Diplomarbeit

Thomas Schuster

Die approximative Inversionsformel und ihre Anwendung bei der Rekonstruktion der Rotation von Vektorfeldern

Betreuer : Univ.-Prof. Dr. A.K. Louis

Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik

August 1995

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

Symbolverzeichnis **3**

1 Die approximative Inversionsformel **5**

1.1 Schlecht gestellte Probleme und Regularisierungsverfahren 5

1.2 Die approximative Inverse 11

2 Die Rekonstruktion der Rotation **18**

2.1 Die Radon–Transformation 18

2.2 Das mathematische Modell 23

2.3 Kompaktheitsaussagen und Ausblick 29

3 Die approximative Inverse bei der 2D–Radon–Transformation **32**

3.1 Die Adjungierte des Operators 33

3.2 Die Berechnung des Rekonstruktionskernes 42

3.3 Reduktion des Gleichungssystems 53

4 Anwendung der approximativen Inversen **56**

4.1 Bewegung einer Flüssigkeit in einem Körper 57

4.2 Numerische Beispiele 60

Literaturverzeichnis **73**

Einleitung

Die approximative Inverse ist eine neuartige Methode der Filterberechnung zur Regularisierung inverser, also schlecht gestellter Probleme. Inverse Probleme spielen in der angewandten Mathematik eine sehr große Rolle. Es handelt sich dabei um Probleme, bei denen man eine gesuchte Größe dadurch bestimmt, indem man eine zweite Größe beobachtet und mißt, um damit auf die erste zurückzuschließen. Beispiele, wo solche Probleme auftauchen, sind bildgebende Verfahren in der Medizintechnik oder bei zerstörungsfreien Prüfverfahren, aber auch die Parameteridentifizierung bei Differentialgleichungen. Charakteristisch für diese Problemklasse ist eben deren Schlechtgestelltheit, so daß ohne Regularisierung keine vernünftigen Ergebnisse zu erwarten sind. Inverse Probleme und Regularisierungen sind ausführlich in dem Buch von Louis [8] behandelt. Darin enthalten ist auch eine Beschreibung der klassischen Regularisierungsverfahren, wie die Tikhonov–Phillips–Regularisierung oder das Verfahren der konjugierten Gradienten. In dieser Arbeit wird nun die approximative Inverse als ein neues Konzept zur Regularisierung behandelt. Hierbei muß man lediglich ein Gleichungssystem lösen, als dessen Lösung man einen Filter oder Rekonstruktionskern $v_\gamma(x)$ erhält und anschließend die Skalarprodukte

$$f_\gamma(x) \approx (S_\gamma g)(x) = \langle g, v_\gamma(x) \rangle_2$$

der Daten g mit den Kernen $v_\gamma(x)$ berechnen, was schnell vonstatten geht. Das Gleichungssystem kann man schon lösen, bevor die Daten g gemessen werden.

Anwenden wollen wir diese Methode auf die Vektortomographie. 1992 hat Juhlin [6] ein mathematisches Modell entworfen, wie man ein Vektorfeld f aus Meßdaten rekonstruieren kann. Die Meßwerte sind dabei gerade die koordinatenweisen Mittelwerte des Feldes f parallel zu einem ausgesandten Teststrahl. Juhlin rekonstruiert in seiner Arbeit zuerst die Rotation des Vektorfeldes, durch deren Kenntnis man dann das Feld selbst ausrechnen kann. Dieser letzte Schritt ist sehr aufwendig, wir beschäftigen uns daher im Rahmen dieser Arbeit nur mit der Rekonstruktion der Rotation. Dabei handelt es sich im wesentlichen um die Rekonstruktion einer Funktion aus der Kenntnis ihrer zweidimensionalen Radon–Transformierten

$$(\mathrm{R}f)(\omega, s) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \delta(s - x^T\omega)\; dx\,.$$

Dieses Problem ist schon bekannt, seit Radon [13] 1917 seine Arbeit veröffentlicht hat und spielt eine große Rolle in der Röntgen–Tomographie. Grund genug auf dieses Problem die approximative Inverse anzuwenden.

Im ersten Kapitel wird ein kurzer Abriß über inverse und schlecht gestellte Probleme geliefert und Regularisierungsverfahren vorgestellt, wobei ich mich an das Buch von Louis [8] halten werde. Im zweiten Teil dieses Kapitels wird die Methode der approximativen Inversen beschrieben und in den Zusammenhang zu den bekannten Regularisierungsverfahren gestellt, wobei sich diese Methode als von größerer Allgemeinheit erweist, als die herkömmlichen Verfahren. Auch diesem Abschnitt liegt ein Artikel von Louis [7] zugrunde.

Wie schon erwähnt wollen wir diese Methode auf die Vektortomographie anwenden. Die Beschreibung des mathematischen Modells von Juhlin [6] zur Rekonstruktion der Rotation eines Vektorfeldes wird daher Gegenstand des zweiten Kapitels sein.

Das dritte Kapitel ist das zentrale Kapitel dieser Arbeit und befaßt sich mit der Anwendung der approximativen Inversen auf die zweidimensionale Radon–Transformation. Es wird sich herausstellen, das es in diesem Fall genügt, das Gleichungssystem zur Errechnung des Rekonstruktionskernes $v_\gamma(x)$ für den Punkt $x = 0$ zu lösen. Die restlichen Kerne erhält man näherungsweise als Translate des Kernes $v_\gamma(0)$.

