partial T} = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(K) \frac{\partial^2 v(K,T)}{\partial K^2} + \mu(T) K \frac{\partial v(K,T)}{\partial K} - \mathrm{di}(T)\, v(K,T) \qquad (3.32)$$

mit Endbedingung

$$v(S,t,K,T) = (S-K)^+ \text{ (Call) bzw. } v(S,t,K,T) = (K-S)^+ \text{ (Put).} \qquad (3.33)$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus dem vorigen Satz durch Rücktransformation der durch (3.1) gem.

$$\begin{pmatrix} S \\ t \\ K \\ T \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tilde{t} \\ \xi \\ \tau \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \ln S \\ \overline{T} - t \\ \ln K \\ \overline{T} - T \end{pmatrix}$$

definierten Variablen $x, \tilde{t}, \xi, \tau$ in die alten Variablen S, t, K, T. $\square$

3.6 Stetigkeit und Monotonie in $\sigma(\cdot)$

In Abschnitt 3.4 wurde eine Abschätzung bewiesen, die zeigte, daß Put-Preise zu verschiedenen lokalen Volatilitäten stetig von diesen abhängen, falls eine der beiden lokalen Volatilitäten derart war, daß die zugehörige Lösung die adjungierte Gleichung erfüllt. Dies ist aber nach Satz 3.5.2 bereits unter den allgemeinen Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 der Fall. Außerdem überträgt sich die Abschätzung auch auf die Differenz von Call-Preisen, da diese über die Put-Call-Parität mit Put-Preisen verbunden sind und die Differenz „Call - Put = Terminkauf" im Wert unabhängig von der lokalen Volatilität ist, wie Satz 3.2.1 zeigt. Damit ist der folgende Satz (bis auf das leicht zu überprüfende Zusammenfassen von Konstanten) bewiesen.

3.6.1 Satz

Es seien die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt für $\widetilde{\sigma}_1$ und $\widetilde{\sigma}_2$, die zugehörigen Put- (bzw. Call-) Preise seien mit u_1 und u_2 bezeichnet. Dann gilt für festes ξ, τ die Abschätzung

$$||u_1 - u_2||_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}, \tilde{t}\in[\tau,\overline{T}]} |(u_1-u_2)(x,\tilde{t},\xi,\tau)| \leq 2\,Ce^{\xi}||\widetilde{\sigma}_1 - \widetilde{\sigma}_2||_\infty \sqrt{\overline{T}-\tau}\ , \quad (3.34)$$

wobei C eine von $\overline{T}$, ω_{σ_1}, $\omega_{\sigma_1,1}$ und der unteren Schranke für σ_1 sowie den Schranken für $\tilde{\mu}$ und $\tilde{r}$ abhängende Konstante ist.

Zum Abschluß des Kapitels wird noch ein Ergebnis über die Monotonie von Optionspreisen angegeben, dessen Beweis im Prinzip auch schon in früheren Abschnitten erledigt wurde.

3.6.2 Satz

Es seien die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt für $\widetilde{\sigma}_1$ und $\widetilde{\sigma}_2$, die zugehörigen Put- (bzw. Call-) Preise seien mit u_1 und u_2 bezeichnet. Gilt $\widetilde{\sigma}_1 \leq \widetilde{\sigma}_2$ punktweise, so gilt auch $u_1 \leq u_2$ punktweise.

Beweis: Für den Put folgt dies direkt aus der Integraldarstellung (3.27) aus Satz 3.4.2, für den Call liefert dann die Put-Call-Parität die Behauptung. $\square$

Kapitel 4

Numerische Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung

Dieses Kapitel widmet sich der numerischen Behandlung des sogenannten Vorwärtsproblems. Darunter ist die Aufgabe zu verstehen, bei Kenntnis von Zinssatz $r(\cdot)$, Dividendenrate di$(\cdot)$ und lokaler Volatilität $\sigma(\cdot)$ Optionspreise für den Zeitpunkt $t \in [0, \overline{T}]$ zu berechnen für zum Zeitpunkt $T \in [0, \overline{T}]$ fällige Optionen mit Ausübungskurs K, wenn der Preis des Basistitels zum Zeitpunkt t durch S gegeben ist. Sind dabei K und T fest, d.h. wird lediglich der Wert einer bestimmten Option in Abhängigkeit von S und t gesucht, so ist zur Preisbestimmung die Black-Scholes-Differentialgleichung zu lösen. Besteht das Problem darin, Optionspreise für Optionen mit variierenden Fälligkeiten und Ausübungskursen für einen Zeitpunkt t bei festem Preis S des Basistitels zu bestimmen, dann bietet es sich an, die adjungierte Gleichung zu lösen. Da, wie bereits oben ausgeführt, diese beiden Gleichungen vom mathematischen Standpunkt aus keinen Unterschied aufweisen, kann im folgenden unter Lösung des Vorwärtsproblems wahlweise eine der beiden skizzierten Aufgabenstellungen verstanden werden, die Darstellung orientiert sich jedoch an der Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung.

Das Kapitel ist in sechs Abschnitte untergliedert:

Der erste Abschnitt befaßt sich mit einigen grundlegenden Überlegungen, die zu einer weiteren Transformation der Gleichung führen, und gibt schließlich für den Fall konstanter Volatilität eine Verallgemeinerung der Formel von Black und Scholes an, die mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Kapitels zu Abschätzungen für Optionswerte bei lokaler Volatilität führt.

Die Abschnitte 2 bis 5 besprechen verschiedene Differenzenverfahren zur Lösung des Vorwärtsproblems und diskutieren deren Eigenschaften.
So werden im zweiten Abschnitt explizite Verfahren vorgestellt, deren Eigenschaften für $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich der „Orts“-Variablen von Fritz John bereits Mitte des letzten Jahrhunderts untersucht wurden.

Der dritte Abschnitt zeigt auf, warum die „Standard“-Beweise der Konvergenz der (impliziten) Differenzenverfahren auf die hier vorliegende Situation nicht angewandt werden können, und gibt anschließend eine alternative Vorgehensweise an.

Die beiden nächsten Abschnitte sind zwei speziellen impliziten Verfahren gewidmet, dem Crank-Nicolson-Verfahren sowie einem Verfahren mit drei Zeitstufen.

Den Abschluß des Kapitels bildet ein Abschnitt, der die beiden impliziten Verfahren anhand von Beispielrechnungen vergleicht.

4.1 Abzinsungs- und Nettodividendenfaktoren

Zur Bewertung von Optionen müssen der Zinssatz $r(\cdot)$, die Dividendenrate $\mathrm{di}(\cdot)$ sowie die lokale Volatilität $\sigma(\cdot)$ bekannt sein. Realistischer jedoch ist die Annahme, daß nicht die Funktion $r : [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}$ bekannt ist, sondern eine Transformation davon, die man in der Ökonomie als Abzinsungsfaktor bezeichnet:

$$\mathrm{abz}(t) := \exp(-\int_0^t r(u)\,du) \ \forall t \in [0, \overline{T}] \tag{4.1}$$

Die Bezeichnung kommt daher, daß $\mathrm{abz}(t)$ angibt, welchen Wert in Euro man heute (d.h. zum Zeitpunkt 0) einem (nicht mit Unsicherheit behafteten) Zahlungsversprechen von einem Euro zum Zeitpunkt t beimessen würde. Man sieht leicht, daß bei Kenntnis von $\mathrm{abz}(\cdot)$ auf den Zinssatz $r(\cdot)$ zurückgeschlossen werden kann durch

$$r(t) = -\frac{\mathrm{abz}'(t)}{\mathrm{abz}(t)} \ . \tag{4.2}$$

Während bei fehlerbehafteter Kenntnis von $r(\cdot)$ die numerische Berechnung von $\mathrm{abz}(\cdot)$ unproblematisch ist, stellt im umgekehrten Fall das (numerische) Differenzieren der Abzinsungsfaktoren ein Problem dar: dabei können bekanntlich kleine Fehler in $\mathrm{abz}(\cdot)$ zu großen Fehlern in $r(\cdot)$ führen. Aus diesem Grund, und da es in der Praxis eher realistisch ist, Abzinsungsfaktoren (zumindest ungefähr) zu kennen, sollen die in dieser Arbeit betrachteten numerischen Verfahren zur Optionsbewertung so gestaltet sein, daß die Kenntnis der Abzinungsfaktoren ausreicht und keine Ableitungen hiervon berechnet werden müssen. Dazu ist die Black-Scholes-Differentialgleichung geeignet zu transformieren.
Analoge Überlegungen gelten für $\mathrm{di}(\cdot)$ bzw. $\mu(\cdot) := \mathrm{di}(\cdot) - r(\cdot)$, das in der Black-Scholes-Differentialgleichung auftritt. Hier sollen die Verfahren so entwickelt werden, daß sie mit

$$\mathrm{ndf}(t) := \exp(-\int_0^t \mu(u)\,du) \ \forall t \in [0, \overline{T}] \tag{4.3}$$

als Eingabe auskommen und dies nicht differenziert werden muß. Die Bezeichnung ndf steht als Abkürzung für Nettodividendenfaktor und wurde deshalb gewählt, weil μ als Nettodividendenrate interpretiert werden kann und ndf in Analogie zu abz definiert wurde. Für $T \in [0, \overline{T}]$ kann man $\mathrm{ndf}(T)$ bei Kenntnis von $\mathrm{abz}(\cdot)$ z.B. aus dem heutigen ($t = 0$) Preis P eines Terminkaufs ableiten, da für diesen bei heutigem Preis S des Basistitels nach Satz 3.2.1

$$P = S\exp(-\int_0^T \mathrm{di}(u)du) - K\exp(-\int_0^T r(u)du) = S\exp(-\int_0^T \mathrm{di}(u)du) - K\,\mathrm{abz}(T)$$

gilt, woraus man leicht $\mathrm{ndf}(T) = \frac{1}{S}\left(\frac{P}{\mathrm{abz}(T)} + K\right)$ findet.

Zum Erreichen der oben beschriebenen Ziele kann man bei festem K und T und damit festem $\xi = \ln K$ und $\tau = \overline{T} - T$ die folgende Transformation der Black-Scholes-Differentialgleichung (2.3) benutzen:

$$v(S,t,K,T) = \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau)\frac{\mathrm{abz}(T)}{\mathrm{abz}(t)} \tag{4.4}$$

mit $\tilde{x} = \ln S + \ln\frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}$ und $\tilde{t} = \overline{T} - t$. Wegen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \tilde{u}\,\frac{\mathrm{abz}(T)}{\mathrm{abz}(t)}\,r(t) + \frac{\mathrm{abz}(T)}{\mathrm{abz}(t)}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\,\mu(t) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}\right) \quad \text{sowie}$$

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{\mathrm{abz}(T)}{\mathrm{abz}(t)}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\frac{1}{S}\,,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = \frac{\mathrm{abz}(T)}{\mathrm{abz}(t)}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\right)\frac{1}{S^2}$$

und $S = e^{\tilde{x}}\frac{\mathrm{ndf}(t)}{\mathrm{ndf}(T)}$ erhält man mit $\widetilde{\mathrm{ndf}}(u) := \mathrm{ndf}(\overline{T} - u)\ \forall u \in [0,\overline{T}]$ das folgende Cauchy-Problem:

$$\frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \tilde{t}} = \widetilde{\sigma}\left(\tilde{x} + \ln\frac{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tilde{t})}{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tau)}\right)\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \tilde{x}}\right) \tag{4.5}$$

mit Anfangsbedingung

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tau,\xi,\tau) = (e^{\tilde{x}} - e^{\xi})^+ \text{ (Call) bzw. } \tilde{u}(\tilde{x},\tau,\xi,\tau) = (e^{\xi} - e^{\tilde{x}})^+ \text{ (Put)} \tag{4.6}$$

für $(\tilde{x},\tilde{t}) \in \mathbb{R} \times [\tau,\overline{T}]$.

Ist σ und damit auch $\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma^2 \circ \exp}{2}$ konstant, so kann man die exakte Lösung dieses Cauchy-Problems angeben.

4.1.1 Satz

Zusätzlich zu den Annahmen aus Kapitel 2 sei $\sigma \equiv \sigma_0$ konstant. Dann gilt mit den abkürzenden Schreibweisen

$$d_1 := \frac{\tilde{x} - \xi}{\sigma_0 \sqrt{\tilde{t} - \tau}} + \frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau} = \frac{\ln \frac{S}{K} + \ln \frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}}{\sigma_0 \sqrt{T - t}} + \frac{\sigma_0}{2}\sqrt{T - t} \;, \tag{4.7}$$

$$d_2 := \frac{\tilde{x} - \xi}{\sigma_0 \sqrt{\tilde{t} - \tau}} - \frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau} = \frac{\ln \frac{S}{K} + \ln \frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}}{\sigma_0 \sqrt{T - t}} - \frac{\sigma_0}{2}\sqrt{T - t} \tag{4.8}$$

für die Preise v_{call} bzw. v_{put} europäischer Optionen mit Fälligkeit T und Ausübungskurs K zum Zeipunkt t bei einem Preis des Basistitels in Höhe von S

$$v_{\text{call}}(S, t, K, T) = S\,\frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}\frac{\mathrm{abz}(T)}{\mathrm{abz}(t)}\Phi(d_1) - K\,\frac{\mathrm{abz}(T)}{\mathrm{abz}(t)}\Phi(d_2) \;, \tag{4.9}$$

$$v_{\text{put}}(S, t, K, T) = K\,\frac{\mathrm{abz}(T)}{\mathrm{abz}(t)}\Phi(-d_2) - S\,\frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}\frac{\mathrm{abz}(T)}{\mathrm{abz}(t)}\Phi(-d_1) \;, \tag{4.10}$$

und für $\tilde{u}$ in den Variablen $\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau$ gemäß obiger Transformation gilt

$$\tilde{u}_{\text{call}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) = e^{\tilde{x}}\Phi(d_1) - e^{\xi}\Phi(d_2) \;, \tag{4.11}$$

$$\tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) = e^{\xi}\Phi(-d_2) - e^{\tilde{x}}\Phi(-d_1) \;. \tag{4.12}$$

Beweis: Die Aussagen für v als Funktion von S, t, K, T folgen jeweils aus den entsprechenden Aussagen für $\tilde{u}$ als Funktion von $\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau$, indem man in die Transformation (4.4) einsetzt. Der Beweis der Aussagen für $\tilde{u}$ erfolgt durch Einsetzen der behaupteten Lösung in die Gleichung (4.5),(4.6) und „einfaches“ Nachrechnen unter Beachtung der Identität

$$\tilde{x} - \frac{1}{2}\,d_1^2 = \xi - \frac{1}{2}\,d_2^2 \;.$$

Damit erhält man nämlich

$$\frac{\partial \tilde{u}_{\text{call}}}{\partial \tilde{x}} = e^{\tilde{x}}\Phi(d_1) + e^{\tilde{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\frac{1}{\sigma_0\sqrt{\tilde{t} - \tau}} - e^{\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_2^2}\frac{1}{\sigma_0\sqrt{\tilde{t} - \tau}} = e^{\tilde{x}}\Phi(d_1)$$

und daraus

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{call}}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial \tilde{u}_{\text{call}}}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\sqrt{\tilde{t} - \tau}}e^{\tilde{x} - \frac{1}{2}d_1^2} \;.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde u_{\text{call}}}{\partial \tilde t} &= e^{\tilde x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12 d_1^2}\left(-\frac{\tilde x-\xi}{2\sigma_0(\tilde t-\tau)^{\frac32}}+\frac{\sigma_0}{4\sqrt{\tilde t-\tau}}\right)\\ &\quad - e^{\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12 d_2^2}\left(-\frac{\tilde x-\xi}{2\sigma_0(\tilde t-\tau)^{\frac32}}-\frac{\sigma_0}{4\sqrt{\tilde t-\tau}}\right)\\ &= e^{\tilde x-\frac12 d_1^2}\frac{\sigma_0}{2\sqrt{\tilde t-\tau}\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

erfüllt $\tilde u_{\text{call}}$ die partielle Differentialgleichung (4.5) mit Anfangsbedingung (4.6), wie man leicht nachprüft. Für $\tilde u_{\text{put}}$ geht man analog vor. □

Aufgrund der in Kapitel 3 bewiesenen Monotonie der Optionspreise in $\sigma(\cdot)$ erhält man direkt das folgende Ergebnis:

4.1.2 Satz

Es seien die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt. Dann gilt für den Preis v_{call} eines europäischen Calls

$$\begin{aligned}\left(S\,\frac{\text{ndf}(T)}{\text{ndf}(t)}-K\right)^{+}\frac{\text{abz}(T)}{\text{abz}(t)} &\le \left(S\,\frac{\text{ndf}(T)}{\text{ndf}(t)}\Phi(d_{1,u})-K\,\Phi(d_{2,u})\right)\frac{\text{abz}(T)}{\text{abz}(t)}\\ &\le v_{\text{call}}(S,t,K,T)\\ &\le \left(S\,\frac{\text{ndf}(T)}{\text{ndf}(t)}\Phi(d_{1,o})-K\,\Phi(d_{2,o})\right)\frac{\text{abz}(T)}{\text{abz}(t)}\\ &\le S\,\frac{\text{ndf}(T)}{\text{ndf}(t)}\frac{\text{abz}(T)}{\text{abz}(t)}\end{aligned}\tag{4.13}$$

und für den Preis v_{put} eines europäischen Puts

$$\begin{aligned}\left(K-S\,\frac{\text{ndf}(T)}{\text{ndf}(t)}\right)^{+}\frac{\text{abz}(T)}{\text{abz}(t)} &\le \left(K\,\Phi(-d_{2,u})-S\,\frac{\text{ndf}(T)}{\text{ndf}(t)}\Phi(-d_{1,u})\right)\frac{\text{abz}(T)}{\text{abz}(t)}\\ &\le v_{\text{put}}(S,t,K,T)\\ &\le \left(K\,\Phi(-d_{2,o})-S\,\frac{\text{ndf}(T)}{\text{ndf}(t)}\Phi(-d_{1,o})\right)\frac{\text{abz}(T)}{\text{abz}(t)}\\ &\le K\,\frac{\text{abz}(T)}{\text{abz}(t)}\ ,\end{aligned}\tag{4.14}$$

wobei

$$d_{1,u} := \frac{\ln\frac{S}{K}+\ln\frac{\text{ndf}(T)}{\text{ndf}(t)}}{\sigma_u\sqrt{T-t}}+\frac{\sigma_u}{2}\sqrt{T-t}\ ,\ d_{1,o} := \frac{\ln\frac{S}{K}+\ln\frac{\text{ndf}(T)}{\text{ndf}(t)}}{\sigma_o\sqrt{T-t}}+\frac{\sigma_o}{2}\sqrt{T-t}\ ,$$

$$d_{2,u} := \frac{\ln\frac{S}{K} + \ln\frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}}{\sigma_u\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma_u}{2}\sqrt{T-t}\ , d_{2,o} := \frac{\ln\frac{S}{K} + \ln\frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}}{\sigma_o\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma_o}{2}\sqrt{T-t}\ .$$

Beweis: Die inneren Abschätzungen folgen jeweils wegen

$$0 < \sigma_u \leq \sigma(S) \leq \sigma_o < \infty\ \forall S > 0$$

aus der Monotonie in $\sigma(\cdot)$ gem. Satz 3.6.2 und dem vorigen Satz, die äußeren Abschätzungen ergeben sich aus den Grenzwerten für $\sigma_u \searrow 0$ bzw. $\sigma_o \to \infty$ unter Beachtung von $\Phi(-\infty) = 0, \Phi(0) = \frac{1}{2}, \Phi(\infty) = 1$. $\square$

Die Übertragung der Put-Call-Parität sowie des gerade bewiesenen Satzes in die Größen $\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau$ ergibt den folgenden Satz:

4.1.3 Satz

Es seien die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt. Dann gilt für den Preis $\tilde{u}_{\text{call}}$ eines europäischen Calls

$$\begin{aligned}\left(e^{\tilde{x}} - e^{\xi}\right)^+ \leq e^{\tilde{x}}\Phi(d_{1,u}) - e^{\xi}\Phi(d_{2,u}) \leq \tilde{u}_{\text{call}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) \\ = \tilde{u}_{\text{call}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) \leq e^{\tilde{x}}\Phi(d_{1,o}) - e^{\xi}\Phi(d_{2,o}) \leq e^{\tilde{x}}\end{aligned} \tag{4.15}$$

und für den Preis $\tilde{u}_{\text{put}}$ eines europäischen Puts

$$\begin{aligned}\left(e^{\xi} - e^{\tilde{x}}\right)^+ \leq e^{\xi}\Phi(-d_{2,u}) - e^{\tilde{x}}\Phi(-d_{1,u}) \leq \tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) \\ = \tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) \leq e^{\xi}\Phi(-d_{2,o}) - e^{\tilde{x}}\Phi(-d_{1,o}) \leq e^{\xi}\ ,\end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei

$$d_{1,u} := \frac{\tilde{x} - \xi}{\sigma_u\sqrt{\tilde{t} - \tau}} + \frac{\sigma_u}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau}\ , d_{1,o} := \frac{\tilde{x} - \xi}{\sigma_o\sqrt{\tilde{t} - \tau}} + \frac{\sigma_o}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau}\ ,$$

$$d_{2,u} := \frac{\tilde{x} - \xi}{\sigma_u\sqrt{\tilde{t} - \tau}} - \frac{\sigma_u}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau}\ , d_{2,o} := \frac{\tilde{x} - \xi}{\sigma_o\sqrt{\tilde{t} - \tau}} - \frac{\sigma_o}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau}\ .$$

Ferner gilt die Put-Call-Parität

$$\tilde{u}_{\text{call}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) - \tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) = e^{\tilde{x}} - e^{\xi}\ . \tag{4.17}$$

4.1.4 Bemerkung

Unter den Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 ist es aufgrund der Monotonie in $\sigma(\cdot)$ möglich, in Analogie zum Vorgehen in Abschnitt 1.3 bei vorgegebenen S, t, K, T und Optionspreis $v = v_{\text{call}}$ oder $v = v_{\text{put}}$ dasjenige σ_0 zu bestimmen, welches - eine konstante Volatilität von σ_0 unterstellt - gerade zu dem vorgegebenen Preis v führt. Derart bestimmtes σ_0 nennt man (wie in Abschnitt 1.3) implizite Volatilität. Ebenfalls wegen der Monotonie ist klar, daß dabei $\sigma_u \leq \sigma_0 \leq \sigma_o$ gelten muß.

