Rekonstruktionsfilter in der 3D - Computertomographie

Diplomarbeit
zur Erlangung des Grades eines
Diplom-Mathematikers
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von

Jens Mohr

Betreuer: Univ.–Prof. Dr. A.K. Louis

Saarbrücken
September 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Verwendung von Röntgenaufnahmen in der diagnostischen Medizin und im zerstörungsfreien Prüfen gehört mittlerweile zu den etablierten Methoden, auf nicht invasive Art und Weise Informationen über den Zustand des untersuchten Objektes zu erhalten. Diesen zweidimensionalen Bildern fehlt es jedoch an Tiefeninformationen. Ob Objekte näher zur Röntgenquelle oder zum Detektor liegen, kann man nur erahnen.

An dieser Stelle kommt die Mathematik zum Zuge. Das physikalische Modell einer Messung liefert dabei den Ansatz. Wir können aus der Abminderung der Strahlungsintensität mittels unterschiedlicher Methoden Informationen gewinnen, die in der Anwendung benötigt werden. Je nachdem, ob wir uns für die Dichte des Gewebes oder des Materials oder nur für die Dichtesprünge interessieren, ob zur Gewinnung der Information eher relativ viel Zeit oder nur kurze Zeit zur Verfügung steht, entscheiden wir uns für ein bestimmtes Verfahren.

Die Prämissen des in der Arbeit diskutierten Verfahrens lauten bestmögliche Qualität einer kompletten 3D-Dichterekonstruktion in geringer Zeit, wenn möglich sogar fast online. Ein mögliches Verfahren unter diesen Gesichtspunkten wurde von DIETZ in [5] hergeleitet. Im Rahmen eines Forschungsprojekts mit den Partnern des Deutschen Krebsforschungszentrums (DKFZ) in Heidelberg und des Fraunhofer Instituts für zerstörungsfreie Prüfverfahren (IZFP) in Saarbrücken wird der Einsatz des Verfahrens für eine kreisförmige Abtastkurve in der Praxis getestet. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit einem solchen Einsatz.

Zu Beginn wird aus dem physikalischen Modell die mathematische Formulierung gewonnen. Wir erhalten ein inverses Problem $\mathcal{D}f = g$, wobei f die gewünschte Information und g die gemessenen Daten bezeichnet. Um eine Lösung zu erhalten, beschreiten wir zunächst die Wege anderer, um Grundlegendes auch für unsere Lösung zu übernehmen. Aufgrund der Schlechtgestelltheit des Problems ist eine analytische Inversion für eine praktische Umsetzung nicht geeignet. Dadurch sind wir gezwungen, das Problem zu regularisieren. Wir studieren daher dann die Approximative Inverse, die Methode, die auch DIETZ zur Regularisierung wählte, und ihre Verwendung. Am Ende des ersten Kapitels haben wir somit alle unsere Grundlagen gelegt.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem Verfahren von DIETZ. Wir leiten seine Ergebnisse her und zeigen, wie sich das Verfahren als gefilterte Rückprojektion implementieren läßt. Wir werden dann selbst den Algorithmus speziell für eine kreisförmige Abtastkurve weiterentwickeln und so die Berechnung des Filters für den praktischen Einsatz um etwa das 32-fache beschleunigen, in dem wir Eigenschaften des Kerns aufzeigen und ausnutzen. Wir vergleichen den so gewonnenen Algorithmus mit dem Feldkamp-Algorithmus, einem Verfahren, das als das Standardverfahren gilt. Es ergeben sich während unseren Simulationen Vor- und Nachteile. Die Arbeit zeigt dann jedoch, wie es uns nach vorheriger Analyse des Filters durch eine neue Variante gelingt, die Nachteile zu beseitigen und gelangt zu dem Ergebnis, daß die Flexibilität der Approximative Inversen gegenüber dem Feldkamp-Algorithmus in den Simulationen dominiert. Die Gültigkeit dieser These für den Einsatz in der Praxis zeigen wir anschließend anhand einiger Rekonstruktionen. Zum Schluß werfen wir noch einen kurzen Blick darauf, wie sich das Verfahren auf die Spiralgeometrie übertragen läßt.

Danksagung

Für ihre Hilfe auf meinem Weg zu dieser Arbeit will ich einigen noch danken, über allen anderen zuerst meinen Eltern, ohne deren Unterstützung dies nicht realisierbar gewesen wäre, danach meinen beiden Brüder für ihre Anteilnahme.

Herzlicher Dank gebührt gleichermaßen Herrn Prof. Dr. Alfred K. Louis für die ausgezeichnete Betreuung während meiner gesamten Tätigkeiten am Lehrstuhl, nicht nur während der Entstehung meiner Diplomarbeit. Ebenso möchte ich mich noch bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls bedanken. Mein besonderer Dank geht an Dr. Roman Müller und an Dr. Thomas Schuster für ihre Anregungen.

Gewidmet an die, die ich liebe.

Saarbrücken, im September 2002 Jens Mohr

I Modellierung und mathematische Grundlagen

1.1 Mathematisches Modell der Messung eines einzelnen Röntgenstrahls

Betrachten wir zunächst ein Modell unserer Meßanlage; der Einfachheit halber zunächst nur mit einem einzelnen Röntgenstrahl (siehe Abb. 1.1).

Abbildung 1.1: Modell einer Meßanordnung

Wir nehmen an, daß sich der Strahl geradlinig ausbreitet. Wir parametrisieren den Weg des Strahls durch $a + t\theta$, wobei a der Quellpunkt im $\mathbb{R}^3$, $t \in [0, \infty)$ und θ ein Vektor der Einheitssphäre S^2 des $\mathbb{R}^3$ ist, der auf den Detektor zeigt.

Der Strahl besitzt im Quellpunkt ($t = 0$) die Ausgangsintensität $I(a + 0\,\theta) = I_{a,\theta}(0)$. Er durchdringt das Objekt, wird dabei abgeschwächt und man mißt mittels eines Detektorelements an der Stelle $a + l\theta$ die Intensität $I(a + l\theta) = I_{a,\theta}(l)$.

Die physikalische Annahme, daß die Änderung der Intensität $I_{a,\theta}(t) - I_{a,\theta}(t + h)$ proportional zur Intensität $I_{a,\theta}(t)$ und zur Weglänge $h = (t + h) - t$ ist, führt schließlich zu

$$I_{a,\theta}(t+h) - I_{a,\theta}(t) = -f_{a,\theta}(t) I_{a,\theta}(t) h,$$

wobei der Proportionalitätsfaktor $f_{a,\theta}(t)$, der Röntgenstrahlenabsortionskoeffizient, der Dichte des Objektes entspricht. Durch $h \to 0$ kommt man zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$I'_{a,\theta}(t) = -f_{a,\theta}(t) I_{a,\theta}(t)$$

und durch Integration entlang des Strahles der Länge l zur Gleichung

$$\int_0^l f_{a,\theta}(t)\, dt = -ln(I_{a,\theta}(l)) + c.$$

Setzt man nun $l = 0$, folgt $c = ln(I_{a,\theta}(0))$ und schließlich

$$\int_0^l f_{a,\theta}(t)\, dt = -ln\left(\frac{I_{a,\theta}(l)}{I_{a,\theta}(0)}\right).$$

Führen wir die Abschwächung ausschließlich auf das Objekt zurück, so spielt die Entfernung zwischen Objekt und Detektor keine Rolle für das mathematische Modell. Die Daten

$$-ln\left(\frac{I_{a,\theta}(l)}{I_{a,\theta}(0)}\right) = -ln\left(\frac{I(a+l\theta)}{I(a+0\,\theta)}\right)$$

hängen also nur von a und θ ab und wir definieren

$$g(a,\theta) := -ln\left(\frac{I(a+l\theta)}{I(a+0\,\theta)}\right).$$

Ebenso soll gelten

$$\int_0^l f_{a,\theta}(t)\, dt = \int_0^l f(a+t\theta)\, dt = \int_0^\infty f(a+t\theta)\, dt,$$

also

$$\int_0^\infty f(a+t\theta)\, dt = g(a,\theta).$$

Wir haben nun ein Modell für eine Messung mit einem einzelnen Strahl. Dieses Modell wird auch divergente Röntgen-Transformation $\mathcal{D}$ genannt und wir schreiben vorläufig

$$\mathcal{D}f(a,\theta) := \int_0^\infty f(a+t\theta)\,dt \quad \text{mit} \quad \theta \in S^2,\, a \in \mathbb{R}^3 \ .$$

Hierbei sei $f \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^3)$, dem Schwartzschen Raum der schnell fallenden Funktionen. So ist man bei Fragen der Konvergenz der Integrale, Differenzierbarkeit von f usw. erst einmal auf der sicheren Seite.

1.2 3D-Röntgen-Tomographie und erste Schritte zur Lösung

Unser Ziel, f im Innern des ganzen Objektes zu bestimmen, verlangt natürlich eine größere Menge an Daten. Um diese effizient zu gewinnen, erweitern wir das Modell des einzelnen Röntgenstrahls.

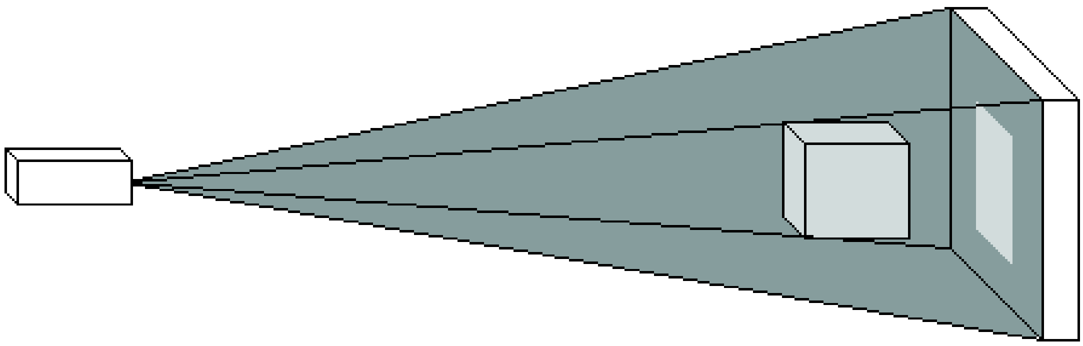


Abbildung 1.2: Modell der Kegelstrahlgeometrie

Wir betrachten jetzt ein ganzes Bündel von Strahlen (siehe Abb. 1.2). Die Messung geschieht mit einem Flächendetektor, der üblicherweise aus Tausenden von einzelnen Elementen besteht. Man nennt diesen Aufbau auch Kegelstrahlgeometrie.

Weiter gehen wir davon aus, daß unser Objekt vollständig durch die Röntgenstrahlen überdeckt wird. So kann man sagen, daß die Daten $g(a,\theta)$ für jedes

$\theta \in S^2$ ermittelt werden, da $g(a,\theta) = 0$ ist für Strahlen, die den Detektor nicht treffen.

Es ist nun möglich, eine Inversionsformel (siehe [1]) anzugeben. Dafür müßte $\mathcal{D}f(a,\cdot)$ für alle $a \in \mathbb{R}^3$ bekannt sein. Es ist jedoch ausreichend, $g(a,\cdot)$ auf einer Kugeloberfläche um das Objekt zu kennen, da daraus die fehlenden Informationen für $\mathcal{D}f(a,\cdot)$ errechnet werden können.

Dennoch ist diese Inversionsformel für einen effizienten Einsatz unbrauchbar, da die Erfassung der Daten schwer umsetzbar und viel zu aufwendig ist.

Schließlich gelang es TUY (siehe [2]), eine erste Inversionsformel anzugeben, wofür es genügt, daß die Quellpunkte auf einer beschränkten Kurve liegen. Er stellt dabei drei Bedingungen, die wir nun präzise formulieren.

Definition 1.2.1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Weg, also eine stetige Funktion in $\mathbb{R}^3$. Die Kurve Γ sei die Menge der Bildpunkte von a, also $\Gamma := \{a(\lambda), \lambda \in I\}$. f sei eine reellwertige Funktion, deren Träger in einem Gebiet Ω enthalten sei. Dann soll für Γ gelten:

1. *Die Kurve liegt außerhalb des Gebiets Ω.*
2. *Die Funktion a ist beschränkt, stetig und fast überall differenzierbar.*
3. *Für jedes Paar $(x,\theta) \in \Omega \times S^2$ existiert ein $\lambda \in I$, so daß $\langle x,\theta\rangle = \langle a(\lambda),\theta\rangle$ und $\langle a'(\lambda),\theta\rangle \neq 0$ ist.*

Die dritte Bedingung heißt **Tuy'sche Bedingung**.

Anschaulich interpretiert besagt die Tuy'sche Bedingung, daß jede Ebene, die das Gebiet durchdringt, die Abtastkurve in mindestens einem Punkt schneiden muß. Um später mit unserem Modell Mathematik zu betreiben, werden wir es so skalieren, daß wir als Gebiet Ω die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ definieren und das zu rekonstruierende Objekt soll sich innerhalb dieser Kugel befinden. Wir können also auch formulieren, daß jede Ebene, die das Objekt schneidet, die Abtastkurve ebenfalls schneiden muß.

Nun treten natürlich gewisse Probleme zwischen unserem theoretischen Modell und der praktischen Umsetzung auf. Das Modell behandelt die Kurve als kontinuierlich, während man in der Praxis nur an diskreten Stellen Messungen durchführen kann. Gleiches galt auch schon für den Detektor. Dies soll an dieser Stelle jedoch noch nicht behandelt werden. Unsere Strategie ist es, das Problem zunächst kontinuierlich zu betrachten und zu lösen. Die Diskretisierung wird dann später wieder ins Blickfeld rücken, wenn wir uns der Implementierung widmen.

Die Tuy'sche Bedingung an die Kurve spielt für unsere weiteren Betrachtungen im Gegensatz zu seiner Inversionsformel (siehe [2]) eine wichtige Rolle. Die Inversionsformel selbst ist für die numerischen Umsetzung problematisch. So müßte dort eine Differentiation auf den Fourier-transformierten Daten durchgeführt werden.

Betrachten wir nun also Abtastkurven, die die Tuy'sche Bedingung erfüllen, und definieren die divergente Röntgen-Transformation $\mathcal{D}$ wie üblich.

Definition 1.2.2

Sei $\theta \in S^2$, $f \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^3)$ *und* $a \in \Gamma$ *wie in 1.2.1. Dann heißt*

$$\mathcal{D}f(a,\theta) := \int_0^\infty f(a + t\theta)\, dt$$

die **divergente 3D-Röntgen-Transformation**.

1.3 Von der 3D-Röntgen- zur 3D-Radon-Transformation

Ein entscheidender Schritt für unsere Lösung des inversen Problems gelang schließlich GRANGEAT [3]. Er stellte einen Zusammenhang zwischen den gemessenen Linienintegralen der divergenten 3D-Röntgen-Transformation und einer anderen Transformation fest, welche auf Ebenenintegralen beruht. Die Rede ist hier von der 3D-Radon-Transformation.

Definition 1.3.1

Sei $\omega \in S^2$, $s \in \mathbb{R}$ *und* $f \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^3)$. *Dann heißt*

$$\mathcal{R}f(\omega, s) := \int_{\langle x,\omega\rangle = s} f(x)\,dx = \int_{\omega^\perp} f(s\omega + y)\,dy$$

die **3D-Radon-Transformation**.

Eine Inversionsformel (siehe [4]) für diese Transformation konnte schon 1917 von RADON, nach dem sie benannt ist, gezeigt werden. Wir werden später (siehe Lemma 1.5.5) eine Inversionsformel angeben und zur Lösung verwenden.

Zunächst jedoch werden wir den Zusammenhang herstellen und die "Formel von GRANGEAT" zeigen. Dieser Beweis ist der Dissertation von DIETZ (siehe [5]) entnommen. Andere Versionen wurden z.B. von LOUIS in [6] oder DEFRISE und CLACK in [7] angegeben.

Satz 1.3.2 *(Formel von GRANGEAT)*

Sei $\omega \in S^2$ *ein Einheitsvektor und* $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \Omega$, δ *bezeichne die Delta-Distribution. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\omega, a^\top\omega) = -\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\theta)\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta.$$

Beweis:

Sei U eine unitäre Transformation mit $U\omega = e_3$, dem dritten kanonischen Einheitsvektor. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\theta)\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta &= \int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\theta)\delta'\big((U\theta)^\top U\omega\big)\,d\theta \\ &= \int_{S^2} \mathcal{D}f(a,U^\top\theta)\delta'(\theta^\top e_3)\,d\theta\ .\end{aligned}$$

Wir führen Polarkoordinaten $\theta(\vartheta,\varphi) = (\sin\vartheta\, \cos\varphi,\, \sin\vartheta\, \sin\varphi,\, \cos\vartheta)^\top$ in S^2 ein. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\theta)\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{D}f\big(a, U^\top\theta(\vartheta,\varphi)\big)\,\delta'(\cos\vartheta)\,d\varphi\,\sin\vartheta\,d\vartheta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \mathcal{D}f\big(a, U^\top\theta(\vartheta,\varphi)\big)\,\delta'(\cos\vartheta)\,(-\sin\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathcal{D}f\big(a, U^\top\theta(\vartheta,\varphi)\big)\,\delta(\cos\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi
\end{aligned}$$

durch die Ableitung der Delta-Distribution. Mit der Definition von δ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\theta)\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathcal{D}f\big(a, U^\top\theta(\vartheta,\varphi)\big)\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_0^\infty f\big(a + tU^\top\theta(\vartheta,\varphi)\big)\,dt\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \Big(\nabla f\big(a+tU^\top\theta(\vartheta,\varphi)\big)\Big)^\top \Big(tU^\top\theta(\vartheta+\frac{\pi}{2},\varphi)\Big)\,dt\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \Big(\nabla f\big(a+tU^\top\theta(\frac{\pi}{2},\varphi)\big)\Big)^\top \big(U^\top\theta(\pi,\varphi)\big)\;t\,dt\;d\varphi\;.
\end{aligned}$$

Wegen $\theta(\pi,\varphi) = -e_3$ ist schließlich

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\theta)\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta &= -\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \Big(\nabla f\big(a+tU^\top\theta(\frac{\pi}{2},\varphi)\big)\Big)^\top \omega\,t\,dt\;d\varphi \\
&= -\int_{S^2\cap\omega^\perp}\int_0^\infty \big(\nabla f(a+t\theta)\big)^\top\omega\,t\,dt\,d\theta \\
&= -\int_{S^2\cap\omega^\perp}\int_0^\infty \Big(\nabla f\big((a^\top\omega)\omega + t\theta\big)\Big)^\top\omega\,t\,dt\,d\theta \\
&= -\int_{\omega^\perp} \Big(\nabla f\big((a^\top\omega)\omega + y\big)\Big)^\top\omega\,dy\;.
\end{aligned}$$

Nach Vertauschung von Differentiation und Integration sind wir am Ziel

$$\begin{aligned}\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\theta)\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta &= -\frac{\partial}{\partial s}\int_{\omega^\perp} f\big((a^\top\omega)\omega + y\big)\,dy \\ &= -\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\omega, a^\top\omega)\ .\end{aligned}$$

$\square$

Auf dieser Formel beruhend gibt GRANGEAT auch ein Rekonstruktionsverfahren an. Er rechnet dabei aus den gemessenen Daten die erste Ableitung der 3D-Radon-Transformation von f über die eben angegebene Formel aus. Anschließend müssen die so gewonnenen Radon-Daten nochmals differenziert werden, um dann schließlich durch Rückprojektion zur Lösung zu kommen. Der Begriff Rückprojektion wird in Abschnitt 2.3 genauer erklärt.

Bewerten wir das Verfahren, fallen direkt die vielen numerisch durchzuführenden Differentiationen auf. Diese sind aus unserer Sicht natürlich ungünstig. Wir werden also einen Weg suchen, der uns eine schnelle Rekonstruktion ermöglicht und ein numerisch günstigeres Verfahren liefert.

Versuchen wir zunächst die Nachteile der Differentiationen zu umgehen. Wir setzen hierfür ein Regularisierungsverfahren ein, nämlich die Approximative Inverse. Zunächst erklären wir allgemein deren Wirkungsweise.

1.4 Die Approximative Inverse als Regularisierungsverfahren

Ein breit angelegter Zugang zu Regularisierungsverfahren kann in [8] nachgelesen werden. Die Approximative Inverse als Methode zur Regularisierung wurde von LOUIS in [9] eingeführt. Sie bildet neben der "Formel von GRANGEAT" die Grundlage unseres Verfahrens. Daher wollen wir zunächst die Approximative Inverse genauer unter die Lupe nehmen.

Betrachten wir die Hilberträume X und Y und den linearen, stetigen Operator $\mathcal{A} : X \to Y$. Das Problem habe also die Form $\mathcal{A}f = g$.

Idealerweise sollte $\mathcal{A}$ stetig invertierbar sein. Das heißt, die Lösung $f = \mathcal{A}^{-1}g$ sollte existieren und kleine Störungen in den Daten g sollten auch nur kleine Änderungen in der Lösung f verursachen. Leider bleibt dies für viele Probleme eine Wunschvorstellung.

Erweitern wir unseren Lösungsbegriff auf die Verallgemeinerte Lösung $f^\dagger = \mathcal{A}^\dagger g$, so bleibt noch das Problem, daß die Lösung nicht stetig von den Daten abhängen könnte, wie es für schlecht gestellte Probleme charakteristisch ist.

Verabschieden wir uns von dem Gedanken, die exakte Lösung f zu erhalten, und geben uns mit einer geglätteten Version der Lösung $\tilde{f}_\gamma := \langle f, e_\gamma \rangle_X$ zufrieden, so erhalten wir stetige Abhängigkeit von den Daten. Hierbei bezeichne γ den Regularisierungsparameter und e_γ einen geeigneten Mollifier, für den gelten soll

$$\lim_{\gamma \to 0} \left\| \tilde{f}_\gamma - f \right\|_X = 0 \ .$$

Gibt es nun ein ψ_γ mit $\mathcal{A}^* \psi_\gamma = e_\gamma$, so gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\gamma &= \langle f, e_\gamma \rangle_X \\ &= \langle f, \mathcal{A}^* \psi_\gamma \rangle_X \\ &= \langle \mathcal{A} f, \psi_\gamma \rangle_Y \\ &= \langle g, \psi_\gamma \rangle_Y \quad =: \quad \mathcal{S}_\gamma g \end{aligned}$$

Ist e_γ nicht aus dem Bild von $\mathcal{A}^*$, so setzen wir voraus, daß $e_\gamma \in range\,(\mathcal{A}^*) \oplus range\,(\mathcal{A}^*)^\perp$ ist, und berechnen ψ_γ durch das Minimierungsproblems $\|\mathcal{A}^* \psi_\gamma - e_\gamma\|_X$ mittels Lösen der Normalgleichung $\mathcal{A}\mathcal{A}^* \psi_\gamma = \mathcal{A} e_\gamma$. Das heißt, wir können ψ_γ auch als die Verallgemeinerte Lösung

$$\psi_\gamma = (\mathcal{A}^*)^\dagger e_\gamma$$

schreiben. Nachdem wir die Wirkungsweise erklärt haben, geben wir $\mathcal{S}_\gamma$ und ψ_γ noch Namen.

Definition 1.4.1

Die Abbildung

$$\mathcal{S}_\gamma \ : \ Y \to X \ , \ g \mapsto \langle \mathcal{A} f, \psi_\gamma \rangle_Y$$

heißt **Approximative Inverse** *von $\mathcal{A}$ und ψ_γ ist der* **Rekonstruktionskern**.

Da der Rekonstruktionskern unabhängig von den Daten ist, kann man ihn vorher bestimmen. Ein Nachteil liegt allerdings darin, daß die Berechnung mit großem Aufwand an Zeit und Speicherplatz verbunden sein kann. Da ein solcher Rekonstruktionskern $\psi_\gamma = \psi_\gamma\,(x;\cdot\,)$ für jeden Rekonstruktionspunkt x einzeln berechnet wird, stellt sich die Frage, ob man einen Rekonstruktionskern nicht auch für andere Punkte verwenden kann. Hier zeigt sich eine wichtige Eigenschaft der Approximativen Inversen, nämlich die Übertragung von Invarianzen des Operators auf den Rekonstruktionskern.

Lemma 1.4.2

Seien $e_\gamma, \varepsilon_\gamma \in range\,(\mathcal{A}^*) \oplus range\,(\mathcal{A}^*)^{\perp}$ *mit* $e_\gamma(x,\cdot\,) = \mathcal{T}_1^x \varepsilon_\gamma(\,\cdot\,)$. *Seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\ &: X \to Y, \\ \mathcal{T}_1^x &: X \to X, \\ \mathcal{T}_2^x &: Y \to Y, \\ \mathcal{T}_3^x &: Y \to Y \end{aligned}$$

lineare, stetige Operatoren mit

$$\mathcal{A}^*\mathcal{T}_2^x = \mathcal{T}_1^x\mathcal{A}^* \quad und \quad \mathcal{A}\mathcal{T}_1^x = \mathcal{T}_3^x\mathcal{A}\ .$$

Sei ϕ_γ *die Lösung von*

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\phi_\gamma = \mathcal{A}\varepsilon_\gamma.$$

Dann ist die Lösung von

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\psi_\gamma = \mathcal{A}e_\gamma$$

gegeben als

$$\psi_\gamma = \mathcal{T}_2^x\phi_\gamma\ .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathcal{A}^*\psi_\gamma &= \mathcal{A}e_\gamma \\
&= \mathcal{A}\mathcal{T}_1^x\varepsilon_\gamma \\
&= \mathcal{T}_3^x\mathcal{A}\varepsilon_\gamma \\
&= \mathcal{T}_3^x\mathcal{A}\mathcal{A}^*\phi_\gamma \\
&= \mathcal{A}\mathcal{T}_1^x\mathcal{A}^*\phi_\gamma \\
&= \mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{T}_2^x\phi_\gamma \ .
\end{aligned}$$

□

Sind e_γ und ε_γ aus dem Bild von $\mathcal{A}^*$, läßt sich die Aussage vereinfachen.

Korollar 1.4.3

Seien $e_\gamma, \varepsilon_\gamma \in range\,(\mathcal{A}^*)$ mit gleichen Eigenschaften wie vorhin. Ebenso gelte dies für $\mathcal{A}$, $\mathcal{T}_1^x$ und $\mathcal{T}_2^x$. Sei nun ϕ_γ die Lösung von

$$\mathcal{A}^*\phi_\gamma = \varepsilon_\gamma \ .$$

Dann ist die Lösung von

$$\mathcal{A}^*\psi_\gamma = e_\gamma$$

gegeben als

$$\psi_\gamma = \mathcal{T}_2^x\phi_\gamma \ .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^*\psi_\gamma &= e_\gamma \\
&= \mathcal{T}_1^x \varepsilon_\gamma \\
&= \mathcal{T}_1^x \mathcal{A}^* \phi_\gamma \\
&= \mathcal{A}^* \mathcal{T}_2^x \phi_\gamma \ .
\end{aligned}$$

$\square$

Wie sich zeigen wird, kann die Anwendung solcher Invarianzen sehr ergiebig sein.

Der Übersichtlichkeit halber werden wir in Zukunft nur noch ψ statt ψ_γ, e statt e_γ usw. schreiben.

Wir wollen nun dieses Vorgehen auf die 3D - Radon - Transformation übertragen.

1.5 Die Approximative Inverse der 3D-Radon-Transformation

Um das eben vorgestellte Regularisierungsverfahren auf die 3D-Radon-Transformation anwenden zu können, ist es nötig, daß diese zwischen Hilberträumen operiert. Wir müssen daher zuerst noch Vorarbeit leisten.

1.5.1 Stetige Fortsetzung der 3D-Radon-Transformation

Bisher haben wir die 3D-Radon-Transformation für $f \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^3)$ betrachtet und sind von einer vollständigen Überdeckung des Objektes ausgegangen. f hat seinen Träger in diesem Objekt. Wir sprachen vorher von einem Gebiet Ω, welches unser Objekt umgibt; f habe demnach seinen Träger in Ω. Ab sofort bezeichne Ω die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Wir wollen die 3D-Radon-Transformation im folgenden zwischen L_2-Räumen betrachten. Diese sind durch

$$L_2(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_X |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

definiert. In allgemeinerer Form ist ein Beweis einer stetigen Fortsetzung in [10] zu finden; unter einem etwas anderen Gesichtspunkt kann er in ähnlicher Form in [5] gefunden werden. Wir beschränken uns hier auf eine einfache Form, die unseren Ansprüchen genügt.

Satz 1.5.1

Der Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \qquad L_2(\Omega) &\to L_2(\, S^2 \times [-1,1]\,) \\ f \quad &\mapsto \int_{\Omega \cap \omega^\perp} f(sw+y)\, dy \end{aligned}$$

ist stetig.

Beweis:

Wir betrachten zunächst für eine feste Richtung $\mathcal{R}_\omega f = \mathcal{R} f(\omega, \cdot\,)$.

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_\omega f(s)|^2 &= \left| \int_{\Omega \cap \omega^\perp} f(sw+y)\, dy \right|^2 \\ &\leq \int_{\Omega \cap \omega^\perp} |\, f(sw+y)\,|^2\, dy\ . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]} |\mathcal{R}_\omega f(s)|^2\, ds &\leq \int_{[-1,1]} \int_{\Omega \cap \omega^\perp} |\, f(sw+y)\,|^2\, dy\, ds \\ &= \int_\Omega |\, f(x)\,|^2\, dx \\ &= \Big\| f \Big\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \Big\| \mathcal{R} f \Big\|^2_{L_2(S^2 \times [-1,1])} &= \int_{S^2} \int_{[-1,1]} |\mathcal{R}_\omega f(s)|^2\, ds\, d\omega \\ &\leq \int_{S^2} \Big\| f \Big\|^2_{L_2(\Omega)} d\omega \\ &= 4\,\pi \Big\| f \Big\|^2_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

der Operator ist also stetig.

□

Wir haben nun die Voraussetzungen geschaffen, das Regularisierungsverfahren anzuwenden. Dazu ist es nötig, daß wir den Rekonstruktionskern als Lösung von $\mathcal{R}^*\psi(x;\omega,s) = e(x,y)$ mit $y = s\omega$ berechnen. Dies geschieht mittels einer Inversionsformel für die 3D-Radon-Transformation.

1.5.2 Herleitung einer Inversionsformel für die 3D-Radon-Transformation

Zunächst berechnen wir den adjungierten Operator. Danach werden wir notwendige Begriffe definieren, um schließlich die Inversionsformel geeignet anzugeben und zu beweisen.

Lemma 1.5.2

Der adjungierte Operator der 3D-Radon-Transformation $\mathcal{R}$ lautet

$$\mathcal{R}^* g\,(x) = \int_{S^2} g(\omega, x^\top \omega)\, d\omega.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\Big\langle \mathcal{R}f, g \Big\rangle_{L_2\,(S^2 \times [-1,1])} &= \int_{S^2} \int_{[-1,1]} \mathcal{R}f(\omega,s)\, g(\omega,s)\, ds\, d\omega \\
&= \int_{S^2} \int_{[-1,1]} \int_{\Omega\,\cap\,\omega^\perp} f(s\omega + y)\, g(\omega,s)\, dy\, ds\, d\omega \\
&= \int_{S^2} \int_{\Omega} f(x)\, g(\omega, x^\top\omega)\, dx\, d\omega \\
&= \int_{\Omega} f(x) \int_{S^2} g(\omega, x^\top\omega)\, d\omega\, dx \\
&= \Big\langle f, \int_{S^2} g(\omega, \cdot^{\,\top}\omega)\, d\omega \Big\rangle_{L_2\,(\Omega)} \\
&= \Big\langle f, \mathcal{R}^* g \Big\rangle_{L_2\,(\Omega)}
\end{aligned}$$

Also lautet der adjungierte Operator zu $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}^* g\,(x) = \int_{S^2} g(\omega, x^\top \omega)\, d\omega.$$

$\square$

Eine Inversionsformel für die 3D-Radon-Transformation wie wir sie hier brauchen, ist in [10] angegeben, allerdings dort für f aus dem Schwartzschen Raum. Wir können diese Formel allerdings übertragen und stellen daraus folgernd Bedingungen an unseren Mollifier. Dieser sollte aus einem Raum sein, der anschaulich formuliert gewisse Glattheitseigenschaften fordert.

Definition 1.5.3

$C_0^\infty(\Omega)$ bezeichne die beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. Der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_\alpha^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (\, 1 + |\xi|^{\,2}\,)^{\,\alpha}\, |\hat{f}(\xi)|^{\,2}\, d\xi \ \ , \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

heißt **Sobolev-Raum** $H_0^\alpha\,(\Omega)$. *Hierbei bezeichnet $\hat{f}$ die Fourier-transformierte von f.*

Bevor wir nun endlich zur Inversionsformel kommen, ziehen wir noch ein Lemma vor, das wir im Beweis benutzen werden. Die Rede ist hierbei vom sogenannten "Fourier-Slice-Theorem".

Lemma 1.5.4 *(Fourier-Slice-Theorem)*

Für $e = e\,(x, \cdot\,) \in L_2\,(\Omega)$ gilt:

$$\widehat{(\mathcal{R}_\omega e)}\,(s) \;=\; 2\pi\ \hat{e}\,(s\omega) \ \ , \ s \in \mathbb{R}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\widehat{(\mathcal{R}_\omega e)}\,(s) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\,(-is\sigma)\ \mathcal{R}_\omega e\,(\sigma)\ d\sigma \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\,(-is\sigma) \int_{\omega^\perp} e(\sigma\omega + y)\ dy\ d\sigma \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\,(-is\omega^\top x)\ e(x)\ dx \\
&= 2\pi\ \hat{e}\,(s\omega)
\end{aligned}$$

□

Nun also zu der Inversionsformel.