Abschließend kommen wir im letzten Kapitel noch zu einigen numerischen Ergebnissen. Die approximative Inverse wird angewandt, um die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes einer sich bewegenden Flüssigkeit zu rekonstruieren. Dabei gehen die Ausführungen von Kapitel 3 ein. Die Rekonstruktionen werfen jedoch auch Fragen auf und zeigen, daß an dem Konzept noch einiges zu verbessern ist. Das Ende der Arbeit ist somit offen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. A.K. Louis für die interessante Themenstellung und vorbildliche Betreuung bedanken. Nicht zuletzt sind die entscheidenden Ergebnisse dieser Arbeit durch seine Hinweise entstanden. Desweiteren danke ich Herrn Dipl. Math. Rainer Dietz für dessen stete Hilfsbereitschaft und das Korrekturlesen dieser Arbeit, weswegen ich auch Herrn Dr. A. Rieder zu Dank verpflichtet bin. Herr H. Hammer war mir beim Einscannen der Abbildungen 2.2.1 und 2.2.2 hilfreich, Frau P. Schuster beim Gestalten des Titelblattes. Schließlich bedanke ich mich bei allen Kollegen für das hervorragende Arbeitsklima.

Saarbrücken, den 23.08.1995

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler reeller Zahlenraum
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathcal{L}(X,Y)$	Menge der linearen, stetigen Operatoren zwischen X und Y
$\mathcal{K}(X,Y)$	Menge der kompakten Operatoren zwischen X und Y
$N(A)$	Kern der Abbildung A
$R(A)$	Bild der Abbildung A
P_A	orthogonale Projektion auf das Bild von A
$U^\perp$	orthogonales Komplement der Menge U
A^*	adjungierter Operator zu A
$A^\dagger$	verallgemeinerte Inverse zu A
$\mathcal{O}(\cdot)$	Landau–Symbol
T_γ	Regularisierung mit Regularisierungsparameter γ
D^α	Ableitung der Ordnung $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
$f * g$	Faltung der Funktionen f und g
$\hat{f}$	Fourier–Transformation von f
$\mathcal{S}$	Raum der schnell fallenden Funktionen
$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$	euklidisches Skalarprodukt
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$	L^2–Skalarprodukt
Ω	offenes, beschränktes Gebiet
$\overline{\Omega}$	Abschluß von Ω
$L^2(\Omega)$	Funktionenraum mit Norm $(\int_\Omega \|f\|^2 \, dx)^{1/2}$
$L^2(Z, w^{1-n})$	Funktionenraum mit gewichteter Norm $(\int_Z \|f\|^2 \, w^{1-n} \, dx)^{1/2}$
S_γ	approximative Inverse mit Regularisierungsparameter γ
$v_\gamma(x)$	Rekonstruktionskern im Punkt x
$\mathcal{C}$	Raum der stetigen Funktionen
$\mathcal{C}^m$	Raum der m mal stetig differenzierbaren Funktionen
$\mathcal{C}^\infty$	Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen
S^{n-1}	Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$
Ω^n	offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$
R, R_ω	Radon–Transformation
R_{SD}, R_D	semidiskrete, bzw. diskrete Form der Radon–Transformation

δ	Diracsche Delta–Distribution
$rot\, f$, $\nabla \times f$	Rotation des Vektorfeldes f
$\nabla \cdot f$	Divergenz des Vektorfeldes f
D	Doppler–Operator
U_μ	Tschebyscheff–Polynom 2.Art
Y_λ	zweidimensionale Kugelflächenfunktion vom Grad λ
$C_\mu^{n/2}$	Gegenbauer–Polynom vom Grad μ mit Exponent $n/2$
T^x, T_1^z	Translationsoperatoren
$L^{2,J}$	Raum der J-Tupel von L^2–Funktionen
$\square$	Ende eines Beweises

Kapitel 1

Die approximative Inversionsformel

In diesem einführenden Kapitel wird zunächst ein kurzer Abriß über schlecht gestellte Probleme und Regularisierungsverfahren geliefert. Danach wird die Methode der approximativen Inversen dargestellt und mit den Regularisierungsverfahren, die auf der Singulärwertzerlegung des Operators aufbauen, verglichen. Es stellt sich dabei heraus, daß die Methode der approximativen Inversen von größerer Allgemeinheit ist als diese, dabei aber auch effizient.

1.1 Schlecht gestellte Probleme und Regularisierungsverfahren

Es folgt nun eine kurze Zusammenfassung über inverse und schlecht gestellte Probleme und deren Regularisierungen. Da eine detaillierte Darstellung dieses Themenkomplexes nicht Gegenstand dieser Arbeit sein soll, werden die meisten Beweise weggelassen. Für eine ausführliche Beschreibung, insbesondere der Regularisierungsverfahren, sei auf das Buch von Louis [8] verwiesen.

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit Problemen der folgenden Form befassen:

$$\text{Gesucht ist ein } f \in X \text{ mit } Af = g \text{ für ein } g \in Y,$$

wobei $A : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung zwischen topologischen Vektorräumen X und Y ist.

Abkürzend wollen wir dieses Problem mit (A, X, Y) bezeichnen.

Die obige Operatorgleichung modelliert ein mathematisches Problem, wobei $g \in Y$ die Meßdaten darstellt und $f \in X$ die gesuchte Größe.