4.2 Explizite Differenzenverfahren

Eine Möglichkeit zur numerischen Lösung des im vorigen Abschnitt hergeleiteten Cauchy-Problems (4.5),(4.6) stellen die sogenannten Differenzenverfahren dar. Dabei werden die auftretenden Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt, wodurch man ein System von Gleichungen für die gesuchten Funktionswerte auf einem Gitter erhält. Man unterscheidet die Differenzenverfahren in explizite und implizite Verfahren. In diesem Abschnitt soll kurz auf explizite Verfahren eingegangen und aufgezeigt werden, wie man diese auf das Problem (4.5),(4.6) anwenden kann.

Die Lehrbuch-Literatur geht meist davon aus, daß der Definitionsbereich der „Orts"-Variablen beschränkt ist; im vorliegenden Fall ist dies jedoch nicht erfüllt. Die folgenden Ausführungen beruhen daher zum größten Teil auf einem Artikel von Fritz John[43] aus den 50er Jahren des vergangenen Jahrhunderts, in dem John parabolische Differentialgleichungen in einer „Orts"-Variablen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ untersucht.

Ziel eines Differenzenverfahrens ist es, eine Näherungslösung für die Lösung u der Differentialgleichung auf einem diskreten Gitter

$$\Sigma_h = \{(sh, \tau + nk) : s \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq nk \leq \overline{T} - \tau\}$$

zu berechnen[44]. $h > 0$ gibt dabei die Schrittweite in $\tilde{x}$-Richtung an, k ist die Schrittweite in $\tilde{t}$-Richtung und soll $k = \lambda h^2$ mit $\lambda > 0$ erfüllen. Für $n = 0$ stimmt die Näherungslösung mit der exakten Lösung überein: bezeichnet $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}, h)$ die Näherungslösung an der Stelle $(\tilde{x}, \tilde{t})$, so hat man also

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tau, h) = (e^{\xi} - e^{\tilde{x}})^+ \ . \tag{4.18}$$

Die Betrachtung beschränkt sich aufgrund der Put-Call-Parität auf die Berechnung von Put-Preisen, da diese als Funktion von S, t bzw. $\tilde{x}, \tilde{t}$ bei festem K, T bzw. ξ, τ nach Satz 4.1.2 im Gegensatz zu Call-Preisen beschränkt sind. Ist die Näherungslösung für den Zeitpunkt $\tilde{t}$ bekannt, so ergibt sich die Näherungslösung auf der nächsten Zeitstufe $\tilde{t} + k$ durch

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t} + k, h) := \sum_{|r| \leq N} c^r(\tilde{x}, \tilde{t}, h)\, \tilde{u}(\tilde{x} + rh, \tilde{t}, h) \ , \tag{4.19}$$

[43] s. [John]

[44] Gegenüber [John] wurde das Zeitintervall angepaßt.

wobei die c^r geeignet zu bestimmende Funktionen sind. Geeignet heißt hier, daß durch die Wahl der c^r einerseits erreicht werden soll, daß die Differenzengleichung (4.19) etwas mit der zu lösenden Differentialgleichung (hier (4.5)) zu tun hat ([JOHN] spricht von Kompatibilität, heute ist dafür die Bezeichnung Konsistenz üblich), andererseits müssen sie so gewählt sein, daß die Differenzengleichung stabil ist, d.h. es soll eine von h unabhängige Konstante Q geben mit

$$||\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t},h)||_\infty \leq Q\,||f||_\infty \tag{4.20}$$

für alle Lösungen $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t},h)$ der Differenzengleichung (4.19) mit Startwert

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tau,h) = f(\tilde{x}) \ .$$

Kompatibilität und Stabilität zusammenfassend prägt [JOHN] den Begriff zulässig (admissible) für Differenzenverfahren, den er wie folgt definiert:

4.2.1 Definition

Gegeben seien eine Differenzengleichung der Form (4.19) für festes $\frac{k}{h^2} = \lambda > 0$ mit für $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $\tau \leq \tilde{t} \leq \overline{T}$ und $0 \leq h \leq H$ definierten Koeffizienten $c^r(\tilde{x},\tilde{t},h)$. Die Differenzengleichung (4.19) heißt zulässig (admissible), wenn gilt:

1. $c^r(\tilde{x},\tilde{t},h) = c_0^r(\tilde{x},\tilde{t}) + h\,c_1^r(\tilde{x},\tilde{t}) + \frac{1}{2}h^2 c_2^r(\tilde{x},\tilde{t},h)$, wobei c_i^r $(i = 0,1,2)$ $2-i$ Mal nach $\tilde{x}$ differenzierbar sein soll mit beschränkten Ableitungen und

$$\lim_{h\searrow 0} ||c_2^r(\tilde{x},\tilde{t},h) - c_2^r(\tilde{x},\tilde{t},0)||_\infty = 0 \ ,$$

2. $\sum\limits_{|r|\leq N} c_0^r = 1 \ , \ \sum\limits_{|r|\leq N} r\,c_0^r = 0 \ , \ \sum\limits_{|r|\leq N} c_1^r = 0 \ ,$

3. Für

$$\phi(\tilde{x},\tilde{t},\theta) := \sum_{|r|\leq N} c_0^r(\tilde{x},\tilde{t})e^{ir\theta}$$

gilt die Stabilitätsbedingung[45]

$$M := \sup_{\tilde{x}\in\mathbb{R},\tilde{t}\in[\tau,\overline{T}],|\theta|\leq\pi} \frac{-\ln|\phi(\tilde{x},\tilde{t},\theta)|}{\theta^2} > 0 \ . \tag{4.21}$$

[45] [JOHN] zeigt in Theorem 3.1 S. 166f, daß diese Bedingung Stabilität impliziert.

Für eine zulässige Differenzengleichung heißen

$$\begin{aligned} a_0(\tilde{x},\tilde{t}) &:= \frac{1}{2\lambda}\sum_{|r|\leq N} r^2 c_0^r(\tilde{x},\tilde{t})\ , \\ a_1(\tilde{x},\tilde{t}) &:= \frac{1}{2\lambda}\sum_{|r|\leq N} r\, c_1^r(\tilde{x},\tilde{t})\ , \\ a_2(\tilde{x},\tilde{t}) &:= \frac{1}{2\lambda}\sum_{|r|\leq N} c_2^r(\tilde{x},\tilde{t},0) \end{aligned} \tag{4.22}$$

die Invarianten der Differenzengleichung (4.19).

4.2.2 Bemerkung

Eine zulässige Differenzengleichung mit Invarianten a_0, a_1, a_2 dient der numerischen Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = a_0(\tilde{x},\tilde{t})\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + 2\, a_1(\tilde{x},\tilde{t})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + a_2(\tilde{x},\tilde{t})\tilde{u}\ . \tag{4.23}$$

Die Ergebnisse von [John] ermöglichen den folgenden Satz:

4.2.3 Satz

Zusätzlich zu den Annahmen aus Kapitel 2 sei $\widetilde{\sigma}$ zweimal differenzierbar mit beschränkten Ableitungen. Dann konvergiert für festes ξ und τ und jedes zulässige Differenzenverfahren (4.18),(4.19) mit Invarianten

$$a_0(\tilde{x},\tilde{t}) = \widetilde{\sigma}\left(\tilde{x} + \ln\frac{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tilde{t})}{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tau)}\right)\ ,\ a_1(\tilde{x},\tilde{t}) = \frac{-1}{2}\,\widetilde{\sigma}\left(\tilde{x} + \ln\frac{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tilde{t})}{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tau)}\right)\ ,\ a_2(\tilde{x},\tilde{t}) = 0 \tag{4.24}$$

die Näherungslösung $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t},h)$ für $h \searrow 0$ gleichmäßig gegen $\tilde{u}_{\mathrm{put}}$, d.h.

$$\lim_{h\searrow 0} ||\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t},h) - \tilde{u}_{\mathrm{put}}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau)||_\infty = 0\ . \tag{4.25}$$

Außerdem sind $\sqrt{\tilde{t}-\tau}\frac{\partial \tilde{u}_{\mathrm{put}}}{\partial \tilde{x}}$ sowie $(\tilde{t}-\tau)\frac{\partial^2 \tilde{u}_{\mathrm{put}}}{\partial \tilde{x}^2}$ auf $\mathbb{R}\times[\tau,\overline{T}]$ gleichmäßig beschränkt. Die letzte Aussage gilt analog auch für $\tilde{u}_{\mathrm{call}}$.

Beweis: Die Aussage entspricht Theorem 6.4 aus [John] S. 188, wenn gezeigt ist, daß die verallgemeinerte Lösung im Sinne von [John] S. 187 mit $\tilde{u}_{\mathrm{put}}$ übereinstimmt. Analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.1 kann man die Gleichung (4.5),(4.6) auf Existenz und Eindeutigkeit untersuchen und die Existenz einer Fundamentallösung von (4.5) mit zu (3.13) analoger Abschätzung beweisen. Ebenso erhält man eine zu (3.15) analoge Darstellung von $\tilde{u}_{\text{put}}$, so daß man leicht sieht, daß $\tilde{u}_{\text{put}}$, $\frac{\partial \tilde{u}_{\text{put}}}{\partial \tilde{x}}$ sowie $\frac{\partial^2 \tilde{u}_{\text{put}}}{\partial \tilde{x}^2}$ für jedes $\varepsilon > 0$ auf $\mathbb{R} \times [\tau+\varepsilon, \overline{T}]$ gleichmäßig beschränkt sind. Damit läßt sich aber aus [JOHN] Theorem 6.2 S. 187 schließen, daß $\tilde{u}_{\text{put}}$ und die verallgemeinerte Lösung für jedes $\varepsilon > 0$ auf $\mathbb{R} \times [\tau + \varepsilon, \overline{T}]$ übereinstimmen. Damit stimmen sie auf $\mathbb{R} \times]\tau, \overline{T}]$ und wegen der Anfangsbedingungen auch für $\tilde{t} = \tau$ überein. Die Behauptung für $\tilde{u}_{\text{call}}$ ergibt sich aus der Put-Call-Parität. □

Diskretisiert man in (4.5) die Zeitableitung durch den Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$\frac{\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t} + k, h) - \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}, h)}{k} \;,$$

die zweite Ableitung nach $\tilde{x}$ durch

$$\frac{\tilde{u}(\tilde{x} + h, \tilde{t}, h) - 2\,\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}, h) + \tilde{u}(\tilde{x} - h, \tilde{t}, h)}{h^2}$$

sowie die erste Ableitung nach $\tilde{x}$ durch den zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{\tilde{u}(\tilde{x} + h, \tilde{t}, h) - \tilde{u}(\tilde{x} - h, \tilde{t}, h)}{2\,h} \;,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} c^{-1}(\tilde{x}, \tilde{t}, h) &= \lambda \left(1 - \frac{h}{2}\right) \widetilde{\sigma} \left(\tilde{x} + \ln \frac{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tilde{t})}{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tau)} \right) \;, \\ c^{0}(\tilde{x}, \tilde{t}, h) &= 1 - 2\lambda\, \widetilde{\sigma} \left(\tilde{x} + \ln \frac{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tilde{t})}{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tau)} \right) \;, \\ c^{1}(\tilde{x}, \tilde{t}, h) &= \lambda \left(1 + \frac{h}{2}\right) \widetilde{\sigma} \left(\tilde{x} + \ln \frac{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tilde{t})}{\widetilde{\mathrm{ndf}}(\tau)} \right) \;. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Nach dem Korollar zu Theorem 3.2 S. 169 in [JOHN] ist die Stabilitätsbedingung (4.21) jedenfalls für

$$\lambda = \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2\sigma_o} \tag{4.27}$$

erfüllt. Desweiteren sieht man leicht, daß für zweimal stetig differenzierbares $\widetilde{\sigma}$ mit beschränkten Ableitungen die anderen Bedingungen für ein zulässiges Differenzenverfahren erfüllt sind. Damit folgt aus dem vorigen Satz, daß die Näherungslösung gegen $\tilde{u}_{\text{put}}$ konvergiert, falls λ die Bedingung (4.27) erfüllt. Andererseits zeigen praktische Rechnungen, daß für $\lambda > \frac{1}{2\sigma_o}$ die Differenzengleichung instabil ist und daher keine sinnvollen Ergebnisse liefert. Die folgenden Grafiken zeigen für $\mathrm{di} \equiv r \equiv 0$ und $\sigma \equiv 0.5$ den absoluten Fehler zwischen Näherungslösung und exakter Lösung eines Puts mit Fälligkeit $T = 1$ und Ausübungskurs $K = 100$. Dabei wurden als Schrittweiten $h = 0.1$ und $k = 0.01$ gewählt.

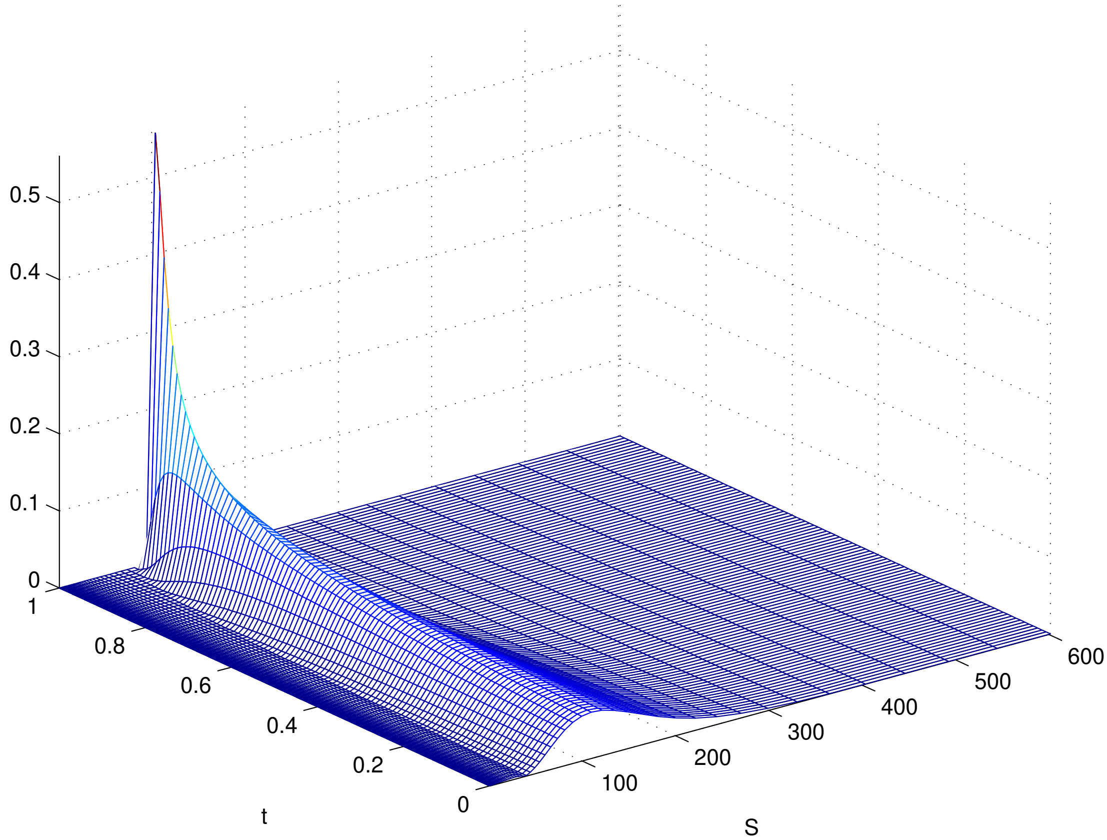

Abbildung 4.2: Absoluter Fehler beim expliziten Differenzenverfahren

An der Grafik kann man ablesen, daß offensichtlich ein numerisches Problem an der Stelle $S = K = 100$ und $t = T = 1$ (dies entspricht $\tilde{x} = \xi$ und $\tilde{t} = \tau$) besteht. Dort hat der absolute Fehler einen starken Ausschlag, der dann vom Verfahren für fallendes t (bzw. wachsendes $\tilde{t}$) zunehmend weggedämpft wird. Führt man sich vor Augen, daß an besagter Stelle die zweite Ableitung nach S unbeschränkt ist (wegen $v(S, T, K, T) = (S - K)^+$), so ist dies nicht weiter verwunderlich. Dies ist im übrigen auch der Grund, warum die „Standard“-Konvergenzbeweise für Differenzenverfahren nicht auf die hier vorliegende Situation angewandt werden können.

Die nächste Grafik zeigt das Minimum zwischen absolutem Fehler und 0.2. Man entnimmt ihr, daß für heutige Preise ($t = 0$) der absolute Fehler in der Nähe von $S = K = 100$ am größten ist und dort in der Größenordnung von 0.05 liegt.

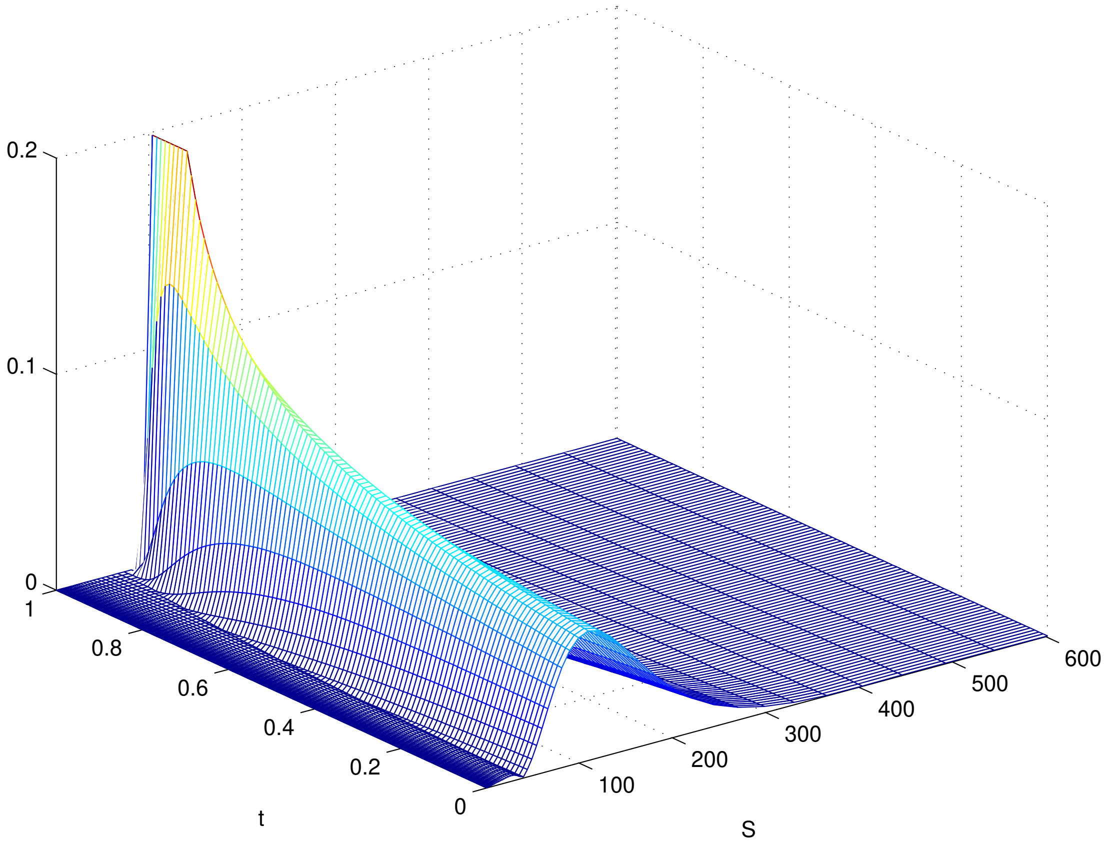

Abbildung 4.3: Abgeschnittener absoluter Fehler beim expliziten Differenzenverfahren

Im folgenden werden (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) einige Vor- und Nachteile expliziter Differenzenverfahren aufgezählt.
Vorteile:

- Sie sind leicht zu entwickeln und zu implementieren.
- Sie kommen für festes h und k mit wenigen Rechenoperationen aus.
- Ist nur der heutige Optionspreis $v(S, 0, K, T)$ zum heutigen Kurs S gesucht, so muß nicht die gesamte Differenzengleichung gelöst werden, es genügt die Berechnung auf einem Dreieck mit Spitze $(\tilde{x}, \overline{T})$: $\tilde{u}(\tilde{x}, \overline{T}, h)$ ergibt sich als gewichtete Summe von $\tilde{u}(\tilde{x}-h, \overline{T}-k, h)$, $\tilde{u}(\tilde{x}, \overline{T}-k, h)$ und $\tilde{u}(\tilde{x}+h, \overline{T}-k, h)$, diese wieder als gewichtete Summen aus etc. .