Lemma 1.5.5 *(Inversionsformel)*

Bezeichne I das Riesz-Potential, welches durch

$$\widehat{(I^\alpha f)}\,(\xi) \;=\; |\xi|^{-\alpha}\,\hat{f}\,(\xi)$$

definiert ist. Dann gilt für

$$e \in H_0^\alpha\,(\Omega) \quad mit \quad \alpha \geq 1$$

die Gleichung

$$e \;=\; \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-2}\,\mathcal{R}^*\,I^{-2}\,\mathcal{R}\,e\;.$$

Beweis:

$$e(y) = (2\pi)^{-3/2} \int_\Omega \exp\left(iy^\top \xi\right) \hat{e}(\xi)\; d\xi$$

Setzen wir nun Polarkoordinten in die inverse Fourier-Tranformation von $\hat{e}$ ein.

$$e(y) = (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \int_0^1 \exp\left(isy^\top \omega\right)\; s^2\;\hat{e}(s\omega)\; ds\,d\omega$$

Anwenden des Fourier-Slice-Theorems (Lemma 1.5.4) ergibt dann folgende Gleichung.

$$e(y) = (2\pi)^{-5/2} \int_{S^2} \int_0^1 \exp\left(isy^\top \omega\right)\; |s|^2\;\widehat{(\mathcal{R}e)}(\omega, s)\; ds\,d\omega$$

Ersetzt man ω durch $-\omega$ und s durch $-s$ und nutzt aus, daß $\widehat{(\mathcal{R}e)}$ gerade ist, so erhält man die gleiche Formel, jedoch mit Integral über $[-1, 0]$ statt $[0, 1]$. Addieren wir also beide Integrale und teilen durch 2.

$$\begin{aligned}
e(y) \;&=\; \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-5/2} \int_{S^2} \int_{-1}^1 \exp\left(isy^\top \omega\right)\; |s|^2\;\widehat{(\mathcal{R}e)}(\omega, s)\; ds\,d\omega \\
&=\; \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-5/2} \int_{S^2} I^{-2}\,\mathcal{R}\,e\,(\omega, y^\top \omega)\; d\omega \\
&=\; \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-2}\;\mathcal{R}^*\,I^{-2}\,\mathcal{R}\,e\,(y)
\end{aligned}$$

□

Jetzt, da wir die Inversionsformel angegeben haben, läßt sich der nächste Schritt schnell vollziehen.

1.5.3 Berechnung des Rekonstruktionskerns und Invarianzen

Um den Rekonstruktionskern zu erhalten, müssen wir die geleisteten Vorarbeiten nur noch zusammentragen.

Satz 1.5.6

Die Approximative Inverse der 3D-Radon-Transformation $\mathcal{R}$ *hat die Gestalt*

$$\mathcal{S} \,:\, L_2\,(\,S^2 \times [-1,1]\,) \to L_2\,(\Omega)\,,\; g \mapsto \langle \mathcal{R}f, \psi \rangle_{L_2\,(\,S^2 \times [-1,1]\,)}$$

und der dazugehörige Rekonstruktionskern lautet

$$\psi\,(x;\omega,s) \;=\; \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-2}\; I^{-2}\,\mathcal{R}\,e\,(x,y) \quad \mathit{mit} \quad y = s\omega$$

Beweis:

Nach Definition (1.4.1) folgt direkt die Approximative Inverse der 3D-Radon-Transformation durch Einsetzen. Bleibt also noch die Berechnung des Rekonstruktionskerns. Mit Hilfe der Inversionsformel (Lemma 1.5.5) erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^*\,\psi\,(x;\omega,s) &= e\,(x,y) \\ &= \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-2}\,\mathcal{R}^*\,I^{-2}\,\mathcal{R}\,e\,(x,y)\;. \end{aligned}$$

Wir können unsere Lösung also wie folgt berechnen

$$\psi\,(x;\omega,s) = \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-2}\,I^{-2}\,\mathcal{R}\,e\,(x,s\omega)\;.$$

□

Um eine vollständige Rekonstruktion von f zu erhalten, müßten wir für alle $x \in \Omega$ und für alle $\omega \in S^2$ die Kerne ausrechnen. Dies ist natürlich ein enormer Aufwand.

Daher wollen wir uns als nächstes mit der Frage beschäftigen, ob wir einen Rekonstruktionskern nicht auch für andere Punkte verwenden können. Ebenso stellt sich die Frage, ob wir den Kern für alle $\omega \in S^2$ bestimmen müssen, oder ob es nicht ausreicht, ihn für eine Richtung zu kennen. Dies ist wichtig, wenn wir den Kern später für unterschiedliche Quellpunkte einsetzen möchten.

Hergeleitet wurden die notwendigen Operatoren von DIETZ in [5]. Verknüpft mit den angenehmen Eigenschaften, die unser Rekonstruktionskern besitzt, sind dabei weitere Forderungen an unseren Mollifier. Dieser sollte neben den bisherigen Anforderungen auch translations- und rotationsinvariant sein.

Satz 1.5.7

Sei U eine unitäre Transformation und $e(x,\cdot)$, $\varepsilon \in H_0^\alpha(\Omega)$ mit $\alpha \geq 1$ und $\delta \geq 1$ seien Mollifier mit

$$e\,(x,y) = \frac{1}{8}\,\varepsilon\left(U\left(\frac{y-x}{2}\right)\right) .$$

Dann kann der Rekonstruktionskern ψ von $\mathcal{R}^*\psi(x;\cdot) = e(x,\cdot)$ auch berechnet werden als

$$\psi\,(x;\omega,s) = \frac{1}{8}\,\phi\left(\frac{s-x^\top\omega}{2}\right) ,$$

wobei $\phi\,(s)$ die Lösung der Gleichung $\mathcal{R}^*\,\phi\,(\omega_0,s) = \varepsilon(y)$ mit $|\,y| = s$ für ein beliebiges, aber festes ω_0 ist.

Bemerkung:

Die Rotationsinvarianz besagt, daß wir ω_0 beliebig wählen können, da das Ergebnis für alle $\omega \in S^2$ das gleiche ist. U ist im Allgemeinen also unabhängig von ω_0 eine beliebige Rotation, speziell können wir aber auch $U\omega = \omega_0$ setzen.

Beweis:

Zunächst zur Translation.

Es seien

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_1^x : \qquad & L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \\
& f(y) \mapsto \frac{1}{8} f\left(\frac{y-x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_2^x : \qquad & L_2(S^2 \times [-1,1]) \to L_2(S^2 \times [-1,1]) \\
& g(\omega, s) \qquad \mapsto \frac{1}{8} g\left(\omega, \frac{s - x^\top \omega}{2}\right) .
\end{aligned}
$$

Der Faktor 1/2 im Argument garantiert, daß dieses wieder in Ω bzw. $[-1,1]$ ist.

Nun definieren wir die Operatoren zur Rotation.

Es seien

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_1^U : \qquad & L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \\
& f(y) \mapsto f(U\, y)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_2^U : \qquad & L_2(S^2 \times [-1,1]) \to L_2(S^2 \times [-1,1]) \\
& g(\omega, s) \qquad \mapsto g(U\,\omega, s) .
\end{aligned}
$$

Fügen wir beides zusammen, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_1^x\, \mathcal{T}_1^U\, \mathcal{R}^*\, g(y) &= \frac{1}{8} \int_{S^2} g\left(\omega, \left(U\left(\frac{y-x}{2}\right)\right)^\top \omega\right)\, d\omega \\
&= \int_{S^2} \frac{1}{8}\, g\left(U\omega, \left(\frac{y-x}{2}\right)^\top \omega\right)\, d\omega \\
&= \int_{S^2} \frac{1}{8}\, g\left(U\omega, \frac{y^\top\omega - x^\top\omega}{2}\right)\, d\omega \\
&= \mathcal{R}^*\, \mathcal{T}_2^x\, \mathcal{T}_2^U\, g(y) .
\end{aligned}
$$

Für die Lösung von $\mathcal{R}^*\psi(x;\cdot\,) = e(x,\cdot\,)$ folgt nach dem Korollar 1.5.7

$$\psi\,(x;\omega,s) \;=\; \frac{1}{8}\,\phi\left(\frac{s-x^\top\omega}{2}\right).$$

$\square$

Statt $\phi\,(s)$ wollen wir in Zukunft $\psi^0\,(s)$ schreiben, um den Zusammenhang mit $\psi\,(x;\omega,s)$ auch äußerlich sichtbar zu machen.

Ziehen wir zum Ende des ersten Kapitels ein kurzes Resümee:

Wir haben ein Modell der 3D-Röntgen-Tomographie hergeleitet und unser Problem mathematisch formuliert. Auf der Suche nach einer praktikablen Lösung mußten wir gewisse Gegebenheiten und Bedingungen akzeptieren und haben durch die "Formel von GRANGEAT" einen Zusammenhang zwischen den gemessenen Daten und der 3D-Radon-Transformation gesehen. Danach haben wir eine Methode kennengelernt, wie wir eine brauchbare Lösung $\tilde{f}_\gamma$ aus $\mathcal{R}f$ gewinnen. Diese Grundlagen werden wir im nächsten Kapitel verwenden, um ein Verfahren zu entwickeln, das uns die Rekonstruktion von f ermöglicht.

II Die Approximative Inverse in der 3D - Computertomographie

Nachdem wir nun die mathematischen Grundlagen gelegt haben, werden wir in diesem Kapitel ein Verfahren konstruieren, das wir dann zur Lösung unseres Problems einsetzen. Dabei gehen wir zunächst davon aus, daß unsere Abtastkurve die Tuy'sche Bedingung erfüllt. Danach wollen wir unser Verfahren auf konkrete Geometrien übertragen. Wir betrachten den praxisrelevanten Fall, daß der Detektor und die Quelle sich in einer Kreisbahn um das Objekt bewegen. Hier sollen auch Aspekte der Implementation sowie der Auswahl des Mollifiers geklärt werden. Schließlich betrachten wir die Ergebnisse aus Simulationen und aus real gemessenen Daten und vergleichen diese mit einem Konkurrenzalgorithmus. Am Ende der Arbeit richten wir den Blick auf eine spiralförmige Abtastkurve und wollen einen ersten Ansatz zur Lösung präsentieren.

2.1 Eine Rekonstruktionsformel für Tuy-Kirillov-Kurven

Beginnen wir zunächst mit der Fortsetzung der Lösungssuche des bisher diskutierten Problems. Es seien also $g\left(a,\theta\right)$ die gemessenen Daten für eine Quellposition $a \in \Gamma$ und die Richtungen $\theta \in S^2$. Hierbei erfülle unsere Kurve Γ die Tuy'sche Bedingung. Jene Kurven werden auch **Tuy-Kirillov-Kurven** genannt. Nach all unseren Vorleistungen können wir das Verfahren von DIETZ (siehe [5]) sofort formulieren. Wir können $\tilde{f}\left(x\right)$ für alle Rekonstruktionspunkte $x \in \Omega$ bestimmen.

Satz 2.1.1

Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} n: & S^2 \times [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & (\omega, s) & \mapsto & n\left(\omega, s\right) \end{array}$$

bezeichne die Anzahl der Schnittpunkte der Ebene $x^\top\omega = s$, $x \in \mathbb{R}^3$ *mit der Abtastkurve* Γ. *Dann gilt*

$$\tilde{f}\,(x) \;=\; \frac{1}{4}\int_\Gamma\int_{S^2} g(a,\,\theta)\,k(x;\,a,\,\theta)\,d\theta\,da$$

$$\textit{mit}\quad k(x;\,a,\,\theta) = \int_{S^2}\Psi^0\big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\big)\,|a'^\top\omega|\,n(\omega,\,a^\top\omega)^{-1}\,\delta'(\theta^\top\omega)\,d\omega$$

$$\textit{und}\quad \Psi^0\,(s) = \int\limits_0^s \psi^0\,(t)\,dt + c\;.$$

Bemerkung:

Wir nennen $k(x;a,\theta)$ den Kern der divergenten 3D-Röntgen-Transformation in Analogie zur Bezeichnung des Rekonstruktionskerns $\psi(x;\omega,s)$ der 3D-Radon-Transformation. Später werden wir in einem anderen Zusammenhang (siehe 2.3) von $k(x;a,\theta)$ auch als Filter reden.

Beweis:

Wir starten den Beweis mit der Approximativen Inversen der 3D-Radon-Transformation (Satz 1.5.6)

$$\tilde{f}\,(x) \;=\; \mathcal{S}\,(\mathcal{R}f)\,(x)\;.$$

Einsetzen ergibt

$$\tilde{f}\,(x) \;=\; \langle\mathcal{R}f,\psi\rangle_{L_2\,(\,S^2\times\,[-1,1]\,)}$$

bzw.

$$\tilde{f}\,(x) \;=\; \int_{S^2}\int_{[-1,\,1]}\mathcal{R}f(\omega,\,s)\;\;\psi(x;\omega,s)\,ds\,d\omega\;.$$

Mit Satz 1.5.7 folgt

$$\tilde{f}\,(x) \;=\; \frac{1}{8}\int_{S^2}\int_{[-1,\,1]}\mathcal{R}f(\omega,\,s)\;\;\psi^0\left(\frac{s-x^\top\omega}{2}\right)ds\,d\omega\;.$$

Partielle Integration liefert

$$\tilde{f}\,(x) \;=\; -\frac{1}{4}\int_{S^2}\int_{[-1,\,1]}\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\omega,\,s)\,\Psi^0\left(\frac{s-x^\top\omega}{2}\right)ds\,d\omega$$

$$\text{mit}\quad \Psi^0\,(s) = \int\limits_0^s \psi^0\,(t)\,dt + c\;,$$

also sei $\Psi^0(s)$ eine Stammfunktion zu $\psi^0(s)$ mit additiver Konstante c. Für eine beliebige Tuy-Kirillov-Kurve kann man nun s durch $a^\top\omega$ substituieren und erhält

$$\tilde{f}(x) \;=\; -\frac{1}{4}\int_{S^2}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\omega, a^\top\omega)\;\Psi^0(\frac{(a-x)^\top\omega}{2})\;|a'^\top\omega|\;n(\omega,\,a^\top\omega)^{-1}\,da\,d\omega\;.$$

Durch Ausnutzen der Formel von GRANGEAT (Satz 1.3.2) gelangen wir schließlich zu unserem Ziel

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{4}\int_{S^2}\int_\Gamma\int_{S^2}\mathcal{D}f(a,\theta)\,\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta\,\Psi^0(\frac{(a-x)^\top\omega}{2})|a'^\top\omega|n(\omega,a^\top\omega)^{-1}\,da\,d\omega$$

oder anders formuliert

$$\tilde{f}(x) \;=\; \frac{1}{4}\int_\Gamma\int_{S^2} g(a,\theta)\;\;k(x;\,a,\theta)\;\;d\theta\;da$$

$$\text{mit } k(x;\,a,\,\theta) = \int_{S^2}\Psi^0\big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\big)\;|a'^\top\omega|\,n(\omega,\,a^\top\omega)^{-1}\,\delta'(\theta^\top\omega)\,d\omega\;.$$

□

Wir haben nun also die gesuchte Rekonstruktionsformel, mit der wir unser Problem lösen wollen.

Allerdings treten bei näherer Betrachtung die nächsten Probleme auf. Um einen brauchbaren Algorithmus zu erhalten, müssen wir die Ableitung der Delta-Distribution aus der Formel eliminieren. Dies läßt sich erreichen, indem wir die Funktion n differenzieren. Schnell wird jedoch ersichtlich, daß n nur ganzzahlige Werte annimmt.

An dieser Stelle allgemein gültig fortzufahren, ist deshalb wohl eher ungeeignet. Diese Ansicht vertritt jedenfalls DIETZ, als er in [5] an diese Stelle gelangt. Wir schließen uns seinen Überlegungen an und werden die Frage, wie wir die Funktion n approximieren, nur für Spezialfälle lösen. Hier sei schon einmal auf den letzten Teil der Arbeit (siehe 2.6) verwiesen, der an dieser Stelle ansetzt.

Wir wenden uns zunächst allerdings einer, für die praktische Anwendung interessanten Frage zu. Nämlich wie wir dieses Ergebnis für Tuy-Kirillov-Kurven auf eine Geometrie übertragen können, die uns zwar die Approximation der Funktion n leicht macht, aber dafür nicht die Tuy'sche Bedingung erfüllt. Die Rede ist hier von einer kreisförmigen Abtastkurve.

2.2 Anwendung bei einer kreisförmigen Abtastkurve

Das eben vorgestellte Verfahren zur Lösung des Problems für Tuy-Kirillov-Kurven basiert auf der Formel von GRANGEAT (1.3.2), das heißt auf dem Zusammenhang zwischen den Linienintegralen der divergenten 3D-Röntgen-Transformation und den Ebenenintegralen der 3D-Radon-Transformation. Unsere Methode der Berechnung der Lösung $\tilde{f}(x)$ erfordert, daß die Tuysche Bedingung (1.2.1) durch die Abtastkurve Γ erfüllt wird, da sonst eine Substitution von s durch $a^\top\omega$ wie im vorigen Beweis nicht möglich ist. Oder anders ausgedrückt sind die gemessenen Daten nicht ausreichend, um daraus die benötigten Informationen zu berechnen, als Folgerung daraus also auch nicht ausreichend, um $\tilde{f}(x)$ exakt zu bestimmen.

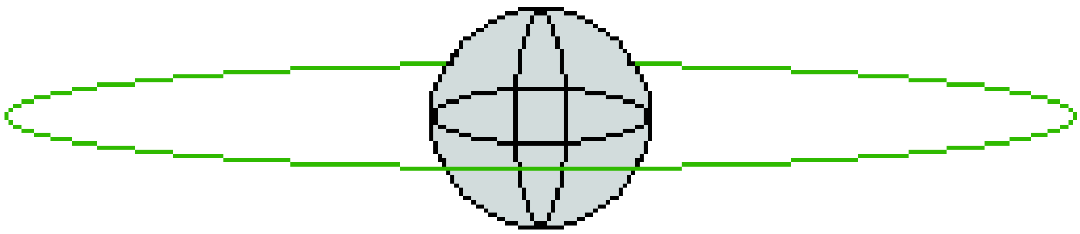


Abbildung 2.3: kreisförmige Abtastkurve um das Objekt

Schnell wird ersichtlich, daß ein Kreis $\Gamma = RS^1$ nicht die Tuy'sche Bedingung (Definition 1.2.1) erfüllt. Nehmen wir beispielsweise eine Ebene, die parallel zu der Abtastkurve liegt. Diese kann den Kreis zwangsläufig nicht schneiden oder tangieren. Es ist offensichtlich, daß die Tuy'sche Bedingung verletzt ist.

Dies ist natürlich keine neue Erkenntnis. DIETZ weist darauf in [5] hin, aber er betont auch die praktische Anwendung einer kreisförmigen Abtastkurve. Eine ausführlichere Betrachtung dieser Problematik gibt GRANGEAT in [3]. Er vergleicht dieses Problem mit dem eines eingeschränkten Winkels im 2D Fall (siehe z.B. [5]). Wir wollen uns dem Problem auf ähnliche Weise wie DIETZ nähern, allerdings zunächst genauer aufzeigen, wo das Problem liegt und inwiefern es relevant ist.

Diese Überlegung können wir bei konkreter Angabe des Radius R präzisieren. Wir können für jeden Punkt $x = s\omega$ von Ω entscheiden, ob die dazugehörige Ebene den Kreis schneidet, oder mathematisch ausgedrückt, ob die 3D-Radon-Daten für diesen Punkt zur Verfügung stehen.

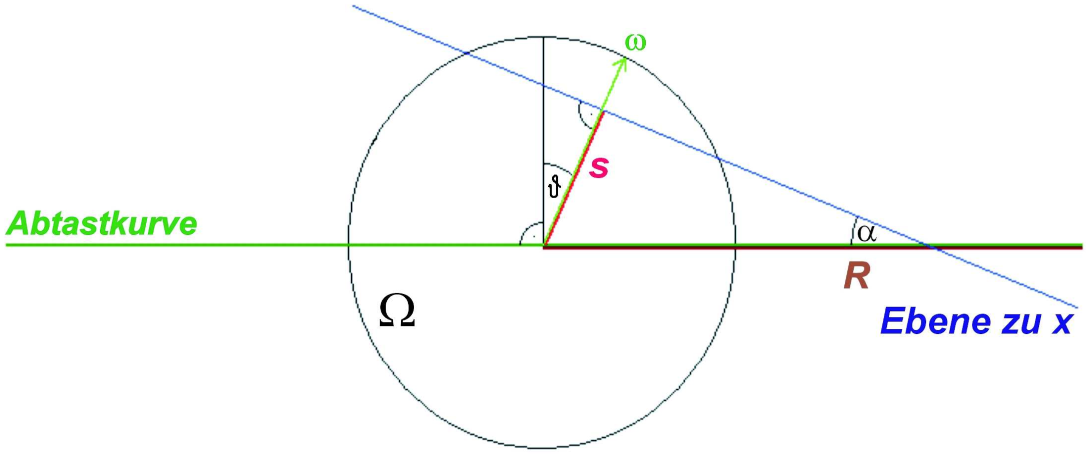


Abbildung 2.4: Projektion des 3D-Modells

Wir werden nun für ein festes $\omega = \omega(\varphi, \vartheta)$ eine Bedingung an s (in Abhängigkeit von R und ϑ) herleiten. Wir sehen (vgl. Abb. 2.4), daß die Ebene die Abtastkurve tangiert, wenn $s/R = \sin\alpha$ gilt. Offensichtlich ist $\alpha = \vartheta$ und damit in diesem Fall $s = R \sin\vartheta$. Also schneidet oder tangiert die Ebene die Kurve, wenn $s \leq R \sin\vartheta$ gilt.

Die Menge aller Punkte, für die dies nicht der Fall ist, nennen wir auch **Schattenzone**. Wir wollen nun diese Schattenzone an zwei Beispielen betrachten.

Abbildung 2.5: Querschnitt durch Ω, das 3D-Objekt ergibt sich durch Rotation; Schattenzone für den Radius 2 (l.) und für den Radius 12,7 (r.)

Das erste Beispiel in Abbildung 2.5 zeigt, daß die Schattenzone für einen kleinen Radius relativ groß ist. Es gilt jedoch, je größer der Radius, desto kleiner die Schattenzone. Das heißt, wir sollten von Fall zu Fall überprüfen, wie groß die Schattenzone in Wirklichkeit ist. So zeigt es sich, daß in einem Fall, der ein in der Realität vorkommendes Verhältnis von Radius zu Ω hat (siehe 2.5.6), die Schattenzone eher klein ist, wie das zweite Beispiel deutlich macht.

In einem solchen Fall haben wir also fast alle Informationen, die wir zum Rekonstruieren benötigen. Dies soll unsere Motivation sein, wenn wir nun wie DIETZ das Verfahren übertragen.

2.2.1 Das Rekonstruktionsverfahren

Wir beginnen zunächst wie in Satz 2.1.1 mit der Approximativen Inversen der 3D-Radon-Transformation

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\,(x) &= \mathcal{S}\,(\mathcal{R}f)\,(x) \\
&= -\frac{1}{4}\int_{S^2}\int_{[-1,1]}\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\omega,s)\,\Psi^0\left(\frac{s-x^\top\omega}{2}\right)\,ds\,d\omega \\
&\qquad\qquad \text{mit}\quad \Psi^0\,(s) = \int\limits_0^s \psi^0\,(t)\,dt + c \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{-1}^1\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\omega(\varphi,\vartheta),s)\,\Psi^0\left(\frac{s-x^\top\omega(\varphi,\vartheta)}{2}\right)\,ds\,d\varphi\sin\vartheta\,d\vartheta\ .
\end{aligned}$$

Nun wollen wir im vorher diskutierten Sinn handeln. Es sei $m := \min\{1, R\sin\vartheta\}$ und wir approximieren

$$\tilde{f}\,(x) \approx -\frac{1}{4}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_{-m}^m\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\omega(\varphi,\vartheta),s)\,\Psi^0\left(\frac{s-x^\top\omega(\varphi,\vartheta)}{2}\right)\,ds\,d\varphi\sin\vartheta\,d\vartheta\ .$$

Wir können nun wie vorhin substituieren. Betrachten wir nun die Funktion n. Es gilt $n(\omega, a^\top\omega) = 2$ *f.ü.* . Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\,(x) &= \frac{1}{8}\int_\Gamma\int_{S^2} g(a,\theta)\,k(x;\,a,\,\theta)\,d\theta\,da \\
&\qquad \text{mit}\quad k(x;\,a,\,\theta) = \int_{S^2}\Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\Big)\,|a'^\top\omega|\,\delta'(\theta^\top\omega)\,d\omega\ .
\end{aligned}$$

Bevor wir uns nun mit den Eigenschaften des Kernes beschäftigen, wollen wir noch einige Umformungen vornehmen, um die Ableitung der Delta-Distribution zu eliminieren. Sei dazu U eine unitäre Transformation mit $U\theta = e_3$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
k(x;\, a,\, \theta) &= \int\limits_{S^2} \Psi^0\big(\frac{(a-x)^\top \omega}{2}\big)\, |a'^\top \omega|\, \delta'\big((U\theta)^\top U\omega\big)\, d\omega \\
&= \int\limits_{S^2} \Psi^0\big(\frac{(a-x)^\top U^\top \omega}{2}\big)\, |a'^\top U^\top \omega|\, \delta'(e_3^\top \omega)\, d\omega \\
&= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \Psi^0\big(\frac{(a-x)^\top U^\top \omega(\vartheta,\, \varphi)}{2}\big)\, |a'^\top U^\top \omega(\vartheta,\, \varphi)|\, \delta'(\cos\vartheta)\, d\varphi\, \sin\vartheta\, d\vartheta
\end{aligned}
$$

nach der Einführung von Polarkoordinaten. Durch Einsetzen der Delta–Funktion folgt

$$
\begin{aligned}
k(x;\, a,\, \theta) &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big\{\Psi^0\big(\frac{(a-x)^\top U^\top \omega(\vartheta,\, \varphi)}{2}\big)\, |a'^\top U^\top \omega(\vartheta,\, \varphi)|\Big\}\Big|_{\vartheta=\pi/2} \, d\varphi \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \psi^0\big(\frac{(a-x)^\top U^\top \omega(\pi/2,\, \varphi)}{2}\big)\, |a'^\top U^\top \omega(\pi/2,\, \varphi)|\, (-\frac{1}{2}\,(a-x)^\top\theta) \\
&\quad + \Psi^0\big(\frac{(a-x)^\top\, U^\top \omega(\pi/2,\, \varphi)}{2}\big)\, \mathrm{sgn}\big(a'^\top U^\top \omega(\pi/2,\, \varphi)\big)\, (-a'^\top\theta)\, d\varphi\ .
\end{aligned}
$$

Daraus resultiert schließlich

$$
\begin{aligned}
k(x;\, a,\, \theta) &= \frac{1}{2}\,(x-a)^\top\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^\perp} \psi^0\big(\frac{(a-x)^\top \omega}{2}\big)\, |a'^\top \omega|\, d\omega \\
&\quad - a'^\top\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^\perp} \Psi^0\big(\frac{(a-x)^\top \omega}{2}\big)\, \mathrm{sgn}(a'^\top \omega)\, d\omega\ .
\end{aligned}
$$

Wegen $\int_{S^2\cap\theta^\perp} \mathrm{sgn}(a'^\top \omega)\, d\omega = 0$ ist nun ersichtlich, daß die additive Konstante bei der Bildung der Stammfunktion keine Rolle spielt. Wir können $c = 0$ setzen und erhalten $\Psi^0\,(s) = \int\limits_0^s \psi^0\,(t)\, dt$.

In gewisser Weise sind wir nun am Ziel und am Anfang unser Betrachtungen. Wir haben die Möglichkeit, für jeden Punkt x des Rekonstruktionsgebietes $f(x)$ approximativ zu bestimmen. Dies war unser ursprüngliches Problem. Nun, da wir ein Verfahren entwickelt haben, werden wir es unter die Lupe nehmen, Eigenschaften betrachten, die uns unter verschiedenen Gesichtspunkten weiterbringen.

2.2.2 Approximative Invarianzen

Ein Vorteil dieses Verfahrens ist, daß die Berechnung des Kerns unabhängig von den Daten ist, wir ihn also für eine bestimmte Abtastung schon bestimmen können. Dies kann unter Umständen immens Zeit sparen. Allerdings ist die Menge der zu speichernden Werte auch sehr groß. Ein kleines Beispiel aus der Praxis (siehe 2.5.6) verdeutlicht dies. Nehmen wir eine Detektorauflösung von 512×512. So empfielt sich, um die bestmögliche Qualität zu erhalten, daß wir ein Rekonstruktionsgebiet von 512^3 Punkten wählen. Haben wir dann 400 verschiedene Quellpositionen, ergeben sich $400 \cdot 512^5$ Auswertungen des Kerns. Bei doppelter Genauigkeit wären also 104857600 Gigabytes abzuspeichern. Wollen wir die Menge reduzieren, dann empfiehlt sich zuerst der Blick auf die Abhängigkeit des Kerns von den Rekonstruktionspunkten, denn hier liegt der Löwenanteil des Bedarfs.

Betrachten wir den Kern $k(x; a, \theta)$ in Abhängigkeit von x, dann fällt auf, daß die Kerne für Punkte, die nahe beieinander liegen, und bei einem praxisrelevanten Verhältnis der Durchmesser des Rekonstruktionsgebietes und der Abtastkurve fast gleich sind. Diese Aussage soll nun mathematisch präzisiert werden. Zunächst geben wir die Motivation der Approximationen an.

Approximationen:

Es gelte

$$\psi^0(s) \;\approx\; \psi^0\Big(\frac{R}{|a-x|}\,s\Big)\,\frac{R^3}{|a-x|^3}$$

und

$$\Psi^0(s) \;\approx\; \Psi^0\Big(\frac{R}{|a-x|}\,s\Big)\,\frac{R^2}{|a-x|^2}\ .$$

Diese Approximationen beruhen zum einen auf der einfachen Tatsache, daß in praxisrelevanten Fällen $\frac{R}{|a-x|} \approx 1$ gilt, zum anderen auf einer Dilatationsinvarianz des Rekonstruktionskerns der 3D-Radon-Transformation für dilatationsinvariante Mollifier, wie sie in [5] von DIETZ gezeigt wird. Da dies das einzige Mal ist, daß wir diese Invarianz verwenden, und dann auch nur im Kontext der Approximationen, wollen wir auf den Beweis verzichten.

Sei U_x die unitäre Transformation, für die

$$U_x^\top \Big(\frac{a-x}{|a-x|} \Big) = \frac{a}{R}$$

gilt. Dann gelte

$$U_x^\top \, a' \;\approx\; a' \;.$$

Diese weitere notwendige Näherung, die DIETZ in [5] verwendet, wird mit ähnlichen Argumenten motiviert.

Bemerkung:

DIETZ schlägt in [5] für die erste Approximation den Faktor $\frac{R-1}{|a-x|}$ vor, da das Argument von ψ^0 nur für $s \in [-1,1]$ definiert ist. Im Sinne einer effizienteren Umsetzung in Punkto Genauigkeit und Schnelligkeit wollen wir jedoch $\frac{R}{|a-x|}$ verwenden und ψ^0 für $s \notin [-1,1]$ Null setzen, also den Rekonstruktionskern abschneiden. Dies ist mehr eine theoretische Frage als eine praktische, da der Rekonstruktionskern in der numerischen Berechnung schon weit vor den Intervallgrenzen Null ist.

Invarianz 2.2.1

Sei U_x wie vorhin. Dann gilt mit vorherigen Annahmen

$$k(x;a,\theta) \;\approx\; \frac{R^2}{|a-x|^2} \; k\left(0;a,U_x^\top \theta\right) \;.$$

Bemerkung:

Wir verwenden hier eine abkürzende Schreibweise 0 für $(0,0,0)^\top \in \mathbb{R}^3$.