Bei der Röntgen–Computer–Tomographie z.B. ist f die Gewebedichte, g der Intensitätsabfall der Röntgenstrahlen beim Durchtritt durch das Gewebe und A die Röntgentransformation.
Da man durch die Beobachtung der Größe g auf die Größe f schließt, nennt man das Problem (A, X, Y) ein *inverses Problem* .

Dabei stellen sich zwei Fragen:
a) Gibt es zu jedem Datensatz $g \in Y$ eine Lösung; und wenn ja, ist diese eindeutig ?
b) Wie wirken sich Störungen in den Daten g auf die Lösung f aus ?

Diese Fragestellung führt zu der folgenden

Definition 1.1.1 *Sei $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung, X, Y seien topologische Vektorräume. Das Problem (A, X, Y) heißt* gut gestellt *, wenn gilt:*
i) Zu jedem $g \in Y$ existiert genau eine Lösung $f \in X$ mit $Af = g$.
ii) Die Lösung hängt stetig von den Daten ab, d.h. die Inverse A^{-1} ist stetig.
Andernfalls heißt das Problem schlecht gestellt.

Leider ist ein typisches Kennzeichen von inversen Problemen deren Schlechtgestelltheit. Insbesondere, wenn der Operator A kompakt und nicht degeneriert ist, ist das Problem immer schlecht gestellt, da die Inverse eines solchen Oerators nie stetig ist. Es existiert auch im allgemeinen nicht zu jedem $g \in Y$ eine Lösung $f \in X$. Man ist daher gezwungen einen 'Ersatz' für A^{-1} zu definieren, die *verallgemeinerte Inverse* .
Zuvor jedoch einige

Bezeichnungen: Im folgenden seien X und Y immer Hilberträume über $\mathbb{C}$ mit den Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$.

$\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \to Y | A \text{ linear, stetig bzgl. der Normtopologie } \}$
$\mathcal{K}(X, Y) := \{A \in \mathcal{L}(X, Y) | A \text{ kompakt } \}$
$\qquad = \{A \in \mathcal{L}(X, Y) | \text{ Ist } U \subset X \text{ beschränkt} \Rightarrow \overline{A(U)} \text{ kompakt } \}$
$\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$
$N(A) := \{x \in X | Ax = 0\}$
$R(A) := \{y \in Y | \exists x \in X \text{ mit } Ax = y\}$
$A^* \in \mathcal{L}(X, Y) :=$ Adjungierte von A bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$, d.h.

$$\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^*y\rangle_X \text{ für alle } x \in X \text{ und } y \in Y.$$

Für $U \subset X$ ist $U^\perp = \{x \in X | \langle x, u\rangle_X = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ das orthogonale Komplement von U in X.
$\mathrm{P}_A : Y \to \overline{R(A)} :=$ Orthogonalprojektion auf $\overline{R(A)}$.

Statt des Problemes (A, X, Y) betrachtet man nun das Problem:

Finde $\tilde{f} \in X$ mit $J(\tilde{f}) = \|A\tilde{f} - g\|_Y \leq \|A\varphi - g\|_Y = J(\varphi)$ für alle $\varphi \in X$.

Es gilt nun:

$$J^2(f) = \|Af - g\|_Y^2 = \|Af - \mathrm{P}_A g\|_Y^2 + \|g - \mathrm{P}_A g\|_Y^2,$$
$$\text{da} \quad \langle Af - \mathrm{P}_A g, \mathrm{P}_A g - g\rangle_Y = 0 \quad \text{für} \quad f \in X,\ g \in R(A) \oplus R(A)^\perp.$$
$$\Rightarrow \min_{f \in X} J(f) = \min_{f \in X} \|Af - g\|_Y = \|g - \mathrm{P}_A g\|_Y.$$

Das minimierende $\tilde{f}$ ist also Lösung von: $Af = \mathrm{P}_A g$.
Gibt es mehrere solcher Lösungen, so wählt man dasjenige $\tilde{f}$ mit minimaler Norm. Dieses bezeichnen wir mit $f^\dagger$:

$$\|f^\dagger\|_X < \|u\|_X \text{ für alle } u \neq f^\dagger \text{ mit } J(u) = J(f^\dagger) = \min_{v \in X} J(v). \tag{1.1.1}$$

Definition 1.1.2 *Die Abbildung*

$$A^\dagger : D(A^\dagger) = R(A) \oplus R(A)^\perp \to X$$

mit $A^\dagger g := f^\dagger$, $f^\dagger$ *wie in* (1.1.1) *definiert, heißt* verallgemeinerte Inverse *von* A.

Um Schreibarbeit zu sparen, schreiben wir statt $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ nur noch $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Es gilt nun folgender

Satz 1.1.3 *Sei* $g \in D(A^\dagger)$. $f^\dagger = A^\dagger g$ *ist die eindeutige Lösung der Normalgleichung*

$$A^*Af = A^*g$$

in $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$.

BEWEIS: siehe [8].
□

Im nächsten Lemma werden einige Eigenschaften der verallgemeinerten Inversen aufgelistet:

Lemma 1.1.4 *a)* $D(A^\dagger) = Y \Leftrightarrow R(A)$ *abgeschlossen in* Y.
b) $N(A^\dagger) = R(A)^\perp = N(A^*)$.
c) $R(A^\dagger) = N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$.
d) $A^\dagger$ *ist linear.*
e) $A^\dagger$ *stetig* $\Leftrightarrow R(A)$ *abgeschlossen in* Y.