Nachteile:

- Konvergenz ist nur nachgewiesen für „glattes" $\widetilde{\sigma}$.
- Es ist (auch in [JOHN]) keine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit gegeben.
- λ muß die Ungleichung (4.27) erfüllen. Dies führt dazu, daß die Diskretisierung in $\tilde{t}$-Richtung häufig „zu fein" im Sinne vertretbarer Rechenzeit gewählt werden muß.

Für den Fall eines beschränkten Definitionsbereiches der Ortsvariablen und bei bekannter Glattheit der zu berechnenden Lösung ist allgemein bekannt[46], daß implizite Differenzenverfahren neben dem Fehlen einer Stabilitätsbeschränkung an λ oft als weiteren Vorteil eine höhere Konsistenz- und damit auch Konvergenzordnung aufweisen. Der folgende Abschnitt befaßt sich daher allgemein mit der Anwendung von impliziten Differenzenverfahren auf (4.5),(4.6).

[46] s. [RICHTMYER/MORTON], [SMITH], [WILMOTT ET AL.]

4.3 Implizite Differenzenverfahren

Im Unterschied zu den expliziten Differenzenverfahren erfolgt bei impliziten Verfahren eine Diskretisierung der zu lösenden partiellen Differentialgleichung derart, daß in der Differenzengleichung nicht nur ein unbekannter Wert der Zeitstufe $\tilde{t}+k$ auftritt, sondern mehrere. Daher können die Werte auf dieser Zeitstufe nicht mehr explizit als gewichtete Summe von Werten der vorigen Zeitstufe berechnet werden, stattdessen ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Typischerweise (so z.B. bei den beiden in den nachfolgenden Abschnitten betrachteten Verfahren) ist dabei die Anzahl der unbekannten Variablen um 2 größer als die Anzahl der Gleichungen, weshalb man üblicherweise die Werte am Rand (in $\tilde{x}$-Richtung) des Diskretisierungsgitters vorschreibt bzw. vorschreiben muß. Im vorliegenden Fall eines unbegrenzten Gebietes in $\tilde{x}$-Richtung muß man also einerseits mit einem endlichen Gebiet als Näherung arbeiten, um nicht mit unendlich vielen Gleichungen konfrontiert zu sein, andererseits sind die (unbekannten) Werte am Rand dieses endlichen Gebiets vorzugeben. Als Ausweg aus diesem Dilemma erweist sich der folgende Satz:

4.3.1 Satz

Für die Lösung $\tilde{u}_{\text{put}}$ von (4.5),(4.6) gilt unter den Voraussetzungen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4

$$\lim_{\tilde{x}\to-\infty} \tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau) = e^{\xi} \ , \tag{4.28}$$

$$\lim_{\tilde{x}\to\infty} \tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau) = 0 \ , \tag{4.29}$$

und diese Grenzwerte sind gleichmäßig in $\tilde{t} \in [\tau, \overline{T}]$.

Beweis: Nach Satz 4.1.3 gilt

$$0 \le e^{\xi} - \tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau) = e^{\tilde{x}} - \tilde{u}_{\text{call}}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau) \le e^{\tilde{x}} \ .$$

Damit ist die Behauptung für den Limes $\tilde{x} \to -\infty$ bewiesen. Außerdem ist ebenfalls nach Satz 4.1.3

$$0 \le \tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x},\tilde{t},\xi,\tau) \le e^{\xi}\Phi(-d_{2,o}) - e^{\tilde{x}}\Phi(-d_{1,o}) \le e^{\xi}\Phi(-d_{2,o}) \ ,$$

wobei

$$d_{1,o} := \frac{\tilde{x}-\xi}{\sigma_o\sqrt{\tilde{t}-\tau}} + \frac{\sigma_o}{2}\sqrt{\tilde{t}-\tau} \ , d_{2,o} := \frac{\tilde{x}-\xi}{\sigma_o\sqrt{\tilde{t}-\tau}} - \frac{\sigma_o}{2}\sqrt{\tilde{t}-\tau} \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$0 \leq \tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) \leq e^{\xi}\Phi(-d_{2,o}) \leq \varepsilon$$

für alle $\tilde{x}$ mit

$$d_{2,o}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x} - \xi}{\sigma_o\sqrt{\tilde{t} - \tau}} - \frac{\sigma_o}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau} \geq -\Phi^{-1}(\varepsilon e^{-\xi}) \ .$$

Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu

$$\tilde{x} \geq \xi + \sigma_o\sqrt{\tilde{t} - \tau}\left(\frac{\sigma_o}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau} - \Phi^{-1}(\varepsilon e^{-\xi})\right) \ .$$

Für

$$\tilde{x} \geq \xi + \sigma_o\sqrt{\overline{T} - \tau}\left(\frac{\sigma_o}{2}\sqrt{\overline{T} - \tau} + |\Phi^{-1}(\varepsilon e^{-\xi})|\right)$$

ist diese Ungleichung für alle $\tilde{t} \in [\tau, \overline{T}]$ erfüllt und damit der Beweis der Behauptung für den Limes $\tilde{x} \to \infty$ erbracht. $\square$

Nach dem gerade bewiesenen Satz ist es für festes ξ, τ möglich, zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ $\tilde{x}_l$ so klein und $\tilde{x}_r$ so groß zu wählen, daß sowohl die Differenz von $\tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}_l, \tilde{t}, \xi, \tau)$ und e^{ξ} als auch die Differenz von $\tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}_r, \tilde{t}, \xi, \tau)$ und 0 dem Betrage nach für alle $\tilde{t} \in [\tau, \overline{T}]$ durch ε beschränkt ist. Wählt man also das Gitter groß genug und gibt am linken Rand e^{ξ} sowie am rechten Rand 0 vor, so begeht man an den Rändern nur einen geringen Fehler. Andererseits weiß man, daß stabile Differenzenverfahren den durch falsche Randwerte induzierten Fehler nicht verstärken, sondern sogar dämpfen[47]. Im folgenden wird daher nicht weiter auf diesen Fehler eingegangen.

Worin besteht nun das Problem ? Durch die angesprochene Möglichkeit des Arbeitens mit einem endlichen Intervall ohne allzu große Fehler zu induzieren sind die impliziten Differenzenverfahren einsetzbar und man befindet sich im „Lehrbuch“-Fall. Nicht ganz, denn in den „Standard“-Beweisen der Konsistenz der impliziten (wie auch der expliziten) Verfahren wird stets vorausgesetzt, daß die in der partiellen Differentialgleichung auftretenden Ableitungen der Lösung existieren und auf $[\tilde{x}_l, \tilde{x}_r]\times]\tau, \overline{T}[$ gleichmäßig stetig sind. Im vorigen Abschnitt wurde jedoch darauf hingewiesen, daß dies für $\tilde{u}_{\text{put}}$ (und damit auch $\tilde{u}_{\text{call}}$) nicht der Fall ist, weil bereits im Fall konstanter Volatilität $\sigma \equiv \sigma_0$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau)}{\partial \tilde{t}} = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{\tilde{t} - \tau}} e^{\tilde{x} - \frac{1}{2}d_1^2} \tag{4.30}$$

[47] vgl. Fußnote 2 S. 295 in [WILMOTT ET AL.]

unbeschränkt (für $\tilde{x} = \xi, \tilde{t} \searrow \tau$) und deshalb nicht gleichmäßig stetig ist, wie man leicht nachrechnet. Dies gilt auch für die zweite Ableitung nach $\tilde{x}$.

Die Lösung dieses Problems besteht darin, die impliziten Differenzenverfahren nicht bei $\tilde{t} = \tau$ starten zu lassen, sondern als Gebiet, auf dem das Differenzenverfahren angewandt wird, ein Rechteck der Form $[\tilde{x}_l, \tilde{x}_r] \times [t^*, \overline{T}]$ zu wählen, denn für jedes $t^* > \tau$ sind die Ableitungen als stetige Funktionen auf dem Kompaktum $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_r] \times [t^*, \overline{T}]$ gleichmäßig stetig. Dazu müssen allerdings die Startwerte des Verfahrens für $\tilde{t} = t^*$ angegeben werden. Da diese nicht bekannt sind, muß man mit möglichst guten Näherungen vorliebnehmen. Wiederum wird der dadurch induzierte Fehler von stabilen Verfahren nicht verstärkt, sondern im Regelfall sogar gedämpft. Im nachfolgenden Satz wird eine Möglichkeit angegeben, wie man Näherungen für $\tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}, t^*, \xi, \tau)$ erhalten kann.

4.3.2 Satz

Für die Lösung $\tilde{u}_{\text{put}}$ von (4.5),(4.6) gilt unter den Voraussetzungen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4

$$|\tilde{u}_{\text{put}}(\tilde{x}, \tilde{t}, \xi, \tau) - \left(e^{\xi}\Phi(-d_2(\tilde{x}, \tilde{t})) - e^{\tilde{x}}\Phi(-d_1(\tilde{x}, \tilde{t}))\right)| \leq \frac{\sigma_o - \sigma_u}{\sqrt{2\pi}} e^{\xi}\sqrt{\tilde{t} - \tau} \quad (4.31)$$

für alle $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $\tilde{t} \in [\tau, \overline{T}]$. Dabei ist

$$\begin{aligned} d_1(\tilde{x}, \tilde{t}) &:= \frac{\tilde{x} - \xi}{\widetilde{\sigma}\left(\tilde{x} + \ln\frac{\text{ndf}(\tilde{t})}{\text{ndf}(\tau)}\right)\sqrt{\tilde{t} - \tau}} + \frac{\widetilde{\sigma}\left(\tilde{x} + \ln\frac{\text{ndf}(\tilde{t})}{\text{ndf}(\tau)}\right)}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau}\ , \\ d_2(\tilde{x}, \tilde{t}) &:= \frac{\tilde{x} - \xi}{\widetilde{\sigma}\left(\tilde{x} + \ln\frac{\text{ndf}(\tilde{t})}{\text{ndf}(\tau)}\right)\sqrt{\tilde{t} - \tau}} - \frac{\widetilde{\sigma}\left(\tilde{x} + \ln\frac{\text{ndf}(\tilde{t})}{\text{ndf}(\tau)}\right)}{2}\sqrt{\tilde{t} - \tau}\ . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Beweis: Die Näherungslösung

$$e^{\xi}\Phi(-d_2(\tilde{x}, \tilde{t})) - e^{\tilde{x}}\Phi(-d_1(\tilde{x}, \tilde{t})) \quad (4.33)$$

ist für festes $\tilde{x}, \tilde{t}$ gerade die Black-Scholes-Lösung zu konstanter Volatilität $\widetilde{\sigma}\left(\tilde{x} + \ln\frac{\text{ndf}(\tilde{t})}{\text{ndf}(\tau)}\right)$. Aufgrund der Monotonie in $\sigma(\cdot)$ liegt die Näherung genau wie die exakte Lösung $\tilde{u}_{\text{put}}$ also im Intervall

$$[e^{\xi}\Phi(-d_{2,u}) - e^{\tilde{x}}\Phi(-d_{1,u})\,,\ e^{\xi}\Phi(-d_{2,o}) - e^{\tilde{x}}\Phi(-d_{1,o})]\ ,$$

wobei $d_{1,u}, \ldots$ wie üblich definiert sind. Folglich ist die Differenz zwischen exakter und Näherungslösung durch die Differenz der Intervallgrenzen beschränkt. Diese ist aber für festes $\tilde{x}, \tilde{t}$ darstellbar als $f(\sigma_o) - f(\sigma_u)$, wobei f die Funktion

$$\sigma \overset{f}{\mapsto} e^{\xi}\Phi\left(-\frac{\tilde{x}-\xi}{\sigma\sqrt{\tilde{t}-\tau}} - \frac{\sigma}{2}\sqrt{\tilde{t}-\tau}\right) - e^{\tilde{x}}\Phi\left(-\frac{\tilde{x}-\xi}{\sigma\sqrt{\tilde{t}-\tau}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\tilde{t}-\tau}\right)$$

ist. Mit den Abkürzungen

$$d_1(\sigma) := \frac{\tilde{x}-\xi}{\sigma\sqrt{\tilde{t}-\tau}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\tilde{t}-\tau}\,,\; d_2(\sigma) := \frac{\tilde{x}-\xi}{\sigma\sqrt{\tilde{t}-\tau}} - \frac{\sigma}{2}\sqrt{\tilde{t}-\tau}$$

findet man unter Ausnutzung von $\tilde{x} - \frac{1}{2}\,d_1(\sigma)^2 = \xi - \frac{1}{2}\,d_2(\sigma)^2$

$$f'(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\xi - \frac{1}{2}\,d_2(\sigma)^2}\sqrt{\tilde{t}-\tau}\;.$$

Daraus ergibt sich nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, daß

$$f(\sigma_o) - f(\sigma_u) = (\sigma_o - \sigma_u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\xi - \frac{1}{2}\,d_2(\sigma)^2}\sqrt{\tilde{t}-\tau}$$

für ein $\sigma \in]\sigma_u, \sigma_o[$ gelten muß. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. $\square$

Der gerade bewiesene Satz gibt eine (von mehreren) Möglichkeiten an, die exakte Lösung $\tilde{u}_{\text{put}}(t^*, \tilde{t}, \xi, \tau)$ für t^* „nahe bei“ τ zu approximieren. Es ist bei gleicher Abschätzung und im wesentlichen gleichem Beweis auch möglich, Black-Scholes-Werte mit konstanter Volatilität $\sigma_0 \in [\sigma_u, \sigma_o]$ als Näherung zu benutzen.

Insgesamt ist damit dargelegt, daß alle drei auftretenden Fehlerquellen durch Anwendung eines stabilen konsistenten (impliziten) Differenzenverfahrens auf $[\tilde{x}_l, \tilde{x}_r] \times [t^*, \overline{T}]$ in den Griff zu bekommen sind: man kann $t^* > \tau$ so wählen, daß $\tilde{u}_{\text{put}}(t^*, \tilde{t}, \xi, \tau)$ mit vorgegebener Genauigkeit approximiert wird; den Fehler, der durch Ersetzen der Differentialgleichung durch die Differenzengleichung entsteht, kann man durch hinreichend kleine Schrittweiten h und k klein halten, und durch geeignete Wahl von $[\tilde{x}_r, \tilde{x}_r]$ kann der Fehler am Rand kontrolliert werden.

4.4 Das Crank-Nicolson-Verfahren

In diesem Abschnitt wird das Crank-Nicolson-Verfahren auf die Gleichung (4.5), (4.6) angewandt. Dazu ist das Crank-Nicolson-Verfahren, das eigenlich zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung entwickelt wurde, an die hier vorliegende Situation anzupassen, da die zu lösende Gleichung (4.5) nicht nur einen variablen Koeffizienten vor der zweiten Ableitung aufweist, sondern zusätzlich dort auch die erste „Orts"ableitung auftritt. Infolge dieser Anpassung sind auch die bekannten Ergebnisse über Stabilität und Konsistenz des Verfahrens für die vorliegende Situation neu zu beweisen.

Ziel ist es, für $h, k > 0$ eine Näherungslösung zu berechnen auf einem Gitter der Form

$$\Sigma_{h,k} := \{(\tilde{x}_l + nh, t^* + mk) : n = 0 \dots N, m = 0 \dots M\} \ . \tag{4.34}$$

Für n, m bezeichne $\tilde{u}_n^m$ die Näherungslösung an der Stelle $(\tilde{x}_l + nh, t^* + mk)$, $x_n := \tilde{x}_l + nh$ den n-ten Gitterpunkt auf der $\tilde{x}$- sowie $t_m := t^* + mk$ den m-ten Gitterpunkt auf der $\tilde{t}$-Achse. Das Crank-Nicolson-Schema erhält man nun, wenn man die auftretenden Ableitungen wie folgt diskretisiert:

$$\frac{\tilde{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^m}{k} \tag{4.35}$$

wird als Approximation für

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \left(x_n, t_m + \frac{k}{2} \right)$$

interpretiert,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \left(x_n, t_m + \frac{k}{2} \right)$$

wird durch

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{u}_{n+1}^m - 2\,\tilde{u}_n^m + \tilde{u}_{n-1}^m}{h^2} + \frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1} - 2\,\tilde{u}_n^{m+1} + \tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{h^2} \right) \tag{4.36}$$

sowie schließlich

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \left(x_n, t_m + \frac{k}{2} \right)$$

durch

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{u}_{n+1}^m - \tilde{u}_{n-1}^m}{2\,h} + \frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1} - \tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{2\,h} \right) \tag{4.37}$$

diskretisiert. Insgesamt erhält man damit als Diskretisierung von (4.5):

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{u}_n^{m+1}-\tilde{u}_n^m}{k} = \frac{\widetilde{\sigma}(x_n+\ln\frac{\mathrm{ndf}(t_m+\frac{k}{2})}{\mathrm{ndf}(\tau)})}{2}&\Bigg(\frac{\tilde{u}_{n+1}^m-2\,\tilde{u}_n^m+\tilde{u}_{n-1}^m}{h^2}-\frac{\tilde{u}_{n+1}^m-\tilde{u}_{n-1}^m}{2\,h}\\ &+\frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1}-2\,\tilde{u}_n^{m+1}+\tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{h^2}-\frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1}-\tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{2\,h}\Bigg)\end{aligned} \tag{4.38}$$

Da man diese Gleichung nur für $n = 1, \ldots N-1$ aufstellen kann, muß man, wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, die Werte am Rand, d.h. $\tilde{u}_0^{m+1}$ und $\tilde{u}_N^{m+1}$, vorgeben. Setzt man $\lambda := \frac{k}{h^2}$ sowie

$$\sigma_n^m := \widetilde{\sigma}(x_n+\ln\frac{\mathrm{ndf}(t_m+\frac{k}{2})}{\mathrm{ndf}(\tau)})\ , \tag{4.39}$$

so kann man (4.38) umformen zu

$$\begin{aligned} & (1+\lambda\sigma_n^m)\tilde{u}_n^{m+1} &-& \lambda\sigma_n^m(\tfrac{1}{2}-\tfrac{h}{4})\tilde{u}_{n+1}^{m+1} &-& \lambda\sigma_n^m(\tfrac{1}{2}+\tfrac{h}{4})\tilde{u}_{n-1}^{m+1}\\ = & (1-\lambda\sigma_n^m)\tilde{u}_n^m &+& \lambda\sigma_n^m(\tfrac{1}{2}-\tfrac{h}{4})\tilde{u}_{n+1}^m &+& \lambda\sigma_n^m(\tfrac{1}{2}+\tfrac{h}{4})\tilde{u}_{n-1}^m\end{aligned}$$

Mit der Definition

$$T^m := \begin{pmatrix} \sigma_1^m & -\sigma_1^m(\frac{1}{2}-\frac{h}{4}) & 0 & \cdots & 0\\ -\sigma_2^m(\frac{1}{2}+\frac{h}{4}) & \sigma_2^m & -\sigma_2^m(\frac{1}{2}-\frac{h}{4}) & \ddots & \vdots\\ 0 & -\sigma_3^m(\frac{1}{2}+\frac{h}{4}) & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\sigma_{N-2}^m(\frac{1}{2}-\frac{h}{4})\\ 0 & \cdots & 0 & -\sigma_{N-1}^m(\frac{1}{2}+\frac{h}{4}) & \sigma_{N-1}^m \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

erhält man dann in Matrixschreibweise:

$$(I+\lambda T^m)\begin{pmatrix}\tilde{u}_1^{m+1}\\ \vdots\\ \tilde{u}_{N-1}^{m+1}\end{pmatrix} = (I-\lambda T^m)\begin{pmatrix}\tilde{u}_1^m\\ \vdots\\ \tilde{u}_{N-1}^m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda\sigma_1^m(\frac{1}{2}+\frac{h}{4})(\tilde{u}_0^m+\tilde{u}_0^{m+1})\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda\sigma_{N-1}^m(\frac{1}{2}-\frac{h}{4})(\tilde{u}_N^m+\tilde{u}_N^{m+1})\end{pmatrix} \tag{4.41}$$

Zu klären sind nun die folgenden Fragen:

1. Ist das Verfahren überhaupt wohldefiniert in dem Sinne, daß die Matrix $I+\lambda T^m$ invertierbar ist ?

2. Wie steht es mit der Stabilität des Verfahrens ?

3. Ist das Verfahren konsistent ?

Die beiden ersten Fragen beantwortet der nachfolgende Satz.