Herleitung:

$$
\begin{aligned}
k(x;\,a,\,\theta) \;&=\; \frac{1}{2}\,(x-a)^{\top}\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^{\perp}} \psi^0\big(\frac{(a-x)^{\top}\omega}{2}\big)\,|a'^{\top}\omega|\,d\omega \\
&\quad -\; a'^{\top}\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^{\perp}} \Psi^0\big(\frac{(a-x)^{\top}\,\omega}{2}\big)\,\mathrm{sgn}(a'^{\top}\omega)\,d\omega \\
&=\; -\frac{1}{2}\,|a-x|\frac{(a-x)}{|a-x|}^{\top}\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^{\perp}} \psi^0\big(\frac{|a-x|\,(a-x)^{\top}\omega}{|a-x|\,2}\big)\,|a'^{\top}\omega|\,d\omega \\
&\quad -\; a'^{\top}\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^{\perp}} \Psi^0\big(\frac{|a-x|\,(a-x)^{\top}\omega}{|a-x|\,2}\big)\,\mathrm{sgn}(a'^{\top}\omega)\,d\omega \\
&=\; -\frac{1}{2}\,|a-x|\frac{a}{R}^{\top}U_x^{\top}\,\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^{\perp}} \psi^0\big(\frac{|a-x|\,a^{\top}U_x^{\top}\omega}{R\,2}\big)\,|a'^{\top}\omega|\,d\omega \\
&\quad -\; a'^{\top}\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^{\perp}} \Psi^0\big(\frac{|a-x|\,a^{\top}U_x^{\top}\omega}{R\,2}\big)\,\mathrm{sgn}(a'^{\top}\omega)\,d\omega \\
&=\; \frac{1}{2}\frac{|a-x|}{R}(-a)^{\top}U_x^{\top}\,\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^{\perp}} \psi^0\big(\frac{|a-x|\,a^{\top}U_x^{\top}\omega}{R\,2}\big)\,|(U_x^{\top}a')^{\top}U_x^{\top}\omega|\,d\omega \\
&\quad -\; (U_x^{\top}a')^{\top}U_x^{\top}\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^{\perp}} \Psi^0\big(\frac{|a-x|\,a^{\top}U_x^{\top}\omega}{R\,2}\big)\,\mathrm{sgn}((U_x^{\top}a')^{\top}U_x^{\top}\omega)\,d\omega \\
&\approx\; \frac{1}{2}\frac{|a-x|}{R}(-a)^{\top}U_x^{\top}\,\theta \int\limits_{S^2\cap\,(U_x^{\top}\theta)^{\perp}} \psi^0\big(\frac{|a-x|\,a^{\top}\omega}{R\,2}\big)\,|a'^{\top}\omega|\,d\omega \\
&\quad -\; a'^{\top}U_x^{\top}\theta \int\limits_{S^2\cap\,(U_x^{\top}\theta)^{\perp}} \Psi^0\big(\frac{|a-x|\,a^{\top}\omega}{R\,2}\big)\,\mathrm{sgn}(a'^{\top}\omega)\,d\omega \\
&\approx\; \frac{1}{2}\frac{R^2}{|a-x|^2}(-a)^{\top}U_x^{\top}\,\theta \int\limits_{S^2\cap\,(U_x^{\top}\theta)^{\perp}} \psi^0\big(\frac{a^{\top}\omega}{2}\big)\,|a'^{\top}\omega|\,d\omega \\
&\quad -\; \frac{R^2}{|a-x|^2}a'^{\top}U_x^{\top}\theta \int\limits_{S^2\cap\,(U_x^{\top}\theta)^{\perp}} \Psi^0\big(\frac{a^{\top}\omega}{2}\big)\,\mathrm{sgn}(a'^{\top}\omega)\,d\omega \\
&=\; \frac{R^2}{|a-x|^2}\;k\,(0;a,U_x^{\top}\theta)
\end{aligned}
$$

$\square$

Wir werden den Kern also nur noch für $x = 0$ auswerten müssen. Betrachten wir wieder unser Beispiel. Die Menge ist nun auf 800 Megabytes Speicher heruntergeschrumpft. Betrachten wir nun die Quellpositionen und stellen uns die Frage, ob die Drehung der ganzen Apparatur wirklich Einfluß auf unseren Kern hat. Die Antwort liefert das nächste Lemma.

Lemma 2.2.2

Sei V_a die Drehung, durch die die Quellposition von a_0 auf a gedreht wird, also $a = V_a a_0$. Dann gilt

$$k(0; a, \theta) = k(0; a_o, V_a^\top \theta) \ .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
k\,(0; a, \theta) &= -\frac{1}{2}\, a^\top \theta \int\limits_{S^2 \cap \theta^\perp} \psi^0 \Big(\frac{a^\top \omega}{2}\Big)\, |a'^\top \omega|\, d\omega \\
&\quad - a'^\top \theta \int\limits_{S^2 \cap \theta^\perp} \Psi^0 \Big(\frac{a^\top \omega}{2}\Big)\, \mathrm{sgn}(a'^\top \omega)\, d\omega \\
&= -\frac{1}{2}\, a_o^\top V_a^\top \theta \int\limits_{S^2 \cap \theta^\perp} \psi^0 \Big(\frac{a_o^\top V_a^\top \omega}{2}\Big)\, |a_0'^\top V_a^\top \omega|\, d\omega \\
&\quad - a_0'^\top V_a^\top \theta \int\limits_{S^2 \cap \theta^\perp} \Psi^0 \Big(\frac{a_o^\top V_a^\top \omega}{2}\Big)\, \mathrm{sgn}(a_0'^\top V_a^\top \omega)\, d\omega \\
&= k\,(0; a_o, V_a^\top \theta) \ .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Diese Rotationsinvarianz gilt nur für den Punkt $x = 0$. Die Aussage des Lemmas läßt sich allgemein folgend ausdrücken.

$$k(x; a, \theta) = k(V_a^\top x; V_a^\top a, V_a^\top \theta)$$

Das heißt, wir gelangen zu der plausiblen Einsicht, daß sich nichts an der Berechnung ändert, wenn wir das ganze System drehen.

Um dies nun effektiv auszunutzen, müssen wir $x = V_a^\top x$ fordern. Dies wird jedoch nur für $x = 0$ erfüllt. Daher kombinieren wir nun die letzten beiden Schritte.

Invarianz 2.2.3

Seien U_x und V_a wie in Invarianz 2.2.1 und Lemma 2.2.2. Dann gilt mit den vorherigen Annahmen

$$k(x; a, \theta) \approx \frac{R^2}{|a - x|^2} \, k\left(0; a_0, V_a^\top U_x^\top \theta\right) .$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} k(x; a, \theta) &\approx \frac{R^2}{|a - x|^2} \, k\left(0; a, U_x^\top \theta\right) \\ &= \frac{R^2}{|a - x|^2} \, k\left(0; a_0, V_a^\top U_x^\top \theta\right) \end{aligned}$$

□

Greifen wir wieder unser Beispiel auf. Da wir den Kern nur für $x = 0$ und eine feste Quellposition a_0 auswerten, ist es nun nur noch nötig, 2 Megabytes zu speichern. Wir sind bei akzeptablen Größen angelangt. Später (siehe Abschnitt 2.4) werden wir sehen, daß sich der Speicherbedarf für geeignete Mollifier noch reduzieren wird. Eine nähere Untersuchung der Eigenschaften kann sogar noch zu sehr großen Einsparungen führen. Dazu jedoch später mehr.

Interpretieren wir zunächst unsere approximativen Invarianzen. In der konkreten Umsetzung bedeutet das Lemma 2.2.2, daß wir für jeden Quellpunkt, also jede Detektoraufnahme, denselben Kern benutzen. Die Invarianz 2.2.1 besagt in diesem Sinn, daß wir den Kern, den wir für den Punkt 0 berechnet haben, auf dem Detektor in den projizierten Punkt von x verschieben.

Um diese Aussagen besser zu verstehen, betrachten wir an dieser Stelle, wie wir unser Verfahren konkret in die Praxis umsetzen werden.

2.3 Gefilterte Rückprojektion (FBP)

In der Praxis stellt sich natürlich die Frage nach einer effizienten Implementierung eines Verfahrens. Dabei hat sich eine bestimmte Methode etabliert. Es handelt sich um die sogenannte **gefilterte Rückprojektion** (*engl.:* filtered backprojection - FBP). Diese besteht, wie der Name schon vermuten läßt, aus 2 Schritten, die für jeden Quellpunkt vollzogen werden.

Zuerst werden die gemessenen Daten mit einem Filter gefaltet. Danach wird im zweiten Schritt das so entstandene Bild entlang des Kegelstrahls durch das Rekonstruktionsgebiet zum Quellpunkt zurück geworfen.

Zunächst wollen wir an einem Beispiel das Vorgehen zeigen und danach erklären, wie unser Verfahren als FBP gesehen werden kann.

2.3.1 Das Prinzip der FBP am Beispiel des Feldkamp-Algorithmus mit Shepp-Logan-Filter

Nehmen wir an, wir wollen eine Kugel (genaue Beschreibung in A.1) rekonstruieren. Die Abbildung 2.6 zeigt die daraus resultierende Röntgenaufnahme. Als Rekonstruktionsverfahren wählen wir den Algorithmus von Feldkamp, der in dieser Arbeit stets zum Vergleich herangezogen wird.Dieser (siehe [11]) beruht auf einer heuristischen Verallgemeinerung der Fächerstrahlgeometrie (siehe z.B. [12]). Man wendet einen Filter, der für diesen 2D-Fall berechnet wurde, zeilenweise auf die Daten an. Als "3D-Filter" geschrieben, ist der Filter überall Null, bis auf die mittlere Zeile, in die wir den "2D-Filter" einsetzen. Unter Hilfe dieses Filters wird dann eine gefilterte Rückprojektion durchgeführt.

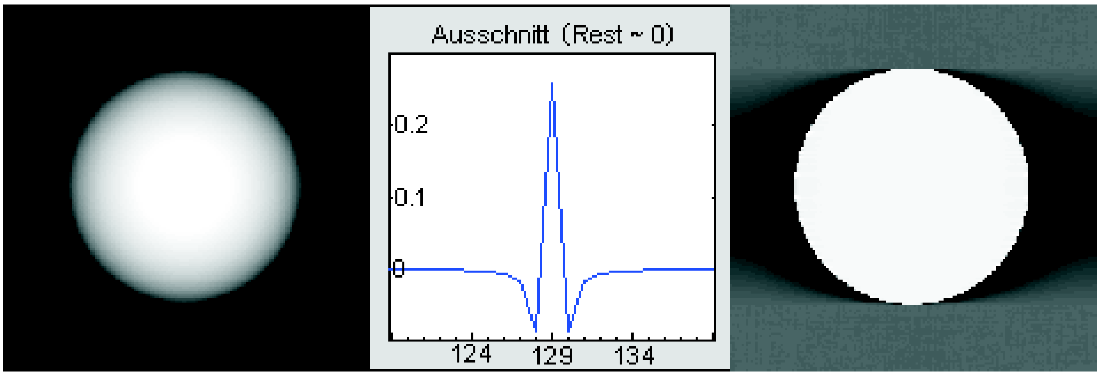


Abbildung 2.6: Daten , Shepp-Logan-Filter und gefilterte Daten

In dieser Arbeit wurde stets der Shepp-Logan-Filter (siehe [12], Abb. 2.6) für den Feldkamp-Algorithmus verwendet. Falten wir nun die Daten mit dem Filter, erhalten wir das in Abbildung 2.6 zu sehende Bild. Diese gefilterten Daten werden dann rückprojiziert.

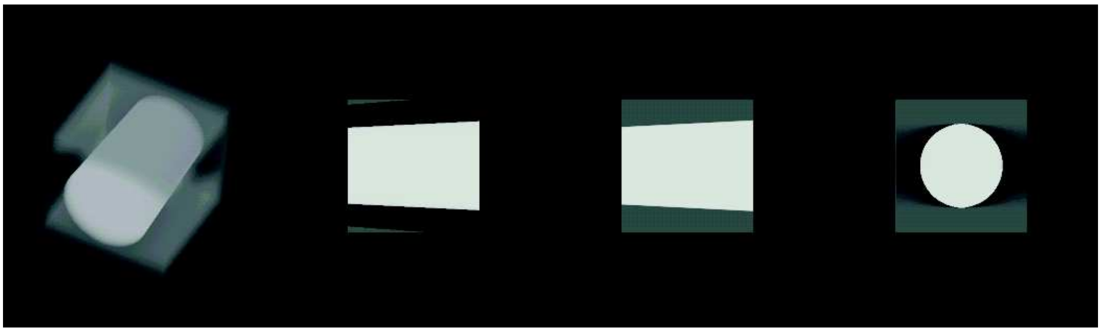


Abbildung 2.7: Rekonstruktion für eine Quelle

Für einen Quellpunkt ist dies in der Abbildung 2.7 zu sehen. Zu beachten ist die YZ-Ebene (im Bild ganz rechts), welche wie die gefilteren Daten aussieht. Entlang der X-Achse wurde rückprojiziert.

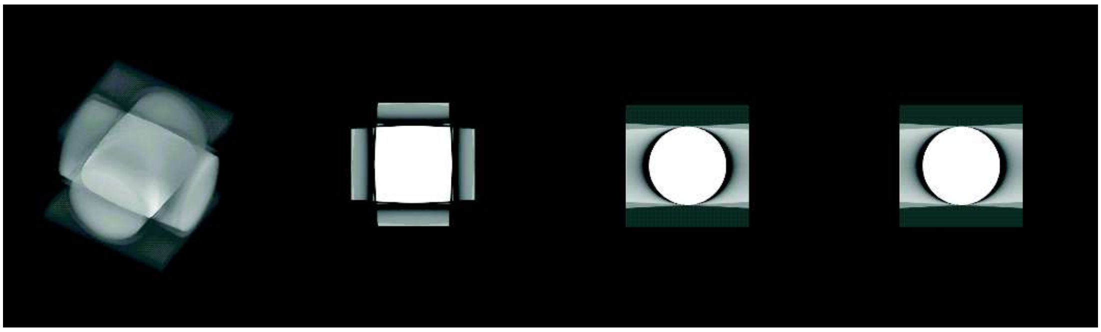


Abbildung 2.8: Rekonstruktion für 4 Quellen

Die Abbildung 2.8 zeigt eine Rekonstruktion mit 4 Quellpunkten in gleichen Abständen auf einer Kreisbahn verteilt. Hier sollte deutlich werden, wie sich durch Überlagern der Kegel das Objekt ergibt.

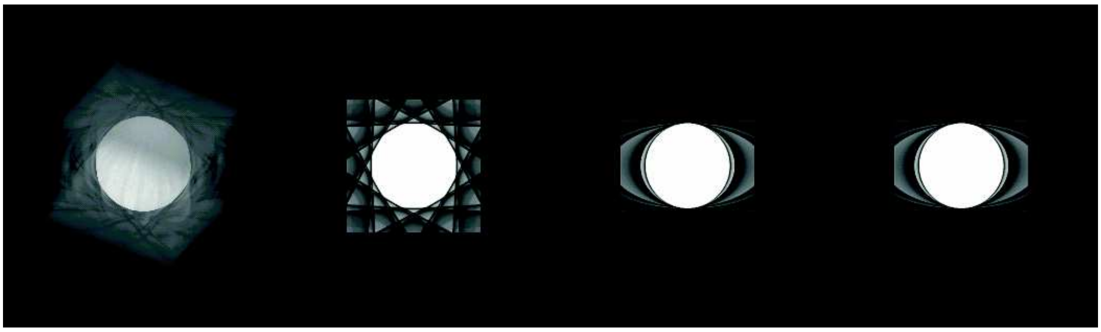


Abbildung 2.9: Rekonstruktion für 12 Quellen

In Abbildung 2.9 sieht man, daß das Objekt schon bei 12 äquivalent verteilten Quellen gut zu erkennen ist. Zu beachten ist jedoch erstens, daß das Objekt in gewissem Sinne einfach ist und keine Details enthält, und zweitens, daß die Artefakte (siehe XY-Ebene) doch deutlich sind.

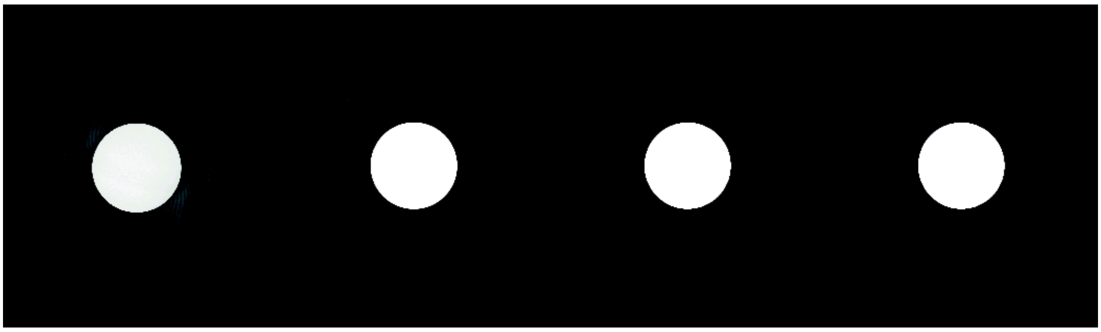


Abbildung 2.10: Rekonstruktion für 120 Quellen

Die Rekonstruktion mit 120 Quellen (siehe Abb. 2.10) hat eine sehr gute Qualität. Diese Anzahl von Quellen ist in der medizinischen Anwendung realistisch.

Nachdem wir jetzt gesehen haben, wie ein Verfahren vom Typ gefilterte Rückprojektion funktioniert, wenden wir uns nun wieder der Approximativen Inversen zu.

2.3.2 Unser Verfahren als FBP

Erinnern wir uns wieder an die Aussagen, die wir am Ende von 2.2.2 gemacht haben, und betrachten wir unser Verfahren.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &\approx \frac{1}{8}\int_\Gamma \int_{S^2} g(a,\theta)\ k(x;\, a,\, \theta)\, d\theta\, da \\ &\approx \frac{1}{8}\int_\Gamma \frac{R^2}{|a-x|^2}\int_{S^2} g(a,\theta)\ k(0;\, a_0,\, V_a^\top U_x^\top \theta)\, d\theta\, da\end{aligned}$$

Um das innere Integral für ein festes a_0 für einem beliebigen Rekonstruktionspunkt x auszuwerten, müssen wir den Punkt x auf den Detektor projizieren. Der Detektor kann aber nur an diskreten Stellen ausgewertet werden. Wir führen die Rechnung daher für die Nachbarpunkte durch und interpolieren dann bilinear.

Um dabei mehrfache Berechnungen zu vermeiden, bestimmen wir zuerst für alle möglichen Punkte auf dem Detektor die entsprechenden Werte. Schauen wir uns diese Berechnungen auf dem Detektorgitter genauer an, so wird ersichtlich, daß wir durch die Verschiebung, verursacht von U_x, nichts anderes machen, als eine (diskrete) Faltung der Daten g mit dem Kern k. Diese wird für alle Gitterpunkte durchgeführt. Machen wir uns dies bewußt, so können wir den Kern auch Filter nennen.

Man ahnt schon, was dann das äußere Integral darstellt. Dort werden die interpolierten Werte für die Rekonstruktionspunkte aufsummiert und gewichtet. Erinnern wir uns, wie wir zu den Berechnungen gekommen sind und fassen dies nun in umgekehrter Richtung auf. Dann wird ersichtlich, daß das äußere Integral die Rückprojektion ist.

Um die Faltung effizient zu gestalten, führen wir sie im Fourier-Raum durch. Wir erhalten folgenden **Algorithmus**:

- Der Detektor habe dx Elemente in horizontaler Richtung und dy Elemente in vertikaler Richtung. Das Rekonstruktionsgebiet sei ein Quader mit vx Elementen in X-Richtung, vy Elemente in Y-Richtung und vz Elementen in Z-Richtung. Der Punkt (u, v, w) des Quaders habe die Koordinaten $x\,(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Die Anzahl der Quellpositionen sei n. Der Vektor, der von der Quelle a_1 auf das Detektorelement $(i, j) \in \{1, ..., dx\} \times \{1, ..., dy\}$ zeigt, sei $\theta_{i,j}$. FFT bezeichne die 2D-Fast-Fourier-Transformation und IFFT die inverse FFT. Schließlich sei '.*' die punktweise Multiplikation zweier Matrizen, also $(A. * B)_{i,j} = A_{i,j} \cdot B_{i,j}$.

- Vor Beginn der Datenmessung:

  für $1 \le i \le dx,\ 1 \le j \le dy$

  $K_{i,j} = \frac{1}{8}\ k(0; a_1, \theta_{i,j});$

  mit

$$k\,(0; a_1, \theta_{i,j}) \;=\; -\,\frac{1}{2}\ a_1^\top \theta_{i,j} \int\limits_{S^2 \cap\, \theta_{i,j}^\perp} \psi^0\Big(\frac{a_1^\top \omega}{2}\Big)\ |a_1'^{\top} \omega|\ d\omega \;-\; a_1'^{\top} \theta_{i,j} \int\limits_{S^2 \cap\, \theta_{i,j}^\perp} \Psi^0\Big(\frac{a_1^\top \omega}{2}\Big)\ \mathrm{sgn}(a_1'^{\top} \omega)\ d\omega$$

  ende;

  $FK\ = \mathrm{FFT}(K);$

  für $1 \le u \le vx,\ 1 \le v \le vy,\ 1 \le w \le vz$

  $f(u, v, w) = 0;$

  ende;

- Nach der Datenmessung:

  für $1 \le l \le n$

$$FG_l = \mathrm{FFT}\left(\Big(g(a_l, \theta_{i,j})\Big)_{\substack{1 \le i \le dx \\ 1 \le j \le dy}}\right);$$

  $GD_l = \mathrm{IFFT}\ (FK.*FG_l);$

  für $1 \le u \le vx,\ 1 \le v \le vy,\ 1 \le w \le vz$

  Bestimme Schnittpunkt $P(a_l, u, v, w)$ des Detektors
  mit der Gerade durch a_l und (u, v, w);

  $I\Big(P(a_l, u, v, w)\Big) =$ bilinear interpolierter Wert
  der 4 Nachbarpunkte
  auf dem Gitter;

$$f(u,v,w) = f(u,v,w) + \frac{R^2}{|a_l - x\,(u,v,w)|^2} \cdot I\Big(P(a_l,u,v,w)\Big);$$

falls l == n

$$f(u,v,w) = \frac{2\pi}{n}\, f(u,v,w);$$

ende;

ende;

$\square$

Wir haben nun das Verfahren mathematisch hergeleitet und die praktische Umsetzung gerade kennengelernt. Das Einzige, was uns zur numerischen Umsetzung noch fehlt, ist die Berechnung des Filters. Um möglichst allgemein zu bleiben, haben wir bisher noch keinen Mollifier ausgewählt und konnten daher auch noch nicht rekonstruieren. Dies soll sich nun ändern.

2.4 Die Auswahl des Mollifier und Berechnung des Filters

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, unterscheidet sich unser Verfahren von anderen Verfahren des Typs gefilterte Rückprojektion im Wesentlichen dadurch, daß wir einen anderen Filter verwenden. Wir wollen also nun Kerne unseres Typs berechnen. Um dies zu vereinfachen, führen wir zunächst eine neue Parametrisierung ein.

Lemma und Definition 2.4.1

Die Kurve sei $a(\lambda) = R\,(-\cos\lambda, -\sin\lambda, 0)^\top$, $\lambda \in [0, 2\pi)$ *und* $a_0 = (-R, 0, 0)^\top$. *Dann sei*

$$\begin{aligned} k(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\, R \cos\beta \cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \psi^0\left(s(\mu;\alpha,\beta) \right) \left| t(\mu;\alpha,\beta) \right| d\mu \\ &\quad + \cos\beta \sin\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \Psi^0\left(s(\mu;\alpha,\beta) \right) \operatorname{sgn}\left(t(\mu;\alpha,\beta) \right) d\mu \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad s(\mu;\alpha,\beta) = R\,[\cos\mu\sin\alpha - \sin\mu\sin\beta\cos\alpha]/2$$

$$\text{und} \quad t(\mu;\alpha,\beta) = -\cos\mu\cos\alpha - \sin\mu\sin\beta\sin\alpha \ .$$

Es gilt dann

$$k(\alpha,\beta) = k(0;a_0,\theta(\alpha,\beta)) \quad \textit{mit} \quad \theta(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha \\ -\sin\beta \end{pmatrix} \ .$$

mit $\alpha,\beta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Bemerkung:

Hier zeigt der Vektor $\theta(0,0) = (1,0,0)^\top$ genau auf die Mitte. Wir erkennen, daß α der Öffnungswinkel in horizontaler und β der in vertikaler Richtung ist.

Beweis:

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} k(0;a_0,\theta(\alpha,\beta)) \quad &= \quad -\frac{1}{2}\,a_0^\top\big(\theta(\alpha,\beta)\big) \int\limits_{S^2\cap\left(\theta(\alpha,\beta)\right)^\perp} \psi^0\big(\frac{a_0^\top\omega}{2}\big)\,|{a_0'}^\top\omega|\,d\omega \\ &\quad - {a_0'}^\top\big(\theta(\alpha,\beta)\big) \int\limits_{S^2\cap\left(\theta(\alpha,\beta)\right)^\perp} \Psi^0\big(\frac{a_0^\top\omega}{2}\big)\,\mathrm{sgn}({a_0'}^\top\omega)\,d\omega \ . \end{aligned}$$

Wir wählen den Weg

$$\omega(\mu) = \tilde{\omega_1}\,\cos\mu + \tilde{\omega_2}\,\sin\mu, \quad \mu\in[-\pi,\pi]$$

mit

$$\tilde{\omega_1} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\omega_2} = \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} \ ,$$

wobei gilt

$$\theta(\alpha,\beta) \perp \tilde{\omega_1} \quad , \quad \theta(\alpha,\beta) \perp \tilde{\omega_2} \quad , \quad \tilde{\omega_1} \perp \tilde{\omega_2} \quad \text{und} \quad |\tilde{\omega_1}| = |\tilde{\omega_2}| = 1 \ .$$

Wir erhalten durch Einsetzen von a_o und ω schließlich

$$\begin{aligned} k\left(0; a_0, \theta(\alpha,\beta)\right) &= \frac{1}{2}\, R \cos\beta \cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \psi^0\left(s(\mu;\alpha,\beta) \right) \left| t(\mu;\alpha,\beta) \right| \, d\mu \\ &\quad + \cos\beta \sin\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \Psi^0\left(s(\mu;\alpha,\beta) \right) \operatorname{sgn}\left(t(\mu;\alpha,\beta) \right) \, d\mu \\ &= k\left(\alpha,\beta\right) \ . \end{aligned}$$

□

Sich auf den Verlauf der Kurve festzulegen, ist in diesem Fall keine Einschränkung, sondern ermöglicht lediglich eine bequemere Notation. Falls die Abtastkurve nicht in der XY-Ebene liegt, können wir das ganze System drehen, so daß dies dann der Fall ist. Nach der Rekonstruktion müßte dann die Drehung wieder rückgängig gemacht werden.

Im Laufe dieser Arbeit haben wir einige Forderungen an einen möglichen Mollifier gestellt. Diese Eigenschaften haben wir ständig als Voraussetzung für die Durchführung unseres Verfahrens angesehen. Daher wollen wir uns nochmals kurz einen Überblick verschaffen.

Auswahlkriterien 2.4.2

Für einen Mollifier $\varepsilon = \varepsilon_\gamma(y)$ gelte:

1. *Der Mollifier ε sei translationsinvariant (vgl. Satz 1.5.7).*
2. *Der Mollifier ε sei rotationsinvariant (vgl. Satz 1.5.7).*
3. *Der Mollifier ε sei dilationsinvariant (vgl. Bem. vor Invarianz 2.2.1).*
4. *Der Mollifier ε habe kompakten Träger in Ω und erfülle die Glattheitsbedingung $\varepsilon \in H_0^\alpha(\Omega)$, $\alpha \geq 1$ (vgl. Lemma 1.5.5).*

Aufgrund dieser Auswahlkriterien und unserer neuen Schreibweise können wir, noch bevor wir einen Mollifier konkret angeben, eine weitere nützliche Eigenschaft herleiten.

2.4.1 Symmetrie

In diesem kleinen Abschnitt wollen wir die Übertragung symmetrischer Strukturen der Abtastkurve und des Mollifiers auf den Kern betrachten. Richten wir zuerst unser Augenmerk auf eine Eigenschaft, die aus der Symmetrie der Abtastkurve folgt.

Lemma 2.4.3

Für die abkürzenden Schreibweisen aus Lemma und Definition 2.4.1 gelten

$$s(\mu;\alpha,\beta) = -s(-\mu;-\alpha,\beta) = s(-\mu;\alpha,-\beta)$$

und

$$t(\mu;\alpha,\beta) = t(-\mu;-\alpha,\beta) = t(-\mu;\alpha,-\beta) \ .$$

Beweis:

Die Gleichungen basieren alle auf den Gleichungen

$$\sin x = -\sin -x \quad \text{bzw.} \quad \cos x = \cos -x$$

und sind einfach nachzurechnen.

□

Unsere nächste Behauptung stützt sich auf die Eigenschaften des Mollifiers.

Lemma 2.4.4

Für den Rekonstruktionskern gilt

$$\psi^0(s) = \psi^0(-s)$$

und daher auch

$$\Psi^0(s) = -\Psi^0(-s) \ .$$

Beweis:

Die erste Aussage folgt aus der Rotationsinvarianz. Nach Lemma 1.5.6 und Satz 1.5.7 ist

$$\psi^0(s) = \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-2}\; I^{-2}\,\mathcal{R}\,\varepsilon\,(y) \quad \text{mit} \quad y = s\,\omega_0\ .$$

Nutzen wir nun aus, daß

$$\varepsilon(s\,\omega_0) = \varepsilon(s\,(-\omega_0)\,) = \varepsilon(-s\,\omega_0)$$

gilt, so ergibt sich direkt die Behauptung. Wir benutzen dieses Ergebnis und erhalten

$$\begin{aligned}
\Psi^0(s) &= \int_0^s \psi^0(t)\,dt \\
&= \int_0^s \psi^0(-t)\,dt \\
&= -\int_0^{-s} \psi^0(\tau)\,d\tau \\
&= -\Psi^0(-s)
\end{aligned}$$

durch Substitution von t durch τ.

□

Mit Hilfe der beiden vorher gezeigten Lemmata können wir nun eine Symmetrie für den Kern zeigen.

Satz 2.4.5

Für den Kern gelten die Symmetrien

$$k(\alpha,\beta) \quad = \quad k(-\alpha,\beta) \quad = \quad k(\alpha,-\beta) \quad = \quad k(-\alpha,-\beta)\ .$$

Beweis:

Neben den beiden vorherigen Lemmata benutzen wir im Beweis noch eine Substitution $\mu = -\nu$ und so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
k(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\,R\,\cos\beta\,\cos\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi^0\left(s(\mu;\alpha,\beta)\right)\left|\,t(\mu;\alpha,\beta)\,\right|\,d\mu \\
&\quad + \cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi^0\left(s(\mu;\alpha,\beta)\right)\mathrm{sgn}\big(t(\mu;\alpha,\beta)\big)\,d\mu \\
&= \frac{1}{2}\,R\,\cos\beta\,\cos-\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi^0\left(-s(-\mu;-\alpha,\beta)\right)\left|\,t(-\mu;-\alpha,\beta)\,\right|\,d\mu \\
&\quad - \cos\beta\,\sin-\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi^0\left(-s(-\mu;-\alpha,\beta)\right)\mathrm{sgn}\big(t(-\mu;-\alpha,\beta)\big)\,d\mu \\
&= \frac{1}{2}\,R\,\cos\beta\,\cos-\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi^0\left(-s(\nu;-\alpha,\beta)\right)\left|\,t(\nu;-\alpha,\beta)\,\right|\,d\nu \\
&\quad - \cos\beta\,\sin-\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi^0\left(-s(\nu;-\alpha,\beta)\right)\mathrm{sgn}\big(t(\nu;-\alpha,\beta)\big)\,d\nu \\
&= \frac{1}{2}\,R\,\cos\beta\,\cos-\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi^0\left(s(\nu;-\alpha,\beta)\right)\left|\,t(\nu;-\alpha,\beta)\,\right|\,d\nu \\
&\quad + \cos\beta\,\sin-\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi^0\left(s(\nu;-\alpha,\beta)\right)\mathrm{sgn}\big(t(\nu;-\alpha,\beta)\big)\,d\nu \\
&= k(-\alpha,\beta)\;.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $k(\alpha,\beta) = k(\alpha,-\beta)$ folgt nach demselben Muster und daraus der Rest.

□

Wir müssen also den Kern nicht für den ganzen Detektor bestimmen, sondern es ist ausreichend, den Kern für etwa ein Viertel des Detektors zu berechnen und den Rest durch Spiegelungen zu erhalten.

An dieser Stelle sei nochmal an das Beispiel erinnert, das wir betrachteten, als wir uns mit Invarianzen beschäftigten (siehe 2.2.2). Jetzt müßten wir nur noch etwa 516 Kilobytes abspeichern. Daß nicht genau ein Viertel ausreichend ist, liegt an der Auswertung des Kerns in der Null.

2.4.2 Ein geeigneter Mollifier

Jetzt ist der Moment gekommen, unsere gesamten Überlegungen zu testen. Wir wollen also einen Mollifier wählen, der die von uns geforderten Eigenschaften erfüllt, den Filter dazu berechnen und damit eine Rekonstruktion durchführen.