BEWEIS: siehe [2].
□

Wir betrachten nun weiter das *singuläre System* $\{u_n, v_n, \sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des Operators A, d.h.:

$$\begin{aligned}
&\{u_n\}_n \subset Y \text{ ist eine Orthonormalbasis (ONB) für } \overline{R(A)} = N(A^*)^\perp,\\
&\{v_n\}_n \subset X \text{ ist eine ONB für } \overline{R(A^*)} = N(A)^\perp,\\
&\{\sigma_n\}_n \subset \mathbb{R}_0^+ \text{ sind Werte mit } Av_n = \sigma_n u_n,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad A^* u_n = \sigma_n v_n.
\end{aligned}$$

Bekanntlich ist dann $Af = \sum_n \sigma_n \langle f, v_n\rangle u_n$.
Man kann nun aber auch die verallgemeinerte Inverse $A^\dagger$ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung ausdrücken, falls $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ ist.

Satz 1.1.5 *Sei* $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ *mit singulärem System* $\{u_n, v_n, \sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Dann ist für* $g \in D(A^\dagger)$:

$$A^\dagger g = \sum_{\sigma_n > 0} \sigma_n^{-1} \langle g, u_n\rangle v_n. \tag{1.1.2}$$

BEWEIS: siehe [8].
□

Bei kompakten, nicht degenerierten Operatoren ist die 0 einziger Häufungspunkt der Singulärwerte. Entscheidend für die Schlechtgestelltheit des Operators A ist somit das Verhalten der Singulärwerte σ_n für $\sigma_n \to 0$. Dieses Verhalten kann man ausnutzen, um die Schlechtgestelltheit eines Operators zu klassifizieren, und zwar in folgender Weise:

Definition 1.1.6 *Sei* $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ *mit* $\dim R(A) = \infty$ *und singulärem System*

$$\{u_n, v_n, \sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Existiert ein $\alpha > 0$*,so daß* $\sigma_n = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$*, dann nennen wir den Operator* A schlecht gestellt von der Ordnung α.
2. Existiert ein $\varrho > 0$*, so daß* $|ln\sigma_n| \geq cn^\varrho$*, so nennen wir den Operator* A exponentiell schlecht gestellt.

Bei fast allen inversen Problemen ist der Operator A kompakt, und für kompakte Operatoren mit unendlich dimensionalem Bild gilt:
$R(A)$ ist nicht abgeschlossen, und nach Lemma 1.1.4 ist $A^\dagger$ somit nicht stetig.
Die Idee ist nun, $A^\dagger$ durch eine Folge stetiger Operatoren T_γ zu approximieren, man spricht daher von *Regularisierungsverfahren* .
Diese werden in der folgenden Definition mathematisch exakt definiert:

Definition 1.1.7 *Eine* Regularisierung *von $A^\dagger$ ist eine Familie von Operatoren*

$$\{T_\gamma\}_{\gamma>0},\ T_\gamma : Y \to X$$

mit folgender Eigenschaft:
Es existiert eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R}_+ \times Y \to \mathbb{R}_+$, so daß für alle $g \in \mathrm{D}(A^\dagger)$ und für alle $g^\varepsilon \in Y$ mit $\|g - g^\varepsilon\| \leq \varepsilon$ gilt:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ g^\varepsilon \to g}} T_{\gamma(\varepsilon, g^\varepsilon)} g^\varepsilon = A^\dagger g.$$

Sind alle T_γ linear, so nennt man T_γ eine lineare Regularisierung.γ *heißt* Regularisierungsparameter.*Er wird so gewählt, daß*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ g^\varepsilon \to g}} \gamma(\varepsilon, g^\varepsilon) = 0$$

ist.

Regularisierungsverfahren für kompakte Operatoren erhält man z.B. mit Hilfe der Singulärwertzerlegung von A:

$$Af = \sum_n \sigma_n \langle f, v_n \rangle\, u_n$$

und der Darstellung (1.1.2) für $A^\dagger$:

Für $F_\gamma : \{\sigma_n\}_n \times D(A^\dagger) \to \mathbb{R}$ definieren wir:

$$T_\gamma g = \sum_n \sigma_n^{-1} F_\gamma(\sigma_n, g) \langle g, u_n \rangle\, v_n. \tag{1.1.3}$$

F_γ bezeichnet man als *Filter.*Hängt F_γ nicht von g ab, so ist T_γ eine lineare Regularisierung.
Natürlich erfüllt nicht jede solche Abbildung F_γ von vorne herein die Bedingungen aus Definition (1.1.7). Vielmehr muß man an F_γ einige Bedingungen stellen, die in der folgenden Definition zusammengefaßt sind:

Definition 1.1.8 *Das von g unabhängige Filter F_γ heißt* regularisierend *für den Operator A, falls gilt:*

$$
\begin{aligned}
&\textit{i)}\ \sup_n |F_\gamma(\sigma_n)\sigma_n^{-1}| = c(\gamma) < \infty,\\
&\textit{ii)}\ \lim_{\gamma\to 0} F_\gamma(\sigma_n) = 1 \textit{ punktweise in } \sigma_n,\\
&\textit{iii)}\ |F_\gamma(\sigma_n)| \le c \textit{ für alle } \gamma \textit{ und } \sigma_n.
\end{aligned}
$$

Bedingung i) garantiert hierbei die Stetigkeit der Regularisierungen T_γ, die Bedingungen ii) und iii) sorgen dafür, daß $T_\gamma \to A^\dagger$ für $\gamma \to 0$.