4.4.1 Satz

Ist T^m durch (4.40) definiert, so gilt für $h \leq 2$:

1. Alle (evtl. komplexen) Eigenwerte von T^m besitzen einen nicht-negativen Realteil.

2. Die Matrix $I + \lambda T^m$ ist für alle $\lambda > 0$ invertierbar.

3. Das Crank-Nicolson-Verfahren gem. (4.41) ist stabil bzgl. der $||\cdot||_2$-Norm; genauer gilt
$$||(I + \lambda T)^{-1}(I - \lambda T)||_2 \leq 1 \ . \tag{4.42}$$

Beweis:

1. Unmittelbar klar mit dem Satz von Gerschgorin[48].

2. Nach 1. hat T^m nur Eigenwerte mit nicht-negativem Realteil. Infolgedessen sind die Realteile aller Eigenwerte von $I + \lambda T^m$ größer oder gleich 1, insbesondere ist deshalb 0 kein Eigenwert von $I + \lambda T^m$, die Matrix also invertierbar.

3. Zu zeigen ist
$$||(I + \lambda T^m)^{-1}(I - \lambda T^m)||_2 \leq 1 \ .$$
Dies ist genau dann der Fall, wenn alle (evtl. komplexen) Eigenwerte dieser Matrix dem Betrage nach kleiner gleich 1 sind. Die Eigenwerte von $(I + \lambda T^m)^{-1}(I - \lambda T^m)$ sind durch $(1 + \lambda\mu)^{-1}(1 - \lambda\mu)$ gegeben, wobei μ die Eigenwerte von T^m durchläuft. Die Ungleichung
$$|(1 + \lambda\mu)^{-1}(1 - \lambda\mu)| \leq 1 \Leftrightarrow |1 - \lambda\mu| \leq |1 + \lambda\mu|$$
beschreibt gerade die komplexen Zahlen $\lambda\mu$, deren Abstand von 1 nicht größer ist als der von -1. Dies sind jedoch alle komplexen Zahlen mit nicht-negativem Realteil, so daß die Behauptung wegen $\lambda > 0$ aus 1. folgt. $\square$

Nachdem Wohldefiniertheit und Stabilität des Crank-Nicolson-Verfahrens geklärt sind, widmet sich der nächste Satz der Konsistenz.

[48] s. [Stoer/Bulirsch] S. 84

4.4.2 Satz

Unter den Voraussetzungen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 ist das Crank-Nicolson-Verfahren gem. (4.38) auf dem Gitter $\Sigma_{h,k}$ gem. (4.34) mit $t^* > \tau$ konsistent für (4.5).

Beweis: Auf dem kompakten Rechteck $[\tilde{x}_l, \tilde{x}_l + Nh] \times [t^*, \overline{T}]$ sind sämtliche in (4.5) auftretenden Ableitungen von $\tilde{u}_{\text{put}}$ stetig und daher auch gleichmäßig stetig. Deshalb gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für ein $\vartheta_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\frac{\tilde{u}^{m+1}_{\text{put},n} - \tilde{u}^{m}_{\text{put},n}}{k} = \frac{\partial \tilde{u}_{\text{put}}}{\partial \tilde{t}} \left(x_n, t_m + \frac{k}{2} + \vartheta_1 k \right) = \frac{\partial \tilde{u}_{\text{put}}}{\partial \tilde{t}} \left(x_n, t_m + \frac{k}{2} \right) + o(k) \ .$$

Analog erhält man (aus schreibtechnischen Gründen wird im folgenden put als Subskript weggelassen)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{u}^{m}_{n+1} - \tilde{u}^{m}_{n-1}}{2\,h} + \frac{\tilde{u}^{m+1}_{n+1} - \tilde{u}^{m+1}_{n-1}}{2\,h} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \left(x_n, t_m \right) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \left(x_n, t_{m+1} \right) + o(h) \right) \ .$$

Durch Taylor-Entwicklung folgt für ein $\vartheta_2 \in [0, 1]$

$$\tilde{u}^{m}_{n+1} = \tilde{u}^{m}_{n} + h \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}(x_n, t_m) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}(x_n + \vartheta_2 h, t_m)$$

und für ein $\vartheta_3 \in [-1, 0]$

$$\tilde{u}^{m}_{n-1} = \tilde{u}^{m}_{n} - h \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}(x_n, t_m) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}(x_n + \vartheta_3 h, t_m) \ ,$$

so daß aus dem Mittelwertsatz für stetige Funktionen (angewandt auf $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}$) folgt, daß es ein $\vartheta_4 \in [-1, 1]$ gibt mit

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}^{m}_{n+1} - 2\,\tilde{u}^{m}_{n} + \tilde{u}^{m}_{n-1}}{h^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \left(x_n + \vartheta_2 h, t_m \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \left(x_n + \vartheta_3 h, t_m \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \left(x_n + \vartheta_4 h, t_m \right) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \left(x_n, t_m \right) + o(h) \ . \end{aligned}$$

Analog leitet man

$$\frac{\tilde{u}^{m+1}_{n+1} - 2\,\tilde{u}^{m+1}_{n} + \tilde{u}^{m+1}_{n-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \left(x_n, t_{m+1} \right) + o(h)$$

her. Wiederum aufgrund des Mittelwertsatzes für stetige Funktionen gibt es ein $\vartheta_5 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{u}^{m}_{n+1} - 2\,\tilde{u}^{m}_{n} + \tilde{u}^{m}_{n-1}}{h^2} + \frac{\tilde{u}^{m+1}_{n+1} - 2\,\tilde{u}^{m+1}_{n} + \tilde{u}^{m+1}_{n-1}}{h^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \left(x_n, t_m + \frac{k}{2} + \vartheta_5 k \right) + o(h) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \left(x_n, t_m + \frac{k}{2} \right) + o(h) + o(k) \ . \end{aligned}$$

Faßt man all diese Ergebnisse zusammen und benutzt die Beschränktheit von $\widetilde{\sigma}$, so folgt

$$\frac{\tilde{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^m}{k} = \frac{\widetilde{\sigma}(x_n + \ln \frac{\mathrm{ndf}(t_m + \frac{k}{2})}{\mathrm{ndf}(\tau)})}{2} \left(\frac{\tilde{u}_{n+1}^m - 2\,\tilde{u}_n^m + \tilde{u}_{n-1}^m}{h^2} - \frac{\tilde{u}_{n+1}^m - \tilde{u}_{n-1}^m}{2\,h} \right.$$
$$\left. + \frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1} - 2\,\tilde{u}_n^{m+1} + \tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{h^2} - \frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1} - \tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{2\,h} \right) + o(h) + o(k)\ .$$

□

4.4.3 Bemerkung

1. Unter zusätzlichen Annahmen an die Glattheit der Lösung (die z.B. bei konstanter Volatilität erfüllt sind) kann man mittels Taylor-Entwicklung zeigen, daß das Crank-Nicolson-Verfahren die Konsistenzordnung $O(h^2) + O(k^2)$ hat. Da dies vollkommen analog zum „Standard"-Vorgehen ist[49], soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

2. Zur praktischen Umsetzung des Crank-Nicolson-Verfahrens sei auf die angegebene Literatur [Wilmott et al.] verwiesen. Die dortigen Ausführungen bzgl. der numerischen Lösung der Differenzengleichung übertragen sich vollständig auf den hier vorliegenden Fall, allerdings ist die das Gleichungssystem beschreibende Matrix $I + \lambda T^m$ bei Vorliegen nicht-konstanter Volatilität für nicht-konstantes ndf (dies ist äquivalent zu μ nicht konstant 0) nicht zeitunabhängig, so daß in jedem Zeitschritt eine neue LU-Zerlegung berechnet werden muß. Deshalb ist es für den Fall, daß μ konstant, aber von 0 verschieden ist, sinnvoll, nicht die Gleichung (4.5) zu diskretisieren, sondern die durch die Transformation $x = \ln S$ (statt $\tilde{x} = \ln S + \ln \dfrac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}$, vgl. Abschnitt 4.1) entstehende zeitlich homogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial \tilde{u}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \tilde{t}} = \widetilde{\sigma}(x) \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{u}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial \tilde{u}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial x} \tag{4.43}$$

zu diskretisieren.

[49] s. z.B. [Wilmott et al.] S. 307

4.5 Ein Verfahren mit drei Zeitstufen

In der Literatur[50] findet sich der Hinweis, daß das im vorigen Abschnitt beschriebene Crank-Nicolson-Verfahren benutzt werden sollte, wenn die Anfangsdaten $\tilde{u}(\tilde{x}, \tau)$ glatt sind. Dies ist, wie bereits oben ausgeführt wurde, für das Problem (4.5),(4.6) jedoch nicht erfüllt, da die Ableitung nach $\tilde{x}$ an der Stelle $\tilde{x} = \xi$ unstetig ist. In solchen Fällen wird vorgeschlagen, statt des Crank-Nicolson-Verfahrens ein spezielles Verfahren mit drei Zeitstufen zu benutzen. Dieses erhält man, indem man (es werden dieselben Bezeichnungen wie im vorigen Abschnitt verwendet)

$$\frac{3}{2}\frac{\tilde{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^m}{k} - \frac{1}{2}\frac{\tilde{u}_n^m - \tilde{u}_n^{m-1}}{k} \tag{4.44}$$

als Approximation für

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}\,(x_n, t_{m+1})$$

interpretiert,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}\,(x_n, t_{m+1})$$

durch

$$\frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1} - 2\,\tilde{u}_n^{m+1} + \tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{h^2} \tag{4.45}$$

diskretisiert sowie für

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\,(x_n, t_{m+1})$$

den zentralen Diffenzenquotienten

$$\frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1} - \tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{2\,h} \tag{4.46}$$

einsetzt. Insgesamt erhält man damit als Diskretisierung von (4.5):

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\frac{\tilde{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^m}{k} - \frac{1}{2}\frac{\tilde{u}_n^m - \tilde{u}_n^{m-1}}{k} = \widetilde{\sigma}\left(x_n + \ln\frac{\mathrm{ndf}(t_{m+1})}{\mathrm{ndf}(\tau)}\right)\Bigg(&\frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1} - 2\,\tilde{u}_n^{m+1} + \tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{h^2} \\ &- \frac{\tilde{u}_{n+1}^{m+1} - \tilde{u}_{n-1}^{m+1}}{2\,h}\Bigg)\end{aligned} \tag{4.47}$$

Definiert man in Abweichung vom vorigen Abschnitt

$$\sigma_n^m := \widetilde{\sigma}\left(x_n + \ln\frac{\mathrm{ndf}(t_{m+1})}{\mathrm{ndf}(\tau)}\right)\ , \tag{4.48}$$

[50] s. [Smith] S. 45f, [Richtmyer/Morton] S. 192

so kann man (4.47) unter Beibehaltung der Definition (4.40) von T^m (angewandt auf das „neue“ σ_n^m) wie folgt in Matrixschreibweise darstellen:

$$\left(\frac{3}{2}I + 2\lambda T^m\right)\begin{pmatrix}\tilde{u}_1^{m+1}\\ \vdots \\ \tilde{u}_{N-1}^{m+1}\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\tilde{u}_1^{m}\\ \vdots \\ \tilde{u}_{N-1}^{m}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\tilde{u}_1^{m-1}\\ \vdots \\ \tilde{u}_{N-1}^{m-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda\sigma_1^m(1+\frac{h}{2})\tilde{u}_0^{m+1}\\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda\sigma_{N-1}^m(1-\frac{h}{2})\tilde{u}_N^{m+1}\end{pmatrix} \tag{4.49}$$

Wie im vorigen Abschnitt sind Wohldefiniertheit, Stabilität und Konsistenz des Verfahrens zu klären. Die beiden ersten Fragestellungen behandelt der nachfolgende Satz.

4.5.1 Satz

Ist T^m durch (4.40) angewandt auf σ_n^m gem. (4.48) definiert, so gilt für $h \leq 2$:

1. Alle (evtl. komplexen) Eigenwerte von T^m besitzen einen nicht-negativen Realteil.

2. Die Matrix $\frac{3}{2}I + 2\lambda T^m$ ist für alle $\lambda > 0$ invertierbar.

3. Das Verfahren mit drei Zeitstufen gem. (4.49) ist stabil bzgl. der $||\cdot||_2$-Norm; genauer gilt

$$\left\| \begin{pmatrix}\frac{3}{2}I + 2\lambda T^m & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2I & -\frac{1}{2}I\\ I & 0\end{pmatrix}\right\|_2 \leq 1\ . \tag{4.50}$$

Beweis:

1. Wie im vorigen Abschnitt klar mit dem Satz von Gerschgorin.

2. Folgt aus 1. analog zum vorigen Abschnitt.

3. Definiert man v^m durch

$$v^m := \left(\tilde{u}_1^m, \ldots, \tilde{u}_{N-1}^m, \tilde{u}_1^{m-1}, \ldots, \tilde{u}_{N-1}^{m-1}\right)^T\ , \tag{4.51}$$

so läßt sich (4.49) schreiben als

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}I + 2\lambda T^m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} v^{m+1} = \begin{pmatrix} 2I & -\frac{1}{2}I \\ I & 0 \end{pmatrix} v^m + \begin{pmatrix} \lambda\sigma_1^m(1+\frac{h}{2})\tilde{u}_0^{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda\sigma_{N-1}^m(1-\frac{h}{2})\tilde{u}_N^{m+1} \end{pmatrix} . \tag{4.52}$$

Hinreichend für Stabilität ist es, wenn eine geeignete Matrix-Norm von

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{2}I + 2\lambda T^m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2I & -\frac{1}{2}I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

durch 1 beschränkt ist. Da

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}I + 2\lambda T^m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

blockweise invertiert werden kann, erhält man mit der abkürzenden Schreibweise $B := \left(\frac{3}{2}I + 2\lambda T^m\right)^{-1}$ nach Multiplikation der Block-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2B & -\frac{1}{2}B \\ I & 0 \end{pmatrix} .$$

Zu zeigen ist, daß alle (evtl. komplexen) Eigenwerte von A dem Betrage nach durch 1 beschränkt sind. Sei daher μ ein Eigenwert von A und $x = (x_1, x_2)^T$ ein zugehöriger Eigenvektor. Wegen

$$Ax = (2Bx_1 - \frac{1}{2}Bx_2, x_1)^T = \mu x = (\mu x_1, \mu x_2)^T$$

folgt $x_1 = \mu x_2$ und daraus

$$\left(2\mu - \frac{1}{2}\right) Bx_2 = \mu^2 x_2 .$$

Aus der Bijektivität von B folgt zunächst, daß $0 \neq \mu \neq \frac{1}{4}$, weil andernfalls x_2 und damit x der Nullvektor wäre. Dann ist aber $\frac{\mu^2}{2\mu-\frac{1}{2}}$ Eigenwert von B sowie $\frac{2\mu-\frac{1}{2}}{\mu^2}$ Eigenwert von $B^{-1} = \frac{3}{2}I + 2\lambda T^m$. Wegen 1. muß daher der Realteil von $\frac{2\mu-\frac{1}{2}}{\mu^2}$ größer oder gleich $\frac{3}{2}$ sein. Setzt man $\mu = a + ib$, so erhält man als Realteil von $\frac{2\mu-\frac{1}{2}}{\mu^2}$

$$\frac{(2a-\frac{1}{2})(a^2-b^2)+4ab^2}{(a^2+b^2)^2} \geq \frac{3}{2} .$$

Mit $z := b^2$ erhält man eine quadratische Ungleichung für z, die man leicht äquivalent umformt zu

$$\left(z + a^2 - \frac{1}{3}\left(2a + \frac{1}{2}\right)\right)^2 \leq \frac{1}{36}(-8a^2 + 8a + 1) \; .$$

Daraus folgt, daß $a \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}]$ gelten muß. Weiter ist

$$-8a^2 + 8a + 1 \leq (5 - 4a)^2$$

für alle a sowie $5 - 4a > 0$ für a aus obigem Intervall, woraus

$$\begin{aligned} |\mu|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + z &\leq \frac{1}{3}\left(2a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\sqrt{-8a^2 + 8a + 1} \\ &\leq \frac{1}{3}\left(2a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}(5 - 4a) = 1 \end{aligned}$$

folgt.

□

Der nächste Satz bestätigt die Konsistenz des Verfahrens.

4.5.2 Satz

Unter den Voraussetzungen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 ist das 3-Zeitstufen-Verfahren gem. (4.47) auf dem Gitter $\Sigma_{h,k}$ gem. (4.34) mit $t^* > \tau$ konsistent für (4.5).

Beweis: Analog zum entsprechenden Satz des vorigen Abschnitts. □

4.5.3 Bemerkung

Bzgl. Konsistenzordnung und praktischer Umsetzung gelten dieselben Bemerkungen wie an gleicher Stelle im vorigen Abschnitt, insbesondere ist auch das 3-Zeitstufen-Verfahren (4.47) von der Konsistenzordnung $O(h^2) + O(k^2)$ für hinreichend glattes $\tilde{u}_{\text{put}}$. Natürlich müssen bei diesem Verfahren nicht nur Startwerte für $m = 0$, sondern auch für $m = 1$ vorgegeben werden, dies kann jedoch ebenfalls unter Ausnutzung von Satz 4.3.2 geschehen.

4.6 Vergleich der impliziten Verfahren

Auf den folgenden Seiten sind einige graphische Darstellungen des numerischen Fehlers bei Anwendung der impliziten Differenzenverfahren auf das Problem (4.5), (4.6) wiedergegeben. Vorgegeben waren

$$\overline{T} = 1\,,\ \sigma \equiv 0.5\,,\ r(t) = \ln(1.04) + 4\ln(1.05)(t-0.5)^2\,,\ \mathrm{di} \equiv \ln(1.2)\ .$$

Die Differenzenverfahren wurden jeweils auf dem Gitter $[0, \ln(600)] \times [t^*, 1]$ angewandt. Um einen auch für den Fall unbekannter lokaler Volatilität realistischen Eindruck zu erhalten, wurden die Näherungswerte für $\tilde{t} \leq t^*$ nicht mit dem exakten σ in Höhe von 0.5 berechnet, sondern stattdessen mit einem mit 10% Fehler behafteten Wert von 0.55. Die Ergebnisse wurden anschließend zurücktransformiert in die Variablen S und t.

Da ein Vergleich des Fehlers für verschiedene Werte von t^* zeigte, daß es fast immer optimal war, t^* so nahe bei τ zu wählen wie möglich, wurden die folgenden Grafiken allesamt mit $t^* = \tau$ erzeugt, d.h. für das Crank-Nicolson-Verfahren mußte keine Näherung der Startwerte vorgenommen werden, beim 3-Zeitstufen-Verfahren wurden lediglich die Werte für die Zeitstufe $m = 1$ genähert.

Die beiden ersten Grafiken zeigen den absoluten Fehler der beiden Verfahren, wobei $h = 0.01$, $k = 0.1$ gewählt wurde, um einen Vergleich mit den Ergebnissen für explizite Differenzenverfahren zu ermöglichen. Dieser zeigt, daß die impliziten Verfahren diesen deutlich überlegen sind. Innerhalb der impliziten Verfahren scheint das Crank-Nicolson-Verfahren geringfügig schlechter zu sein als das Verfahren mit drei Zeitstufen.

Die restlichen Grafiken zeigen den Fehler, der bei Verringerung der Schrittweiten auf $h = 0.005$, $k = 0.005$ (mit diesen Schrittweiten wäre das explizite Verfahren instabil gewesen !) auftrat. Man erkennt leicht, daß das Crank-Nicolson-Verfahren zwar einen höheren Ausschlag an der kritischen Stelle $S = K = 100$, $t = 1$ aufweist, den Fehler aber nicht so weit in S-Richtung „streut“. Dies wird besonders deutlich bei Betrachtung des auf das Niveau 0.05 abgeschnittenen Fehlers. Dieses Verhalten ist für hinreichend kleine Schrittweiten typisch, so daß innerhalb der Iteration der Verfahren zur Lösung des Rückwärtsproblems (s. Kapitel 5) stets das Crank-Nicolson-Verfahren benutzt wurde.