Auf der Suche nach einem Mollifier orientieren wir uns an RIEDER und SCHUSTER, die in [13] im 2D-Fall folgende Familie als Beispiel wählen:

$$e^n(x) := \frac{n+1}{\pi} \begin{cases} (1-||x||^2)^n & : \ ||x|| \leq 1 \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases} \in H_0^s(\Omega) \quad \text{für jedes} \quad s < n + 1/2$$

Der Mollifier $e^n(x)$ ist unter den Aspekten der Konvergenz und Stabilität im 2D-Fall gut geeignet. Wir übertragen den Mollifier in den 3D-Fall und erhalten

$$\varepsilon_\gamma^S(y) := \frac{315\,\pi}{64\,\gamma^3}\ (1-||\gamma^{-1}y||^2)^3\ \chi_{[0,1]}\,(||\gamma^{-1}y||^2)\ \in H_0^\alpha(\Omega) \quad \text{für jedes} \quad \alpha < 7/2\ .$$

Hierbei bezeichne $\chi(\cdot)$ die charakteristische Funktion. Der korrespondierende Mollifier ist

$$e_\gamma^S(x,y) := \frac{315\,\pi}{512\,\gamma^3}\ (1-||\gamma^{-1}\frac{y-x}{2}||^2)^3\ \chi_{[0,1]}\,(||\gamma^{-1}\frac{y-x}{2}||^2)\ \in H_0^\alpha(\Omega)\ .$$

Vergleichen wir nun mit unseren Auswahlkriterien 2.4.2 und mit den in Satz 1.5.7 geforderten Eigenschaften. Wir stellen fest, daß der Mollifier alle Bedingungen erfüllt. Wir werden also nach Satz 1.5.6 den Rekonstruktionskern berechnen. Wir erhalten

$$\mathcal{R}\varepsilon_\gamma^S\,(\omega,s) = \begin{cases} \frac{315}{256}\frac{s^8}{\gamma^9} - \frac{315}{64}\frac{s^6}{\gamma^7} + \frac{945}{128}\frac{s^4}{\gamma^5} - \frac{315}{64}\frac{s^2}{\gamma^3} + \frac{315}{256}\frac{1}{\gamma}\,, & |s| \leq \gamma \\ 0 & , \ |s| > \gamma \end{cases}$$

und schließlich den dazugehörigen Rekonstruktionskern

$$\psi_\gamma^{0,S}\,(s) = \begin{cases} -\frac{315}{256}\pi^{-2}\ (7\gamma^{-9}s^6 - 15\gamma^{-7}s^4 + 9\gamma^{-5}s^2 - \gamma^{-3})\ , & |s| \leq \gamma \\ 0 & , \ |s| > \gamma \end{cases} .$$

Dieser ist in Abbildung 2.11 für γ wie in A.2 zu sehen. Den Kern k_γ^S in einer analytischen Form darzustellen, ist bisher nicht gelungen. Das heißt, wir müssen die Integrale aus Lemma und Definition 2.4.1 numerisch approximieren.

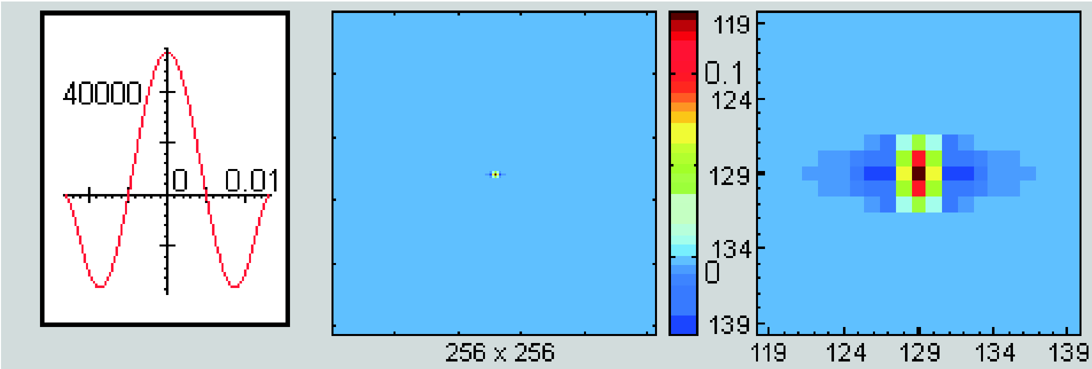


Abbildung 2.11: Rekonstruktionskern und Filter (original und vergrößert)

Die Abbildung 2.11 zeigt das Ergebnis. Eine Interpretation des Ergebnis werden wir erst im Vergleich mit dem Feldkamp-Algorithmus (siehe 2.5) durchführen. Hier wollen wir nun mit Rekonstruieren fortfahren.

Das Beispiel A.2 ist eine Rekonstruktion eines modifizierten Shepp-Logan-Phantoms. Die genaue Beschreibung kann im Anhang nachgelesen werden. Betrachten wir Original und Rekonstruktion.

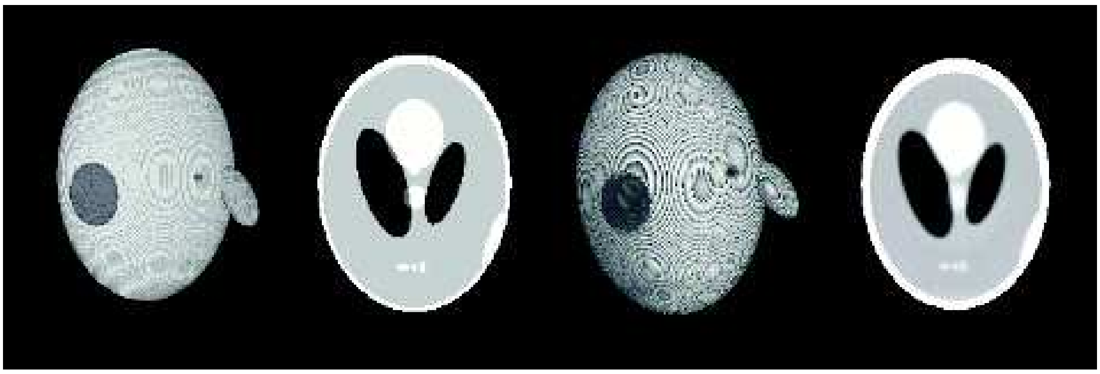


Abbildung 2.12: Original und Rekonstruktion von A.2

Die linke Hälfte von Abbildung 2.12 zeigt das Original-3D-Phantom und eine

XY-Ebene und auf rechten Seite ist die Rekonstruktion mittels unseres Filters zu finden. Wir dürfen vorerst zufrieden sein. Der kritische Beobachter sei an dieser Stelle wiederum auf das nächste Kapitel verwiesen, in dem wir vergleichende Tests machen und die Qualität der Rekonstruktion meßbar darstellen.

Erinnern wir uns zurück an den Anfang dieses Abschnitts. Den Mollifier haben wir nach Ideen der Konvergenz und Stabilität im 2D-Fall und anhand unserer eigenen Ideen ausgewählt. Im 2D-Fall hat RIEDER in [14] gezeigt, daß der Mollifier jedoch sehr empfindlich auf eine unoptimale Wahl von γ reagieren kann. Die Folge daraus ist, daß die Rekonstruktion durch kleine Abweichungen vom optimalen Parameter schon größere Mängel aufweist.

Die Entwicklung des 3D-Filters geschah in Unkenntnis dieses Umstandes, allerdings sind diese Resultate in ähnlicher Form auch experimentell aufgetreten. Da die Bestimmung eines optimalen Parameters für unseren Filter noch per "Try and Error" anhand der Rekonstruktion geschieht, ist eine bessere Handhabung wünschenswert. Wir sehen uns nach einem neuen Mollifier um.

2.4.3 Gaußglocke

Die Idee, die Gaußglocke als Mollifier zu verwenden, geht in unserem Fall auf DIETZ zurück, der in [5] dieses Beispiel wählt. Aber auch z.B. RIEDER läßt in [14] in seinem Fall die 2D-Gaußglocke zu.

Das Problem, weshalb wir sie nicht gleich betrachteten, liegt darin, daß die Gaußglocke nicht die 4. Forderung der Auswahlkriterien 2.4.2 erfüllt, sie hat keinen kompakten Träger in Ω. Damit scheidet sie für Betrachtungen wie in [13] aus, wo diese Eigenschaft zwingend nötig ist.

Wir wollen uns wie bisher Ergebnis orientiert verhalten und an dieser Stelle ein Auge zu drücken. Immerhin liegt der wesentliche Teil der Gaußglocke in Ω. Sonst erfüllt sie unsere Bedingungen.

Wir formulieren den Mollifier wie folgt

$$\varepsilon_\gamma^G(y) \;:=\; (2\pi)^{-3/2}\,\gamma^{-3}\,\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big|\frac{y}{\gamma}\Big|^2\Big)$$

und den korrespondierenden Mollifier

$$e_\gamma^G(x,y) \;:=\; \frac{1}{8}\,(2\pi)^{-3/2}\,\gamma^{-3}\,\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big|\frac{y-x}{2\gamma}\Big|^2\Big)\;.$$

Die Radon-Transformation des Mollifiers liefert

$$\mathcal{R}\varepsilon_\gamma^G\,(\omega, s) \;=\; (2\pi)^{-1/2}\,\gamma^{-1}\;\exp\Big(-\,\frac{s^2}{2\gamma^2}\Big)$$

und somit erhalten wir

$$\psi_\gamma^{0,G}(s) \;=\; \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-5/2}\,\gamma^{-5}\,(\gamma^2 - s^2)\;\exp\Big(-\,\frac{s^2}{2\gamma^2}\Big)\;.$$

Daraus können wir wie vorhin den Kern k_γ^G berechnen.

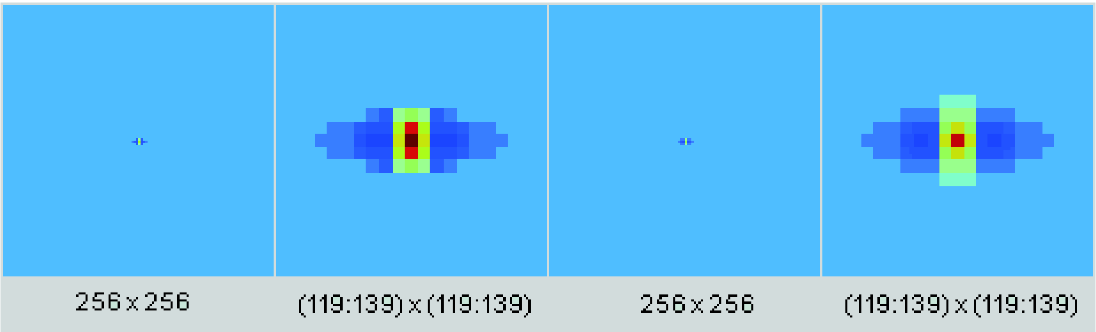


Abbildung 2.13: $k_{\gamma 1}^S$ und $k_{\gamma 2}^G$ (Vorsicht: $\gamma 1 \neq \gamma 2$)

Vergleichen wir nun den Filter k_γ^G mit dem Filter k_γ^S. Die Kerne sind so dargestellt, daß sie in etwa das gleiche Ergebnis liefern. Jedoch sind wie im 2D-Fall (siehe [14]) unterschiedliche Parameter optimal. Wie immer orientieren wir uns am Resultat und stellen wir fest, daß sich beide in ihrem Charakter kaum unterscheiden. Der aus der Gaußglocke resultierende Kern ist jedoch bzgl. der Wahl des Regularisierungsparameters leichter zu handhaben. Wir wollen daher mit der Gaußglocke als Mollifier weiterarbeiten.

Wir schreiben der Übersichtlichkeit halber wieder k statt k_γ^G.

2.4.4 Verbesserte Implementierung der Kernberechnung

Bevor wir nun zu den vergleichenden Tests übergehen, wollen wir uns nochmals mit der Implementation beschäftigen. Dafür führen wir wiederum neue Bezeichnungen ein. Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
k(\alpha,\beta) &= k_1(\alpha,\beta) - k_2(\alpha,\beta) \\
&\quad \text{mit} \quad k_1(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\, R\,\cos\beta\,\cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \psi^0\,\big(\,s(\mu;\alpha,\beta)\,\big)\,\big|\,t(\mu;\alpha,\beta)\,\big|\; d\mu \\
&\quad \text{und} \quad k_2(\alpha,\beta) = -\cos\beta\,\sin\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \Psi^0\,\big(\,s(\mu;\alpha,\beta)\,\big)\,\mathrm{sgn}\big(\,t(\mu;\alpha,\beta)\,\big)\; d\mu\ .
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun die beiden Teile k_1 und k_2 getrennt voneinander betrachten.

Wir beginnen damit, k_1 in eine schneller auszuwertende Form umzuschreiben. Zunächst betrachten wir den Fall, daß $\alpha \neq 0 \neq \beta$ gilt. Aufgrund der Symmetrie können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\alpha \in (-\pi/2, 0)$ und $\beta \in (0, \pi/2)$ sind. Durch Umformen in Amplituden-Phasen-Polarform (siehe z.B. [15]) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
k_1(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\, R\,\cos\beta\,\cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \psi^0\,\big(\,s(\mu;\alpha,\beta)\,\big)\,\big|\,t(\mu;\alpha,\beta)\,\big|\; d\mu \\
&= \frac{1}{2}\, R\,\cos\beta\,\cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \psi^0\,\big(\,-R\,\tilde\rho\,\cos(\mu-\tilde\varphi)/2\big)\,\big|\,\rho\,\cos(\mu-\varphi)\big|\; d\mu \\
&\quad \text{mit} \quad \tilde\rho = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\,\sin^2\beta}\ , \\
&\quad \phantom{\text{mit} \quad} \tilde\varphi = \arccos\left(-\,\frac{\sin\alpha}{\tilde\rho}\right)\ , \\
&\quad \phantom{\text{mit} \quad} \rho = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\,\sin^2\beta}\ , \\
&\quad \phantom{\text{mit} \quad} \varphi = \arccos\left(-\,\frac{\cos\alpha}{\rho}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun die Integralgrenzen in einen Punkt des Vorzeichenwechels von $t(\mu;\alpha,\beta)$ verschieben. Dies können wir tun, da wir den Startpunkt des Integrals über $S^2 \cap \theta^\perp$ beliebig wählen können. Da $\rho \neq 0$ ist, liegt also eine Nullstelle von

$t(\,\cdot\,;\alpha,\beta)$ in $N = \varphi - \pi/2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
k_1(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\,R\,\cos\beta\,\cos\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi^0\Big(-R\,\tilde\rho\,\cos(\mu-\tilde\varphi)/2\Big)\,\big|\,\rho\,\cos(\mu-\varphi)\big|\;d\mu \\
&= \frac{1}{2}\,R\,\cos\beta\,\cos\alpha \int\limits_{N}^{N+\pi} \psi^0\Big(-R\,\tilde\rho\,\cos(\mu-\tilde\varphi)/2\Big)\,\big|\,\rho\,\cos(\mu-\varphi)\big|\;d\mu \\
&\quad + \frac{1}{2}\,R\,\cos\beta\,\cos\alpha \int\limits_{N+\pi}^{N+2\pi} \psi^0\Big(-R\,\tilde\rho\,\cos(\mu-\tilde\varphi)/2\Big)\,\big|\,\rho\,\cos(\mu-\varphi)\big|\;d\mu
\end{aligned}$$

und mit der Substitution $\mu = \mu + \pi$ im zweiten Integral ergibt sich wegen

$$-\cos x = \cos x + \pi \quad , \quad \psi^0(s) = \psi^0(-s) \quad \text{und} \quad |x| = |-x|$$

schließlich

$$\begin{aligned}
k_1(\alpha,\beta) &= R\,\cos\beta\,\cos\alpha \int\limits_{N}^{N+\pi} \psi^0\Big(-R\,\tilde\rho\,\cos(\mu-\tilde\varphi)/2\Big)\,\rho\,\cos(\mu-\varphi)\;d\mu \\
&= R\,\rho\,\cos\beta\,\cos\alpha \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi^0\Big(-R\,\tilde\rho\,\cos(\mu+\varphi-\tilde\varphi)/2\Big)\,\rho\,\cos\mu\;d\mu\;.
\end{aligned}$$

De facto ist die Berechnung des ersten Teils des Kern nun über viermal so schnell wie zu Beginn dieser Umformungen. Leicht können wir auch für die anderen Fälle von α und β diese Formel benutzen. Wir müssen nur andere Parameter $\tilde\rho$, ρ, $\tilde\varphi$ und φ wählen, nämlich

$$\begin{aligned}
\beta = 0,\ \alpha \neq 0\ : \qquad & \tilde\rho = -\sin\alpha\ , \\
& \rho = cos\alpha\ , \\
& \tilde\varphi = 0\ , \\
& \varphi = 0
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\alpha = 0,\ \beta \neq 0\ : \qquad & \tilde{\rho} = \sin\beta\ , \\
& \rho = 1\ , \\
& \tilde{\varphi} = \pi/2\ , \\
& \varphi = 0\ .
\end{aligned}$$

Dies läßt sich leicht nachrechnen.

Dabei ist zu beachten, daß man nicht in die vorherige Formel einsetzen kann, sondern $s(\mu;\alpha,\beta)$ und $t(\mu;\alpha,\beta)$ auswerten muß. Danach ist zu erkennen, wie man einsetzen muß. Im Fall $\alpha = 0 = \beta$ können wir exakt berechnen und erhalten

$$k_1(0,0) = 2\,R\ \psi^0(0)\ .$$

Ähnliche Umformungen wollen wir für k_2 durchführen. Wir starten wieder mit $\alpha \in (-\pi/2, 0)$ und $\beta \in (0, \pi/2)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
k_2(\alpha,\beta) &= -\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi^0\left(\,s(\mu;\alpha,\beta)\,\right)\operatorname{sgn}\left(\,t(\mu;\alpha,\beta)\,\right)\,d\mu \\
&= -\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{N}^{N+2\pi} \Psi^0\left(\,s(\mu;\alpha,\beta)\,\right)\operatorname{sgn}\left(\,t(\mu;\alpha,\beta)\,\right)\,d\mu \\
&= -\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{N}^{N+\pi} \Psi^0\left(\,s(\mu;\alpha,\beta)\,\right)\,d\mu \\
&\quad\ +\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{N+\pi}^{N+2\pi} \Psi^0\left(\,s(\mu;\alpha,\beta)\,\right)\,d\mu\ .
\end{aligned}$$

Wegen $-s(\mu;\alpha,\beta) = s(\mu+\pi;\alpha,\beta)$ und $\Psi^0(-s) = -\Psi^0(s)$ folgt

$$k_2(\alpha,\beta) \;=\; -2\,\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{N}^{N+\pi} \Psi^0\left(\,s(\mu;\alpha,\beta)\,\right)\,d\mu\ .$$

Wir führen wieder die Amplituden-Phasen-Polarform ein und da $(N-\tilde{\varphi}) \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist, gilt dann

$$
\begin{aligned}
k_2(\alpha,\beta) &= -2\,\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{N-\tilde{\varphi}}^{N-\tilde{\varphi}+\pi} \Psi^0\big(\,-R\,\tilde{\rho}\,\cos(\mu)\,/\,2\big)\;d\mu \\
&= 4\,\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{0}^{|N-\tilde{\varphi}|} \Psi^0\big(\,-R\,\tilde{\rho}\,\cos(\mu)\,/\,2\big)\;d\mu \\
&= 4\,\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{0}^{|\varphi-\pi/2-\tilde{\varphi}|} \Psi^0\big(\,-R\,\tilde{\rho}\,\cos(\mu)\,/\,2\big)\;d\mu
\end{aligned}
$$

Ebenso wie für k_1 können wir auch die anderen Fälle leicht nachrechnen. Für $\alpha = 0$ erhalten wir jedoch diesmal direkt die Lösung $k_2(0,\beta) = 0$, da $\sin\alpha = 0$ gilt und das Integral beschränkt ist. Im letzten Fall ($\beta = 0$, $\alpha \neq 0$) setzen wir $\tilde{\rho}$, ρ, $\tilde{\varphi}$ und φ wie vorhin. Wir haben zwar mehr Freiheit, jedoch ergibt sich durch eine andere Wahl auch keine bessere Variante.

Diese Implementation der Berechnung von k_2 ist bei besserer Genauigkeit über das 8-fache schneller als unsere bisherige Umsetzung.

Vergleichen wir nun punktweise $k_1(\alpha,\beta)$ und $k_2(\alpha,\beta)$, so machen wir folgende Beobachtung.

Beobachtung 2.4.6

Beim Einsatz des Filters $k = k_1 - k_2$ unter praxisrelevanten Bedingungen gilt für ein kleines γ

$$|\,k_1(0,0)\,| \quad >> \quad ||\,k_2(\,\cdot\,)\,||_{L_2}\;.$$

Beispiel und Bemerkung:

Nehmen wir die Voraussetzungen wie in A.3, dann ergibt sich

$$|\,k_1(0,0)\,| \quad \approx \quad 0,34 \quad >> \quad 1,8\cdot 10^{-6} \quad \approx \quad ||\,k_2(\,\cdot\,)\,||_{L_2}\;.$$

Im Vergleich zu einem einzigen Punkt von k_1 ist k_2 also vernachlässigbar klein, wenn wir γ im Sinne einer optimalen Rekonstruktion wählen.

Diese Beobachtung wollen wir für eine effiziente Implementierung umsetzen. Das heißt, wir wollen, bevor wir k_2 berechnen, wissen, ob dies überhaupt nötig ist. Dafür werden wir im folgenden eine gut arbeitende Fehlerabschätzung angeben. Leider sind erste Versuche, dies 'auf die Schnelle' zu machen auch schnell gescheitert. Es sind eine Reihe von Umformungen nötig, bevor wir effizient abschätzen können.

Es sei $G = \varphi - \pi/2 - \tilde{\varphi}$ und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
k_2(\alpha,\beta) &= 4\cos\beta\,\sin\alpha \int_0^{|G|} \Psi^0\big(-R\,\tilde{\rho}\,\cos(\mu)\,/\,2\big)\,d\mu \\
&= -4\cos\beta\,\sin\alpha \int_{\cos G}^{1} -\frac{1}{\sqrt{1-\Upsilon^2}}\,\Psi^0\big(-R\,\tilde{\rho}\,\Upsilon\,/\,2\big)\,d\Upsilon \\
&= -4\cos\beta\,\sin\alpha \Big[\Psi^0\big(-R\,\tilde{\rho}\,\Upsilon\,/\,2\big)\ \arccos\Upsilon\Big]_{\cos G}^{1} \\
&\quad +4\cos\beta\,\sin\alpha \int_{\cos G}^{1} (-R\,\tilde{\rho}\,/\,2)\psi^0\big(-R\,\tilde{\rho}\,\Upsilon\,/\,2\big)\ \arccos\Upsilon\ d\Upsilon \\
&= 4\cos\beta\,\sin\alpha\,\Psi^0\big(-R\,\tilde{\rho}\,\cos(G)\,/\,2\big)\ |G| \\
&\quad -4\cos\beta\,\sin\alpha\,R\,\tilde{\rho}\,/\,2 \int_{\cos G}^{1} \psi^0\big(-R\,\tilde{\rho}\,\Upsilon\,/\,2\big)\ \arccos\Upsilon\ d\Upsilon
\end{aligned}
$$

per Substitution $\mu = \arccos\Upsilon$ und anschließendem partiellen Integrieren. Wiederum substituieren wir, nämlich $\mu = R\,\tilde{\rho}\,\Upsilon/\,2$, und gelangen wegen $\psi^0(s) = \psi^0(-s)$ zu

$$k_2(\alpha,\beta) \;=\; 4\,\cos\beta\,\sin\alpha\,\Psi^0\big(-R\,\tilde\rho\,\cos(G)\,/\,2\big)\;|G|$$

$$-\,4\,\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{R\,\tilde\rho\,\cos(G)\,/\,2}^{R\,\tilde\rho\,/\,2} \psi^0\,(\mu)\;\arccos\big(2\mu\,/\,(R\,\tilde\rho)\big)\;d\mu\;.$$

Bis hierher sind diese Umformungen allgemein für unsere betrachteten Mollifier gültig. Wir könnten auch diese Formel zu Berechnung von k_2 benutzen. Tatsächlich wollen wir allerdings an dieser Stelle speziell auf den Mollifier zugeschnitten fortfahren, denn diese Darstellung erlaubt leicht eine Abschätzung.

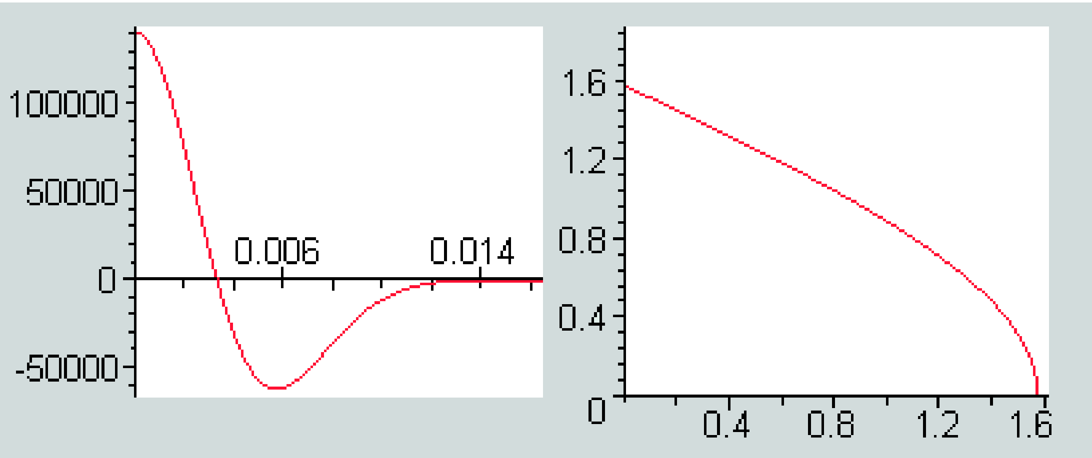


Abbildung 2.14: $\psi^0(\mu)$ für $\gamma = 0,0033$ und $\arccos\,(2\mu/(R\tilde\rho))$
für $\alpha = -0,003$, $\beta = 0,001$ und $R = 1000$

Die Abbildung 2.14 zeigt die beiden Funktionen, über deren Produkt wir integrieren. Der Rekonstruktionskern hat in γ eine Nullstelle, also einen Vorzeichenwechsel. Dies müssen berücksichtigen, wenn wir jetzt $\arccos\,(2\mu\,/\,(R\,\tilde\rho)\,)$ durch eine andere Funktion ersetzen.

Lemma 2.4.7

Es sei

$$A(\alpha,\beta) \;=\; 4\,\cos\beta\,\sin\alpha\,\Psi^0\big(-R\,\tilde\rho\,\cos(G)\,/\,2\big)\;|G|$$

$$-\,4\,\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_{R\,\tilde\rho\,\cos(G)\,/\,2}^{R\,\tilde\rho\,/\,2} \psi^0\,(\mu)\;\kappa(\mu)\;d\mu$$

$$\text{mit}\quad \kappa(\mu) \;=\; \begin{cases} \min\,(\pi/2, \varsigma(\mu)) & : \;\mu < \gamma \\ \varsigma(\mu) & : \;\mu \geq \gamma \end{cases}$$

$$\text{und}\quad \varsigma(\mu) \;=\; \frac{2\arccos\,(2\gamma\,/\,(R\,\tilde\rho)\,)}{-R\,\tilde\rho + 2\gamma}\;\mu \;-\; \frac{R\tilde\rho\arccos\,(2\gamma\,/\,(R\,\tilde\rho)\,)}{2\gamma\;-\,R\tilde\rho}\;.$$

Dann gilt

$$0 \quad < \quad k_2\,(\alpha,\beta) \quad \leq \quad A\,(\alpha,\beta)\;.$$

Beweis:

Zuerst überzeugen wir uns davon, daß $k_2(\alpha,\beta) > 0$ gilt. Dazu betrachten wir am besten die Version vor Beobachtung 2.4.6

$$k_2(\alpha,\beta) \;=\; 4\,\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_0^{|\varphi-\pi/2-\tilde\varphi|} \Psi^0\big(-R\,\tilde\rho\,\cos(\mu)\,/\,2\big)\;d\mu\;.$$

Betrachten wir die Komponenten, so stellen wir fest, daß $\sin\alpha$ nach Voraussetzung kleiner Null ist. Weiter sehen wir (vgl. Abb. 2.15), daß $\Psi^0(s)$ für Werte kleiner Null negativ ist, also auch das Integral. Damit ist das Produkt positiv und da $\cos\beta$ größer als Null ist, gilt dies auch für $k_2(\alpha,\beta)$.

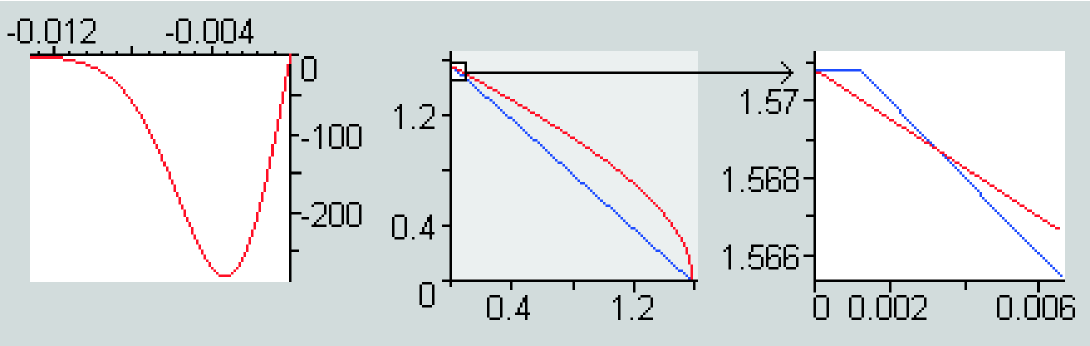


Abbildung 2.15: $\Psi^0(s)$ für $\gamma = 0,0033$ (l.), $\kappa(\mu)$ und $\arccos\left(2\mu/(R\tilde\rho)\right)$ (r.)

Die zweite Behauptung beruht darauf, daß wir $\arccos\left(2\mu/(R\tilde\rho)\right)$ durch eine geeignete Funktion $\kappa(\mu)$ ersetzen. Wir wählen κ so, daß die positiven Anteile von ψ^0 größer und die negativen gedämpft werden. Um die weitere Rechnung möglichst einfach durchführen zu können, nehmen wir den linearen Ansatz, eine Gerade $\varsigma(\mu)$ durch die Punkte $\left(R\tilde\rho/2\,,\,0\right)$ und $\left(\gamma\,,\,\arccos\left(2\gamma/(R\tilde\rho)\right)\right)$ zu legen. Damit der Fehler im Falle $\mu < \gamma$ nicht zu groß wird, beschränken wir nach oben mit $\pi/2$. So erhalten wir

$$\kappa(\mu) \;=\; \begin{cases} \min\left(\pi/2, \varsigma(\mu)\right) & : \; \mu < \gamma \\ \varsigma(\mu) & : \; \mu \geq \gamma \end{cases}$$

$$\text{mit} \quad \varsigma(\mu) \;=\; \frac{2\arccos\left(2\gamma\,/\,(R\,\tilde\rho)\right)}{-R\,\tilde\rho + 2\gamma}\,\mu \;-\; \frac{R\tilde\rho\arccos\left(2\gamma\,/\,(R\,\tilde\rho)\right)}{2\gamma \;-R\tilde\rho}\,.$$

Aufgrund der Krümmung des arccos erfüllt unsere Funktion κ dann die gewünschten Eigenschaften (vgl. Abb. 2.15). Es gilt

$$\psi^0\,(\mu)\,\arccos\left(2\mu/(R\tilde\rho)\right) \quad\leq\quad \psi^0\,(\mu)\,\kappa\,(\mu) \qquad \forall\,\mu\in[0,R\tilde\rho/2]$$

nach Konstruktion und somit gilt dies für das Integral. Daraus folgt schließlich die Behauptung.

$\square$

Durch diese Abschätzung haben wir k_2 punktweise eingegrenzt. Es zeigt sich, daß durch die lineare Wahl von ς das Integral nun berechnet werden kann, also gegenüber der numerischen Approximation viel Zeit eingespart werden kann. Wir wollen das nächste Lemma schon gleich etwas algorithmisch verfassen, auch wenn die Notation etwas ungewohnt erscheint.

Lemma 2.4.8

Es seien

$$\begin{aligned} t &= \frac{R\tilde{\rho}}{2}\,, \\ m &= \frac{\arccos\,(\gamma/t)}{\gamma - t}\,, \\ b &= -\,m\,t\,, \\ \mu_s &= \frac{\pi}{2m} - \frac{b}{m}\,. \end{aligned}$$

Weiterhin sind für diesen Mollifier

$$\begin{aligned} \psi^0(s) &= \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-5/2}\,\gamma^{-5}\,(\gamma^2 - s^2)\,\exp\Big(-\frac{s^2}{2\gamma^2}\Big)\,, \\ \Psi^0(s) &= \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-5/2}\,\gamma^{-3}\,s\,\exp\Big(-\frac{s^2}{2\gamma^2}\Big)\,, \\ \widetilde{\Psi^0}(s) &= -\,\frac{1}{2}\,(2\pi)^{-5/2}\,\gamma^{-1}\,\exp\Big(-\frac{s^2}{2\gamma^2}\Big)\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A(\alpha,\beta) &= 4\,\cos\beta\,\sin\alpha\,\Psi^0\big(-R\,\tilde{\rho}\,\cos(G)\,/\,2\big)\,|G| \\ &\quad -4\,\cos\beta\,\sin\alpha\,I(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

mit

$$
I(\alpha,\beta) \;=\; \left\{ \begin{array}{cc}
\frac{\pi}{2}\Big[\Psi^0(t) - \Psi^0(t\, cos\, G)\Big] & \Big\}\quad t \,\le\, \mu_s \\[2ex]
\left.\begin{array}{c} \frac{\pi}{2}\Big[\Psi^0(\mu_s) - \Psi^0(t\, cos\, G)\Big] + b\Big[\Psi^0(t) - \Psi^0(\mu_s)\Big] \\ + m\Big[\Psi^0(t)\, t - \Psi^0(\mu_s)\,\mu_s - \widetilde{\Psi^0}(t) + \widetilde{\Psi^0}(\mu_s)\Big] \end{array}\right\} & \begin{array}{c} t\,\cos\, G \,\le\, \mu_s\,, \\ \mu_s \,<\, t \end{array} \\[4ex]
\left.\begin{array}{c} b\Big[\Psi^0(t) - \Psi^0(t\,\cos\, G)\Big] + m\Big[\Psi^0(t)\, t - \\ \Psi^0(t\,\cos\, G)\, t\,\cos\, G \,-\, \widetilde{\Psi^0}(t) + \widetilde{\Psi^0}(t\,\cos\, G)\Big] \end{array}\right\} & \mu_s \,<\, t\,\cos\, G
\end{array} \right\} .
$$

Bemerkung:

Das heißt, wir können $A(\alpha,\beta)$ analytisch auswerten. Auch für andere Mollifier ε_γ^X ist eine Abschätzung möglich, wenn $\psi_\gamma^{0,X}$ ähnliche Eigenschaften besitzt, also insbesondere auch für ε_γ^S. Wir wollen aus Gründen der Übersichtlichkeit darauf verzichten.