Beispiele: a)

$$F_\gamma(\sigma) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \sigma \ge \gamma \\ 0 & , \text{ falls } \sigma < \gamma \end{cases}$$

Das hieraus resultierende Regularisierungsverfahren ist bekannt als *abgeschnittene Singulärwertzerlegung* .

b)

$$F_\gamma(\sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \gamma^2}$$

Diesem Filter entspricht die *Tikhonov-Phillips-Regularisierung* , d.h.:

$$T_\gamma g = \tilde{f},$$

wobei $\tilde{f}$ das Funktional $J_\gamma(f) = \|Af - g\|^2 + \gamma^2\|f\|^2$ minimiert.

Man rechnet leicht nach, daß diese beiden Filter die Bedingungen von Definition 1.1.8 erfüllen und somit regularisierende Filter sind.

1.2 Die approximative Inverse

In diesem Abschnitt lernen wir ein Regularisierungsverfahren kennen, das sich auf den ersten Blick von den Verfahren der Form (1.1.3) unterscheidet. Prinzipiell ist es möglich die approximative Inverse für beliebige Hilberträume X und Y zu formulieren. Wir wollen uns aber auf den für Kapitel 3 interessanten Fall beschränken, indem wir X und Y wie folgt wählen:

$$X = L^2(\Omega),\ Y = \mathbb{R}^N,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ ein offenes, beschränktes Gebiet ist, und $L^2(\Omega)$ der Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen bezüglich des M-dimensionalen Lebesgue-Maßes ist.
Außerdem sei für $\alpha \in \mathbb{N}_0^M$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_M} x_M}$$

der Differentialoperator der Ordnung $|\alpha|$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_M$.

Definition 1.2.1 *a) Für $f, g \in L^2(\Omega)$ definiere $f * g \in L^2(\Omega)$ durch:*

$$(f * g)(y) = \int_\Omega f(y - x) g(x) dx$$

Man nennt $f * g$ die Faltung *der Funktionen f und g.*

b) Es sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^M)$, wobei

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^M) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^M) |\ \sup_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^M} (1 + |x|^2)^N |(D^\alpha f)(x)| < \infty\},$$

der Schwartz-Raum *ist. Dann definiert für $\omega \in \mathbb{R}^M$*

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi)^{-M/2} \int_{\mathbb{R}^M} f(x) e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx$$

die Fourier-Transformierte *von f.*

Bemerkung: Die Fouriertransformation kann nach dem Theorem von Plancherel, siehe z.B. [14], stetig zu einer Isometrie auf dem $L^2(\mathbb{R}^M)$ fortgesetzt werden.

Den folgenden Satz findet man ebenfalls in jedem Standardwerk zur Funktionalanalysis:

Satz 1.2.2 (Faltungssatz) *Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^M)$ gilt:*

$$\widehat{f * g}(\omega) = (2\pi)^{M/2} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$$

für $\omega \in \mathbb{R}^M$.

Kehren wir nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wieder zurück zu unserem Problem (A, X, Y) aus Kapitel 1.1. Wie gesehen, ist dieses Problem für $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ schlecht gestellt. Man berechnet daher nicht f, sondern eine gefilterte Version f_γ, wobei

$$f_\gamma = f * \tilde{e}_\gamma, \ \ \tilde{e}_\gamma \in L^2(\Omega)$$

ist.

Nach dem Faltungssatz (1.2.2) gilt dann:

$$\hat{f}_\gamma = (2\pi)^{M/2} \hat{f}\, \hat{\tilde{e}}_\gamma.$$

Ist $\tilde{e}_\gamma$ ein Tiefpaßfilter, so werden die hohen Frequenzen abgeschnitten, die für die Schlechtgestelltheit des Operators A verantwortlich sind. $\gamma > 0$ ist hierbei der Regularisierungsparameter.

Es ist nun:

$$f_\gamma(x) = f * \tilde{e}_\gamma(x) = \langle T^x f, \tilde{e}_\gamma \rangle_{L^2} = \langle f, T^x \tilde{e}_\gamma \rangle_{L^2}$$

mit $(T^x f)(y) := f(y - x)$.

Es sei nun weiter:

$$\begin{aligned} & e_\gamma(x, y) := \tilde{e}_\gamma(y - x) = T^x \tilde{e}_\gamma(y) \\ & \Rightarrow f_\gamma(x) = f * \tilde{e}_\gamma(x) = \langle f, e_\gamma(x, \cdot) \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, daß die Gleichung

$$A^* v_\gamma = e_\gamma(x, \cdot) \tag{1.2.4}$$

eine Lösung $v_\gamma(x) \in \mathbb{R}^N$ hat für alle $x \in \Omega$.