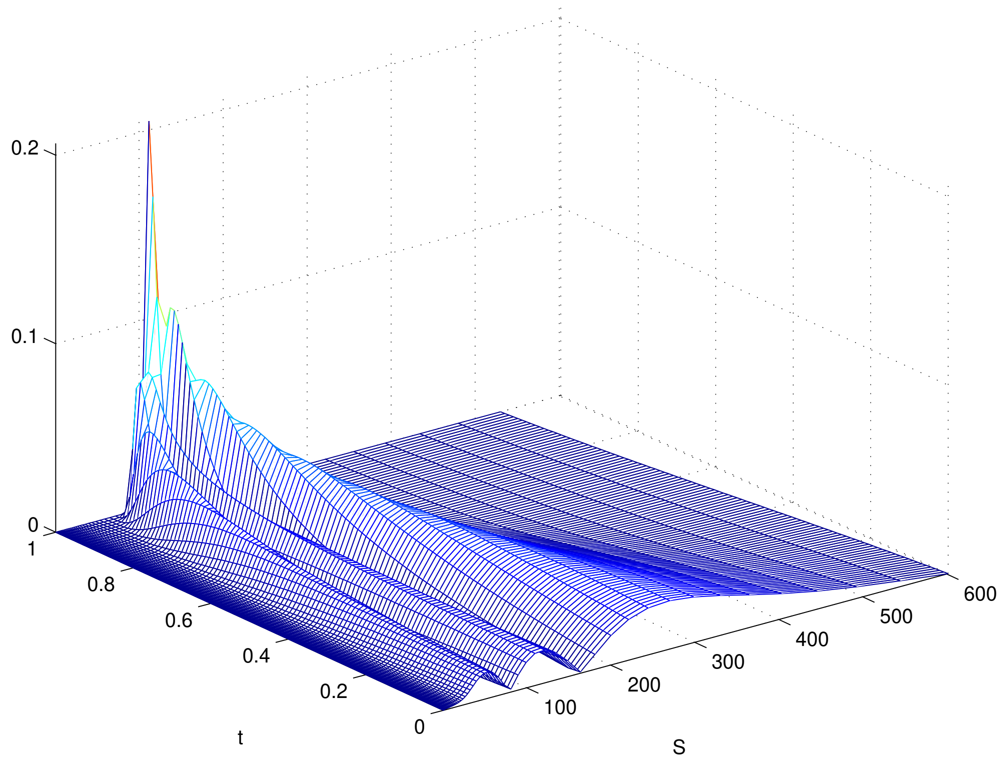

Abbildung 4.4: Absoluter Fehler beim Crank-Nicolson-Verfahren

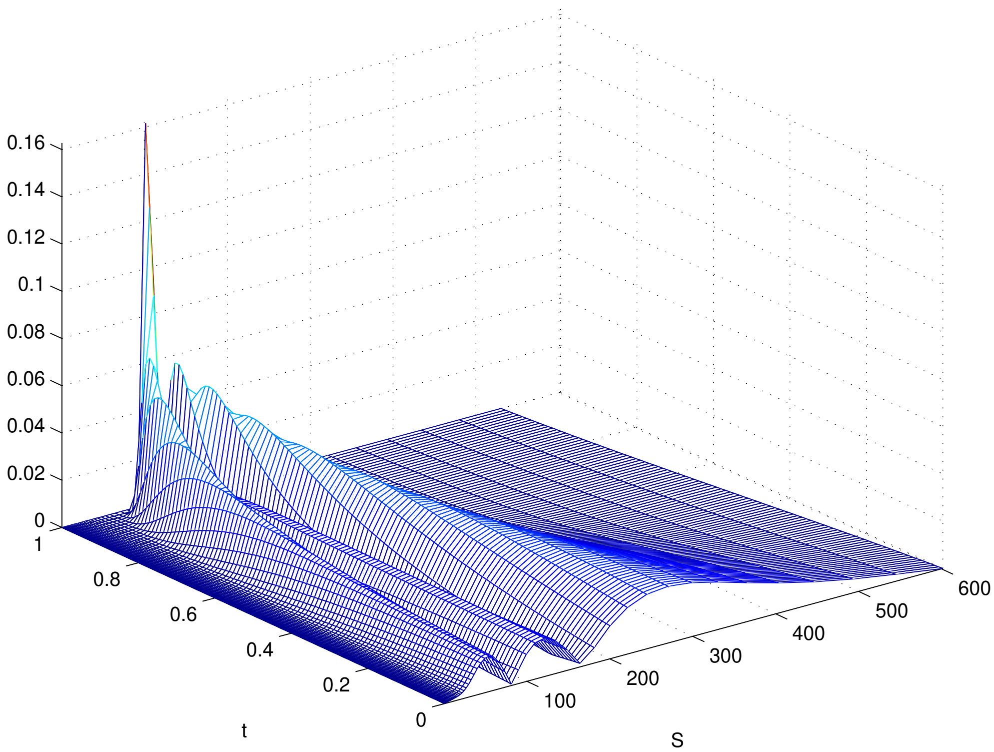

Abbildung 4.5: Absoluter Fehler beim 3-Zeitstufen-Verfahren

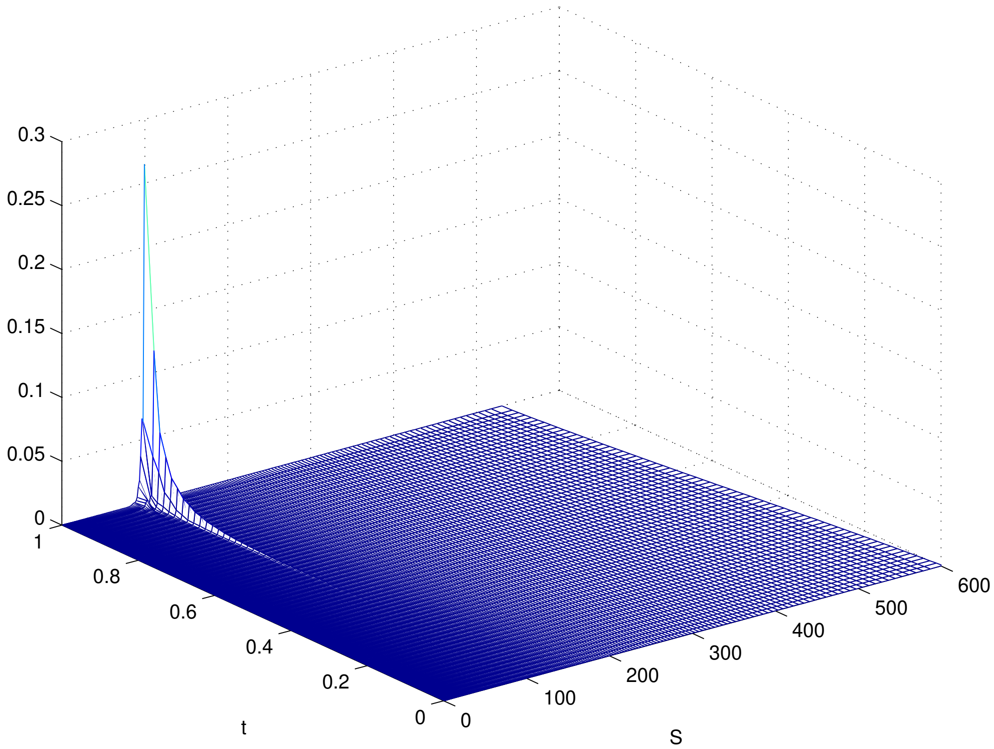

Abbildung 4.6: Absoluter Fehler beim Crank-Nicolson-Verfahren mit kleinen Schrittweiten

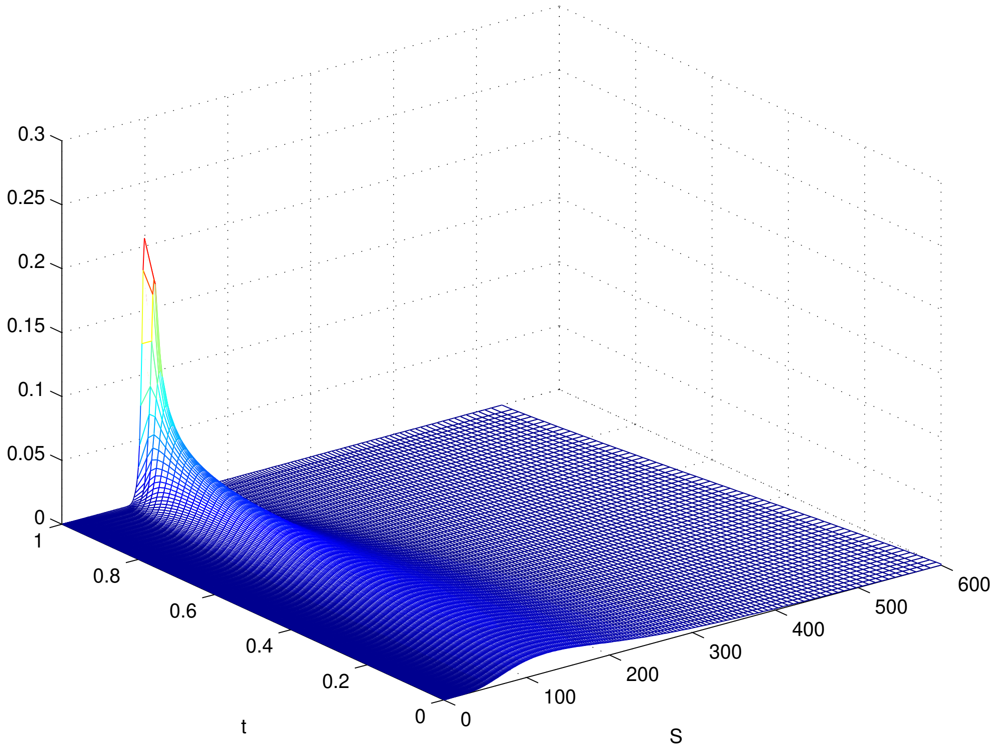

Abbildung 4.7: Absoluter Fehler beim 3-Zeitstufen-Verfahren mit kleinen Schrittweiten

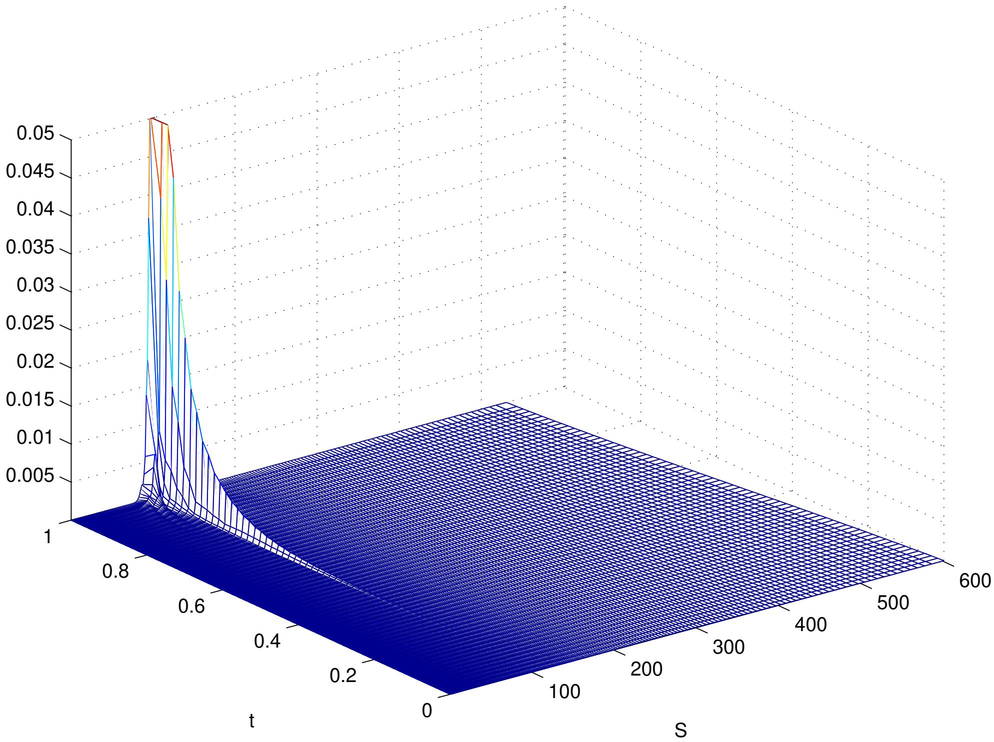

Abbildung 4.8: Abgeschnittener absoluter Fehler beim Crank-Nicolson-Verfahren mit kleinen Schrittweiten

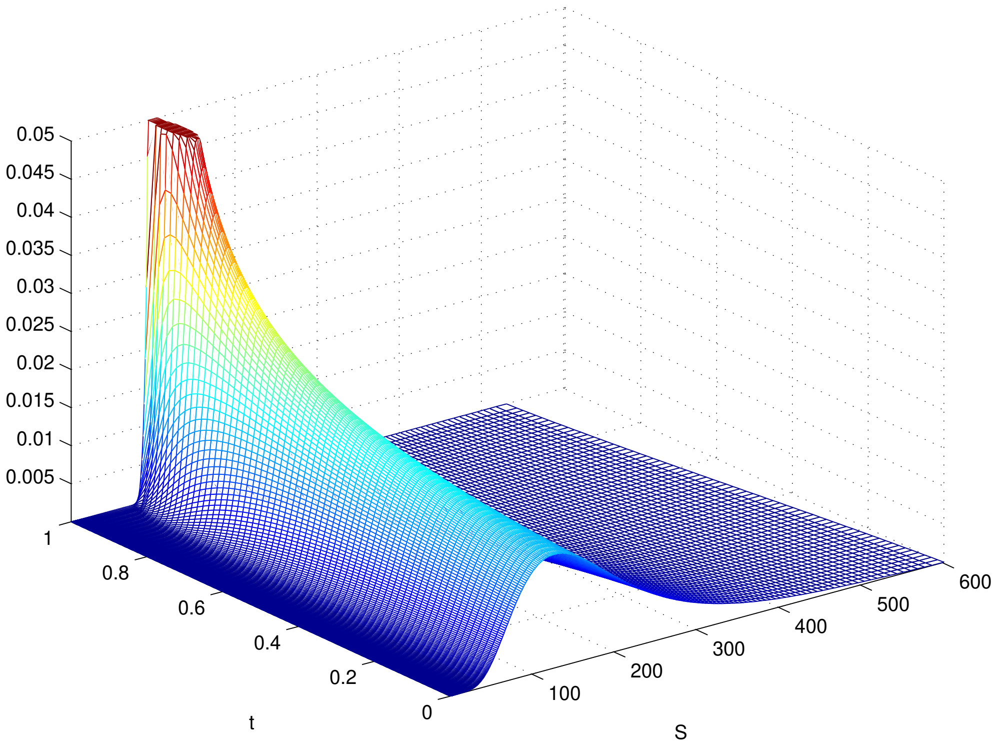

Abbildung 4.9: Abgeschnittener absoluter Fehler beim 3-Zeitstufen-Verfahren mit kleinen Schrittweiten

Kapitel 5

Das Rückwärtsproblem

Wie bereits in Abschnitt 1.3 ausgeführt wurde, besteht in der Praxis beim Bewerten von Optionen mit Hilfe des Black-Scholes-Modells die Hauptschwierigkeit darin, die (konstante) Volatilität σ_0 zu bestimmen. Dieses Problem überträgt sich in natürlicher Weise auf die Bestimmung der lokalen Volatilität. Während im Black-Scholes-Modell (bei bekanntem Zinssatz) ein einziges Paar aus aktuellem Preis des Basistitels und zugehörigem Optionspreis genügt, um die Volatilität σ_0 zu bestimmen, so ist dies für die lokale Volatilität $\sigma(\cdot)$ natürlich nicht mehr der Fall. Üblich ist die Annahme, daß Optionspreise für einen festen Verfalltermin, aber variierende Ausübungskurse als Daten vorliegen, aus denen auf die unbekannte, unbeobachtbare lokale Volatilität $\sigma(\cdot)$ zurückgeschlossen werden soll. Bei dem so umrissenen Problem, das im folgenden als Rückwärtsproblem bezeichnet wird, handelt es sich also um ein inverses Problem im Sinne von [Louis] S. 7. Die Untersuchung dieses Problems in diesem Kapitel gliedert sich in drei Abschnitte:

Im ersten Abschnitt erfolgt die mathematische Formulierung des Problems; anschließend werden einige theoretische Ergebnisse die eindeutige Lösbarkeit sowie Schlechtgestelltheit des Problems betreffend angegeben.

Im zweiten Abschnitt wird ein iterativer Algorithmus zur Lösung des Rückwärtsproblems hergeleitet. Der Abschnitt endet mit einigen Bemerkungen zur praktischen Umsetzung dieses Algorithmus.

Den Abschluß des Kapitels bildet die Präsentation der Ergebnisse von verschiedenen Beispielrechnungen, aus denen man ersehen kann, daß der hergeleitete Algorithmus die lokale Volatilität im relevanten Bereich recht gut rekonstruiert.

5.1 Problemstellung und theoretische Resultate

Wie bereits oben erwähnt versteht man unter dem Rückwärtsproblem die Aufgabe, bei Kenntnis von Zinssatz und Dividendenrate aus der Menge der Paare

$$\{(K, v(S_t, t, K, T_0)) : K > 0\}$$

die unbekannte lokale Volatilität $\sigma(\cdot)$ zu rekonstruieren. Dabei sei zum Zeitpunkt $t \in [0, \overline{T}]$ der Preis S_t des Basistitels gegeben, während $v(S_t, t, K, T_0)$ entweder den Preis $v_{\text{call}}(S_t, t, K, T_0)$ eines europäischen Calls mit Verfalltermin T_0 und Ausübungspreis K oder den Preis $v_{\text{put}}(S_t, t, K, T_0)$ eines entsprechenden europäischen Puts darstellt. Da man letzteren mit Hilfe der Put-Call-Parität in einen Call-Preis umrechnen kann, erfolgt die Darstellung im folgenden stets für den Fall gegebener Call-Preise.

Mathematisch formuliert bedeutet das Rückwärtsproblem, den durch

$$\sigma(\cdot) \overset{A}{\mapsto} v_{\text{call}}(S_t, t, \cdot, T_0) \tag{5.1}$$

definierten nichtlinearen Operator A zu invertieren.
A ist dabei der Operator, der jedem $\sigma(\cdot)$, das die Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 erfüllt, die eindeutige Lösung v_{call} der Black-Scholes-Differentialgleichung (2.3)

$$\frac{1}{2} S^2 \sigma^2(S) \frac{\partial^2 v(S,t)}{\partial S^2} - \mu(t) S \frac{\partial v(S,t)}{\partial S} - r(t)\, v(S,t) + \frac{\partial v(S,t)}{\partial t} = 0$$

mit Endbedingung

$$v(S, T_0, K, T_0) = (S - K)^+$$

als Funktion von K (für feste vorgegebene S, t, T_0) zuordnet.
Definiert man $u_{\text{call}}(x, \tilde{t}, \xi, \tau) = v_{\text{call}}(S, t, K, T)$, wobei $x, \tilde{t}, \xi, \tau$ gem. (3.1) durch

$$\begin{pmatrix} S \\ t \\ K \\ T \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tilde{t} \\ \xi \\ \tau \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \ln S \\ \overline{T} - t \\ \ln K \\ \overline{T} - T \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

gegeben sind, so sieht man leicht anhand von zu Lemma 3.3.1 analogen Überlegungen, daß

$$\frac{\partial^2 u_{\text{call}}(x, \tilde{t}, \xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u_{\text{call}}(x, \tilde{t}, \xi, \tau)}{\partial \xi} = e^{\xi} Z(x, \tilde{t}; \xi, \tau) \tag{5.3}$$

gilt. Dabei bezeichnet Z die Fundamentallösung von (3.6), weshalb

$$\frac{\partial^2 u_{\text{call}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u_{\text{call}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi}$$

positiv ist. Wegen

$$\frac{\partial^2 v_{\text{call}}(S,t,K,T)}{\partial K^2} = \frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial^2 u_{\text{call}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u_{\text{call}}(x,\tilde{t},\xi,\tau)}{\partial \xi}\right)$$

erhält man daraus

$$\frac{\partial^2 v_{\text{call}}(S,t,K,T)}{\partial K^2} > 0 \ . \tag{5.4}$$

Weiter ist aus Satz 3.5.3 bekannt, daß v_{call} als Funktion von K und T die adjungierte Gleichung

$$\frac{\partial v(K,T)}{\partial T} = \frac{1}{2}K^2\sigma^2(K)\frac{\partial^2 v(K,T)}{\partial K^2} + \mu(T)K\frac{\partial v(K,T)}{\partial K} - \mathrm{di}(T)\, v(K,T) \tag{5.5}$$

erfüllt. Daher kann man - gesetzt den Fall gegebener Optionspreise für variierende K und T - aus der adjungierten Gleichung (5.5) $\sigma(K)$ berechnen als

$$\sigma(K) = \sqrt{2\frac{\frac{\partial v_{\text{call}}(S,t,K,T)}{\partial T} - \mu(T)K\frac{\partial v_{\text{call}}(S,t,K,T)}{\partial K} + \mathrm{di}(T)\, v(S,t,K,T)}{K^2\frac{\partial^2 v_{\text{call}}(S,t,K,T)}{\partial K^2}}} \ . \tag{5.6}$$

Numerisch ist dies allerdings instabil[51], außerdem ist es unrealistisch, Optionspreise für derart viele Verfalltermine zu kennen, daß ein - numerisch schlecht konditioniertes - Differenzieren nach T möglich wäre. Aus theoretischer Sicht zeigen diese Überlegungen allerdings, daß schon bei Kenntnis von Optionspreisen für $T \in [T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ $\sigma(\cdot)$ eindeutig bestimmt ist. Ob dazu allerdings auch Daten nur für einen Verfalltermin T_0 genügen, ist im Moment noch ein offenes Problem, zu dem es jedoch Teilergebnisse gibt, von denen hier zwei erwähnt werden sollen:

1. Es seien r, di (und damit auch μ) konstant und die Daten gegeben für K aus einem Intervall ω und festes T_0. Weiter sei K_0 ein Endpunkt von ω sowie ω_1 ein K_0 enthaltendes Intervall. Ist die unbekannte Volatilität in $C^\infty(\omega_1)$ und auf $\omega_1 \setminus \omega$ festgelegt, so ist sie auch auf ω eindeutig bestimmt. Dieses Ergebnis findet man als Theorem 2 in [Bouchouev/Isakov II] S. R103: die dortigen Formulierungen, die auf der Transformation $y = \ln\frac{K}{S_t}$, $a(y) = \sigma(K)$ beruhen, wurden in die ursprünglichen Variablen zurückübersetzt.