Beweis:

Der Beweis geht weitestgehend aus Lemma 2.4.7 hervor. Die dort beschriebene Gerade $\varsigma(\mu)$ hat die Gestalt $m\,\mu + b$ mit der hier angegebenen Steigung m und dem Achsenabschnitt b. Setzen wir in diese Geradengleichung μ_s ein, dann erhalten wir $\varsigma\,(\mu_s) = \pi/2$, wovon man sich leicht selbst überzeugen kann.

Bei der Berechnung des Integrals $I\,(\alpha,\beta)$ muß eine Fallunterscheidung gemacht werden. Der Fall $t \,<\, \mu_s$ ist einfach nachzurechnen. Im Fall von $\mu_s \,<\, t\,\cos\, G$ setzen wir die Gerade für κ ein und erhalten das Ergebnis durch partielle Integration. Hierbei gilt $(\,\widetilde{\Psi^0}\,)'\,(s) = \Psi^0\,(s)$, wie man ebenfalls direkt sehen kann. Der übrig gebliebene Fall ist schließlich eine Mischung der beiden vorher erläuterten Fälle.

$\square$

Um die Qualität der Abschätzung zu demonstrieren, betrachten wir die Abbildung 2.16, welche den zweiten Teil des Kerns und die berechnete Abschätzung für das Beispiel A.3 zeigt.

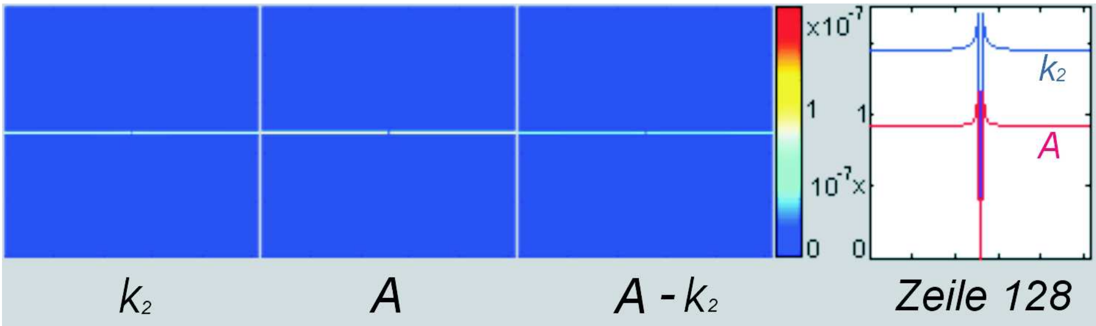


Abbildung 2.16: k_2 und A

Wir sehen, daß die Struktur von k_2 in unserer Abschätzung erhalten bleibt, der Fehler (im Vergleich zu k_1) nur gering ist.

Der Nutzen liegt nun darin, daß wir A im Vergleich zu k_2 schnell berechnen können. Wählt man zur numerischen Approximation des Integrals beispielsweise die Trapezsumme, so benötigen wir etwa 1000 bis 3000 Stützstellen für eine ausreichend gute Genauigkeit. Der vorhin schon einmal angesprochene Zeitgewinn, wenn wir auf diese Berechnung verzichten, ist relativ groß.

So ergibt sich mit Beobachtung 2.4.6 folgender halbautomatischer **Algorithmus**:

wähle Fehlertoleranzkoeffizient c ;

für $1 \leq (dx/2+1)$, $1 \leq (dy/2+1)$

bereche $A(\alpha_i, \beta_j)$ nach Lemma 2.4.8;

ende;

berechne $n = ||\, A \,||_{L_2}$;

für $1 \leq (dx/2+1)$, $1 \leq (dy/2+1)$

approximiere $k_1\,(\alpha_i, \beta_j)$;

ende;

falls ($n < c\,|k_1\,(0,0)|$)

für $1 \leq (dx/2+1)$, $1 \leq (dy/2+1)$

$k_2(\alpha_i, \alpha_j) = 0;$

ende;

sonst

für $1 \leq (dx/2+1)$, $1 \leq (dy/2+1)$

approximiere $k_2(\alpha_i, \beta_j)$;

ende;

ende;

für $1 \leq (dx/2+1)$, $1 \leq (dy/2+1)$

$k(\alpha_i, \beta_j) = k_1((\alpha_i, \beta_j) + k_2(\alpha_i, \beta_j)$

ende;

$\square$

Bemerkungen:

Die Approximationen der Integralberechnung für k_1 bzw. k_2 können z.B. mittels der summierten Trapezregel berechnet werden.

Der Mittelpunkt des Detektors wird für die Berechnung des Filters in den Punkt $(dx/2+1\,,\, dy/2+1)$ gelegt. Dies ist aufgrund der Anwendung der 2D-FFT am einfachsten. Wir haben also links und oben eine Zeile mehr.

Für die Berechnung der L_2-Norm von A gewichten wir die Punkte. Wir haben die Werte nur für ein Viertel der Detektorpunkte berechnet. Die anderen drei Viertel erhält man durch Spiegelungen. Daher müssen wir mit der Vielfachheit (4, 2 oder 1) des Punktes multiplizieren.

Gleiches gilt auch für k. Auch hier haben wir nur das obere Viertel. Durch Spiegelungen erhalten wir den ganzen Kern.

In den meisten praxisrelevanten Fällen ist die L_2-Norm von A wesentlich kleiner als $k_1(0,0)$. Wir können selbst für ein kleines c auf die Berechnung von k_2 verzichten. Dies bedeutet, daß k_2 keinen Einfluß auf die Qualität der Rekonstruktion hat. Die Erfahrung zeigt, daß wenn es nötig ist, k_2 zu berechnen, also γ groß ist, die Daten meist so stark geglättet werden, daß die Rekonstruktion größere Mängel aufweist. In einem solchen Fall würde ein weglassen von k_2 ebenfalls nicht bemerkbar.

2.5 Approximative Inverse (AI) vs. Feldkamp-Algorithmus (FA)

In diesem Kapitel wollen wir unser Verfahren mit dem Feldkamp-Algorithmus mit Shepp-Logan-Filter vergleichen. Diesen haben wir in Abschnitt 2.3.1 bereits kennen gelernt. Die Gründe für die Auswahl genau dieses Filters zum Vergleich sind zweierlei. Zum Einen hat sich der Feldkamp-Algorithmus in der Praxis bewährt und gilt als Standard, wie sich im Gespräch mit den Partnern während eines Forschungsprojektes zeigte. Diese verwenden einen modifizierten FA (vgl. Abschnitt 2.5.6). Zum Anderen wollen wir hier auf die Einschätzung von RIEDER (siehe [14]) verweisen. Nach dessen Meinung sei der Shepp-Logan-Filter wahrscheinlich der meist benutzte 2D-Filter.

Um nicht ständig die vollständig exakten Begriffe aufführen zu müssen, verwenden wir die schon in der Überschrift angedeuteten Abkürzungen 'AI' und 'FA'.

Beginnen möchten wir mit denselben Daten wie in A.2 (vgl. 2.4.2), nur daß wir sie in A.3 mit dem aus der Gaußglocke resultierenden Filter falten und in A.4 den FA benutzen. Da die Rekonstruktionen in ihrer Masse an Punkten nur schwer auszuwerten und vorallem noch schwerer hier darzustellen sind, konzentrieren wir uns auf einzelne Schichten aus einer Rekonstruktion. Selbst diese sind gegebenenfalls nicht immer aussagekräftig genug, so daß wir manchmal nur Linien durch das Rekonstruktionsgebiet vorfolgen.

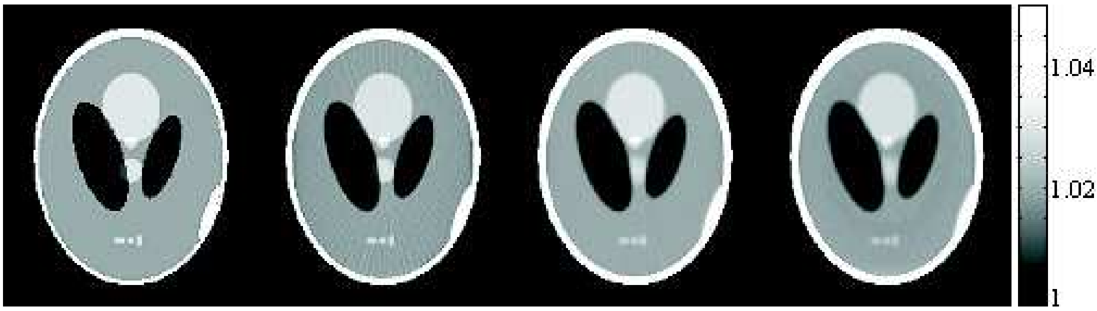


Abbildung 2.17: Orginal und die Rekonstruktionen A.4, A.3 und A.2

In Abbildung 2.17 sehen wir nochmals Original (links) und unsere erste Rekonstruktion (rechts), in der Mitte die Rekonstruktion mit dem Feldkamp-Algorithmus (Mitte links) und mit dem aus der Gaußglocke gewonnenen Kern (Mitte rechts). Zu sehen ist hierbei die XY-Schicht für z = 18,461 mm. In der nächste Abbildung sehen wir nun eine Linie durch diese Schicht mit x = 0 mm. Dabei ist die schwarze Linie das Original, die blaue Linie die Rekonstruktion A.4, die rote Linie die Rekonstruktion A.3 und die grüne Linie die Rekonstruktion A.2.

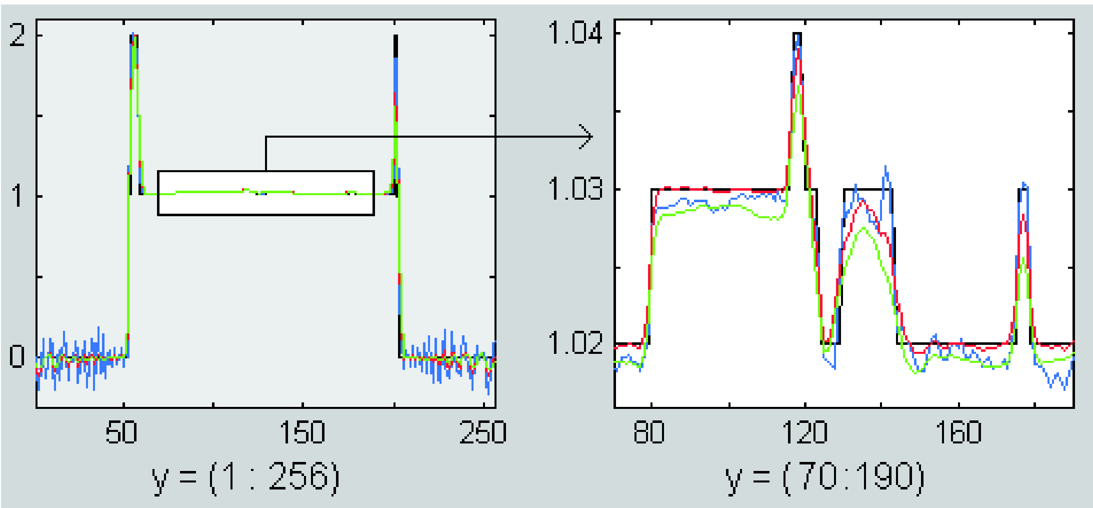


Abbildung 2.18: Linie für z = 18,461 mm und x = 0 mm und Vergrößerung

Wir sehen drei gute Rekonstruktionen. Wollen wir genauer analysieren, müssen wir mehr auf Details achten bzw. die Einwirkung von äußeren Einflüsse auf unser System beobachten.

Bemerkung:

Für die Wahl der Regularisierungsparameter wurden Rekonstruktionen einer Einheitskugel gemacht. Anhand derer wurden optimale Parameter bestimmt. In einem solchen Fall kann dies entweder durch eine optische Überprüfung oder durch Minimierung in Fehlernormen geschehen, was bei einem so "angenehmen" Objekt und den synthetisch berechneten, exakten Daten keinen Unterschied macht.

Vereinbarung:

Wir wollen in Zukunft auf eine Rekonstruktion mit dem Mollifier aus 2.4.2 verzichten und nur noch mit dem aus der Gaußglocke hervorgehenden Mollifier vergleichen. Hierbei seien die Bezeichnungen, sofern nicht anders angegeben, wie in vorherigem Beispiel (Original schwarz, FA blau und AI rot).

2.5.1 Vorteile der AI

Beginnen wir nun also damit, die Unterschiede in den Rekonstruktionen der AI und des FA zu suchen. Dazu betrachten wir Abbildung 2.19.

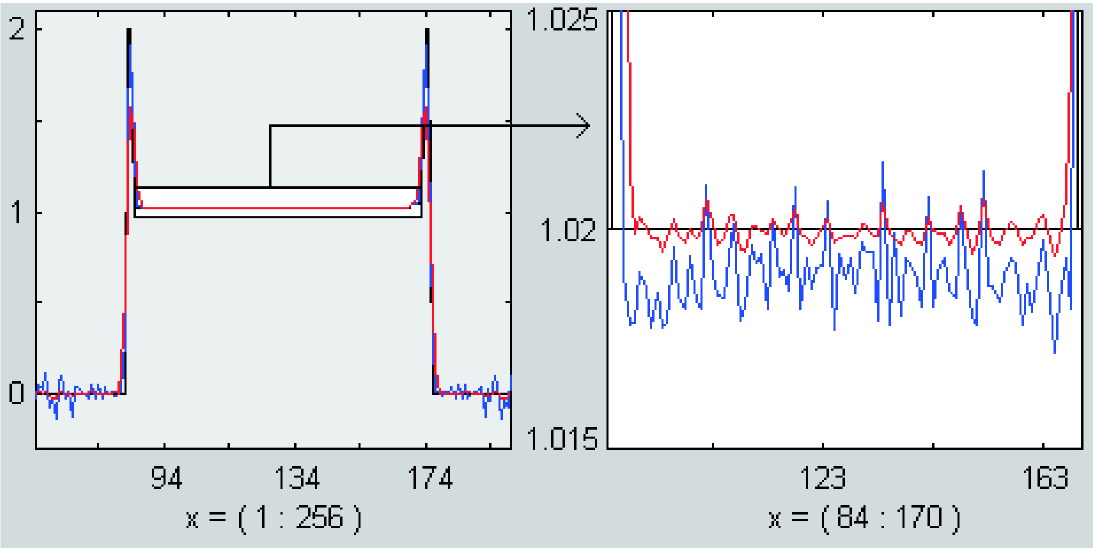


Abbildung 2.19: Linie für y = -25,846 mm und z = 18,461 mm und Vergrößerung

Wir sehen eine Linie quer durch die XY-Ebene von vorher. Wir stellen fest, daß die AI ein genaueres Ergebnis als der FA liefert. Dieses Ergebnis kann im Allgemeinen wie folgt formuliert werden.

Die AI rekonstruiert große, glatte Flächen genauer als der FA.

Diese, sagen wir mal, charakteristische Eigenschaft führt auch zu einer weiteren Beobachtung. Dazu sehen wir uns eine weitere Abbildung an.

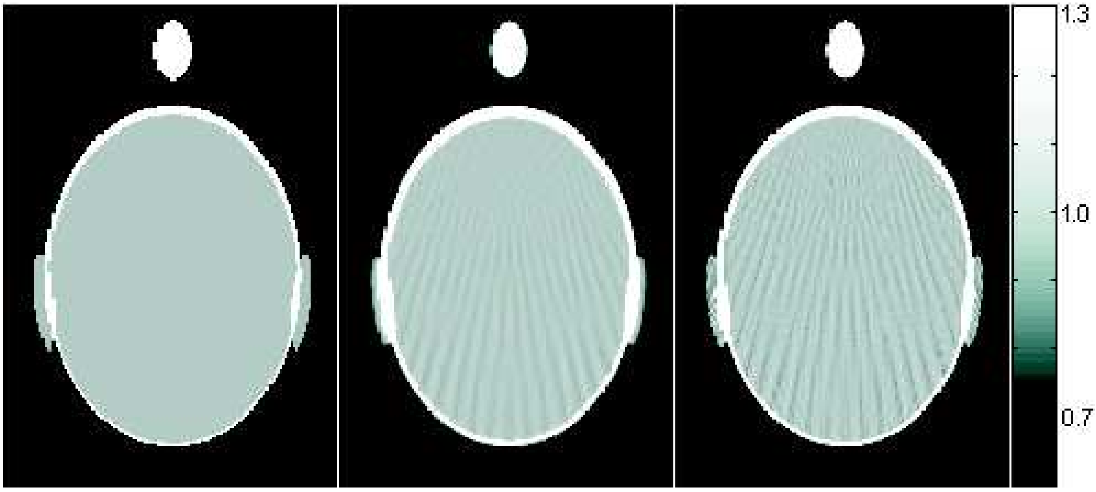


Abbildung 2.20: XY-Ebene für z = 0 mm; Original (l.), AI und FA (r.)

Die durch die Nase des Shepp-Logan-Phantoms verursachten Artefakte sind bei der Rekonstruktion mittels FA wesentlich stärker, als wenn wir mit der AI arbeiten (siehe Abb. 2.20). Diese sind so stark, daß es leicht passieren könnte, daß kleine Objekte in den Artefakten "verschwinden". Wir halten dies fest.

Die AI verursacht weniger Artefakte.

Verschlimmern wir vorherige Situation noch ein wenig, indem wir unsere synthetischen Daten zufällig mit Störungen versehen, also verrauschen. Damit die kleinen Objekte überhaupt zu rekonstruieren sind, haben wir die Dichtewerte verändert. Sonst würden die kleine Objekte durch das Rauschen verschwinden. Die genauen Angaben sind im Anhang zu finden.

Wir betrachten die Beispiele A.5 und A.6 und die dazugehörigen Rekonstruktionen, die in Abbildung 2.21 zu sehen sind.

Das Rauschniveau liegt, wie sich später (siehe Abschnitt 2.5.6) zeigen wird, hoch, aber je nach Anwendung in einem realistischen Rahmen. Wir mußten die Verfahren regularisieren, um eine brauchbare Rekonstruktion zu erhalten. Dies geschah

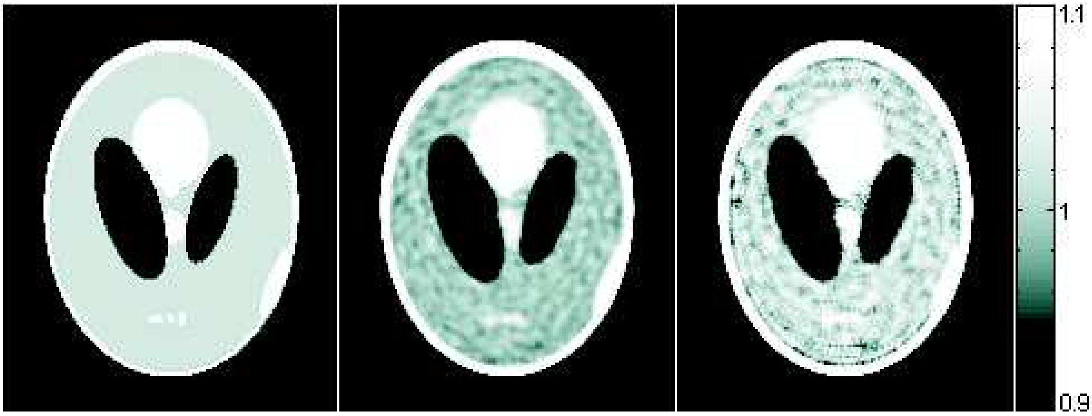


Abbildung 2.21: XY-Ebene für z = 18,461 mm; Original (l.), AI und FA (r.)

bei der AI ganz einfach über die Wahl des Regularisierungsparameters. Welche Auswirkungen das hat, wollen wir in Kapitel 2.5.3 betrachten. Den Shepp-Logan-Filter regularisierten wir über die Abtastung, indem wir die Schrittweite dafür vergrößern. Die genauen Details sind im ebenfalls im Anhang nachzulesen.

Betrachten wir nun zusätzlich jeweils einen vergrößerten Ausschnitt (siehe Abb. 2.22), welcher die drei kleinen Objekte zeigt.

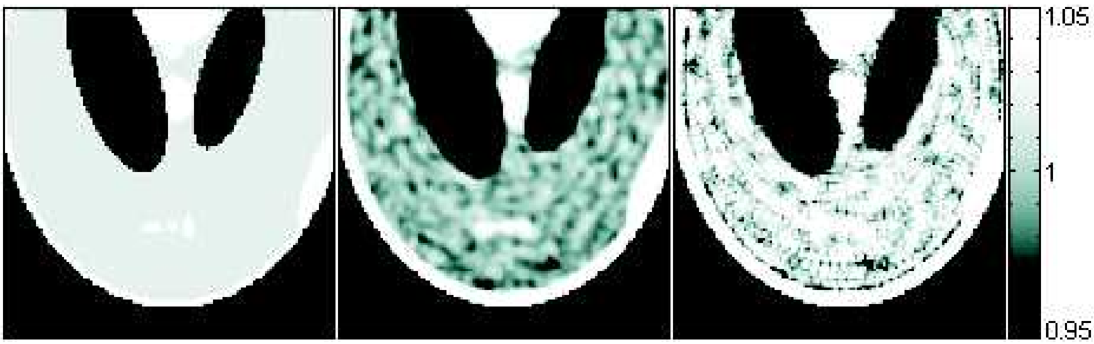


Abbildung 2.22: XY-Ebene für z = 18,461 mm; Original (l.), AI und FA (r.)

Im Falle der AI sind diese noch zu erkennen. Die Rekonstruktion mittels FA dagegen läßt die Objekte in den durch das Rauschen verursachten Artefakten verschwinden.

Vorsicht:

Bei optischer Kontrolle der Rekonstruktionen und insbesondere bei Vergleichen mit den Originalbildern dürfen wir uns nicht von unseren Augen täuschen lassen. Betrachtet man Abbildung 2.21, so glaubt man vielleicht auch dort die drei kleinen Objekte zu lokalisieren. Es ist so, daß man wissend, daß dort die Objekte liegen, diese auch zu erkennen scheint. Allerdings wird in der Vergrößerung deutlich, daß es sich dabei wohl ebenso gut um Artefakte handeln könnte. Man sollte daher Vergleiche kritisch angehen und sich stets fragen, ob man Objekte auch wahrgenommen hätte, ohne zu wissen, wo sie zu suchen sind.

Bei der Interpretation des Ergebnisses müssen wir ebenfalls vorsichtig sein. Wir haben den FA zwar regularisiert, aber man könnte mit mehr Aufwand sicherlich bessere Ergebnisse erzielen. Das Thema dieser Arbeit ist jedoch die AI und nicht die beste Möglichkeit, einen FA zu manipulieren. In der Praxis implementierte und benutzte Verfahren, basierend auf dem FA, haben jedoch tendenziell das gleiche Ergebnis geliefert (vgl. Abschnitt 2.5.6). Halten wir dies ebenfalls fest.

Die AI bietet eine leichte und effiziente Regularisierung über die stufenlose Wahl des entsprechenden Parameters. Der FA per se besitzt eine solche Möglichkeit nicht. Eine im Vergleich zur AI bessere Umsetzung des FA ist zur Zeit nicht bekannt.

2.5.2 Bisherige Nachteile

Wir haben vorhin von in gewisser Art charakteristischen Eigenschaften der bisherigen Umsetzung der AI gesprochen. Vor allem haben wir gute Ergebnisse erzielt, wenn wir auf glatte oder notwendigerweise geglättende Volumina getroffen sind. Dies läßt uns nun die Frage stellen, was denn passiert, wenn wir Sprünge oder Kanten betrachten.

Dazu betrachten wir die gleiche Linie wie vorhin, als wir feststellten, daß große, glatte Flächen genauer rekonstruiert werden. Diesmal wollen wir jedoch unser Augenmerk auf die Kante legen.

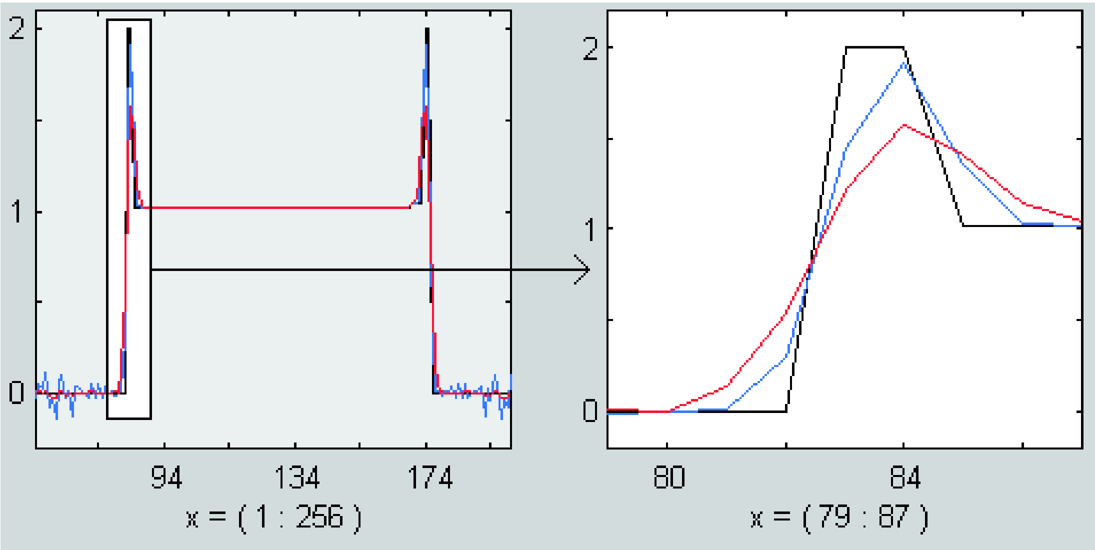


Abbildung 2.23: Linie für y = -25,846 mm und z = 18,461 mm und Vergrößerung

Wir sehen, was wir wohl schon befürchten konnten. Die AI glättet auch über die Kante. Wenn wir nun die Beobachtung auf die ganze Ebene ausweiten, so läßt sich feststellen, daß die AI etwas unschärfer wirkt. Halten wir dies also kurz und prägnant fest.

Sprünge und kleine Objekte werden geglättet und damit das Bild unschärfer.

Wie gesagt, ist diese Beobachtung korrespondierend zu jenen, die wir auf der Seite der positiven Eigenschaften haben. Ein anderer Nachteil läßt sich erst kennen, wenn wir die Z-Richtung untersuchen und nicht eine einzige XY-Schicht als Repräsent der 3D-Rekonstruktion.

Betrachten wir für unterschiedliche Abstände senkrecht zur Drehrichtung einzelne XY-Schichten, so sind die bisherige Ergebnisse immer noch gültig, aber es fällt auf, daß die AI für größer werdenden Abstand der XY-Ebenen zum Nullpunkt an Gesamtniveau verliert. Diese Aussage wird in Abbildung 2.24 verdeutlicht.

In dieser Abbildung sehen wir den Mittelpunkt der verschiedenen XY-Ebenen entlang der Z-Achse. Wir können deutlich den Abfall der AI erkennen. Dieser ist repräsentativ für die gesamte XY-Ebene, die zu diesem Abstand von Nullpunkt gehört. Wir notieren dies.

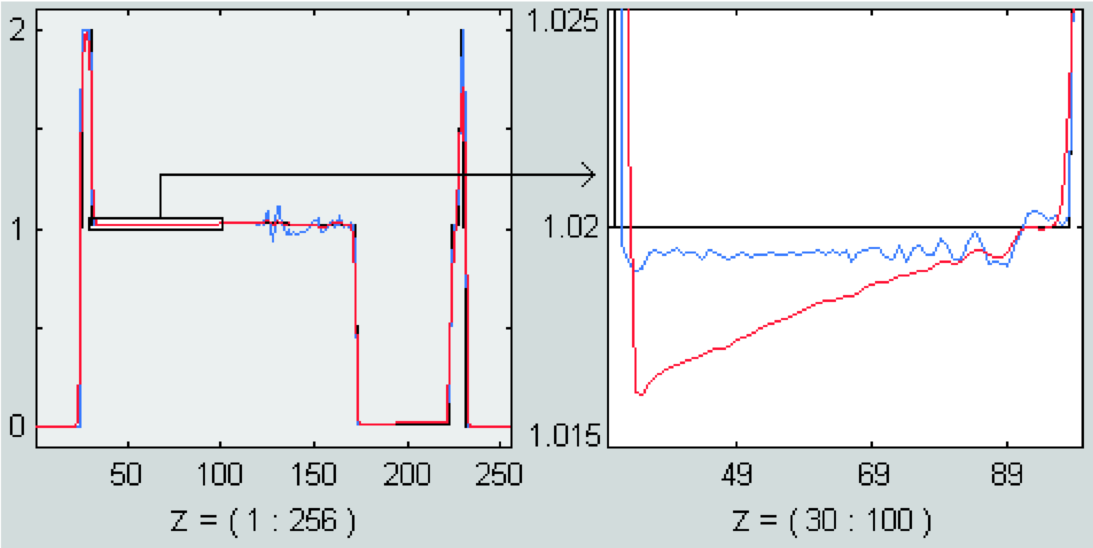


Abbildung 2.24: Linie für x = 0 mm und y = 0 mm und Vergrößerung

Die AI verursacht einen Abfall in Z-Richtung.

Eine beweisbare Erklärung für diesen Abfall kann hier nicht angegeben werden, allerdings liegt die Vermutung nahe, daß dies mit den fehlenden 3D-Radon-Daten zusammenhängt. Diese könnten aufgrund der Gestalt der AI mehr Einfluß auf die Rekonstruktion als beim FA haben.

Bemerkung:

Die Artefakte in der Mitte werden durch die Nase des Phantoms verursacht. Um dies deutlich zu sehen, verlangt es einer XZ- oder YZ-Schicht. Auch können wir das Bild, welches wir verwendeten, um die Reduzierung der Artefakte zu zeigen, betrachten und uns denken, daß diese Auswirkungen nicht auf eine Schicht beschränkt ist.

2.5.3 Eigenschaften der AI

Bevor wir uns weiteren Spekulationen wie zu Ende von 2.5.2 hingeben, wollen wir die AI im Hinblick auf ihre Eigenschaften genauer untersuchen. Betrachten wir zu diesem Zweck den Filter in einer etwas anderen Art und Weise.

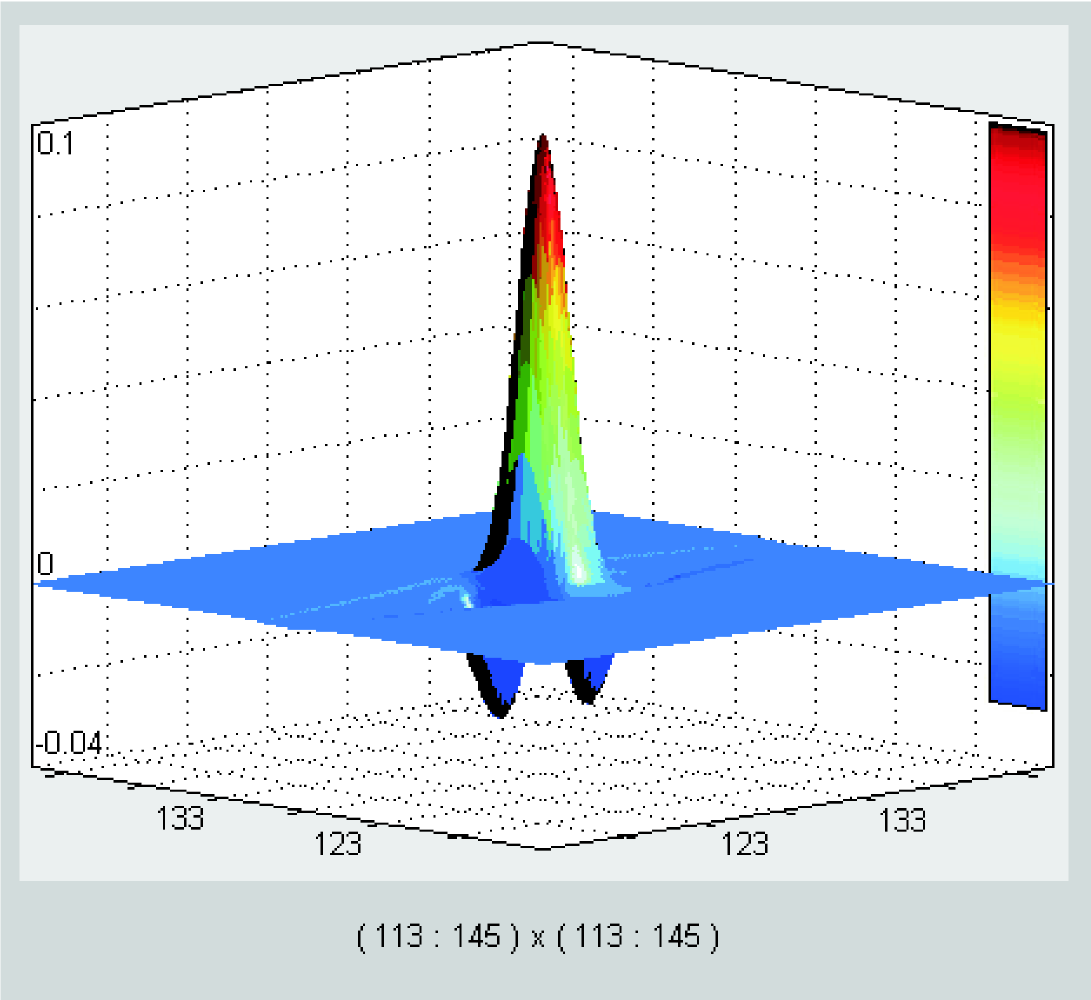


Abbildung 2.25: 3D-Plot eines Kerns

Die Abbildung 2.25 zeigt einen Ausschnitt des Filters aus A.5. Wie wir in anderen Darstellungen gesehen haben, ist der Kern außerhalb der Mitte fast Null. Man kann leicht ein asmpytotisches Verhalten des Filters zeigen.