Dann ist:

$$f_\gamma(x) = \langle f, e_\gamma(x, \cdot) \rangle_{L^2} = \langle f, A^* v_\gamma(x) \rangle_{L^2} = \langle Af, v_\gamma(x) \rangle_2 = \langle g, v_\gamma(x) \rangle_2.$$

Im allgemeinen ist jedoch die Gleichung 1.2.4 nicht lösbar. Man berechnet daher die nach Satz 1.1.3 eindeutige Lösung der Normalengleichung in $\overline{R(A)}$, die den Defekt $\|A^* f - e_\gamma(x, \cdot)\|_{L^2}$ minimiert. $v_\gamma(x)$ ist also Lösung von:

$$AA^* v_\gamma(x) = Ae_\gamma(x, \cdot). \tag{1.2.5}$$

Zusammenfassend definieren wir nun:

Definition 1.2.3 *Sei $v_\gamma(x) \in \mathbb{R}^N$ Lösung von (1.2.5), $g \in \mathbb{R}^N$. Dann heißt*

$$S_\gamma(x) = \langle g, v_\gamma(x)\rangle_2 = \sum_{n=1}^{N} g_n v_{\gamma,n}(x)$$

die approximative Inverse *von A. $v_\gamma(x)$ nennt man den* Rekonstruktionskern *an der Stelle x.*

Bemerkungen: Der große Vorteil dieser Inversionsformel besteht darin, daß das Gleichungssystem (1.2.5) *unabhängig* von den Daten g gelöst werden kann. Man kann diese Berechnung also schon vor der Errechnung der Daten durchführen. Die Inversion besteht dann nur noch in der Berechnung der Skalarprodukte $S_\gamma g$.
Im allgemeinen muß man das Gleichungssystem (1.2.5) in allen Rekonstruktionspunkten lösen. Unter gewissen Umständen, siehe Satz 1.2.7, genügt es jedoch, dieses in einem Punkt zu lösen.
Die Matrix $AA^* \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ist zwar symmetrisch, hat aber die Dimension N=Anzahl der Daten, die meist sehr hoch ist. Oft ist die Matrix jedoch stark strukturiert (Toeplitz, zyklisch, etc.), so daß eine effiziente Lösung doch möglich ist.
Die Beispiele der Filter und einige der nun folgenden Sätze sind der Arbeit von Louis [7] entnommen.

Beispiele für Filter:
a)

$$e^1_\gamma(x,y) = T^x \tilde{e}^1_\gamma(y) \quad \text{mit} \quad \tilde{e}^1_\gamma(y) = \frac{M}{\lambda(S^{M-1})\gamma^M}\chi_\gamma(y),$$

wobei χ_γ die charakteristische Funktion der Kugel um 0 mit Radius γ und $\lambda(S^{M-1})$ das Maß der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^M$ ist.
Mit diesem Filter ist f_γ gerade ein lokaler Mittelwert von f.
b)

$$e^2_\gamma(x,y) = T^x \tilde{e}^2_\gamma(y) \quad \text{mit} \quad \tilde{e}^2_\gamma(y) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^M sinc(\gamma y).$$

Dies ist ein Tiefpaßfilter, es werden also die hochfrequenten Anteile herausgefiltert.
c) Das Beispiel eines schnell abfallenden Filters ist:

$$e^3_\gamma(x,y) = T^x \tilde{e}^3_\gamma(y) \quad \text{mit} \quad \tilde{e}^3_\gamma(y) = (2\pi)^{M/2}\gamma^{-M} exp(-y^2/(2\gamma^2)).$$

d) Ist man nur an Unstetigkeiten von f interessiert, so kann e_γ als Differenzenfilter, wählen, damit $\langle f, e_\gamma(x,\cdot)\rangle$ die Ableitung von f approximiert. e_γ ist dann z.B. ein Wavelet (siehe auch [11]).

In unserem Fall ist ja $A : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ stetig und linear. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz (siehe z.B. [14]) hat daher $(Af)_n$ die folgende Form:

$$(Af)_n = \int_\Omega k_n(y) f(y) dy,$$

wobei $k_n \in L^2(\Omega)$ für $n = 1, \cdots, N$ ist.
Die Matrix AA^* hat daher die folgende Form:

$$(AA^*)_{m,n} = \int_\Omega k_n(y)k_m(y)dy \quad \text{für} \quad 1 \leq m, n \leq N. \tag{1.2.6}$$

Wir wollen nun die Methode der approximativen Inversen vergleichen mit den durch die Formel (1.1.3) definierten Regularisierungsverfahren T_γ mit Filter F_γ. Ein erstes Ergebnis liefert der folgende

Satz 1.2.4 *Sei T_γ ein Regularisierungsverfahren mit regularisierendem, linearem Filter F_γ wie in* (1.1.3) *definiert. Dann kann dieses Verfahren als approximative Inverse geschrieben werden mit dem Filter:*

$$e_\gamma(x, y) = \sum_n F_\gamma(\sigma_n)v_n(x)v_n(y).$$

BEWEIS: (Siehe auch [7].)
Wegen $v_\gamma(x) = (AA^*)^{-1}Ae_\gamma(x, \cdot)$ folgt:

$$\begin{aligned}
v_\gamma(x) &= \sum_n \sigma_n^{-2}\langle Ae_\gamma(x, \cdot), u_n\rangle_2\, u_n \\
&= \sum_n \sigma_n^{-2}\langle \sum_m F_\gamma(\sigma_m)v_m(x)\sigma_m u_m, u_n\rangle_2\, u_n \\
&= \sum_n \sigma_n^{-2}F_\gamma(\sigma_n)v_n(x)\sigma_n u_n \\
&= \sum_n \sigma_n^{-1}F_\gamma(\sigma_n)v_n(x)u_n\,.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_\gamma g(x) = \langle g, v_\gamma(x)\rangle = \sum_n \sigma_n^{-1}F_\gamma(\sigma_n)\langle u_n, g\rangle_2 v_n(x) = T_\gamma(x).$$