[51] s. [Bouchouev/Isakov II] S. R100

2. Wieder seien r, di, μ konstant. Zusätzlich sei die Volatilität $\sigma(\cdot)$ Hölder-stetig zum Exponenten λ. Aus der Theorie der parabolischen Differentialgleichungen[52] ist bekannt, daß dann die zweite Ableitung von v_{call} nach K ebenfalls Hölder-stetig ist mit demselben Exponenten λ. Für diesen Fall liefert Theorem 1 aus [BOUCHOUEV/ISAKOV II] S. R101 folgende Resultate (die wiederum zurückübersetzt wurden, was in Teil (b) aufgrund der Beschränktheit von ω möglich ist):

   (a) Sind die Daten für einen Verfalltermin T_0 sowie Ausübungskurse K aus einem Intervall ω gegeben und ist $\sigma(\cdot)$ auf einem offenen Teilintervall $\omega_0 \subset \omega$ gegeben, so ist $\sigma(\cdot)$ auf ω eindeutig bestimmt. Ferner sind die Autoren der Meinung, daß die Annahme bekannter lokaler Volatilität auf ω_0 wahrscheinlich nicht notwendig ist.[53]

   (b) Zusätzlich zu den Annahmen aus (a) sei ω von der Null weg sowie nach oben beschränkt und die Volatilität auch auf $\mathbb{R}_{++} \setminus \omega$ bekannt. Dann erfüllen die Volatilitäten σ_1 und σ_2 zu vorgegebenen Daten v_1 und v_2 die Abschätzung

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_\lambda(\omega) \leq C|v_1 - v_2|_{2+\lambda}(\omega) \ . \tag{5.7}$$

   Hierbei ist C eine von ω, ω_0, T_0 sowie den Hölder-Normen $|\sigma_1|_\lambda(\omega)$ und $|\sigma_2|_\lambda(\omega)$ abhängige Konstante.

In der Literatur wird selten auf den Definitions- und Bildbereich des Operators A gem. (5.1) eingegangen. Man überlegt sich jedoch leicht, daß aufgrund der Annahmen aus Kapitel 2 und Vereinbarung 3.1.4 der Definitionsbereich $X = D(A)$ gerade der die 0 nicht enthaltende konvexe Kegel aller von der 0 weg sowie nach oben beschränkten Funktionen $\sigma(\cdot)$ von $\mathbb{R}_{++}$ nach $\mathbb{R}$ ist, für die $\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma^2 \circ \exp}{2}$ zur Dini-Klasse $\widetilde{D}^2$ gehört. Eine Charakterisierung des Bildbereiches $A(X)$ dagegen ist wegen der Nichtlinearität von A nicht so einfach anzugeben. Klar ist jedenfalls, daß alle v_{call} aus $A(X)$ wegen der adjungierten Gleichung (5.5) zweimal nach K differenzierbar sind. Weiter wurde oben bereits gezeigt, daß

$$\frac{\partial^2 v_{\text{call}}}{\partial K^2} > 0$$

gilt; man findet ebenso

$$\frac{\partial v_{\text{call}}}{\partial K} < 0 \ .$$

[52] s. [FRIEDMAN]

[53] s. [BOUCHOUEV/ISAKOV II] S. R102

Betrachtet man das Rückwärtsproblem aus numerischer Sicht, so ist der genaue Bildbereich $A(X)$ gar nicht entscheidend, vielmehr muß das mathematische Modell an die Realität angepaßt werden, d.h. es ist der Operator $A : X \to Y$ zu untersuchen und dabei eine geeignete Obermenge Y von $A(X)$ zu wählen, in der die gemessenen Daten (beoachteten Preise) liegen. Im allgemeinen wird man kaum von zweimal differenzierbaren Daten ausgehen können, so daß Y als echte Obermenge von $A(X)$ zu wählen ist. In diesem Fall ist das Problem (A, X, Y) schlecht gestellt im Sinne der Definition 1.1.1 aus [Louis] S. 8[54], weil nicht für alle $y \in Y$ ein (eindeutiges) $\sigma(\cdot) \in X$ existiert mit $A\sigma(\cdot) = y$, da Y eine echte Obermenge von $A(X)$ ist. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß (5.7) darauf hindeutet, daß selbst das Rückwärtsproblem $(A, X, A(X))$ (Injektivität von A unterstellt) schlecht gestellt ist von der Ordnung 2, da die Differenz der Volatilitäten etwa so glatt ist wie die Differenz der zweiten Ableitungen der Daten.

[54] Dazu sind geeignete Topologien auf X und Y festzulegen.

5.2 Herleitung eines Lösungsverfahrens

In der Literatur gibt es einige Vorschläge zur numerischen Lösung des Rückwärtsproblems.[55] Ziel dieser Arbeit war es, einen Algorithmus zu entwickeln, der die Verallgemeinerungen nicht-konstanter Zinssätze und Dividendenraten berücksichtigt. Ferner sollte der Algorithmus iterativ sein, um ggf. „Vorkenntnisse“ über die unbekannte lokale Volatilität, beispielsweise aus statistischen Schätzungen oder „alten“ Daten, in einen geeigneten Startwert für die Iteration ummünzen zu können. Schließlich sollte aus den bereits in Abschnitt 4.1 dargelegten Gründen auch bei der numerischen Lösung des Rückwärtsproblems darauf geachtet werden, daß sämtliche zu entwickelnden Verfahren mit der Kenntnis der Abzinsungs- und Nettodividendenfaktoren auskommen und diese nicht differenziert werden müssen.

Nach (5.5) erfüllt v_{call} die adjungierte Gleichung

$$\frac{\partial v(K,T)}{\partial T} = \frac{1}{2}K^2\sigma^2(K)\frac{\partial^2 v(K,T)}{\partial K^2} + \mu(T)K\frac{\partial v(K,T)}{\partial K} - \mathrm{di}(T)\,v(K,T)$$

Betrachtet man nun die Transformation

$$v(S,t,K,T) = w(x,t,\tilde{\xi},T)\frac{\mathrm{abz}(T)\,\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{abz}(t)\,\mathrm{ndf}(t)} \tag{5.8}$$

mit $x = \ln S$ und $\tilde{\xi} = \ln K + \ln\dfrac{\mathrm{ndf}(t)}{\mathrm{ndf}(T)}$, so ergibt sich wegen

$$\frac{\partial v}{\partial T} = -w\,\frac{\mathrm{abz}(T)\,\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{abz}(t)\,\mathrm{ndf}(t)}\,\mathrm{di}(T) + \frac{\mathrm{abz}(T)\,\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{abz}(t)\,\mathrm{ndf}(t)}\left(\frac{\partial w}{\partial T} + \mu(T)\frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}}\right)\ , \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial K} = \frac{\mathrm{abz}(T)\,\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{abz}(t)\,\mathrm{ndf}(t)}\frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}}\frac{1}{K}\ ,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial K^2} = \frac{\mathrm{abz}(T)\,\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{abz}(t)\,\mathrm{ndf}(t)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{\xi}^2} - \frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}}\right)\frac{1}{K^2} \tag{5.10}$$

und $K = e^{\tilde{\xi}}\dfrac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}$ die folgende Differentialgleichung für $w_{\text{call}}(x,t,\tilde{\xi},T)$:

$$\frac{\partial w(x,t,\tilde{\xi},T)}{\partial T} = \widetilde{\sigma}\left(\tilde{\xi} + \ln\frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}\right)\left(\frac{\partial^2 w(x,t,\tilde{\xi},T)}{\partial \tilde{\xi}^2} - \frac{\partial w(x,t,\tilde{\xi},T)}{\partial \tilde{\xi}}\right) \tag{5.11}$$

mit Anfangsbedingung

$$w(x,t,\tilde{\xi},t) = (e^x - e^{\tilde{\xi}})^+ \tag{5.12}$$

für $(\tilde{\xi},T) \in \mathbb{R} \times [t,T_0]$.

[55] s. dazu den Übersichtsartikel [Bouchouev/Isakov II]

Wie in früheren Kapiteln bereits deutlich wurde, sind $x, t, \tilde{\xi}, T$ gewissermaßen „natürlichere“ Variablen für die in dieser Arbeit behandelten Fragestellungen als S, t, K, T. Analog ist auch $\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma^2 \circ \exp}{2}$ eher dem Problem angepaßt als σ. Da man aus $\widetilde{\sigma}$ leicht auf σ zurückschließen kann, wird bei der Darstellung des Algorithmus im folgenden davon ausgegangen, daß $\widetilde{\sigma}$ zu rekonstruieren ist.

5.2.1 Bezeichnungen

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts bezeichne

- $\widetilde{\sigma}$ die unbekannte zu rekonstruierende lokale Volatilität,
- $\widetilde{\sigma}^j$ ($j \in \mathbb{N}$) eine Folge von möglichen lokalen Volatilitäten, d.h. für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei $\widetilde{\sigma}^j$ eine Abbildung von $\mathbb{R}$ in die positiven reellen Zahlen, die zur Dini-Klasse $\widetilde{D}^2$ gehört sowie von Null weg und nach oben beschränkt ist,
- w, w^j die jeweils zu $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}^j$ gehörenden Lösungen von (5.11),(5.12),
- $\overline{w}(\tilde{\xi})$ die aus den beim Rückwärtsproblem gegebenen Preisen $v_{\text{call}}(S, t, K, T_0)$ europäischer Kaufoptionen (bei Kenntnis der Abzinsungs- und Nettodividendenfaktoren) durch Anwendung der Transformation (5.8) berechneten Werte,
- N eine (große) natürliche Zahl,
- I_n Intervalle der Form

$$I_n := [t + (n-1)k, t + nk] \tag{5.13}$$

  mit $n = 1, \ldots, N$ und $k := \frac{T_0 - t}{N}$,
- $\delta_n(\tilde{\xi})$ für alle $n = 1, \ldots, N$ eine Näherung von $\tilde{\xi} + \ln \frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}$ für $T \in I_n$.

Ziel ist die Herleitung einer Iterationsvorschrift zur Berechnung von $\widetilde{\sigma}^{j+1}$ bei Kenntnis von $\widetilde{\sigma}^j$. Sind $\widetilde{\sigma}^{j+1}$ „in der Nähe von“ $\widetilde{\sigma}$ sowie w^j und dessen Ableitungen nach $\tilde{\xi}$ „in der Nähe von“ w und dessen Ableitungen, so gilt (die Abhängigkeit von w, w^j, w^{j+1} von x, t wird aus Gründen der Schreibvereinfachung unterdrückt)

$$
\begin{aligned}
&\overline{w}(\tilde\xi) - (e^x - e^{\tilde\xi})^+ = w(\tilde\xi, T_0) - w(\tilde\xi, t) = \int_t^{T_0} \frac{\partial w}{\partial T}(\tilde\xi, T)\, dT \\
&= \int_t^{T_0} \widetilde\sigma\left(\tilde\xi + \ln\frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\tilde\xi^2} - \frac{\partial w}{\partial\tilde\xi}\right)(\tilde\xi, T)\, dT \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \widetilde\sigma\left(\tilde\xi + \ln\frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\tilde\xi^2} - \frac{\partial w}{\partial\tilde\xi}\right)(\tilde\xi, T)\, dT \\
&\approx \sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \widetilde\sigma^{j+1}(\delta_n(\tilde\xi))\left(\frac{\partial^2 w^j}{\partial\tilde\xi^2} - \frac{\partial w^j}{\partial\tilde\xi}\right)(\tilde\xi, T)\, dT \\
&\approx \sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} \widetilde\sigma^{j+1}(\delta_n(\tilde\xi))\frac{\frac{\partial w^j}{\partial T}(\tilde\xi, T)}{\widetilde\sigma^{j}(\delta_n(\tilde\xi))}\, dT \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{\widetilde\sigma^{j+1}(\delta_n(\tilde\xi))}{\widetilde\sigma^{j}(\delta_n(\tilde\xi))}\Big(w^j(\tilde\xi, t+nk) - w^j(\tilde\xi, t+(n-1)k)\Big)
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Interpretiert man dies als Berechnungsvorschrift für $\widetilde\sigma^{j+1}$ bei Kenntnis von $\widetilde\sigma^{j}$, so ist in jedem Iterationsschritt die partielle Differentialgleichung (5.11),(5.12) zu lösen, um w^j aus $\widetilde\sigma^{j}$ zu erhalten. Zur kompletten Beschreibung eines Algorithmus ist weiterhin festzulegen, wie N und δ_n gewählt werden sollen und wie man - sofern keine Vorkenntnisse vorliegen - einen vernünftigen Startwert für die Iteration bestimmen kann. Dies geschieht im Rahmen der nachfolgenden Beschreibung des Algorithmus:

1. Ausgangsdaten: für $K_m = K_0(1+c)^m$ mit $K_0, c > 0$, $m = 0, \ldots, M-1$ und festes T_0 zum Zeitpunkt $t \in [0, \overline{T}]$ bei einem Preis des Basistitels in Höhe von S gegebene Preise $v_m := v_{\text{call}}(S, t, K_m, T_0)$ europäischer Kaufoptionen zum Verfalltermin T_0 mit Ausübungskursen K_m

2. Rechne die Daten in die Variablen $\tilde\xi$ und w um, d.h. berechne äquidistante Punkte

$$\tilde\xi_m := \ln K_m + \ln\frac{\mathrm{ndf}(t)}{\mathrm{ndf}(T_0)} = \ln K_0 + \ln\frac{\mathrm{ndf}(t)}{\mathrm{ndf}(T_0)} + m\ln(1+c) \tag{5.15}$$

   sowie die transformierten Daten

$$w_m := v_m \frac{\mathrm{abz}(t)\,\mathrm{ndf}(t)}{\mathrm{abz}(T_0)\,\mathrm{ndf}(T_0)} \tag{5.16}$$

   für alle $m \in \{0, \ldots, M-1\}$.

3. Berechne die Rekonstruktionspunkte

$$f_m := \ln K_m + \frac{1}{T_0 - t} \int_t^{T_0} \ln \frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)} \, dT \ . \tag{5.17}$$

4. Berechne die Startwerte $\widetilde{\sigma}_m^0$ zur Näherung von $\widetilde{\sigma}(f_m)$

   (a) entweder aus gegebenen Vorkenntnissen

   (b) oder als verallgemeinerte implizite Volatilität, d.h. bestimme $\widetilde{\sigma}_m^0$ so, daß

$$e^x \Phi(d_{1,m}) - e^{\tilde{\xi}_m} \Phi(d_{2,m}) = w_m \tag{5.18}$$

   mit $x = \ln S$,

$$d_{1,m} = \frac{x - \tilde{\xi}_m}{\sigma_m^0 \sqrt{T_0 - t}} + \frac{\sigma_m^0}{2} \sqrt{T_0 - t} \, , \; d_{2,m} = \frac{x - \tilde{\xi}_m}{\sigma_m^0 \sqrt{T_0 - t}} - \frac{\sigma_m^0}{2} \sqrt{T_0 - t} \tag{5.19}$$

   und $\widetilde{\sigma}_m^0 = \frac{{\sigma_m^0}^2}{2}$ erfüllt ist.

5. Definiere für $j = 0, \ldots$ die lokale Volatilität $\widetilde{\sigma}^j$ zwischen den Rekonstruktionspunkten f_m durch lineare Interpolation, sowie links von f_0 durch $\widetilde{\sigma}_0^j$ und rechts von f_{M-1} durch $\widetilde{\sigma}_{M-1}^j$. Berechne damit w^j auf einem geeigneten Gitter. Bei Einsatz eines Differenzenverfahrens zur Lösung von (5.11),(5.12) bietet es sich an, das Gitter so zu wählen, daß $k = \frac{T_0 - t}{N}$ die Schrittweite des Differenzenverfahrens und alle $(\tilde{\xi}_m, t + nk)$ Gitterpunkte sind. Berechne dann $\widetilde{\sigma}_m^{j+1}$

   (Var. A) als

$$\widetilde{\sigma}_m^{j+1} = \widetilde{\sigma}_m^j \frac{w_m - (e^x - e^{\tilde{\xi}_m})^+}{w^j(\tilde{\xi}_m, T_0) - (e^x - e^{\tilde{\xi}_m})^+} \ . \tag{5.20}$$

   Dies entspricht der Wahl von

$$\delta_n(\tilde{\xi}_m) = f_m = \tilde{\xi}_m + \frac{1}{T_0 - t} \int_t^{T_0} \ln \frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)} \, dT \tag{5.21}$$

   in (5.14).

   (Var. B) durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$w_m - (e^x - e^{\tilde{\xi}})^+ = \sum_{n=1}^{N} \frac{\widetilde{\sigma}_{l(m,n)}^{j+1}}{\widetilde{\sigma}_{l(m,n)}^j} z_{m,n}^j \quad \forall m = 0, \ldots, M-1 \tag{5.22}$$

für $\widetilde{\sigma}^{j+1} := (\widetilde{\sigma}_0^{j+1}, \ldots, \widetilde{\sigma}_{M-1}^{j+1})^T$, wobei

$$z_{m,n}^j := w^j(\tilde{\xi}_m, t+nk) - w^j(\tilde{\xi}_m, t+(n-1)k) \tag{5.23}$$

und $l(m,n)$ ein Index $l \in \{0, \ldots, M-1\}$ ist, für den

$$|\tilde{\xi}_m + \ln \frac{\operatorname{ndf}(t+(n-\frac{1}{2})k)}{\operatorname{ndf}(t)} - f_l|$$

minimal[56] ist. Dies entspricht der Wahl von

$$\delta_n(\tilde{\xi}_m) = f_{l(m,n)} \tag{5.24}$$

in (5.14).

5.2.2 Bemerkung

Die Idee zur Entwicklung dieses Algorithmus entstammt dem sog. zweiten Algorithmus aus [BOUCHOUEV/ISAKOV II] S. R109. Dieser wurde jedoch einerseits an die hier vorliegenden Verallgemeinerungen angepaßt, andererseits wurde durch die Weiterentwicklung die numerisch schwierigere Berechnung von Fundamentallösungen umgangen. Stattdessen ist nunmehr in jedem Iterationsschritt „nur“ ein dem Vorwärtsproblem äquivalentes Problem zu lösen. Als Nebenprodukt erhält man folglich durch den Algorithmus Optionswerte für variierende Ausübungspreise und Verfalltermine.
Leitet man den Algorithmus statt für gegebene Call-Preise für vorliegende Preise von Verkaufsoptionen her, so ergibt sich im Endeffekt derselbe Algorithmus, da die Put-Call-Parität

$$w_{\text{call}} - w_{\text{put}} = e^x - e^{\tilde{\xi}}$$

liefert und daher $\frac{\partial w_{\text{call}}}{\partial T}$ und $\frac{\partial w_{\text{put}}}{\partial T}$ übereinstimmen. Weiter sei noch auf die folgenden Punkte zur praktischen Umsetzung des Algorithmus hingewiesen:

1. f_m wurde wie in (5.17) durch

$$f_m := \ln K_m + \frac{1}{T_0 - t} \int_t^{T_0} \ln \frac{\operatorname{ndf}(T)}{\operatorname{ndf}(t)}\, dT$$

   festgelegt, weil f_m gerade dem durchschnittlichen Argument von $\widetilde{\sigma}$ in (5.14) für $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_m$ entspricht. Es bietet sich an, den Integralanteil von f_m durch eine Quadraturformel mit $t + nk$ als Stützstellen zu berechnen.