Lemma 2.5.1

Für den Filter k gilt das asympotoische Verhalten

$$k(\alpha, \beta) \longrightarrow 0 \quad \textit{für} \quad (\,|\alpha| \to \pi/2 \ \wedge \ \beta \neq 0) \ \vee \ (\,|\beta\,| \to \pi/2)\ .$$

Beweis:

Wir betrachten die beiden Komponenten des Kerns $k = k_1 - k_2$ jeweils getrennt. Aufgrund der Symmetrie (siehe Satz 2.4.5) können wir uns auf den Fall $\alpha \to -\pi/2$ bzw. $\beta \to \pi/2$ zurückziehen. Beginnen wir nun mit k_1 in der Darstellung aus Abschnitt 2.4.4

$$k_1(\alpha,\beta) = R\,\rho\,\cos\beta\,\cos\alpha \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi^0\big(-R\,\tilde{\rho}\,\cos(\mu+\varphi-\tilde{\varphi})/2\big)\,\rho\,\cos\mu\;d\mu\ .$$

Da das Integral beschränkt ist, sehen wir direkt, daß

$$k_1(\alpha,\beta) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad (\alpha \to -\pi/2)\ \vee\ (\beta \to \pi/2)\ .$$

Ebenso direkt folgt

$$k_2(\alpha,\beta) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \beta \to \pi/2\ ,$$

wie aus

$$k_2(\alpha,\beta) = 4\,\cos\beta\,\sin\alpha \int\limits_0^{|\varphi-\pi/2-\tilde{\varphi}|} \Psi^0\big(-R\,\tilde{\rho}\,\cos(\mu)\,/\,2\big)\;d\mu$$

ersichtlich wird. Hier ist k_2 ebenfalls in der Form aus Abschnitt 2.4.4 dargestellt. Einzig der Fall $\alpha \to -\pi/2$ bedarf etwas näherer Betrachtung. Im Falle $\beta \neq 0$ ergibt sich für die obere Integralgrenze

$$|\varphi - \pi/2 - \tilde{\varphi}| \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \alpha \to -\pi/2$$

und damit auch

$$k_2(\alpha,\beta) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \alpha \to -\pi/2\ \wedge\ \beta \neq 0.$$

Fügen wir die Aussagen über k_1 und k_2 zusammen, so ergibt sich die Behauptung für $k = k_1 - k_2$.

$\square$

Bemerkung:

Wie im vorherigen Beweis gezeigt wurde, gilt das asymptotische Verhalten für k_1 auch im Fall $\alpha \to -\pi/2 \ \wedge \ \beta = 0$. Wenn wir also den halbautomatischen Algorithmus zur Kernberechnung verwenden (siehe Ende des Abschnitts 2.4.4) und dieser den Anteil von k_2 aufgrund der Fehlerabschätzung vernachlässigt, dann erhalten wir numerisch einen Kern für den die asymptotischen Eigenschaften von k_1 gelten. Das bedeutet, daß der Filter "numerisch gegen Null konvergiert" für $|\alpha| \to \pi/2$ oder $|\beta\,| \to \pi/2$ bei geeigneter Wahl des Regularisierungsparameters.

Dieses Lemma bedeutet also, daß wir uns bei der Betrachtung der Eigenschaften unseres Kerns nur auf den mittleren Bildausschnitt konzentrieren müssen, da wir das Verhalten außerhalb gerade charakterisiert haben. Dort ist der Beitrag zur Rekonstruktion nämlich fast Null, also unwesentlich klein ist.

Wir wollen dem interessierenden, wesentlichen Anteil des Filters nun einen Namen geben und ihn mathematisch definieren.

Definition 2.5.2

Die Menge der Punkte

$$\left\{ \, (\alpha,\beta) \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad \Big| \quad |\,k(\alpha,\beta)\,| \, \geq \, s \, \right\}$$

bezeichnen wir als den **s-Träger** *des Kerns. Den Wert* s *nennen wir den* **Schwellenwert** *des Trägers.*

Bemerkung:

Natürlich ist eine vernünftige Wahl des Schwellenwert nötig, um mit dem Begriff des s-Trägers zu arbeiten. Ebenso sollte selbstverständlich sein, daß dieser von Kern zu Kern unterschiedlich ist. Es gilt z.B. je größer der Regularisierungsparameter, desto kleiner sollte der Schwellenwert sein. Wir wollen in den folgenden Betrachtungen den s-Träger der Kerne für Vergleiche immer so wählen, daß für Kerne k und $\tilde{k}$ der Zusammenhang $\mathrm{s(k)} \cdot \mathrm{max(k)} \, = \, \mathrm{s}(\tilde{\mathrm{k}}) \cdot \mathrm{max}(\tilde{\mathrm{k}})$ gilt.

Betrachten wir in diesem Sinne die s-Träger zu zwei Filtern der AI für unterschiedliche Regularisierungsparameter. Die Abbildung 2.26 zeigt die Kerne aus Beispiel A.5 (links) und A.3 (rechts) und die vergleichbaren s-Träger.

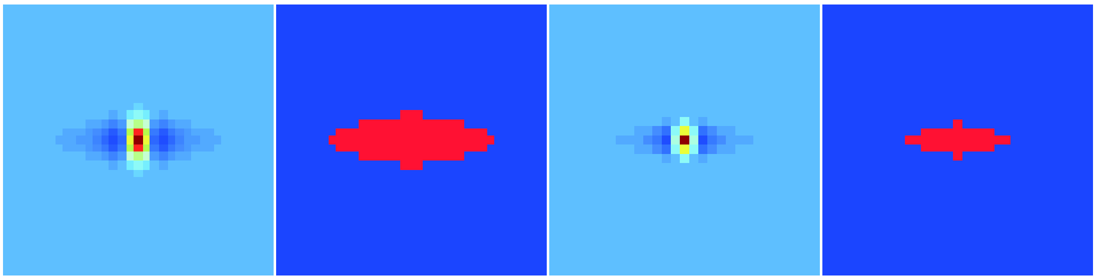


Abbildung 2.26: 0,002-Träger für $\gamma = 0,005$ und 0,0068-Träger für $\gamma = 0,0033$

Es ist leicht zu erkennen, daß der s-Träger für vergleichbare Werte schrumpft, wenn der Regularisierungsparameter kleiner wird. Vergleichen wir nun den Filter aus Beispiel A.3 (links) mit dem zum FA gehörenden aus A.4 (rechts).

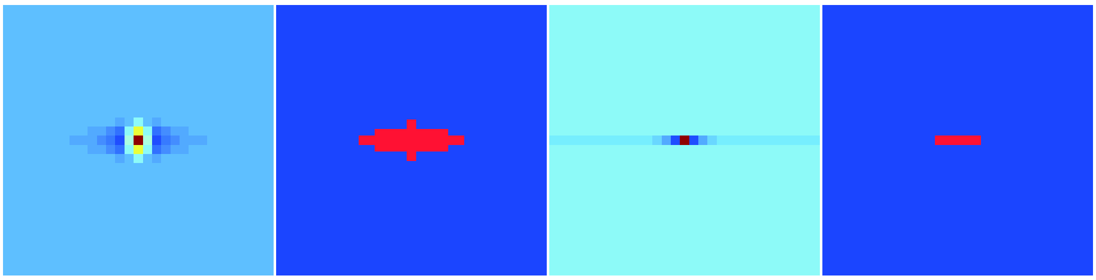


Abbildung 2.27: 0,0068-Träger für $\gamma = 0,0033$ und 0,004-Träger des FA-Filters

Die Abbildung 2.27 zeigt deutlich, wie klein der s-Träger des FA-Kerns im Gegensatz zu unserem bisher verwendeten AI-Kern ist. Dies verwundert auch nicht allzu sehr, da der FA-Kern nur in der mittleren Zeile ungleich Null ist. Aufgrund der optimalen Abtastung des SL-Filters zeigt sich ein nur wenige Pixel umfassender s-Träger. Es liegt auf der Hand, daß u. a. hier der Unterschied zu suchen ist.

Der Shepp-Logan-Filter besitzt eine ähnliche Gestalt wie ein Differentiationsfilter. Das heißt, in Drehrichtung (also in der XY-Ebene) haben wir eine Art Ableitung. Vergleichen wir dies mit dem AI-Kern.

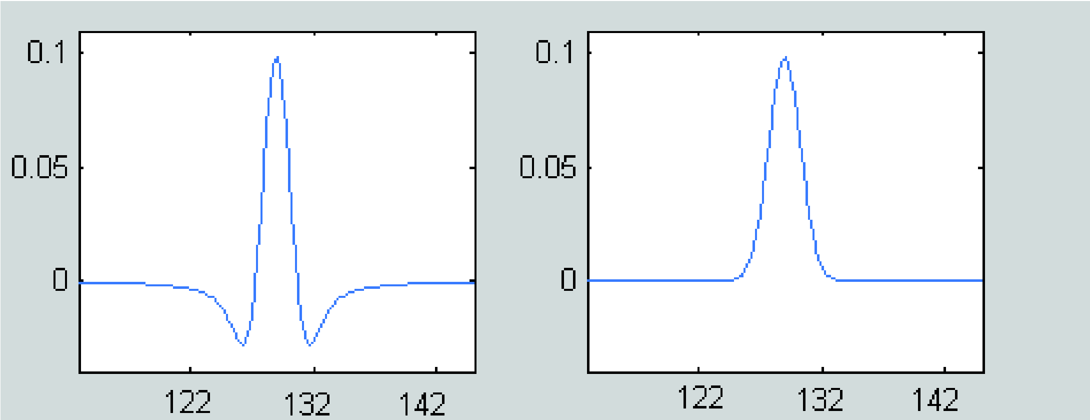


Abbildung 2.28: mittlere Zeile und mittlere Spalte des AI-Kerns

Wir sehen auf der linken Hälfte der Abbildung 2.28 die mittlere Zeile des AI-Kerns. Auch hier können wir eine Art Differentiation erkennen. Hier ist diese allerdings verbunden mit einer Glättung. Senkrecht zur Drehrichtung (siehe rechte Hälfte) ist diese Glättung ebenfalls vorhanden. Wir können aus den Beobachtungen der mittleren Zeile und der mittleren Spalte also schließen, daß wir neben der Differentiationseigenschaft in Drehrichtung auch eine Glättung in alle Richtungen haben. Daß es dabei ausreichend ist, diese beiden Linien zu betrachten und deren Eigenschaften separat zu interpretieren, wird deutlich, wenn wir nur von diesen Informationen ausgehend einen Filter generieren.

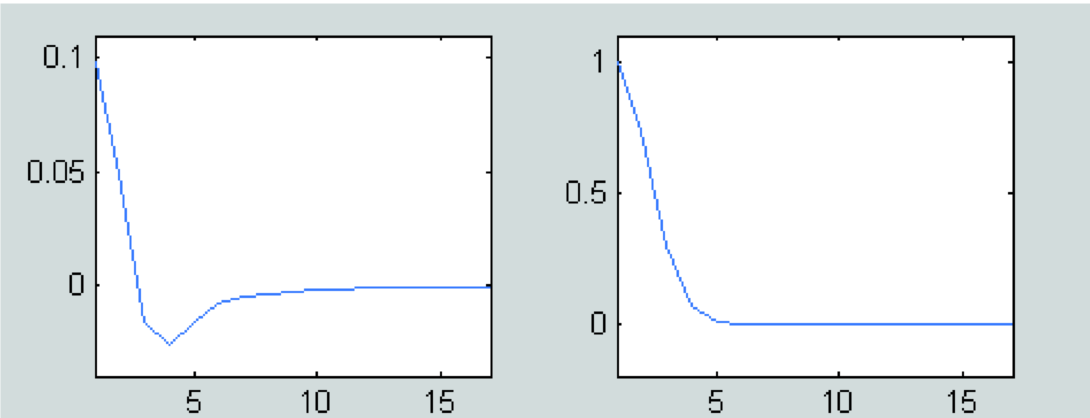


Abbildung 2.29: mittlere Halbzeile und normierte, mittlere Halbspalte

Dafür benötigen wir aufgrund der Symmetrie nur die mittlere Halbzeile. Diese ist in Abbildung 2.29 in ihrer abgetasteten Form zu sehen. Die Glättung in orthogonaler Richtung erhalten wir, wenn die mittlere Halbspalte durch den Mittelpunkt normiert wird. Dies ist auf der rechten Seite des Bildes zu sehen. Wir berechnen einen Teils des Kerns durch punktweise Multiplikation wie folgt.

mx sei der Index der mittlere Spalte.
my sei der Index der mittlere Zeile.
Der Kern nk berechnet sich dann als

$$nk(i,j) = k(mx+i,my) \cdot k(mx,my+j)/k(mx,my)$$

für alle Indizes $i = 0, 1, \ldots$ und $j = 0, 1, \ldots$.

Dies ergibt den unteren, rechten Quadranten. Durch Spiegelungen unter Rücksichtnahme auf die Indizes können wir dann den ganzen Filter erzeugen. Das Ergebnis dieser Arbeit ist auf der linken Seite der nächsten Abbildung zu sehen.

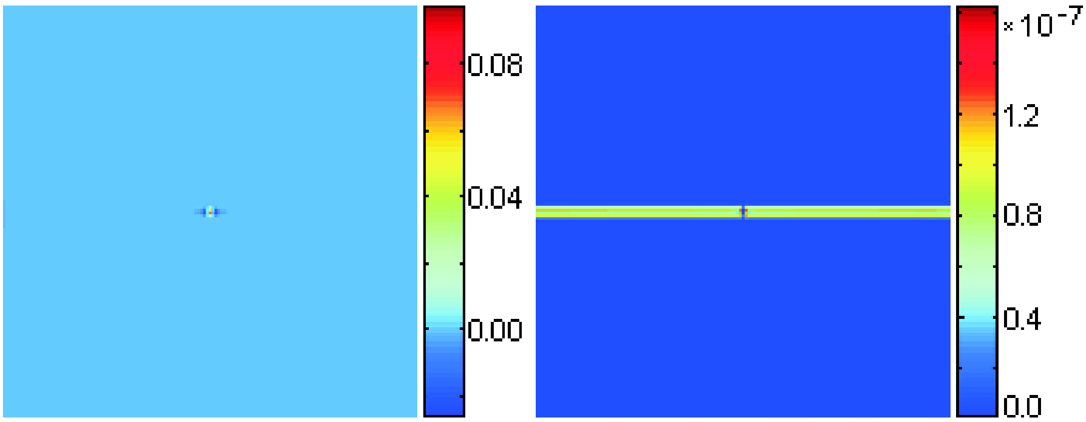


Abbildung 2.30: künstlicher Filter und Differenzbild

Der soeben künstlich generierte Kern hat in etwa die Gestalt des ursprünglichen AI-Filters. Den betragsmäßigen Fehler zeigt die rechte Seite der Abbildung 2.30. Wie wir sehen ist er relativ klein. Für das hier verwendete Setting ist der aufsummierte Unterschied etwa dreimal so groß, wie wenn wir den zweiten Teil des Kerns betragsmäßig aufsummieren. Er liegt also in etwa in der gleichen Größenordnung, so daß wir ihn ebenfalls als vernachlässigbar klein ansehen können.

Neben der Möglichkeit der separaten Interpretation liefert diese Betrachtung auch die Option, den Filter sehr effizient abzuspeichern. Vergleichen wir dies mit unserem Beispiel, das wir bisher immer für solche Betrachtungen herangezogen haben (siehe Abschnitt 2.2.2 bzw. 2.4.1), so läßt sich dort der Aufwand auf nur noch 4 Kilobytes reduzieren.

Nicht ratsam ist es jedoch, nur diese Punkte zu berechnen und dann daraus den Kern zu bestimmen, da wir hier nicht eine A priori - Fehlerabschätzung wie im Fall von k_2 haben, sondern erst hinterher Aussagen über die Qualität machen können. Es sei ebenso darauf hingewiesen, daß dies keine analytische Begründung, sondern eine numerische ist. Es ist bisher nicht gelungen, den Kern als ein Produkt von jeweils nur von einem Parameter abhängigen Teilen zu schreiben plus einen Term, der von beiden Parametern abhängt. Also in etwa $nk(i,j) = k(mx+i,my) \cdot k(mx,my+j)/k(mx,my) + T(i,j)$. Sehen wir dies daher mehr als eine Motivation für noch folgende Resultate.

2.5.4 Modifizierung des Mollifiers

Wir haben in Abschnitt 2.5.2 Nachteile unseres bisherigen AI-Kerns im Vergleich zum FA gesehen. Um diese zu beheben, werden wir die Gestalt des AI-Filters der des FA-Filters angleichen.

Im vorherigen Abschnitt haben wir charakteristische Eigenschaften des AI-Filters untersucht und haben festgestellt, daß der FA-Filter einen kleineren s-Träger hat als der AI-Filter. Ebenso konnten wir sehen, daß je kleiner γ wird, desto kleiner wird auch der s-Träger (vgl. Abb. 2.26). Daraus läßt sich die theoretische Überlegung schlußfolgern, daß wir unser Ziel erreichen, wenn wir γ immer kleiner wählen. Tatsächlich ist dies auch der Fall. Es gilt

$$\gamma \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{s-Träger reduziert auf ein Pixel .}$$

Leider bekommen wir auf diese Art und Weise ein völlig unbrauchbares Ergebnis, da die Glättung in Drehrichtung mit der Differentation verbunden ist. Wir können mit nur einem Pixel keine Ableitung berechnen.

In senkrechter Richtung ist dies jedoch kein Problem. Hier liegt nur eine Glättung vor, wie unsere Überlegungen am Ende des letzten Abschnitts zeigten. Also werden wir zuerst damit beginnen, die Glättung in dieser Richtung zu verringern. Dies gelingt uns, wenn wir den Mollifier in Z-Richtung stärker zusammenziehen als in X- bzw. Y-Richtung.

Wir wollen die mathematische Betrachtung jedoch allgemein durchführen und somit zunächst für alle Richtungen einen anderen Dilatationsparameter einführen.

Lemma 2.5.3

Es seien

$$\gamma_1 := \gamma / g_1 \quad , \quad \gamma_2 := \gamma / g_2 \quad , \quad \gamma_3 := \gamma / g_3$$

und

$$\Theta := \gamma^{-1} \cdot G = \gamma^{-1} \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix} .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Theta(y) \;&:=\; (2\pi)^{-3/2} \, \gamma_1^{-1} \, \gamma_2^{-1} \, \gamma_3^{-1} \, \exp\Big(- \frac{1}{2} \Big| \Theta \, y \Big|^2 \Big) \\ &=\; \det(G) \; \varepsilon_\gamma(G \, y) \; . \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Theta(y) \;&=\; (2\pi)^{-3/2} \, \gamma_1^{-1} \, \gamma_2^{-1} \, \gamma_3^{-1} \, \exp\Big(- \frac{1}{2} \Big| \Theta \, y \Big|^2 \Big) \\ &=\; (2\pi)^{-3/2} \, \det(\Theta) \;\; \exp\Big(- \frac{1}{2} \Big| \Theta \, y \Big|^2 \Big) \\ &=\; (2\pi)^{-3/2} \, \gamma^{-3} \, \det(G) \;\; \exp\Big(- \frac{1}{2} \Big| \frac{G \, y}{\gamma} \Big|^2 \Big) \\ &=\; \det(G) \; \varepsilon_\gamma(G \, y) \quad \text{mit } \varepsilon_\gamma \text{ aus Abschnitt 2.4.3} \end{aligned}$$

□

Erinnern wir uns der Auswahlkriterien 2.4.2, welche der Mollifier erfüllen sollte. Für die Gaußglocke haben wir beim vierten Kriterium bereits ein Auge zugedrückt. Wir erkennen nun sofort, daß der oben beschriebene Mollifier auch nicht mehr allen anderen Anforderungen genügt. Die Rotationsinvarianz ist nicht in alle

Richtungen erfüllt. Überprüfen wir jedoch, wozu wir diese Forderung stellten. Die Invarianz bewirkt, daß wir den gleichen Filter für jede Quellposition verwenden können. Es ist daher ausreichend, wenn wir im Fall der kreisförmigen Abtastkurve Rotationsinvarianz um die Drehachse fordern. Dies bedeutet konkret, daß für unseren Mollifier $g_1 = g_2$ gelten muß. Welche sonstigen Auswirkungen sich noch ergeben, sehen wir noch später.

Wir wollen nun den dazugehörigen Rekonstruktionskern bestimmen. Dies gestaltet sich jedoch etwas schwieriger als bisher. Wir werden einen kleinen Umweg gehen, um dann auf bekannten Pfaden zum Ziel zu gelangen.

Lemma 2.5.4

Die Fortsetzung von $\mathcal{R}f$ auf $\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}$ ist homogen vom Grad -1.

Beweis:

Betrachten wir zunächst eine andere Schreibweise für die 3D-Radon-Transformation

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f\left(\omega, s\right) &= \int_{\omega^\perp} f\left(s\omega + y\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f\left(y\right)\, \delta\left(s - <\omega, y>\right) dy\ . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Fortsetzung auf $\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f\left(r\omega, rs\right) &= \int_{\mathbb{R}^3} f\left(y\right)\, \delta\left(rs - <r\omega, y>\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f\left(y\right)\, \delta\left(r\left(s - <\omega, y>\right)\right) dy \\ &= |r|^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} f\left(y\right)\, \delta\left(s - <\omega, y>\right) dy \\ &= |r|^{-1}\, \mathcal{R}f\left(\omega, s\right)\ . \end{aligned}$$

□

Dieses Lemma benötigen wir nun, um die folgende Aussage zu beweisen.

Lemma 2.5.5

Es sei A eine invertierbare Diagonalmatrix und $\mathcal{T}_A$ der Operator, für den

$$\mathcal{T}_A f\,(x) \;=\; (\det(A))^{-1}\, f(A^{-1}x)$$

gilt. Dann ergibt sich für die 3D-Radon-Transformierte

$$\mathcal{R}\,\mathcal{T}_A f\,(\omega, s) \;=\; ||A\omega||^{-1}\,\mathcal{R}f\,\left(\frac{A\omega}{||A\omega||}, \frac{s}{||A\omega||}\right)\;.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\,\mathcal{T}_A f\,(\omega, s) &= (\det(A))^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} f(A^{-1}x)\,\delta(s- < x, \omega >)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\,\delta(s- < Ay, \omega >)\,dy \\
&= \mathcal{R}f\,(A\omega, s) \\
&= \mathcal{R}f\,\left(\frac{A\omega}{||A\omega||}||A\omega||, \frac{s}{||A\omega||}||A\omega||\right) \\
&= ||A\omega||^{-1}\,\mathcal{R}f\,\left(\frac{A\omega}{||A\omega||}, \frac{s}{||A\omega||}\right)
\end{aligned}$$

Hierbei benötigen wir Lemma 2.5.4 im letzten Schritt.

□

Nun berechnen wir schließlich die 3D-Radon-Transformation des Mollifiers.

Lemma 2.5.6

Für den Mollifier ε_Θ *ergibt sich die 3D-Radon-Transformierte*

$$\mathcal{R}\varepsilon_\Theta\,(\omega, s) \;=\; (2\pi)^{-1/2}\,||\Theta^{-1}\omega||^{-1}\,\exp\left(\frac{-\,s^2}{2\,||\Theta^{-1}\omega||^2}\right)\;.$$

Beweis:

Mit Hilfe des Operators T_A schreiben wir zuerst

$$\varepsilon_\Theta(y) \;=\; \det(G)\;\varepsilon_\gamma(G\,y) \;=\; \mathcal{T}_{G^{-1}}\,\varepsilon_\gamma(y)\;.$$

Wir beginnen und nutzen das vorherige Lemma aus.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\varepsilon_\Theta\,(\omega, s) &= \mathcal{R}\,\mathcal{T}_{G^{-1}}\,\varepsilon_\gamma(\omega, s)\\
&= ||G^{-1}\omega||^{-1}\;\mathcal{R}\varepsilon_\gamma\left(\frac{G^{-1}\omega}{||G^{-1}\omega||}, \frac{s}{||G^{-1}\omega||}\right)\\
&= (2\pi)^{-1/2}\,||G^{-1}\omega||^{-1}\,\gamma^{-1}\,\exp\left(\frac{-\,s^2}{2\,\gamma^2\,||G^{-1}\omega||^2}\right)\\
&= (2\pi)^{-1/2}\,||\Theta^{-1}\omega||^{-1}\,\exp\left(\frac{-\,s^2}{2\,||\Theta^{-1}\omega||^2}\right)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis folgt aus der 3D-Radon-Transformation für den Mollifier ε_γ (siehe Abschnitt 2.4.3).

□

Wir können nun den Rekonstruktionskern einfach berechnen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\psi_\Theta\,(\omega, s) &= -(8\pi)^{-2}\,\frac{\partial^2}{\partial s^2}\,(\mathcal{R}\varepsilon_\Theta)\,(\omega, s)\\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{5/2}}\,\frac{||\Theta^{-1}\omega||^2 - s^2}{||\Theta^{-1}\omega||^5}\,\exp\left(\frac{-\,s^2}{2\,||\Theta^{-1}\omega||^2}\right)\;.
\end{aligned}$$

Wir erkennen, daß der Rekonstruktionskern für diesen Mollifier von der Richtung ω abhängt. Da wir jedoch vorhin schon forderten, daß $g_1 = g_2$ gelten soll, hat dies im weiteren kaum Bedeutung. Dies liegt an der Art und Weise unserer Implementierung. Die Berechnung eines solchen Filters ist nur wenig aufwendiger als die eines in alle Richtungen gleichmäßig dilatierten Kerns.

Betrachten wir kritisch unser zweites Auswahlkriterium, so kommen wir zu dem Schluß, daß wir vielleicht zu viel gefordert haben und dadurch eine gewisse Freiheit in der Erzeugung eines Filters verschenkt haben. Diese haben wir nun zurückgewonnen, indem wir die von der Geometrie abhängigen Anforderungen auf das Nötigste beschränkt haben. Denn falls wir g_1 und g_2 unterschiedlich wählen, geht die Eigenschaft, den Kern für alle Quellen zu benutzen, verloren.

Nachdem wir nun die analytische Seite behandelt haben, kommen wir zur numerischen Umsetzung. Hierbei zeigt sich, daß wir in Z-Richtung nicht beliebig zusammenziehen können. Die Gewichtung der mittleren Zeile wird ab einem gewissen Wert zu groß. Um an dieser Stelle dennoch fortzufahren, führen wir eine Normierung durch.

Berechnen wir einen Filter und rekonstruieren wir eine Kugel mit konstanter Dichte, so stellen wir fest, daß wir den Paramter γ_3 zwar so einstellen können, daß wir einen konstanten Wert für das ganze Volumen erhalten (also auch in Z-Richtung), jedoch der Originalwert (bei einem realistischen Setting) um ca. zwei Prozent überschritten wird. Dies "normieren" wir, indem wir den Kern durch den rekonstruierten Wert teilen und mit dem Originalwert multiplizieren.

Bevor wir nun gleich überprüfen, ob ein solcher Filter in der Praxis auch hält, was er verspricht, wagen wir einen kurzen Blick auf die Spiralgeometrie. Hier ist diese neue Variante des zweiten Auswahlkriteriums nicht ausreichend. Wir werden dort die gleichen Eigenschaften wie bisher fordern.

2.5.5 Kompensation der Nachteile

Wir testen den eben modifizierten Filter an demselben Phantom wie bisher. Für γ_1 und γ_2 wählen wir gleiche Werte wie vorher für γ, jedoch in Z-Richtung stauchen wir die Gaußglocke stärker (vgl. Beispiel A.7).

Vergleichen wir die XY-Ebenen, so haben wir im Hinblick auf Schärfe und andere Eigenschaften die gleichen Resultate wie vorher. Dies ist aufgrund der gleichen Parameterwahl in diesen Richtungen auch nicht verwunderlich. Betrachten wir nun allerdings die Z-Richtung.

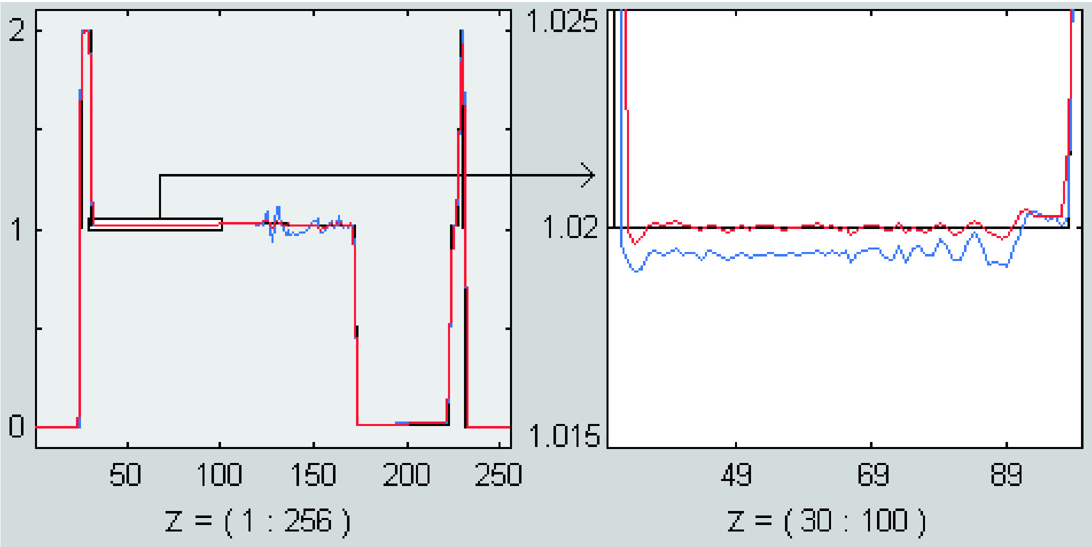


Abbildung 2.31: Linie für x = 0 mm und y = 0 mm und Vergrößerung

Die Abbildung 2.31 zeigt eine sehr gute Rekonstruktion entlang der Z-Achse. Vergleichen wir dies nochmals mit Abbildung 2.24 (siehe S. 69). Wir stellen fest, daß der Abfall mehr als nur korrigiert wurde. Wir haben nun in Z-Richtung eine sehr gute Schärfe. Dies läßt sich auch an den Kanten sehen. Wir sind im Vergleich zum FA voll konkurrenzfähig. Diesen Nachteil konnten wir also durch die Modifizierung beseitigen.

Es bleibt jedoch noch die Glättung der Kanten in den XY-Ebenen. Diese konnten wir durch die vorherige Modifizierung nicht verhindern. Auch hier gilt, daß wir theoretisch γ immer kleiner wählen müssen, bis die gewünschte Schärfe erreicht ist. Aber auch hier bekommen wir bei der Umsetzung Probleme. Diese entstehen aufgrund der zu schlechten Abtastung, weshalb die Differentation nicht mehr richtig funktioniert.

Um diesen Nachteil letztlich zu kompensieren, müssen wir also mehr Aufwand betreiben, als wir es taten. Betrachten wir unser bisheriges Vorgehen und analysieren wir zunächst die Schwachstelle.

Wir haben immer pro Detektorpunkt einen Punkt des Filters berechnet. Dafür wählten wir den Mittelpunkt des Pixels. Wir benötigen die gleichen Größen, um die Faltung des Fourier-transformierten Kerns mit den Fourier-transformierten Daten durchzuführen. Leider geht uns, wenn sich γ gegen Null bewegt, immer mehr Genauigkeit verloren, oder anders ausgedrückt, der Unterschied zwischen dem kontinuierlichen Kern, der das Problem löst, und dem diskreten Kern, den wir aufgrund der Abtastung erhalten, wird zu groß. Dadurch ist uns eine Grenze gesetzt.

Wollen wir nun trotzdem fortschreiten, so müssen wir die Genauigkeit erhöhen. Wir achten mehr auf die Abtastung als bisher. Konkret bedeutet dies, daß wir ein viel feineres Gitter wählen, um den Kern zu bestimmen, daß wir bei der Wahl der Regularisierungsparameter uns mehr Gedanken machen als bisher und daß wir dann den Kern auf das gröbere Gitter des Detektors herunterrechnen.