□

Der Satz zeigt, daß das Konzept der approximativen Inversen von größerer Allgemeinheit ist, als die Regularisierungsverfahren der Form (1.1.3). Die Frage ist, ob man nun umgekehrt auch die approximative Inverse als lineares Regularisierungsverfahren in der Form (1.1.3) schreiben kann. Die Antwort lautet ja, jedoch nur unter einer ganz bestimmten Voraussetzung an das Filter e_γ, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1.2.5 *Sei e_γ dargestellt in der Form*

$$e_\gamma(x, y) = \sum_{m,n} e_{\gamma,\, m,n}v_n(x)v_m(y).$$

(Dies ist möglich, da $e_\gamma \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ist.) Erfüllt das Filter die Voraussetzung:

$$e_{\gamma,m,n} = F_\gamma(\sigma_n)\delta_{m,n}$$

für ein regularisierendes Filter F_γ, so kann S_γ als Regularisierungsmethode T_γ in der Form (1.1.3) dargestellt werden.
Hierbei ist

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n\,. \end{cases}$$

BEWEIS: (Siehe auch [7].)
Wieder ist $v_\gamma(x) = (AA^*)^{-1}Ae_\gamma(x,\cdot)$ und daher:

$$v_\gamma(x) = \sum_n \sigma_n^{-1} u_n \sum_m e_{\gamma,m,n} v_m(x).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \langle v_\gamma(x), g\rangle_2 &= \sum_n \sigma_n^{-1}\langle u_n, g\rangle_2 \sum_m e_{\gamma,m,n} v_m(x) \\ &= \sum_n \sigma_n^{-1} F_\gamma(\sigma_n)\langle u_n, g\rangle_2\, v_n(x) \\ &\Leftrightarrow \sum_m e_{\gamma,m,n} v_m = F_\gamma(\sigma_n) v_n. \end{aligned}$$

Aus der Orthogonalität folgt:

$$e_{\gamma,m,n} = F_\gamma(\sigma_n)\delta_{m,n}\,.$$

□

Eine andere Frage, die sich stellt, ist, ob $S_\gamma g$ als Funktion aus $L^2(\Omega)$ gewisse Glattheitseigenschaften hat, wenn e_γ diese besitzt. In der Tat ist diese Frage unter bestimmten Voraussetzungen an den Operator A zu bejahen, wie wir im folgenden sehen:

Satz 1.2.6 *Es sei $A \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), I\!R^N)$ surjektiv und $e_\gamma(\cdot,\cdot) \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Außerdem erfülle e_γ noch folgende Glattheitsbedingung:*

$$e_\gamma(\cdot, y) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \quad \textit{für alle } y \in \Omega.$$

Dann ist $S_\gamma g$ stetig auf $\overline{\Omega}$ für alle $g \in I\!R^N$.

BEWEIS: Sei $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Omega}$ eine Folge mit $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x \in \overline{\Omega}$.
Wegen

$$\lim_{\nu\to\infty} S_\gamma g(x_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \langle g, v_\gamma(x_\nu)\rangle_2 = \langle g, \lim_{\nu\to\infty} v_\gamma(x_\nu)\rangle_2$$

gilt:

$$S_\gamma g \text{ stetig} \Leftrightarrow v_\gamma(\cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ stetig.}$$

Aus $AA^* v_\gamma(x_\nu) = Ae_\gamma(x_\nu, \cdot)$ ergibt sich:

$$\lim_{\nu\to\infty} AA^* v_\gamma(x_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} Ae_\gamma(x_\nu, \cdot) = Ae_\gamma(x, \cdot),$$

da A, e_γ stetig sind. Hieraus folgt:

$$AA^* \lim_{\nu\to\infty} v_\gamma(x_\nu) = Ae_\gamma(x, \cdot).$$

Andererseits ist:

$$AA^* v_\gamma(x) = Ae_\gamma(x, \cdot)\,.$$

Nun gilt aber für $c \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}
& AA^* c = 0 \\
& \Rightarrow 0 = \langle AA^* c, c\rangle = \|A^* c\|^2 \\
& \Rightarrow A^* c = 0 \\
& \Rightarrow c = 0, \text{ da } N(A^*) = R(A)^\perp = (\mathbb{R}^N)^\perp = \{0\} \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Also ist AA^* injektiv und damit:

$$\lim_{\nu\to\infty} v_\gamma(x_\nu) = v_\gamma(x).$$

□

Wie am Anfang dieses Abschnittes bereits erwähnt, muß das Gleichungssystem (1.2.5) für jeden Rekonstruktionspunkt berechnet werden. Es gibt jedoch Fälle, bei denen es genügt, das Gleichungssystem nur für einen Punkt zu lösen. Dies wird zum Abschluß dieses Kapitels gezeigt:

Satz 1.2.7 *Es sei nun wieder $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit beliebigen Hilberträumen X und Y, weiter seien für $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ offen und beschränkt, $T_1^x \in \mathcal{L}(X)$ und $T_2^x \in \mathcal{L}(Y)$. v sei die Lösung von*

$$AA^* v = Ae$$

für ein $e \in X$. Weiter sollen die Operatoren T_1^x und T_2^x folgende Gleichungen erfüllen:

$$AT_1^x = T_2^x A, \quad \text{und} \quad AA^* T_2^x = T_2^x AA^*. \tag{1.2.7}$$

Dann gilt für die Lösung v^x von $AA^* w = AT_1^x e$:

$$v^x = T_2^x v.$$

BEWEIS: Es ist:

$$AT_1^x e = T_2^x Ae = T_2^x AA^* v = AA^* T_2^x v\,.$$

□

Beispiele für solche Operatoren T_1^x und T_2^x sind Translationsoperatoren T^x, wie sie zum Beginn dieses Abschnitts schon verwendet wurden. Unsere Filter in den Beispielen wurden alle so gewählt, daß $e(x,y) = T^x \tilde{e}(y)$ war. Mit geeigneten Translationsoperatoren, die die Gleichungen (1.2.7) erfüllen, wird man das Gleichungssystem (1.2.5) also nur noch für $x = 0$ lösen (falls $0 \in \Omega$ ist), und dann Satz 1.2.7 verwenden.