[56] Probleme mit der Eindeutigkeit von l ignorierend

2. Zur Bestimmung des Startwertes σ^0 als verallgemeinerte implizite Volatilität können - sofern vorhanden - Standardroutinen zur Bestimmung der impliziten Volatilität im Black-Scholes-Modell angewandt werden, wie z.B. die Routine blsimpv der Financial Toolbox von Matlab.

3. Im Rahmen der Iteration ist darauf zu achten, daß alle Werte $\widetilde{\sigma}_m^j$ positiv sein müssen.
   Für die Variante A ist dies stets der Fall, da wegen (5.4), (5.10) und (5.11) w, w^j monoton wachsend in T sind. Ferner erkennt man bei Variante A, daß das Verfahren „in die richtige Richtung läuft", denn $w^j(\tilde{\xi}_m, T_0) < w_m$ führt dazu, daß $\widetilde{\sigma}_m^{j+1} > \widetilde{\sigma}_m^j$, was wegen der Monotonie von Optionspreisen bzgl. $\sigma(\cdot)$ sinnvoll ist.
   Bei Variante B werden die Integrale in der Herleitung (5.14) besser approximiert, was Anlaß zur Hoffnung gibt, daß die mit dieser Variante erzielten Ergebnisse besser sind als die von Variante A. Wegen

$$\ln \frac{\mathrm{ndf}(T)}{\mathrm{ndf}(t)} = -\int_t^T \mu(u)du$$

   liegen nach Konstruktion der Rekonstruktionspunkte f_m für betragsmäßig kleine Nettodividendenraten μ

$$\tilde{\xi}_m + \ln \frac{\mathrm{ndf}(t + (n - \frac{1}{2})k)}{\mathrm{ndf}(t)} \text{ und } f_m$$

   nicht allzuweit auseinander, so daß die bei Variante B im Gleichungssystem auftretende Matrix nur Einträge nahe der Hauptdiagonalen hat, also dünn besetzt ist. Zwar ist theoretisch nicht geklärt, ob diese Matrix stets invertierbar ist, bei den erfolgten Berechnungen gab es jedoch diesbezüglich keine Schwierigkeiten. Allerdings trat des öfteren das Problem auf, daß damit berechnete $\widetilde{\sigma}_m^{j+1}$ nicht positiv waren.

4. Die Herleitung (5.14) baut darauf auf, daß die Näherungslösung $\widetilde{\sigma}^j$ bereits in der Nähe der gesuchten Lösung $\widetilde{\sigma}$ liegt. Daher ist zu erwarten, daß der Algorithmus nur lokal gut funktioniert, d.h. wenn $\widetilde{\sigma}^j$ noch zu weit von $\widetilde{\sigma}$ entfernt ist, könnte das Iterationsverfahren vollkommen in die falsche Richtung laufen. Um dem entgegenzuwirken, wurde eine Dämpfung eingebaut, die im Hinblick auf die Probleme mit der Nicht-Positivität von $\widetilde{\sigma}_m^{j+1}$ bei Variante B wie folgt realisiert wurde: aus den vom Algorithmus gelieferten Werten

$\widetilde{\sigma}_m^{j+1}$ und $\widetilde{\sigma}_m^j$ wurde der Quotient

$$q := \frac{\widetilde{\sigma}_m^{j+1}}{\widetilde{\sigma}_m^j}$$

gebildet. Dieser wurde durch Anwenden der Abbildung

$$x \overset{g}{\mapsto} c_1 + c_2 \arctan(c_3(x - c_4))$$

in das Intervall $[0.7, 1.4]$ abgebildet. Dabei wurden $c_1, \ldots, c_4$ so gewählt, daß $g(1) = g'(1) = 1$ gilt, um sinnvolle Quotienten q in der Nähe von 1 nicht wesentlich zu verändern.[57] Anschließend wurde dann mit

$$\widetilde{\sigma}_m^{j+1} := g(q)\, \widetilde{\sigma}_m^j$$

weitergerechnet.

5. Falls die Iteration konvergiert, so sieht man bei beiden Varianten leicht, daß dann auch $w^j(\tilde{\xi}_m, T_0)$ gegen w_m konvergiert für alle $m = 0, \ldots, M-1$.

[57] $c_1 = 1.05$, $c_2 = \frac{0.7}{\pi}$, $c_3 = \frac{1+\tan^2(\frac{1-c_1}{c_2})}{c_2}$, $c_4 = 1 - \frac{\tan(\frac{1-c_1}{c_2})}{c_3}$.

5.3 Numerische Resultate

In diesem Abschnitt wird anhand einiger Grafiken aufgezeigt, wie gut oder schlecht die beiden Varianten des im vorigen Abschnitt beschriebenen Algorithmus bei der Rekonstruktion einer vorgegebenen lokalen Volatilität abschneiden. Dabei wurde wie folgt vorgegangen:

- Die relevanten Größen $\sigma(\cdot)$ sowie $r(\cdot)$, $\mathrm{di}(\cdot)$ wurden vorgegeben. Daraus wurden die Abzinsungs- und Nettodividendenfaktoren $\mathrm{abz}(\cdot)$ bzw. $\mathrm{ndf}(\cdot)$ berechnet. Für die unten abgebildeten Grafiken betrug stets $t = 0$, $T_0 = \overline{T} = 1$,
$$\sigma(S) = \min\{0.4, 1 - \frac{0.8}{1 + (\ln S - \ln 100)^2}\} \tag{5.25}$$
sowie
$$r(t) = \ln 1.04 + 4(t - 0.5)^2 \ln 1.05 \ .$$
Durch Variation der Dividendenrate $\mathrm{di}(\cdot)$ wurden verschiedene Fälle bzgl. der Größe von $\mu(\cdot)$ durchgespielt.

- Als nächstes wurden die Preise europäischer Kaufoptionen für $S = \exp(4.6) \approx 99.4843$ und verschiedene Ausübungskurse
$$K = \exp(3), \exp(3.1), \ldots, \exp(6)$$
berechnet. Dies geschah durch numerisches Lösen der Black-Scholes-Differentialgleichung (4.5),(4.6) mittels des Crank-Nicolson-Verfahrens. Diese wurde für jeden Wert von K mit Schrittweiten $h = 0.01, k = 0.01$ auf dem Gitter $[0, \ln 600] \times [0, 1]$ für $(\tilde{x}, \tilde{t}) = (\ln S + \ln \frac{\mathrm{ndf}(T_0)}{\mathrm{ndf}(t)}, T_0 - t)$ gelöst. Als Ausgangsdaten wurde für jedes K der Wert an der Stelle $(\tilde{x}, \tilde{t}) = (4.6, 1)$ benutzt, also gerade der zu $S = \exp(4.6)$, $t = 0$ gehörende Wert. Zur Daten-Gewinnung wurde mit Absicht die Black-Scholes-Differentialgleichung (4.5),(4.6) und nicht die adjungierte Gleichung (bei der ein erheblich niedrigerer Aufwand entstanden wäre) numerisch gelöst. Dies hatte folgenden Grund: die gewonnenen Daten sollten mit einem gewissen Fehler behaftet sein, um den Effekt von Rauschen in den Daten studieren zu können. Dieser Fehler sollte aber nicht „von derselben Bauart“ sein wie der durch das Lösen der adjungierten Gleichung im Rahmen der Iteration des Algorithmus entstehende Fehler.

- Innerhalb der Iteration des Algorithmus wurde (5.11),(5.12) mittels des Crank-Nicolson-Verfahrens mit Schrittweiten $h = 0.01, k = 0.01$ auf dem Gitter $[0, \ln 600] \times [0, 1]$ für $(\tilde{\xi}, T) = (\ln K + \ln \frac{\mathrm{ndf}(0)}{\mathrm{ndf}(T)}, T)$ gelöst.

- Wie bei einem schlecht gestellten Problem nicht anders zu erwarten, wurde bei „zu vielen“ Iterationen zwar die Anpassung von w^j an die Daten w_m immer besser, aber um den Preis einer gleichzeitig zunehmenden Entfernung von $\widetilde{\sigma}^j$ von der exakten Lösung $\widetilde{\sigma}$ zu $\sigma(\cdot)$ gem. (5.25). Zwar können hierzu keine theoretischen Ergebnisse angegeben werden, es steht aber zu erwarten, daß wie bei linearen Problemen durch „rechtzeitiges“ Abbrechen der Iteration eine Regularisierung erreicht werden kann.[58]

Zu den nun folgenden Grafiken sei noch folgendes bemerkt: der obere Teil zeigt jeweils $\sigma \circ \exp$ für Argumente aus dem Intervall $[2, 7]$, und zwar in blauer Farbe den exakten Wert, in schwarzer Farbe die implizite Volatilität, die im Verfahren als Startwert für die Iteration benutzt wurde, sowie die rekonstruierte Lösung nach 10 Iterations-Schritten in Magenta. Der untere Teil der Grafiken zeigt jeweils (bis auf Bilden des Betrages) den relativen Fehler dieser Rekonstruktion.
Weiterhin ist darauf hinzuweisen, daß bei allen Berechnungen das folgende Problem auftrat: für zu kleine sowie zu große K waren die generierten Daten „so schlecht“, daß in diesen Bereichen die Volatilität nicht stabil zu rekonstruieren war. Dies kommt daher, daß in diesen Bereichen die Sensitivität von Optionswerten bzgl. Änderungen in $\sigma(\cdot)$ fast 0 ist[59] , so daß selbst sehr kleine absolute Fehler in den Daten zu erheblichen Schwankungen in der Rekonstruktion führen. Zu erkennen ist dies an dem Knick aller impliziten Volatilitäten im Bereich zwischen 3 und 3.5. Da teilweise keine impliziten Volatilitäten berechnet werden konnten (die generierten Daten widersprachen also den oben bewiesenen Abschätzungen), wurde die minimale implizite Volatilität auf 0.2 festgesetzt. Als Konsequenz hieraus wurden die Daten für $K < \exp(4)$ und $K > \exp(5.5)$ nicht weiter berücksichtigt und nur mit den 16 zu $K = \exp(4), \exp(4.1), \ldots, \exp(5.5)$ gehörenden Daten rekonstruiert.

Die erste Grafik zeigt die Ergebnisse für $\mathrm{di} \equiv \ln 1.07$. In diesem Fall ist μ betragsmäßig so klein, daß Variante A und B zusammenfallen. Man erkennt leicht, daß die Volatilität hervorragend rekonstruiert wird und ein relativer Fehler von weniger als 1.5% auftritt.

[58] s. dazu [Louis]

[59] im Beweis zu Satz 4.3.2 ist diese Sensitivität im Black-Scholes-Fall angegeben: $f'(\sigma)$

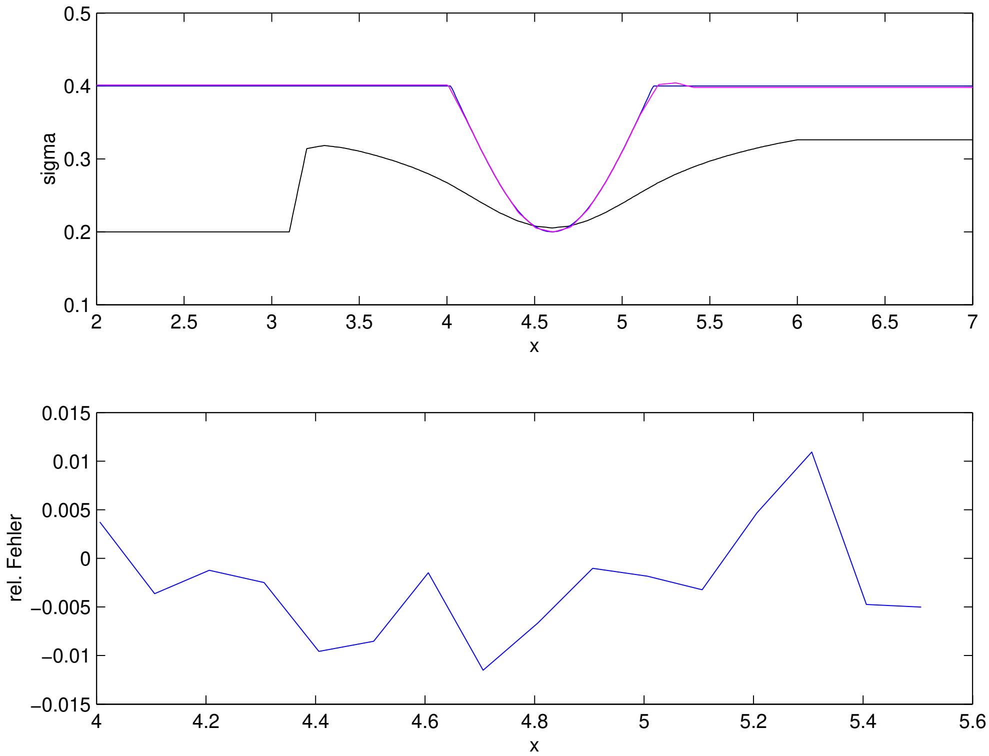

Abbildung 5.10: Resultate für Varianten A/B, di $\equiv \ln 1.07$

Die nächsten beiden Grafiken ermöglichen den Vergleich der beiden Varianten des Algorithmus. Sie wurden erzeugt mit di $\equiv -\ln(1.07)$, also negativer Dividendenrate bzw. positiven Bestandshaltekosten. In diesem Fall ist $\mu(\cdot)$ betragsmäßig ziemlich groß, weshalb eigentlich Variante B wegen der genaueren Näherung der Integrale in der Herleitung (5.14) bessere Ergebnisse liefern sollte. Das Gegenteil ist jedoch der Fall, und zwar nicht nur für dieses eine Beispiel, sondern generell. Der Grund dafür liegt vermutlich darin, daß Variante A, wie oben ausgeführt, immer zu positiven Iterationswerten führt, also in sich schon robust ist, während bei Variante B oft negative Iterationswerte auftreten, die erst durch die Dämpfung abgefangen werden müssen, was darauf hindeutet, daß dieses Verfahren weniger robust ist.
Die beiden letzten Grafiken schließlich zeigen die Resultate für Variante A bei hohen positiven Dividendenraten bzw. hohen Bestandshaltekosten (Variante B lieferte hier keine vernünftigen Ergebnisse). Man erkennt, daß selbst bei einer jährlichen Dividendenrate von 20% (dies führt bei dem zugrundegelegten Zinssatz $r(\cdot)$ zu Nettodividendenraten zwischen 11 und 16%) die Rekonstruktion einen relativen Fehler von weniger als 5% aufweist. Im Falle hoher Bestandshaltekosten waren die Ergebnisse jedoch weniger befriedigend.