Führen wir dies am Beispiel des Filters zur Berechnung der Rekonstruktion unseres Beipiels A.8 durch. Um die bisherigen Nachteile zu beheben, erhöhen wir die Auflösung um den Faktor 64. Das heißt, wir berechnen für einen Detektorpunkt 8 $\times$ 8 Punkte. Für den 256^2-Detektor sind dies also 2048^2 Punkte. Auch die Anzahl der Stützstellen des zu approximierenden Integral erhöhen wir von etwa 700 auf 10000. Erst ab einer solchen Größe erhalten wir ein "sauberes" Bild ohne Moiree-Muster aufgrund von Approximationsfehlern. Schließlich beschäftigen wir uns mit der Parameterwahl. Wir wählen $\gamma_1 = \gamma_2$ so, daß sämtliche positiven Werte des Filters in die 8 $\times$ 8 Pixel der Detektormitte fallen. Der Rand sollte in etwa Null sein, die benachbarten Werte negativ. Diese 2048^2 Punkte rechnen wir nun auf die 256^2 Pixel herunter. Wir mitteln einen Pixel aus den 8 $\times$ 8 Punkten, wobei die Randpunkte nur mit dem Faktor $1/2$ gewichtet werden. Schließlich haben wir einen 256^2-AI-Filter.

Hierdurch ergibt sich ein Filter, der in seiner Charakteristik dem FA-Filter sehr ähnlich ist. Wie überprüfen die bisherigen Nachteile.

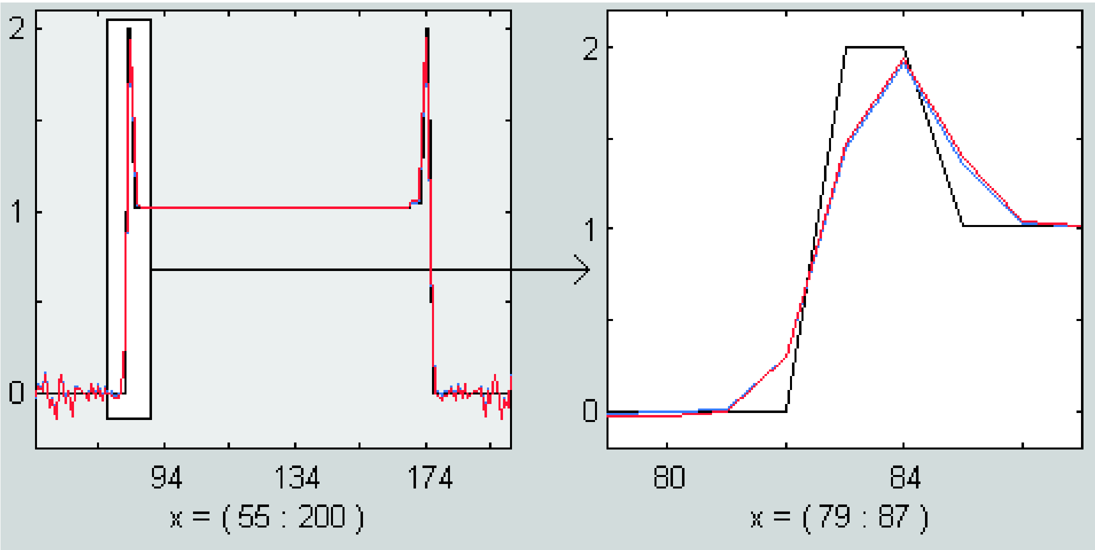


Abbildung 2.32: Linie für y = -25,846 mm und z = 18,461 mm und Vergrößerung

Wir sehen in Abbildung 2.32, daß die Glättung des AI-Filters zurückgegangen ist. Die beiden Rekonstruktionen sind hier kaum zu unterscheiden. Wir haben unser Ziel erreicht. Ohne die vorherige Modifizierung hätten wir jedoch noch einen Abfall in Z-Richtung. Schauen wir uns Abbildung 2.33 an.

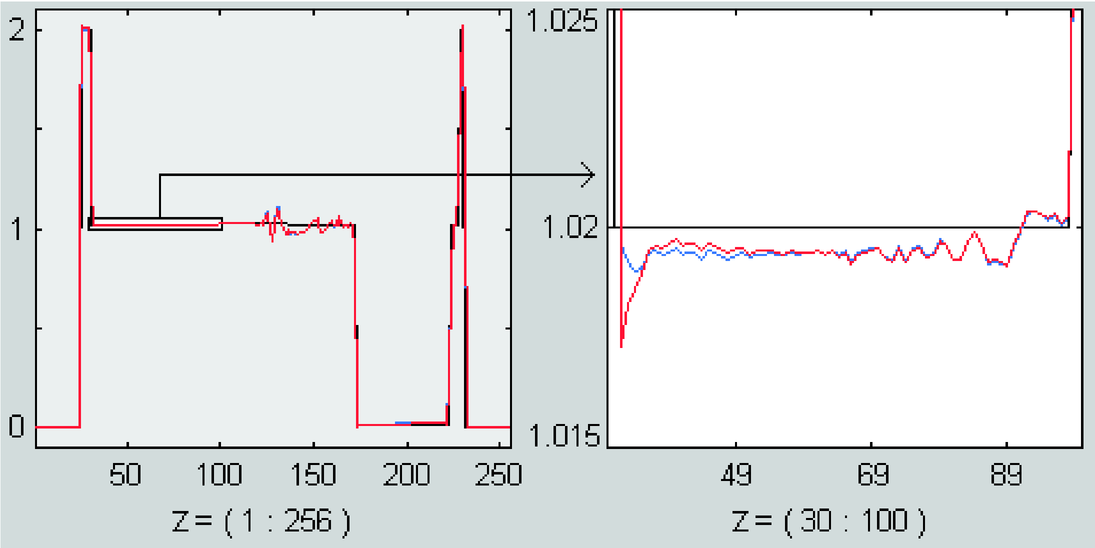


Abbildung 2.33: Linie für x = 0 mm und y = 0 mm und Vergrößerung

Auch hier stimmt die Rekonstruktion mit dem Filter aus A.8 mit der des FA-Filters fast komplett überein. Nur 2-3 Punkte unterscheiden sich deutlich. Dies wirft die Frage auf, ob sich die Rekonstruktionen denn überhaupt groß unterscheiden.

Abbildung 2.34: XY-Ebene für z = 18,461 mm; FA (links) und AI (rechts)

Die Abbildung 2.34 gibt darauf eine klare Antwort. Die Rekonstruktionen sind ziemlich gleich. Wir müssen noch genauer schauen, um überhaupt Unterschiede wahrzunehmen.

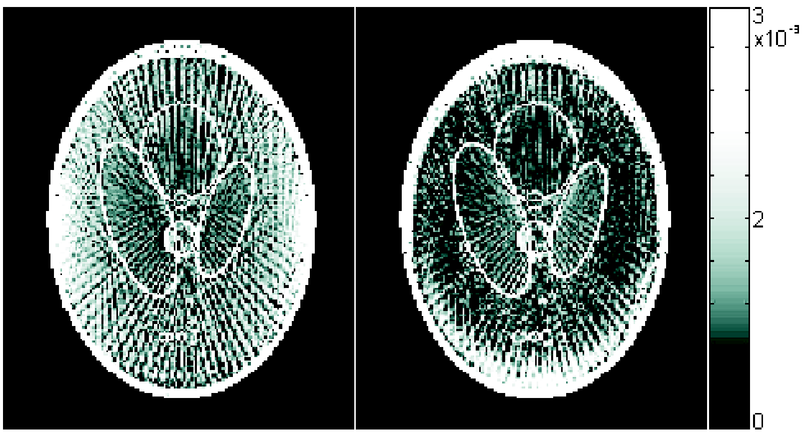


Abbildung 2.35: XY-Ebene für z = 18,461 mm; Differenz von FA (l.) und AI (r.)

Die Abbildung 2.35 zeigt das Differenzbild des Originalbilds mit der jeweiligen

Rekonstruktion in absoluten Werten. Die Abweichungen liegen meist im Promillebereich und ebenso die Unterschiede. Die AI-Rekonstruktion ist dabei etwas besser als die FA-Rekonstruktion, der Fehler pro Pixel um 0.0008 geringer.

Es ist uns also gelungen, einen AI-Filter zu berechnen, der die bisherigen Nachteile nicht besitzt. Dazu mußten wir allerdings den Aufwand erheblich steigern. Der so errechnete Filter hat einen ebenso kleinen s-Träger wie der FA-Filter. Leider bekommt man selten etwas dazu, ohne etwas herzugeben. So besitzt dieser Filter auch sämtliche negativen Eigenschaften des FA-Filter. Bleibt also die Frage, was wir gewonnen haben.

Fazit:

Schon seit der Arbeit von Dietz (siehe [5]) wußten wir, daß die AI im Falle von mittel bis stark verrauschten Daten dem FA überlegen ist. Aufgrund der Steuerung der Regularisation mittels der mathematischen Linse, welche beim Betrachten wie eine optische wirkt, ist eine optimale Auswahl eines Filters leicht möglich. Diese einfache Handhabung bietet der FA nicht.

Neu hingegen ist, daß wir auch im Fall von (theoretisch) ungestörten oder nur leicht verrauschten Daten mittels AI einen Filter generieren können, der gleich gute Ergebnisse erzielt wie der FA. Dadurch ist es gelungen zu zeigen, daß die AI im vergleichenden Sinn den FA dominiert. Es ist kein Fall bekannt, indem nicht mindestens gleich gute Ergebnisse erzielt werden können. Aber es sind viele Fälle, in denen die AI bessere Ergebnisse erzielt. Die Flexibilität macht den Unterschied zwischen der AI und dem FA aus.

2.5.6 Praktische Anwendung

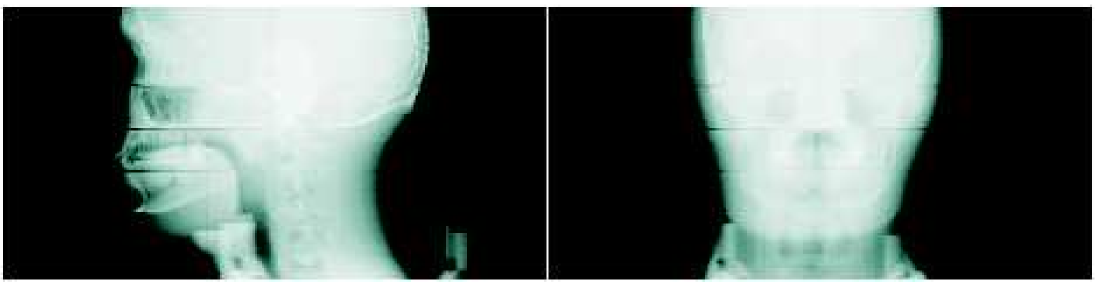


Abbildung 2.36: reale Meßdaten eines ausgegossenen Kopfes (vgl. A.10)

Wir haben im Verlauf dieser Arbeit oft argumentiert, daß wir uns ergebnisorientiert verhalten wollen. Daher testen wir nun unseren Algorithmus an realen Daten. Aufgrund eines Forschungsprojekts mit dem Deutschen Krebsforschungszentrum (DKFZ) in Heidelberg und dem Fraunhofer Institut für zerstörungsfreie Prüfverfahren (IZFP) in Saarbrücken stehen Meßdaten (z.B. Abb. 2.36) zur Verfügung, an denen wir nun unser Verfahren in der Praxis testen. Dabei war das Ziel des Projektes das Generieren eines Filters für Daten von schlechter Qualität. Nach unseren bisherigen Untersuchungen sollte die AI bessere Ergebnisse liefern, als es der FA ermöglicht. Wir werden zunächst Rekonstruktionen aus Daten mit wenig Störungen überprüfen und dann aus immer schlechter werdende Daten rekonstruieren. Sofern die Möglichkeit vorhanden ist, werden wir auch Vergleiche mit dem modifizierten FA des DKFZ führen.

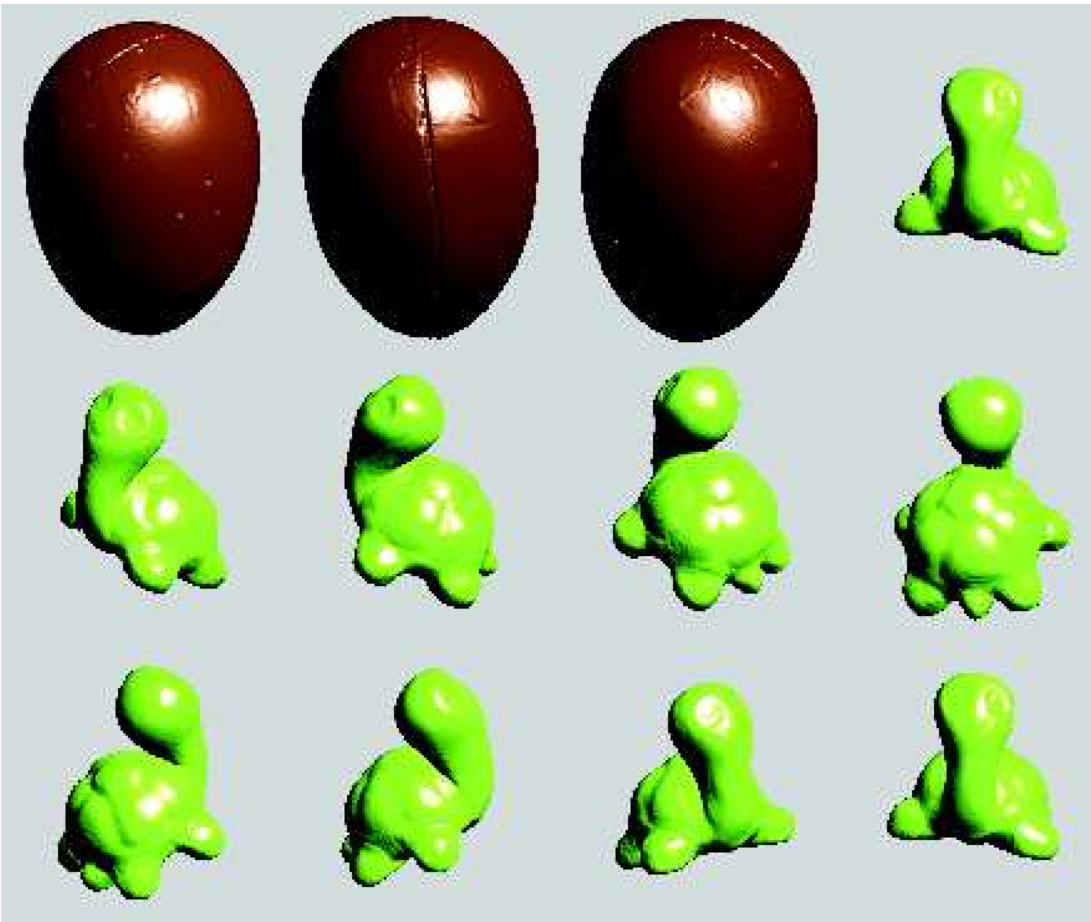


Abbildung 2.37: Rekonstruktion aus Meßdaten A.9

Beginnen wir also mit qualitativ guten Meßdaten (siehe A.9) bzw. deren Rekonstruktion, welche in Abbildung 2.37 zu sehen ist. Dieses Setting entspricht einer Anwendung für zerstörungsfreies Prüfen. Das Objekt - unschwer zu erkennen, daß es sich um ein "Überraschungsei" handelt - kann sehr gut rekonstruiert werden. Wir sehen drei Bilder des Schokoladeneis (aufgenommen im Abstand vom 120 Grad) und 9 Bilder der Rekonstruktion einer Schildkröte, die sich im Innern befindet. Jene ist deutlich erkennbar. Auch wenn es zuerst etwas scherzhaft wirkt, so zeigt das Ü-Ei doch genau die Problematik. Man möchte gerne den Inhalt wissen, ohne das Ei zu öffnen, ein klassisches Blackbox-Problem.

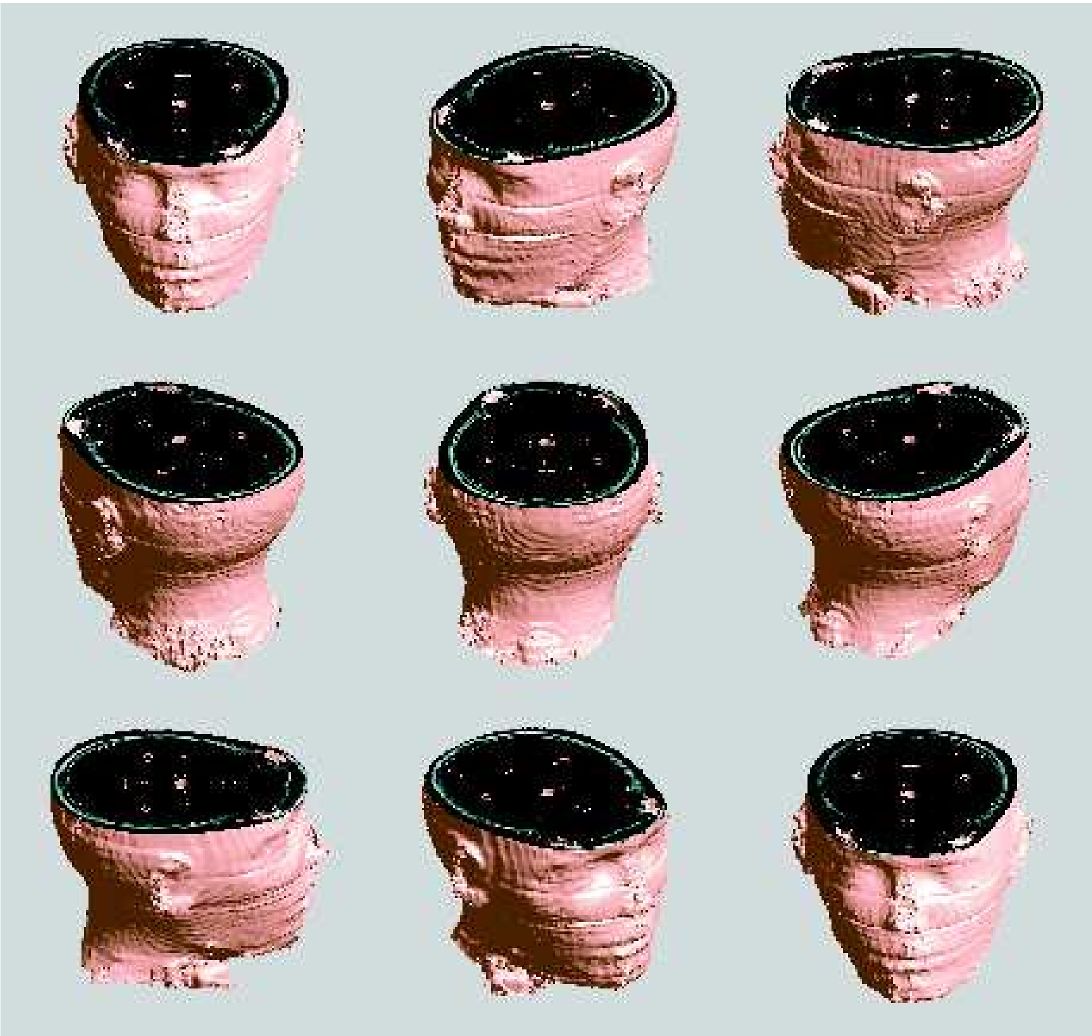


Abbildung 2.38: Rekonstruktion aus Meßdaten A.10

Im Rahmen des Forschungsprojektes sollte eine Anwendung im medizinischen Bereich ermöglicht werden. Daher interessierte man sich dort für andere Objekte. Die Abbildung 2.38 zeigt die Rekonstruktion eines realen Kopfphantoms (siehe A.10). Auch hier wurde ein Setting verwendet, welches in der medizinischen Anwendung nicht gewünscht war. Es zeigt jedoch die Möglichkeiten einer Rekonstruktion, wenn die Meßdaten dementsprechend gut sind. Um in das Innere des Kopfs zu schauen, betrachten wir die Abbildung 2.39.

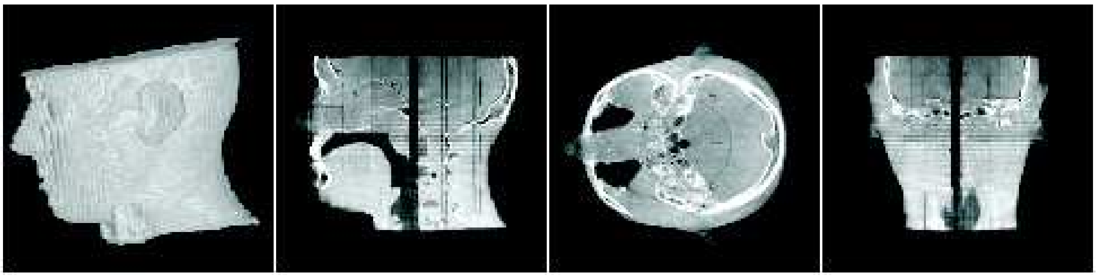


Abbildung 2.39: Rekonstruktion aus Meßdaten A.10

Wir sehen eine Volumenaufnahme und jeweils die mittlere Ebene in allen Richtungen. Wir wollen nun Rekonstruktionen betrachten, die im Laufe des Projekts entstanden. Das heißt, daß die folgenden Abbildungen aus qualitativ immer schlechter werdenden Daten gewonnen wurden. Fahren wir wieder mit einem weiteren Kopfphantom (siehe A.11) fort.

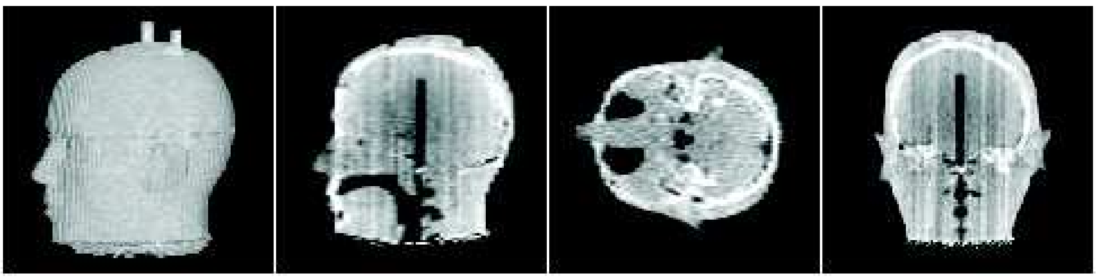


Abbildung 2.40: Rekonstruktion aus Meßdaten A.11

Diese Rekonstruktion (siehe Abb. 2.40) ist von schlechterer Qualität, wie die Daten es nicht anders erwarten ließen. Um den Filter in der medizinschen Anwendung zu testen, wurden auch oft Phantome gebaut, welche Einlagen im interessierenden Dichtebereich besaßen.

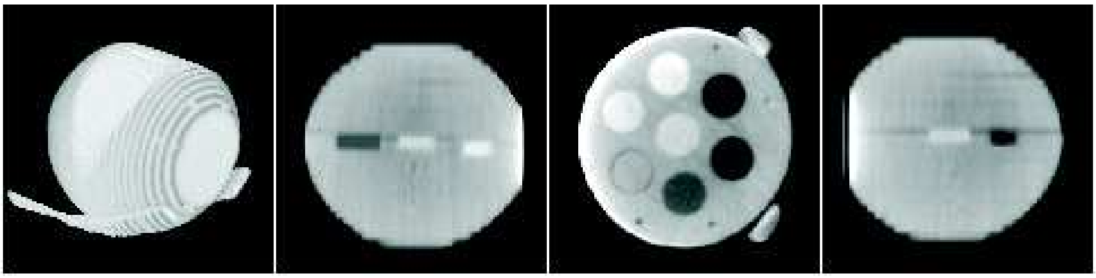


Abbildung 2.41: Rekonstruktion aus Meßdaten A.12

Die Abbildung 2.41 zeigt eine Rekontruktion eines solchen Phantoms (siehe A.12). Die Einlagen sind in der mittleren XY-Ebene der Kugel der Dichte nach im Uhrzeigersinn aufsteigend angeordnet. Auf der Volumenaufnahme ist sonst noch die Halterung zu erkennen. Vergleichen wir mit der aus dem Standardalgorithmus des DKFZ, einem modifizierten FA, gewonnenen Rekonstruktion.

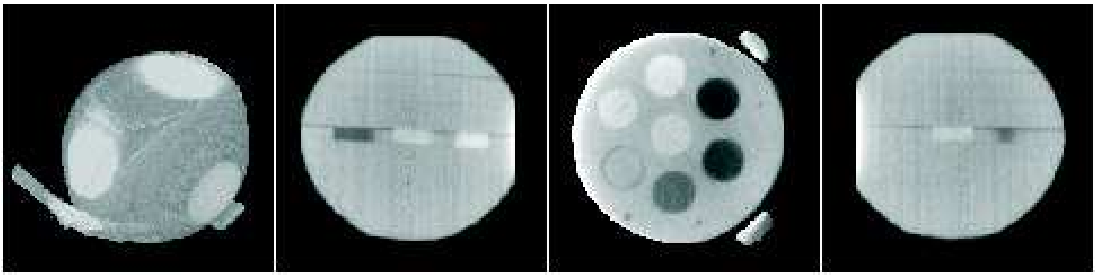


Abbildung 2.42: Rekonstruktion aus Meßdaten A.13, dieselben wie in A.12

Die Rekonstruktion (in Abb. 2.42 zu sehen) hat in etwa die gleiche Qualität wie unser mit der AI hergestellte Rekonstruktion. Begeben wir uns langsam in die

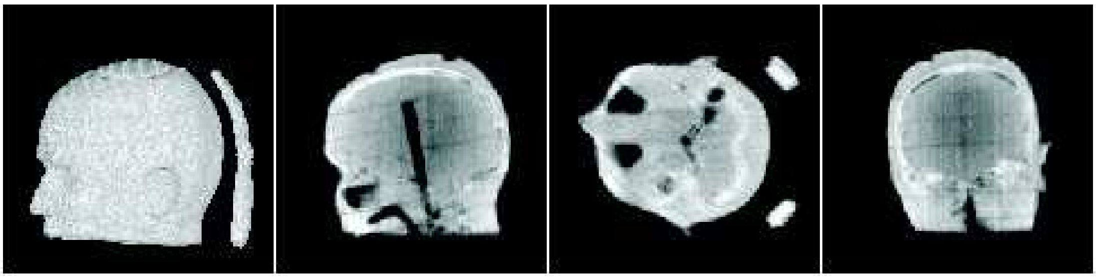


Abbildung 2.43: Rekonstruktion aus Meßdaten A.14

Bereiche der relevanten Störungen.

Die Rekonstruktion (siehe Abb.2.43) eines weiteren Datensatzes eines Kopfphantoms (siehe A.14) zeigt nun schon erste Probleme. Mit dem gleichen Setting wurde ein Locher (siehe A.15) aufgenommen. Auch diese Rekonstruktion (siehe 2.44) zeigt, daß sich perfekte Ergebnisse unter diesen Umständen wohl nicht mehr realisieren lassen.

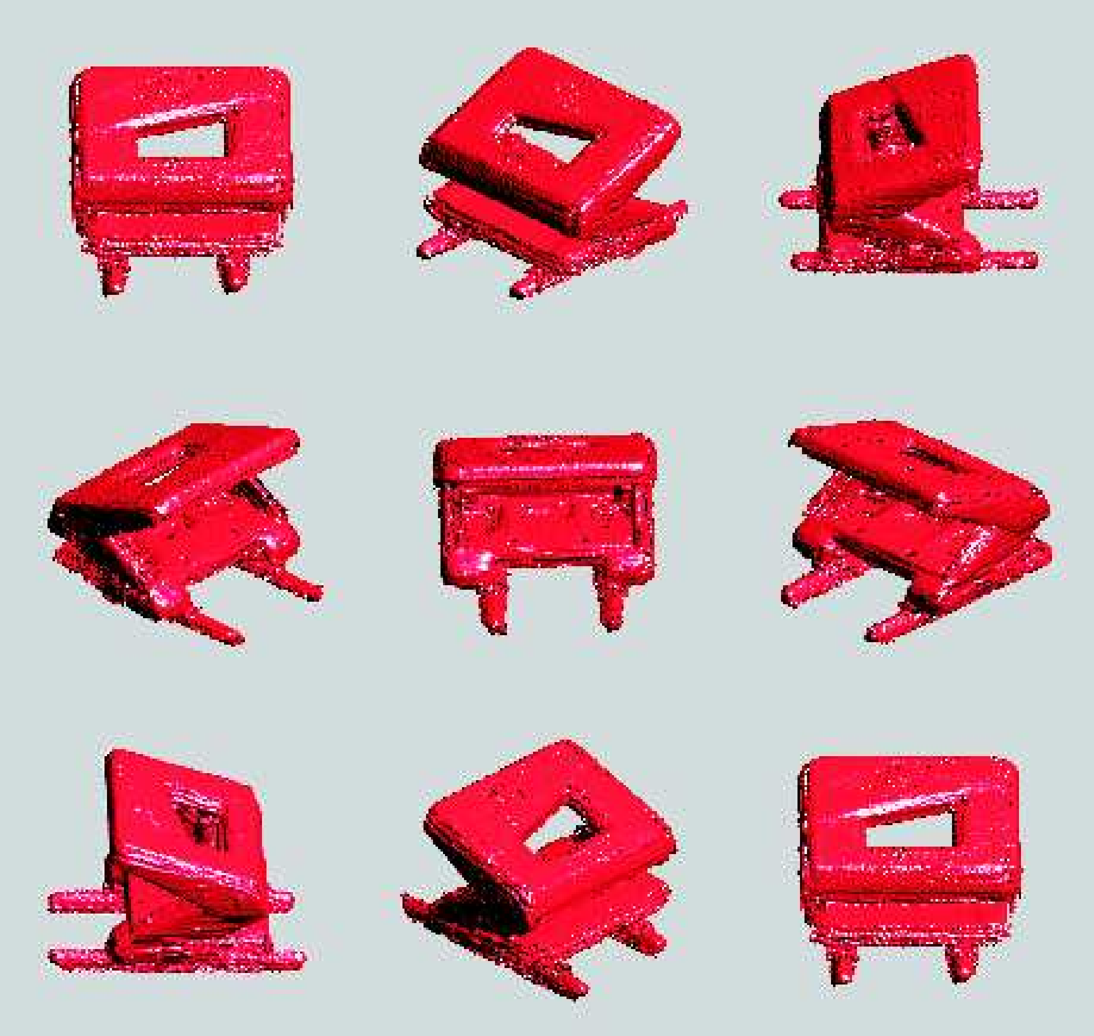


Abbildung 2.44: Rekonstruktion aus Meßdaten A.15

Dabei waren die Aufnahmen noch von einer besseren Qualität, als wir innerhalb des Projekts betrachten wollten. Einen Schritt in diese Richtung zeigt uns die Abbildung 2.45.

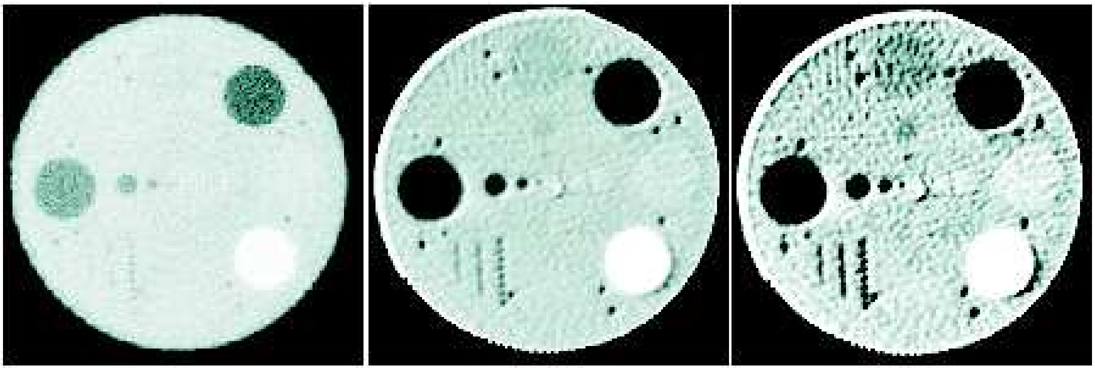


Abbildung 2.45: Rekonstruktionen aus denselben Meßdaten A.16 und A.17

Darauf ist jeweils die interessierende XY-Ebene der Rekonstruktionen eines Testphantoms zu sehen, dessen genaue Beschreibung sich im Anhang unter A.16 nachlesen läßt. Links befindet sich die Rekonstruktion des DKFZ, welches einen FA mit Parker-Gewichten verwendet. In der Mitte ist eine Rekonstruktion mittels AI zu sehen. Das Bild rechts zeigt dieselbe Rekonstruktion, allerdings wurde das optische Fenster etwas kleiner gewählt, um feine Unterschiede auf dem Bild besser zu erkennnen.

Nun, worauf ist hier zu achten? Die AI-Rekonstruktion zeigt mehr Details als die des FA. Besonderes Augenmerk legen wir auf die Objekte auf 12 Uhr und auf 3 Uhr. Diese sind beim FA-Bild nicht zu sehen, bei den AI-Bildern hingegen sind sie, wenn auch sehr schwach, zu erkennen. Dies spiegelt in der Tat genau jene Ergebnisse wieder, die wir beim Vergleich an synthetischen Daten als Vorteile der AI erkannt haben. Die Ergebnisse des AI-Filters sind natürlich nicht perfekt, aber doch deutlich besser als die bisherigen, die mit dem modifizierten FA erzielt wurden.

Dies ist zum Zeitpunkt der Erstellung dieser Diplomarbeit immer noch Gegenstand des Forschungsprojekts und wir hoffen und glauben, daß sich noch bessere Ergebnisse aus den Meßdaten gewinnen lassen.

Die Resultate aus realen Meßdaten spiegeln ziemlich exakt genau das wieder, was wir im letzten Abschnitt als Fazit schon festgehalten haben. Die Filter, die wir mittels AI generieren können, sind konkurrenzfähig im Fall von "guten" Daten und besser im Fall von qualitativ schlechten Aufnahmen. Dies haben wir nun auch an Rekonstruktionen gesehen, die nicht wie bisher auf im Computer synthetisch erzeugten Daten basieren, sondern aus Aufnahmen von realen Objekten errechnet wurden. Wir haben also gezeigt, daß unsere theoretischen Überlegungen sich auch in die Praxis übertragen lassen. Da hier auch Störungen auftreten, die wir nicht simulieren konnten, war dies nicht selbstverständlich.

Auch diese Arbeit ist wohl noch kein Ende der Entwicklungsmöglichkeiten, aber wir haben einen weiteren kleinen Schritt gemacht.

2.6 Ausblick: Spiralförmige Abtastkurve

Nachdem wir uns jetzt recht ausführlich mit einer kreisförmigen Abtastkurve beschäftigt haben, wollen wir nun auf eine andere Abtastkurve kurz eingehen. Wir werden eine Spirale betrachten. Es fällt sofort auf, daß dies ein weites Feld im Gegensatz zu einer kreisförmigen Abtastkurve ist. Wir könnten die kreisförmige Umlaufbahn auch als Spezialfall der nun betrachteten Abtastkurven sehen. Da dies jedoch ein Ausblick und keine Lösung sein soll, werden wir unseren Blick wieder einschränken.

Wir werden im folgenden Kurven betrachten, die das Objekt nur einmal konzentrisch umlaufen und zwischen den Quellpunkten einen konstanten Abstand haben. Unsere Kurve soll also die Gestalt

$$a(\lambda) = (-R\cos\lambda, -R\sin\lambda, -\frac{H}{2} + \frac{H\lambda}{2\pi}) \quad , \quad \lambda \in [0, 2\pi)$$

haben. Desweiteren wollen wir solche Kurven betrachten, die die Tuy'sche Bedingung (siehe Def. 1.2.1) erfüllen. Dies bedeutet im konkreten Fall, daß wir R und H groß genug wählen, damit die dritte Bedingung erfüllt ist.

Die Abtastkurve hat natürlich auch Einfluß auf die Wahl unseres Mollifiers. Wir können die zuletzt gemachten Spezifikationen nicht übernehmen und fordern wieder die Auswahlkriterien 2.4.2, wobei wir, um weiterhin die Gaußglocke verwenden zu können, wieder ein Auge zu drücken. Wir werden uns auch im folgenden ähnlich verhalten, wie wir dies im Fall der kreisförmigen Abtastkurve getan haben.

Da wir vorhin gefordert haben, daß die Abtastkurve die Tuy'sche Bedingung erfüllt, starten wir der der Rekonstruktionsformel aus Satz 2.1.1

$$\begin{aligned}\tilde{f}\,(x) \quad &= \quad \frac{1}{4}\int_\Gamma\int_{S^2} g(a,\,\theta)\,k(x;\,a,\,\theta)\,d\theta\,da \\ &\quad \text{mit} \quad k(x;\,a,\,\theta) = \int_{S^2}\Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\Big)\,|a'^\top\omega|\,n(\omega,\,a^\top\omega)^{-1}\,\delta'(\theta^\top\omega)\,d\omega \\ &\quad \text{und} \quad \Psi^0\,(s) = \int_0^s \psi^0\,(t)\,dt + c\,.\end{aligned}$$

Genau wie im Fall der kreisförmigen Abtastkurve müssen wir nun die Funktion n approximieren. Einen möglichen Ansatz zeigen z.B. DEFRISE und CLACK in [7]. Wir werden an dieser Stelle unsere Überlegungen so weit vereinfachen, daß sich einige Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen übertragen lassen.

Wir ersetzen die Funktion n wie im Fall der kreisförmigen Abtastkurve durch eine Konstante. Leider ist dies nicht so leicht möglich wie vorhin (vgl. Abschnitt 2.2.1). Dort galt $n(\omega, a^\top\omega) = 2$ *f.ü.* . In diesem Fall wollen wir einfach eine Mittelung bestimmen. Das heißt, wir berechnen $n(\omega, s)$ für alle $\omega \in S^2$ und $s \in [-1, 1]$ und bilden dann den Durchschnittswert. Wie so oft argumentieren wir ergebnisorientiert. Daß diese einfache Methode gute Ergebnisse liefert, sehen wir später an dem Beispiel A.18.

Präzisieren wir das oben gesagte im Sinne einer Implementierung. Wir berechnen die Funktion $n(\omega, s)$ auf einem 3D-Gitter der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Um dies für verschiedene Kurven zu automatisieren, berechnet man in Wirklichkeit die Anzahl der Schnittpunkte mit einem Polygonzug, der sich über die gesamte Abtastkurve erstreckt. Für eine ausreichende Anzahl von Stützpunkten erhält man so ein brauchbares Ergebnis.

Da wir den konstanten Faktor 1/2 bei der kreisförmigen Abtastkurve aus dem Kern "herausgezogen" haben und dies auch in diesem Fall tun können, gilt die approximative Invarianz 2.2.1 auch in diesem Fall. Wir verwenden also für jeden Rekonstruktionspunkt, der nahe beim Nullpunkt liegt, denselben Filter.

Die Invarianz für die verschiedenen Quellpunkte erhalten wir, wenn wir uns die Bewegung von einem Quellpunkt zum anderen als Drehung in XY-Ebene und anschließender Verschiebung in Z-Richtung vorstellen. Das erste Ergebnis liefert Invarianz 2.2.2. Machen wir uns bewußt, daß die Drehung auf die Verschiebung in Z-Richtung keinen Einfluß hat. Andererseits gilt, alleine für die konstante Verschiebung betrachtet, daß die Tangente $a' = a'_0$ ist, und somit gilt auch

$k(x, a_0, \theta) = k(x + z_h, a, \theta)$, wobei $a = a_0 + z_h$ und z_h die Verschiebung in Z-Richtung ist. Das heißt, wir führen quasi nur eine Koordinatentransformation in Z-Richtung durch, jedoch an den relativen Größen ändert sich nichts.

Für die Implementierung bedeutet dies, daß wir den Rekonstruktionsvoxel bei jeder Änderung des Quellpunkts mitverschieben, was jedoch kaum zusätzlichen Aufwand verlangt. In Z-Richtung wird bei der Bestimmung des Schnittpunkts zwischen der Gerade Quellpunkt - Rekonstruktionspunkt mit der Detektorebene die Verschiebung mitberücksichtigt.

An der Implementierung als gefilterte Rückprojektion ändert sich natürlich auch nicht viel. Wir müssen nur noch unsere neue Weglänge der Abtastkurve an der entsprechenden Stelle einsetzen. So heißt es dann im Algorithmus:

...

falls l == n

$$f(u, v, w) = \frac{\sqrt{4\pi^2 + (H/R)^2}}{n} f(u, v, w);$$

...

Der Faktor R wird genau wie im Fall des Kreises an anderer Stelle verrechnet.

Also müssen wir nur noch den Kern berechnen. Dazu führen wir für die Kreisbewegung wieder denselben Weg wie in Lemma und Definition 2.4.1 ein. Wir verbinden dies mit der vertikalen Verschiebung und erhalten

$$\begin{aligned} k(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} R \cos\beta \cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \psi^0 \left(s(\mu; \alpha, \beta) \right) \left| t(\mu; \alpha, \beta) \right| d\mu \\ &\quad - \Big((a_o)'_2 \cos\beta \sin\alpha - (a_o)'_3 \sin\beta \Big) \int_{-\pi}^{\pi} \Psi^0 \left(s(\mu; \alpha, \beta) \right) \operatorname{sgn}\big(t(\mu; \alpha, \beta) \big) \, d\mu \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} t(\mu; \alpha, \beta) &= (a_0)'_2 \left[\cos\mu \cos\alpha + \sin\mu \sin\beta \sin\alpha \right] \\ &\quad + (a_0)'_3 \sin\mu \cos\beta , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s(\mu;\alpha,\beta) &= R\,[\cos\mu\sin\alpha - \sin\mu\sin\beta\cos\alpha]/2\ , \\
(a_o)'_2 &= \frac{-R}{\sqrt{R^2+(H/2\pi)^2}}\ , \\
(a_o)'_3 &= \frac{H/2\pi}{\sqrt{R^2+(H/2\pi)^2}}\ .
\end{aligned}
$$

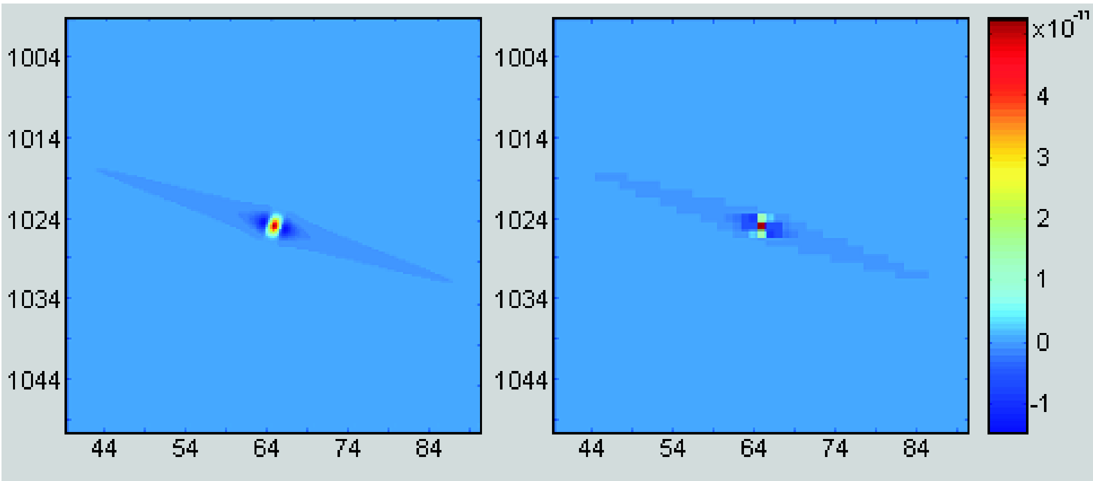


Abbildung 2.46: 16-fache Auflösung des Filters und Originalabtastung aus A.18

Wir sehen in Abbildung 2.46, daß die Eigenschaften des Filters sich im Vergleich zu einer kreisförmigen Abtastkurve scheinbar nur wenig geändert haben. Wir erkennen eine Differentation in Drehrichtung und senkrecht dazu eine Glättung.

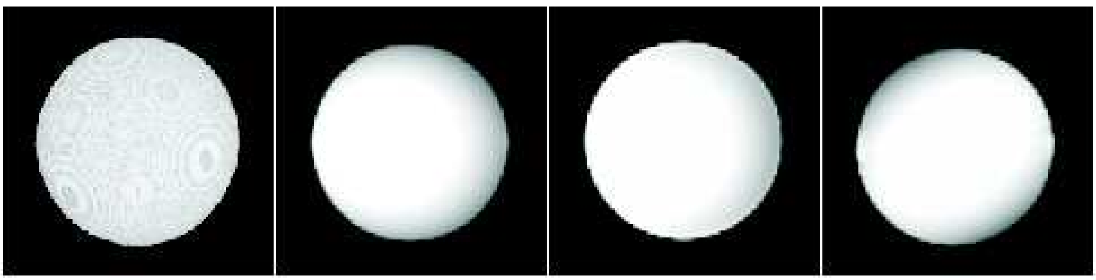


Abbildung 2.47: Rekonstruktion einer Kugel mit konstanter Dichte

Wir wollen nun jedoch auf eine tiefer gehende Diskussion verzichten und uns eine

Rekonstruktion eines einfachen Beispiels (siehe A.18) anschauen. Die Abbildung 2.47 zeigt dieses.

Bewußt verzichten wir hier darauf, die Darstellung zu optimieren. So können wir noch Rekonstruktionsartefakte am Rand erkennen. Die mangelnde Qualität ist wohl auf die geringere Auflösung im Rekonstruktionbereich und die noch nicht optimierte Filterberechnung zurückzuführen (vgl. Abb. 2.46). Es ist jedoch auch so, daß wir bei der Spiralgeometrie mit anderen Artefakten rechnen müssen als im Fall der kreisförmigen Abtastkurve. Dies sollte an dem Beispiel gezeigt werden.

Wir haben nun auf schnelle Art und Weise einen Filter für eine spiralförmige Abtastkurve entwickelt. Dieser müßte nun genauer analysiert werden, um möglicherweise ähnliche Ergebnisse zu erzielen wie im Fall der kreisförmigen Abtastkurve. Ebenso stellt sich die Frage, ob man nicht bessere Ergebnisse für eine andere Wahl von $n(\omega, s)$ erzielt. Jedoch endet diese Arbeit hier und überläßt dies der zukünftigen Forschung.

Anhang

An dieser Stelle sind die Parameter der in der Arbeit erwähnten Beispiele nachzulesen. Anhand derer sind die Beispiele, sofern sie nicht auf real gemessenen Daten beruhen, nachrechnenbar. Für die Rekonstruktion wurde dabei stets die best mögliche Auflösung gewählt, sofern dies nicht die Grenzen der Hardware überschritt.

A.1 Kugel und FA

Objekt

Kugel-Phantom

Das Phantom wurde virtuell nach folgenden Angaben erzeugt:

Skalierungsfaktor: $r = 50$ mm

Anzahl der Ellipsoide: 1

1. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$

Halbachsen: $r \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 1.0

Geometrie- und Aufnahmeparameter

Detektorhöhe: 204.8 mm

Detektorbreite: 204.8 mm

Pixel in horizontaler Richtung: 256

Pixel in vertikaler Richtung: 256

Abtastkurve: Kreis (360 Grad)

Quellpositionen: 120 (äquidistant verteilt)

Abstand Quelle-Isozentrum: 1000 mm

Abstand Isozentrum-Detektor: 300 mm

Filter

Shepp-Logan-Filter in FA

A.2 Shepp-Logan-Phantom und AI(S)

Objekt

Shepp-Logan-Phantom

siehe Ende des Anhangs

Geometrie- und Aufnahmeparameter

wie in A.1

Filter

AI aus ε_γ^S (vgl. Abschnitt 2.4.2) mit $\gamma = 0.013115$

A.3 Shepp-Logan-Phantom und AI(G)

Objekt

wie in A.2

Geometrie- und Aufnahmeparameter

wie in A.1

Filter

AI aus ε_γ^G (vgl. Abschnitt 2.4.3) mit $\gamma = 0.0033$

A.4 Shepp-Logan-Phantom und FA

Objekt

wie in A.2

Geometrie- und Aufnahmeparameter

wie in A.1

Filter

Shepp-Logan-Filter in FA

A.5 modifiziertes Shepp-Logan-Phantom und AI(G)

Objekt

modifiziertes Shepp-Logan-Phantom

Ellipsoide wie in A.2, jedoch wurden die Gewichte der Ellipsoide 9 - 19 mit dem Faktor 10 multipliziert, Gewichte der Ellipsoide 1-8 unverändert.

Geometrie- und Aufnahmeparameter

wie in A.1, allerdings wurden auf die Meßdaten zufällige, gleichverteilte Störungen von bis zu ± 10 Prozent des Maximalwertes aller Messungen aufaddiert

Filter

AI aus ε_γ^G (vgl. Abschnitt 2.4.3) mit $\gamma = 0.006$

A.6 modifiziertes Shepp-Logan-Phantom und FA

Objekt

wie in A.5

Geometrie- und Aufnahmeparameter

wie in A.5

Filter

modifizierter Shepp-Logan-Filter in FA, dabei wurde mit 5-facher Schrittweite gearbeitet; also der Wert an der Stelle Null bleibt gleich, der ursprüngliche Wert an der nächsten Abtaststelle wird in den Punkt der fünften Abtaststelle verschoben usw.; die "freien" Stelle werden mit Null besetzt

A.7 Shepp-Logan-Phantom und modifizierte AI(G)

Objekt

wie in A.2

Geometrie- und Aufnahmeparameter

wie in A.1

Filter

AI aus ε_Θ (vgl. Abschnitt 2.5.4) mit $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.0033$ und $\gamma_3 = 0.0019$

A.8 Shepp-Logan-Phantom und modifizierte AI(G) aus 64-facher Auflösung

Objekt

wie in A.2

Geometrie- und Aufnahmeparameter

wie in A.1

Filter

AI aus ε_Θ (vgl. Abschnitt 2.5.4) mit $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.0015$ und $\gamma_3 = 0.00022$ berechnet aus der 64-fachen Aulösung nach der Methoden aus Abschnitt 2.5.5

A.9 Reale Daten: Ü-Ei

Objekt

reales Objekt, keine Angaben vorhanden

Geometrie- und Aufnahmeparameter

Detektorhöhe: 204.8 mm

Detektorbreite: 204.8 mm

Pixel in horizontaler Richtung: 512

Pixel in vertikaler Richtung: 512

Abtastkurve: Kreis (360 Grad)

Quellpositionen: 400 (äquidistant verteilt)

Abstand Quelle-Isozentrum: 317 mm

Abstand Isozentrum-Detektor: 483 mm

Filter

AI aus ε_γ^G (vgl. Abschnitt 2.4.3) mit $\gamma = 0.0016$

A.10 Reale Daten: Head2

Objekt

reales Objekt, keine Angaben vorhanden; Röntgenbild siehe Abbildung 2.36

Geometrie- und Aufnahmeparameter

Detektorhöhe: 204.8 mm

Detektorbreite: 409.6 mm

Pixel in horizontaler Richtung: 1024

Pixel in vertikaler Richtung: 512

Abtastkurve: Kreis (360 Grad)

Quellpositionen: 400 (äquidistant verteilt)

Abstand Quelle-Isozentrum: 1500 mm

Abstand Isozentrum-Detektor: 1183 mm

Filter

AI aus ε_γ^G (vgl. Abschnitt 2.4.3) mit $\gamma = 0.0015$

A.11 Reale Daten: Corr

Objekt

reales Objekt, keine Angaben vorhanden

Geometrie- und Aufnahmeparameter

Detektorhöhe: 307.2 mm

Detektorbreite: 307.2 mm

Pixel in horizontaler Richtung: 512

Pixel in vertikaler Richtung: 512

Abtastkurve: Kreis (360 Grad)

Quellpositionen: 120 (äquidistant verteilt)

Abstand Quelle-Isozentrum: 1005 mm

Abstand Isozentrum-Detektor: 173 mm

Filter

AI aus ε_γ^G (vgl. Abschnitt 2.4.3)

A.12 Reale Daten: Ball

Objekt

reales Objekt, keine Angaben vorhanden

Geometrie- und Aufnahmeparameter

Detektorhöhe: 204.8 mm

Detektorbreite: 204.8 mm

Pixel in horizontaler Richtung: 256

Pixel in vertikaler Richtung: 256

Abtastkurve: Kreis (360 Grad)

Quellpositionen: 120 (äquidistant verteilt)

Abstand Quelle-Isozentrum: 1000 mm

Abstand Isozentrum-Detektor: 300 mm

Filter

AI aus ε_γ^G (vgl. Abschnitt 2.4.3) mit $\gamma = 0.002$

A.13 Reale Daten: Ball (DKFZ)

Objekt

wie in A.12

Geometrie- und Aufnahmeparameter

derselbe Datensatz, daher wie in A.12

Filter

Shepp-Logan-Filter in FA mit Parker-Gewichten

A.14 Reale Daten: Rosi

Objekt

reales Objekt, keine Angaben vorhanden

Geometrie- und Aufnahmeparameter

Detektorhöhe: 409.6 mm

Detektorbreite: 409.6 mm

Pixel in horizontaler Richtung: 1024

Pixel in vertikaler Richtung: 1024

Abtastkurve: Kreis (360 Grad)

Quellpositionen: 120 (äquidistant verteilt)

Abstand Quelle-Isozentrum: 1000 mm

Abstand Isozentrum-Detektor: 500 mm

Filter

AI aus ε_{γ}^{G} (vgl. Abschnitt 2.4.3) mit $\gamma = 0.003$

A.15 Reale Daten: Locher

Objekt

reales Objekt, keine Angaben vorhanden

Geometrie- und Aufnahmeparameter

Detektorhöhe: 409.6 mm

Detektorbreite: 409.6 mm

Pixel in horizontaler Richtung: 1024

Pixel in vertikaler Richtung: 1024

Abtastkurve: Kreis (360 Grad)

Quellpositionen: 120 (äquidistant verteilt)

Abstand Quelle-Isozentrum: 1000 mm

Abstand Isozentrum-Detektor: 500 mm

Filter

AI aus ε_{γ}^{G} (vgl. Abschnitt 2.4.3) mit $\gamma = 0.003$

A.16 Reale Daten: 1cGy (DKFZ)

Objekt

reales Objekt; XY-Ebene siehe Abbildung A.48; Kugel mit Einlagen und Löchern in der Mitte des Objektes; die Dicke der Scheiben beträgt ungefähr 10 mm; die einzelnen Durchmesser können der Grafik entnommen werden; die Kugel besitzt die Dichte 1, die Scheibe auf 12 Uhr die Dichte 1.05, die Scheibe auf 1:30 Uhr die Dichte 1.84, die Scheibe auf 3 Uhr die Dichte 1.14, das Loch auf 4:30 Uhr die

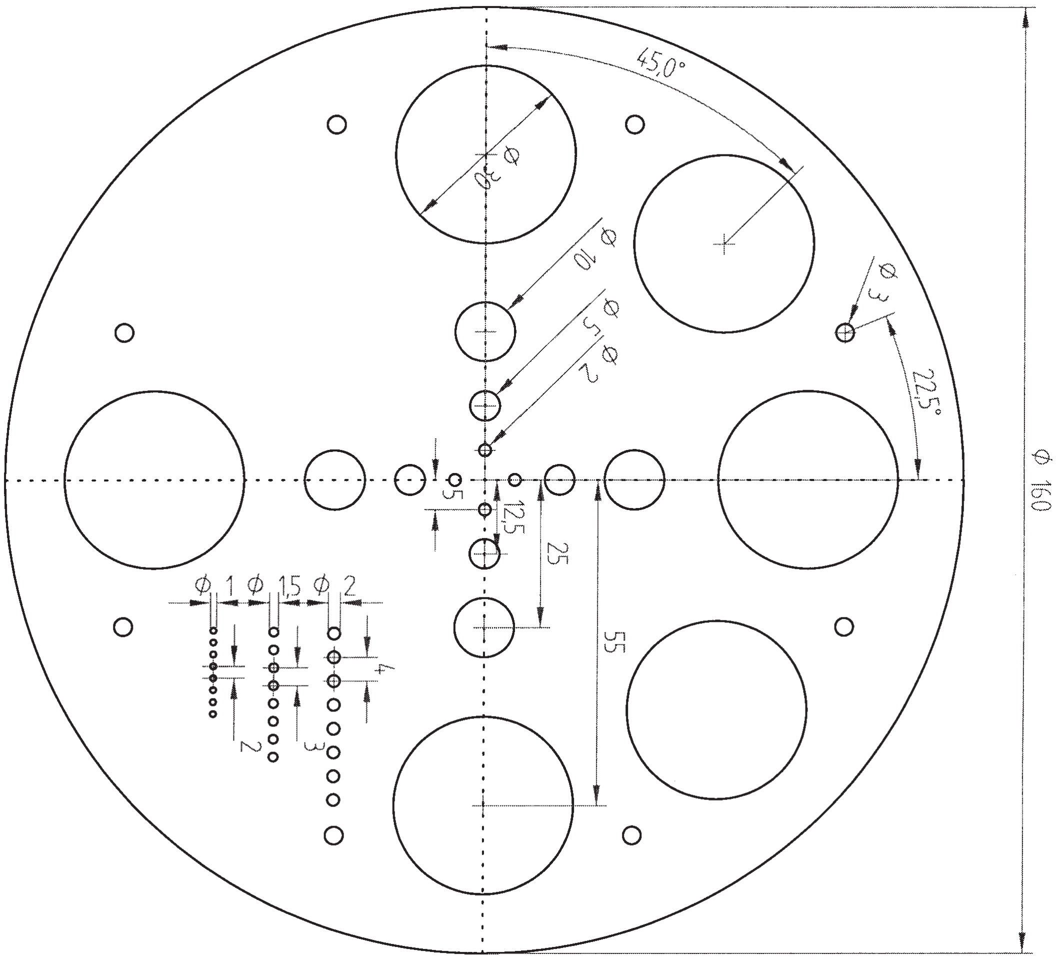


Abbildung A.48: Reales Objekt, Angaben in mm

Dichte 0, die Scheibe auf 6 Uhr die Dichte 0.92 und die Scheibe auf 9 Uhr die Dichte 0.3; die Einlagen zur Mitte hin haben die gleichen Dichten wie die großen am Rand; alle anderen Bohrungen (insbesondere auf 7:30 Uhr) haben die Dichte 0

Geometrie- und Aufnahmeparameter

Detektorhöhe: 409.6 mm

Detektorbreite: 409.6 mm

Pixel in horizontaler Richtung: 1024

Pixel in vertikaler Richtung: 1024

Abtastkurve: Kreis (360 Grad)

Quellpositionen: 120 (äquidistant verteilt)

Abstand Quelle-Isozentrum: 1000 mm

Abstand Isozentrum-Detektor: 500 mm

Filter

Shepp-Logan-Filter in FA mit Parker-Gewichten

A.17 Reale Daten: 1cGy

Objekt

wie in A.16

Geometrie- und Aufnahmeparameter

derselbe Datensatz, daher wie in A.16

Filter

AI aus ε_γ^G (vgl. Abschnitt 2.4.3) mit $\gamma = 0.004$

A.18 Spirale

Objekt

Kugel-Phantom

Das Phantom wurde virtuell nach folgenden Angaben erzeugt:

Skalierungsfaktor: $r = 39.385$ mm

Anzahl der Ellipsoide: 1

1. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$

Halbachsen: $r \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 1.0

Geometrie- und Aufnahmeparameter

Detektorhöhe: 819.2 mm

Detektorbreite: 204.8 mm

Pixel in horizontaler Richtung: 128

Pixel in vertikaler Richtung: 512

Abtastkurve: Spirale (eine 360 Grad Drehung mit vertikaler Verschiebung)

Quellpositionen: 120 (äquidistant verteilt)

Vertikale Verschiebung: von -1000 mm bis 1000 mm

Abstand Radius der Drehung: 1000 mm

Abstand Quelle-Detektor: 1300 mm

Filter

AI aus ε_γ^G (vgl. Abschnitt 2.6) mit $\gamma = 0.000315$

Shepp-Logan-Phantom

Das Phantom wurde virtuell nach folgenden Angaben erzeugt:

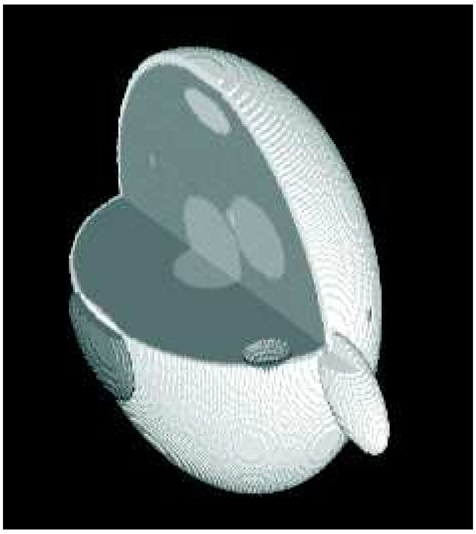
Skalierungsfaktor: $r = 50$ mm

Anzahl der Ellipsoide: 19

1. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.7233 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$



$r \cdot 0.9644 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 1.27 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 2.0

2. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ -0.0184\ ;\ -0.0185)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.7008 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.9246 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 1.2241 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: -0.98

3. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.2583\ ;\ 0.7534\ ;\ 0.0)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.127 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.127 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.127 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: -1.0

4. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (-0.2583\ ;\ 0.7534\ ;\ 0.0)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.127 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$

$r \cdot 0.127 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.127 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: -1.0

5. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ 1.1398\ ;\ -0.1957)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.127 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.34 \cdot (0.0\ ;\ 0.5446\ ;\ -0.8387)^\top$
$r \cdot 0.17 \cdot (0.0\ ;\ 0.8387\ ;\ 0.5446)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 1.5

6. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ -0.862)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.4575 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.6099 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.318 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: -1.0

7. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.7076\ ;\ -0.1378\ ;\ -0.1905)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.0635 \cdot (0.9903\ ;\ -0.1085\ ;\ -0.0865)^\top$
$r \cdot 0.3175 \cdot (0.1089\ ;\ 0.9941\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.3175 \cdot (0.086\ ;\ -0.0094\ ;\ 0.9963)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 1.0

8. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (-0.7076\ ;\ -0.1378\ ;\ -0.1905)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.0635 \cdot (-0.9903\ ;\ -0.1085\ ;\ -0.0865)^\top$
$r \cdot 0.3175 \cdot (-0.1089\ ;\ 0.9941\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.3175 \cdot (-0.086\ ;\ -0.0094\ ;\ 0.9963)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 1.0

9. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (-0.08\ ;\ -0.605\ ;\ 0.381)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.046 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.023 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.023 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 0.01

10. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ -0.605\ ;\ 0.381)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.023 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.023 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.046 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 0.01

11. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.06\ ;\ -0.605\ ;\ 0.381)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.023 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.046 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.023 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 0.01

12. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ 0.1\ ;\ 0.381)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.046 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.046 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.046 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 0.01

13. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ -0.1\ ;\ 0.127)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.2581 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.2581 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.2581 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 0.01

14. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ 0.35\ ;\ 0.381)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.21 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.25 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.23 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 0.01

15. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.22\ ;\ 0.0\ ;\ 0.381)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.11 \cdot (0.9511\ ;\ -0.309\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.31 \cdot (0.309\ ;\ 0.9511\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.254 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: -0.02

16. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (-0.22\ ;\ 0.0\ ;\ 0.381)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.16 \cdot (-0.9511\ ;\ -0.309\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.41 \cdot (-0.309\ ;\ 0.9511\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.381 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: -0.02

17. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.56\ ;\ -0.4\ ;\ 0.381)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.3 \cdot (0.9192\ ;\ -0.3381\ ;\ 0.202)^\top$
$r \cdot 0.2 \cdot (0.3452\ ;\ 0.9385\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.2 \cdot (0.1896\ ;\ -0.0697\ ;\ -0.9794)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 0.03

18. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.3 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.2 \cdot (0.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.1 \cdot (0.0\ ;\ 0.0\ ;\ 1.0)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 0.02

19. Ellipsoid:

Mittelpunkte des Ellipsoid: $r \cdot (0.27\ ;\ 0.5\ ;\ 0.8)^\top$

Halbachsen: $r \cdot 0.08 \cdot (1.0\ ;\ 0.0\ ;\ 0.0)^\top$
$r \cdot 0.26 \cdot (0.0\ ;\ 0.5446\ ;\ -0.8387)^\top$
$r \cdot 0.08 \cdot (0.0\ ;\ 0.8387\ ;\ 0.5446)^\top$

Gewicht des Ellipsoid: 0.03

Literaturverzeichnis

[1] C. HAMAKER, K.T. SMITH, D.C. SOLMON und S.L. WAGNER, The divergent beam X-ray transform, Rocky Mountain J. Math., 10 (1980), S. 253-283

[2] H.K. TUY, An inversion formula for cone-beam reconstruction, SIAM J. Appl. Math., 43 (1983), S. 546-552

[3] P. GRANGEAT, Mathematical framework of cone beam 3-D reconstruction via the first derivative of the Radon Transform, in: Mathematical Methods in Tomography, G.T. HERMAN, A.K. LOUIS, F. NATTERER (Eds.), Springer LNM 1497, 1991.

[4] J. RADON, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss., 69 (1917), S. 262-267

[5] R.L. DIETZ, Die Approximative Inverse als Rekonstruktionsmethode in der Röntgen-Computertomographie, Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1999

[6] A.K. LOUIS, Medical imaging: state of the art and future developements, Inverse Problems, 8 (1992), S. 709-738

[7] M. DEFRISE und R. CLACK, A Cone-Beam Reconstruction Algorithm Using Shift-Variant Filtering and Cone-Beam Backprojection, IEEE Trans. Med. Imag., 13 (1994), S. 186-195

[8] A.K. LOUIS, Inverse und schlecht gestellte Probleme, Teubner, 1989

[9] A.K. LOUIS, Approximate inverse for linear and some nonlinear problems, Inverse Problems, 12 (1996), S. 175-190

[10] F. NATTERER, The Mathematics of Computerized Tomography, John Wiley & Sons, Chichester, 1986

[11] L.A. FELDKAMP, L.C. DAVIS und J.W. KRESS, Practical cone-beam algorithm, J. Opt. Soc. Am., 1 (1984), S. 612-619

[12] F. NATTERER und F. WÜBBELING, Mathematical Methods in Image Reconstruction, SIAM, 2001

[13] A. RIEDER und T. SCHUSTER, The Approximate Inverse in action II: Convergence and stability, zum Zeitpunkt der Arbeit noch unveröffentlich, wird 2002 in Mathematics of Computations erscheinen

[14] A. RIEDER, Principles of Reconstruction Filter Design in 2D-Computerized Tomography, Contemporary Mathematics, Vol. 278, 2001

[15] Springers Mathematische Formeln, Springer, 1997, S. 125

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, im September 2002

Jens Mohr