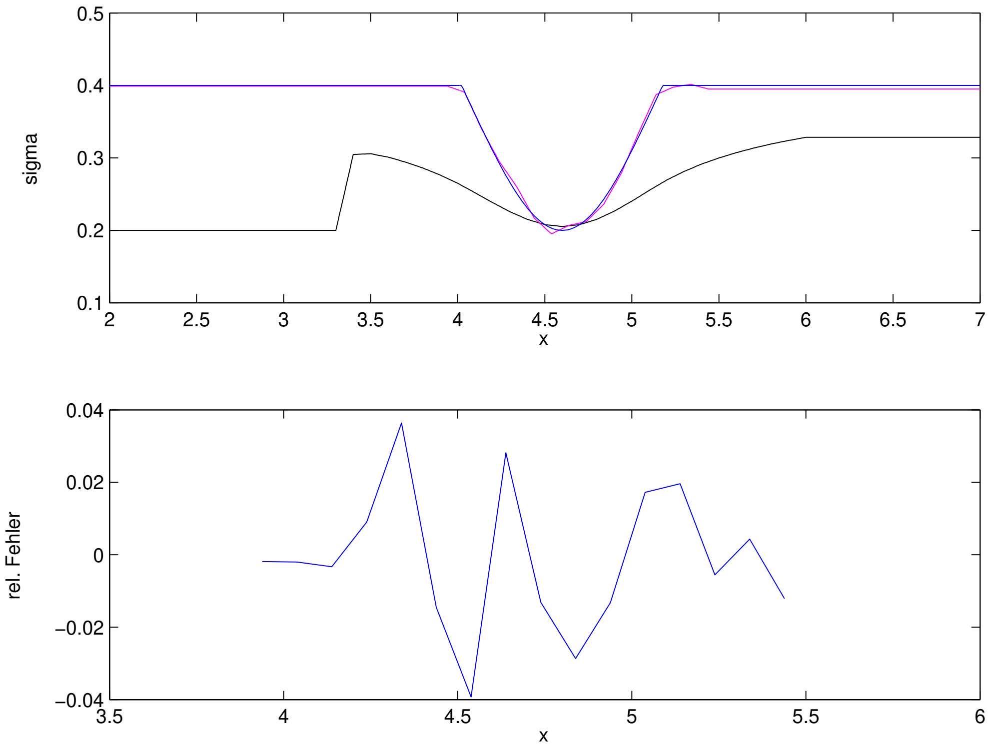

Abbildung 5.11: Resultate für Variante A, di $\equiv -\ln 1.07$

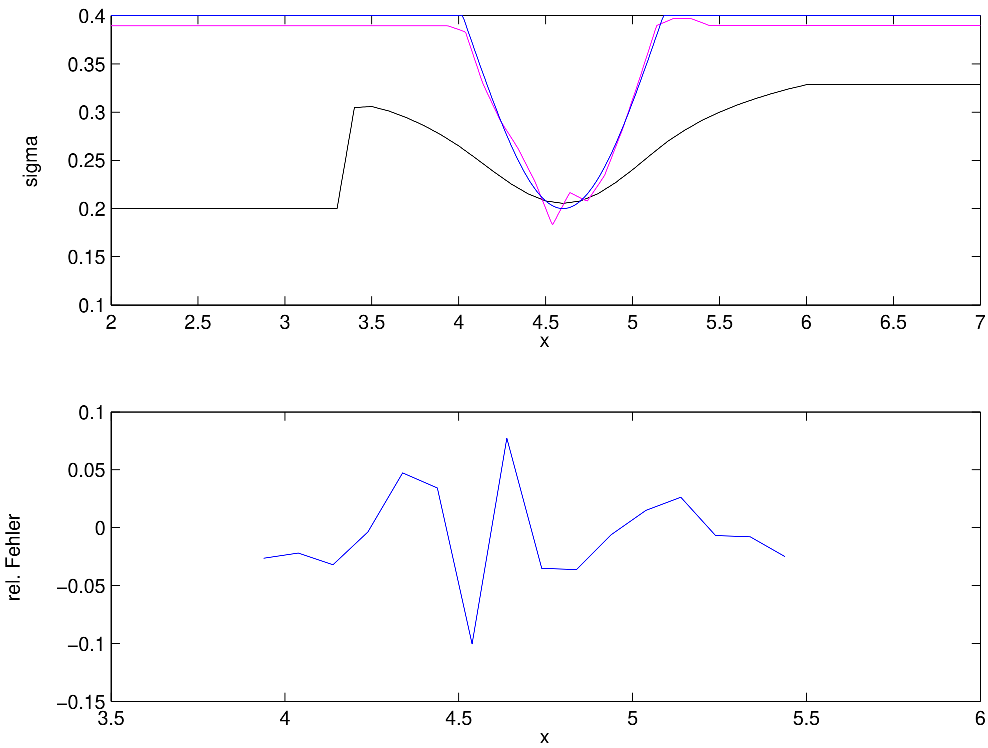

Abbildung 5.12: Resultate für Variante B, di $\equiv -\ln 1.07$

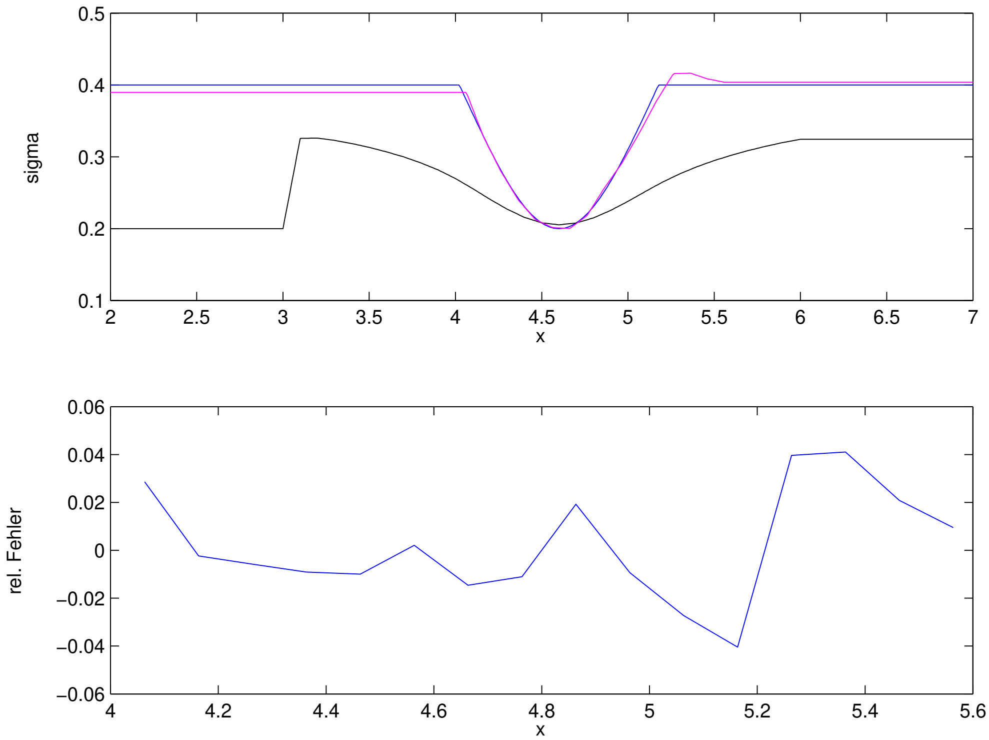

Abbildung 5.13: Resultate für Variante A, di $\equiv \ln 1.2$

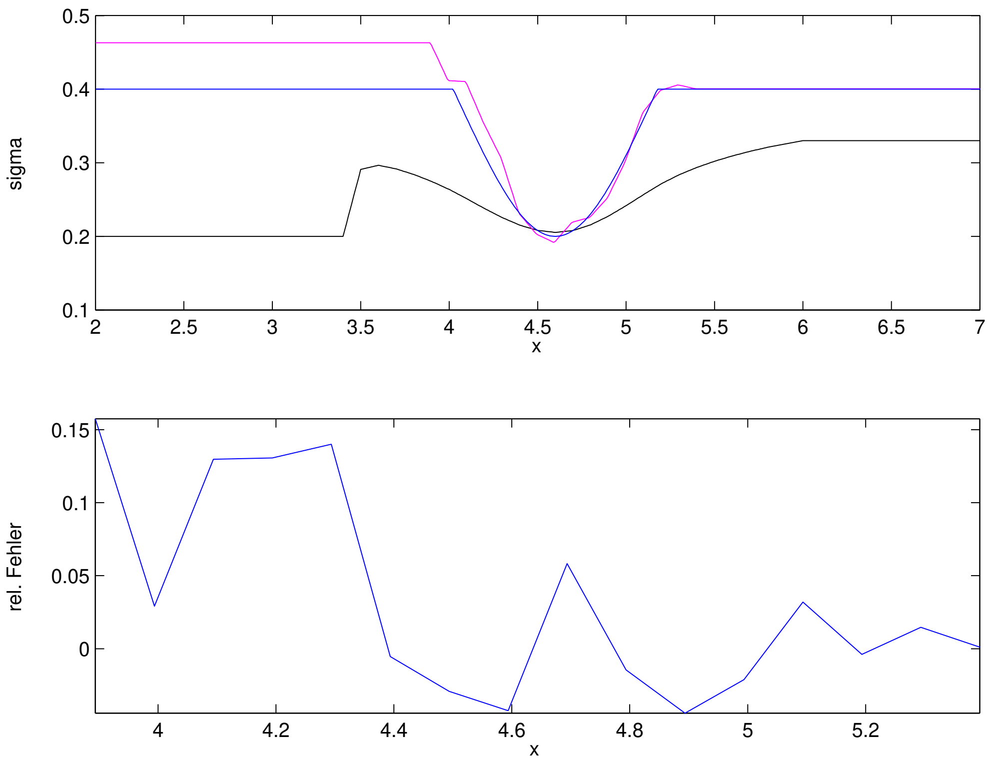

Abbildung 5.14: Resultate für Variante A, di $\equiv -\ln 1.17$

Kapitel 6

Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine Verallgemeinerung des berühmten Modells von Black und Scholes zur Bewertung von Optionen betrachtet, welche verschiedene in der Literatur zu findende Vorschläge zur Verbesserung des Black-Scholes-Modells vereint: nicht-konstante Zinssätze, stetig anfallende Dividenden mit nicht-konstanter Dividendenrate sowie lokale Volatilität. Es konnte gezeigt werden, daß sämtliche in diesem Zusammenhang relevanten Ergebnisse wie z.B. die adjungierte Gleichung oder die Monotonie von Optionspreisen als Funktion der Volatilität auch im verallgemeinerten Modell ihre Gültigkeit behalten. Nach der Abhandlung dieses eher theoretischen Teils wurden numerische Verfahren zur Lösung des Vorwärtsproblems, d.h. zur Berechnung von Optionspreisen bei Kenntnis aller den Optionspreis bestimmenden Parameter, studiert: explizite und implizite Differenzenverfahren. Dabei zeigte sich, daß insbesondere das Crank-Nicolson-Verfahren brauchbare Resultate für dieses Problem liefert. Nichtsdestotrotz wäre es interessant, das Vorwärtsproblem einmal mit Finite-Elemente-Methoden anzugehen und die Ergebnisse mit den in dieser Arbeit gewonnenen zu vergleichen.

Hauptziel dieser Arbeit war es, einen Algorithmus zur Rekonstruktion der lokalen Volatilität aus gegebenen Optionspreisen zu entwickeln. Dieses Ziel wurde durch Variante A des Algorithmus aus Abschnitt 5.2 erreicht, mit im wesentlichen zufriedenstellenden Ergebnissen. Im relevanten Bereich - Preis des Basistitels und Ausübungspreis von derselben Größenordnung - liefert Variante A für realistische Werte von Zinssätzen und Dividendenraten vernünftige Ergebnisse. Aus mathematischer Sicht unbefriedigend ist, daß Variante A für betragsmäßig größer werdende Nettodividendenraten - auch wenn diese eher praxisfremd sind - immer schlechtere Ergebnisse liefert und auch Variante B des Algorithmus in diesem Fall versagt. Vom mathematischen Standpunkt aus wäre es daher von Interesse, einen evtl. speziell auf diesen Fall zugeschnittenen Algorithmus zur Rekonstruktion der lokalen Volatilität zu entwickeln.

Zum Abschluß sollen noch einige aus wirtschaftswissenschaftlicher Sicht interessante Fragestellungen (die meist auf mathematische Probleme führen) als möglicher Gegenstand weiterer Forschung angegeben werden:

- Welche lokalen Volatilitäten $\sigma(\cdot)$ führen zu welchen Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Preises des Basistitels ? Dies ist insbesondere mit Blick auf sog. stylized facts bzgl. Aktienrenditen wie z.B. fat tails und Leptokurtosis von Interesse.

- Welchen Einfluß haben mit Fehlern behaftete Modellparameter wie Zinssätze und Dividendenraten auf die rekonstruierte lokale Volatilität und auf mit ihnen berechnete Optionspreise ?

- Insbesondere für Banken von Interesse ist der Zusammenhang zwischen lokaler Volatilität und Quantilen der Verteilung von Aktienkursen, da diese bei der Berechnung des sog. Value at Risk eine zentrale Rolle spielen.

- Von großer Bedeutung an Finanzmärkten sind amerikanische Optionen, deren Behandlung in dieser Arbeit außen vor blieb. Bei amerikanischen Optionen erhält man bei der Lösung des Vorwärtsproblems ein freies Randwertproblem, dessen Lösung man selbst im Black-Scholes-Modell nicht konkret angeben kann.[60] Daraus ergibt sich das Problem, daß man kein der adjungierten Gleichung vergleichbares Resultat beweisen kann, und daher diese als Ansatzpunkt zur Lösung des Rückwärtsproblems nicht mehr zur Verfügung steht.

[60] s. z.B. [Øksendal] S. 283

Anhang A

Definitionen und Beweise

A.1 „Vorhersagbarkeit“

Die nachfolgenden Definitionen richten sich nach [Revuz/Yor] S. 161f und S. 338f. Zu beachten ist, daß dort mit $\mathbb{R}_{++}$ als Zeitintervall gearbeitet wird, hier jedoch mit $[0, \overline{T}]$. Die Übertragung der Begriffe und Aussagen auf diesen Fall ist jedoch unproblematisch.

A.1.1 Definition (vorhersagbar, predictable)

Gegeben seien ein Meßraum $(\Omega, \mathcal{F})$ sowie eine rechtsseitig stetige Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,\overline{T}]}$ auf Ω.

1. Die kleinste σ-Algebra auf $\Omega \times [0, \overline{T}]$, bzgl. der alle auf Ω definierten $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten stetigen Prozesse (aufgefaßt als Abbildungen von $\Omega \times [0, \overline{T}]$ nach $\mathbb{R}$) meßbar sind, heißt vorhersagbare σ-algebra (predictable σ-field) und wird mit $\mathcal{P}$ bezeichnet.

2. Ein Prozeß $X = (X_t)_{t \in [0,\overline{T}]}$ von Ω nach $\mathbb{R}$ heißt vorhersagbar (predictable), wenn die Abbildung $\Omega \times [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}, (\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ meßbar ist bzgl. der vorhersagbaren σ-Algebra $\mathcal{P}$.

A.1.2 Definition

Es seien $\Omega = C\left([0, \overline{T}], \mathbb{R}\right)$ die Menge der stetigen Abbildungen von $[0, \overline{T}]$ nach $\mathbb{R}$ sowie (für $t \in [0, \overline{T}]$) $\mathcal{F}_t$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, bzgl. der alle Abbildungen $w_s : \Omega \to \mathbb{R}, f \mapsto f(s)$ $(s \in [0, t])$ meßbar sind, und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\overline{T}}$.

1. Eine Abbildung $\gamma : [0, \overline{T}] \times \Omega \to \mathbb{R}$ heißt vorhersagbar (predictable), wenn sie als Prozeß auf Ω vorhersagbar im Sinne von Definition A.1.1 ist.

2. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \times [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}$ heißt vorhersagbar (predictable), wenn $\gamma_\varphi : [0, \overline{T}] \times \Omega \to \mathbb{R}, (t, f) \mapsto \varphi(f(t), t)$ vorhersagbar im Sinne von 1. ist.

A.1.3 Bemerkung

Nach Konstruktion ist $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \overline{T}]}$ rechtsseitig stetig, so daß die Voraussetzung der Definition A.1.1 erfüllt ist.

A.1.4 Lemma

Ist $\varphi : \mathbb{R} \times [0, \overline{T}] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist φ vorhersagbar im Sinne der vorigen Definition Teil 2.

Beweis: Man betrachte den Prozeß X auf $C\left([0, \overline{T}], \mathbb{R}\right)$, der durch

$$X_t(f) := \varphi(f(t), t)$$

gegeben ist. Für X gilt:

1. X ist stetig, denn für festes $f \in C\left([0, \overline{T}], \mathbb{R}\right)$ ist $t \mapsto X_t(f) = \varphi(f(t), t)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig.

2. X_t ist bzgl. $\mathcal{F}_t$ ($\mathcal{F}_t$ gem. voriger Definition) adaptiert, denn für festes $t \in [0, \overline{T}]$ gilt:

   (a) Die Abbildung

   $$\psi_1 : C\left([0, \overline{T}], \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \psi_1(f) := f(t) = w_t(f)$$

   ist $\mathcal{F}_t$-meßbar nach Definition von $\mathcal{F}_t$.

   (b) Die Abbildung

   $$\psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \psi_2(x) := \varphi(x, t)$$

   ist stetig, also nach Bem. 2. vor Satz 7.2 aus [Bauer] meßbar.

   (c) $f \mapsto X_t(f) = \varphi(f(t), t)$ ist gerade die Hintereinanderausführung der meßbaren Abbildung ψ_2 nach der $\mathcal{F}_t$-meßbaren Abbildung ψ_1. Als Komposition meßbarer Abbildungen ist diese Abbildung $\mathcal{F}_t$-meßbar, X_t also an $\mathcal{F}_t$ adaptiert.

3. Folglich ist X ein stetiger adaptierter Prozeß auf $C\left([0, \overline{T}], \mathbb{R}\right)$. Nach Definition der vorhersagbaren σ-Algebra $\mathcal{P}$ ist $(f, t) \mapsto X_t(f)$ dann $\mathcal{P}$-meßbar. Daher ist X und somit auch f vorhersagbar.

$\square$

A.2 „Stetigkeitsmodul“

Die folgende Darstellung von Funktionen vom Typ Stetigkeitsmodul orientiert sich an [TIMAN] und [HILLE/PHILLIPS].

A.2.1 Definition

Eine Funktion $\omega : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ heißt vom Typ Stetigkeitsmodul, falls sie positiv, monoton wachsend, beschränkt und semi-additiv ist, d.h. falls für $h_1, h_2 > 0$ stets $\omega(h_1 + h_2) \leq \omega(h_1) + \omega(h_2)$ gilt.

A.2.2 Lemma

1. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und nicht konstant, so ist der Stetigkeitsmodul ω_f von f gem. Definition 3.1.1 vom Typ Stetigkeitsmodul.

2. Sind ω_1 und ω_2 vom Typ Stetigkeitsmodul, so ist dies auch $\omega_1 + \omega_2$.

3. Für ω vom Typ Stetigkeitsmodul gilt $\omega(h) \geq \frac{h\omega(1)}{2}$ für $h < 1$.

4. Ist ω vom Typ Stetigkeitsmodul mit $F(h) := \int\limits_0^h \frac{\omega(z)}{z}\, dz < \infty$ für $h > 0$, so gilt: $F(h) \geq \frac{\ln 2}{2}\omega(h)$.

5. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und beschränkt, so gilt
$$\sup_{x,\tilde{x}\in\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(\tilde{x})|}{\omega(|x - \tilde{x}|)} < \infty$$
für jedes ω vom Typ Stetigkeitsmodul.

6. Sind f und g beschränkte Funktionen, so daß
$$\sup_{x,\tilde{x}\in\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(\tilde{x})|}{\omega(|x - \tilde{x}|)} < \infty\,, \ \sup_{x,\tilde{x}\in\mathbb{R}} \frac{|g(x) - g(\tilde{x})|}{\omega(|x - \tilde{x}|)} < \infty$$
für eine Funktion ω vom Typ Stetigkeitsmodul, dann gilt auch
$$\sup_{x,\tilde{x}\in\mathbb{R}} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(\tilde{x})|}{\omega(|x - \tilde{x}|)} < \infty\,, \ \sup_{x,\tilde{x}\in\mathbb{R}} \frac{|(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(\tilde{x})|}{\omega(|x - \tilde{x}|)} < \infty\ .$$

7. Ist für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ω vom Typ Stetigkeitsmodul
$$\sup_{x,\tilde{x}\in\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(\tilde{x})|}{\omega(|x - \tilde{x}|)} < \infty\ ,$$

so gilt falls $F(h) := \int\limits_0^h \frac{\omega(z)}{z}\,dz < \infty$ für alle $h > 0$ auch

$$\sup_{x,\tilde{x}\in\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(\tilde{x})|}{F(|x - \tilde{x}|)} < \infty \ .$$

Beweis:

1. Für nicht-konstantes f ist $\omega_f(h) > 0$ für alle $h > 0$, wie man sich leicht überlegt. Die einzige nicht-triviale Eigenschaft, die noch nachzuweisen ist, betrifft die Semi-Additivität. Der Beweis hierzu findet sich in [Timan] S. 249.

2. Trivial.

3. Im folgenden sei für $x > 0$ die kleinste natürliche Zahl, die größer oder gleich x ist, mit $\lceil x \rceil$ bezeichnet. Dann gilt

$$\omega(1) = \omega\left(\frac{1}{h}\,h\right) \le \omega\left(\left\lceil\frac{1}{h}\right\rceil h\right) \le \left\lceil\frac{1}{h}\right\rceil \omega(h) \le \frac{2}{h}\,\omega(h) \ .$$

4. Zum Beweis siehe [Eidelman/Matiichuk] S. 20.

5. Für $|x - \tilde{x}| \ge 1$ kann der Zähler nach oben durch $2\,||f||_\infty$ und der Nenner nach unten durch $\omega(1)$ abgeschätzt werden. Für diesen Fall ist der Bruch folglich kleiner oder gleich $2\frac{||f||_\infty}{\omega(1)}$. Ist $h := |x - \tilde{x}| < 1$, so gilt nach 3.

$$\frac{|f(x) - f(\tilde{x})|}{\omega(|x - \tilde{x}|)} \le \frac{Lh}{\omega(h)} \le \frac{2L}{\omega(1)} \ ,$$

wobei L die Lipschitz-Konstante von f bezeichnet. Insgesamt ist das Supremum also beschränkt durch $\frac{2}{\omega(1)}\max(||f||_\infty, L)$.

6. Die Aussage für die Summe ist trivial, für das Produkt folgt die Behauptung wegen $(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(\tilde{x}) = f(x)\,(g(x) - g(\tilde{x})) + g(\tilde{x})\,(f(x) - f(\tilde{x}))$ aus der Beschränktheit von f und g.

7. Die Behauptung folgt direkt aus 4..

Literaturverzeichnis

[Bauer] Bauer, H.: Maß- und Integrationstheorie, Berlin, New York, 1992 (2. Aufl.)

[Baxter/Rennie] Baxter, M.W., Rennie, A.J.O.: Financial calculus, Cambridge, 1996

[Black/Scholes] Black, F., Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy 81 (1973), 637-654

[Bouchouev/Isakov I] Bouchouev, I., Isakov, V.: The inverse problem of option pricing, Inverse Problems 13 (1997), L11-L17

[Bouchouev/Isakov II] Bouchouev, I., Isakov, V.: Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets, Inverse Problems 15 (1999), R95-R116

[Eidelman/Matiichuk] Eidelman, S.D., Matiichuk, M.I.: Cauchy Problem for parabolic systems whose coefficients have slight smoothness, Ukrainian Math. Journal 22 (1970), 18-30

[Eidelman/Zhitarashu] Eidelman, S.D., Zhitarashu, N.V.: Parabolic boundary value problems, Basel et al., 1999

[Financial Toolbox] Financial Toolbox For Use With Matlab: User's Guide, The Math Works, Inc., 1995-1999

[Friedman] Friedman, A.: Partial differential equations of parabolic type, Englewood Cliffs, N.J., 1964

[Hille/Phillips] Hille, E., Phillips, R.S.: Functional analysis and semi-groups, Providence, R. I., 1957

[Holtrode] Holtrode, R.: Zum Hedging Europäischer Aktienoptionen bei stochastischen Volatilitäten, Lohmar, Köln, 2000

[Jantscher] Jantscher, L.: Distributionen, Berlin, New York, 1971

[John] John, F.: On integration of parabolic equations by difference methods, Communications on Pure and Applied Mathematics 5 (1952), 155-211

[Lishang/Youshan] Lishang, J., Youshan, T.: Identifying the volatility of underlying assets from option prices, Inverse Problems 17 (2001), 137-155

[Louis] Louis, A.K.: Inverse und schlecht gestellte Probleme, Stuttgart, 1989

[Malliaris] Malliaris, A.G.: Stochastic methods in economics and finance, North Holland, 1982

[Neftci] Neftci, Salih N.: An introduction to the mathematics of financial derivatives, San Diego et al., 1996

[Øksendal] Øksendal, B.K.: Stochastic differential equations: an introduction with applications, Berlin et al., 2000 (5. Aufl., 2. korr. Druck)

[Revuz/Yor] Revuz, D., Yor, M.: Continuous martingales and brownian motion, Berlin et al., 1991

[Richtmyer/Morton] Richtmyer, R.D., Morton, K.W.: Difference methods for initial-value problems (2. Aufl.), New York et al., 1967

[Schindler] Schindler, K.: Mathematik für Ökonomen: Grundlagen für Betriebswirte, Volkswirte und Wirtschaftsingenieure, Wiesbaden, 1993

[Singer] Singer, H.: Finanzmarktökonometrie: Zeitstetige Systeme und ihre Anwendung in Ökonometrie und empirischer Kapitalmarktforschung, Berlin, Heidelberg, 1999

[Smith] Smith, G.D.: Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods (2. Aufl.), Oxford 1978

[Stoer/Bulirsch] Stoer, J., Bulirsch, R.: Numerische Mathematik 2 (3. Aufl.), Berlin et al., 1990

[Timan] Timan, A.F.: Theory of approximation of functions of a real variable, Oxford, 1963

[Welcker et al.] Welcker, J., Kloy, J.W., Schindler, K.: Professionelles Optionsgeschäft, Zürich, 1992 (3. Aufl.)

[Wilmott et al.] Wilmott, P., Dewynne, J., Howison, S.: Option pricing: mathematical models and computation, Oxford, 1993

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Diplomarbeit

Verallgemeinerte Implizite Volatilität:
Ein inverses Problem
in der Optionsbewertung

selbständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle wörtlichen oder sinngemäßen Entlehnungen deutlich als solche gekennzeichnet habe.

Saarbrücken, den 26.07.2001