Für die Anwendung der approximativen Inversen auf nichtlineare Probleme mit Beispielen sei noch auf die Arbeit von Louis [7] verwiesen. Eine Beschreibung der approximativen Inversen mit einer Anwendung an einem eindimensionalen Beispiel findet man in [10].

Kapitel 2

Die Rekonstruktion der Rotation von Vektorfeldern

In den letzten 20 Jahren spielt die Röntgen–Tomographie eine immer größere Bedeutung in der Medizintechnik oder bei zerstörungsfreien Prüfverfahren, wenn es also darum geht, Gewebe oder Material nichtinvasiv zu untersuchen. Nicht zuletzt ist dies der ungeheuren Steigerung der Computer–Leistungsfähigkeit und der Verbesserung der Rekonstruktionsalgorithmen in diesem Zeitraum zu verdanken.

Bei der Röntgen–Tomographie wird der Intensitätsverlust der Röntgenstrahlen beim Durchtritt durch das Gewebe gemessen, um hieraus die Gewebedichte zu bestimmen. Nun ist die Gewebedichte eine skalare Größe, und man fragt sich, ob es auch möglich ist, statt dessen Vektorfelder, wie Geschwindigkeitsfelder von Flüssigkeiten, zu rekonstruieren. Hierzu hat unter anderem Juhlin [6] ein mathematisches Modell entworfen. Wir wollen uns jedoch im Rahmen dieser Arbeit auf die Rekonstruktion der Rotation von Vektorfeldern beschränken.

Hierbei spielt die Radon–Transformation eine zentrale Rolle. Da ihr auch in dem nachfolgenden Kapitel eine große Bedeutung zukommt, wird ihr ein eigener Abschnitt gewidmet, bevor wir dann im zweiten Abschnitt zur Beschreibung des oben erwähnten Modelles von Juhlin kommen. Im dritten Abschnitt wird die Kompaktheit des dabei auftretenden Operators untersucht, wobei sich herausstellt, daß die Rekonstruktion der Rotation von Vektorfeldern schlecht gestellt ist.

2.1 Die Radon–Transformation

Formal ordnet die n-dimensionale Radon–Transformation einer Funktion ihre Integrale über die Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$ zu. Schon 1917 hat Radon [13] das Problem,

eine Funktion aus den Integralen über Hyperebenen zu rekonstruieren, studiert und gelöst. Später spielte die Radon–Transformation dann eine große Rolle bei Problemen der Computer–Tomographie. So ist sie z.B. das Modell der 2D–Röntgen–Tomographie in der parallelen Geometrie. Wichtige Erkenntnisse, wie der Grad ihrer Schlechtgestelltheit, lassen sich aus ihrer Singulärwertzerlegung ableiten, deren Berechnung Louis [9] zu verdanken ist. Bei der Anwendung der approximativen Inversionsformel auf die Radon–Transformation, wie sie in Kapitel 3 beschrieben wird, ist die Kenntnis der Singulärwertzerlegung eine Grundvoraussetzung.
Grund genug also, dieser Transformation einen eigenen Abschnitt zu widmen.

Bevor wir zur mathematisch exakten Formulierung der Definition kommen, noch einige

Bezeichnungen:

$$
\begin{aligned}
&S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n | \; \|x\|_2 = 1\},\\
&\Omega^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\|_2 < 1\},\\
&Z := S^{n-1} \times [-1,1],\\
&L^2(Z, w^{1-n}) := \{f : Z \longrightarrow \mathbb{R} | \; \|f\|^2_{L^2(Z,w^{1-n})} < \infty\},\\
&\text{wobei } w(s) = \sqrt{1-s^2} \text{ die Gewichtsfunktion und}\\
&\|f\|^2_{L^2(Z,w^{1-n})} = \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^{1} |f(\omega,s)|^2 \, w^{1-n}(s) \; ds d\omega \text{ ist.}
\end{aligned}
$$

Definition 2.1.1 *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $\omega \in S^{n-1}$ ist*

$$
(\mathrm{R}f)(\omega, s) = \int_{\langle x,\omega\rangle = s} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(s - x^T\omega) \, dx
$$

die n-dimensionale Radon–Transformierte *von f.*
Hierbei bezeichne δ die Dirac'sche Deltadistribution.

Des weiteren sei

$$
(\mathrm{R}_\theta f)(s) := (\mathrm{R}f)(\theta, s), \text{ für } \theta \in S^{n-1}, \; s \in \mathbb{R}.
$$

Der nun folgende Satz kann samt Beweis in [12] nachgelesen werden:

Satz 2.1.2 *Die Operatoren*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{R}_\theta : L^2(\Omega^n) \longrightarrow L^2([-1,1], w^{1-n}), \; \theta \in S^{n-1},\\
&\mathrm{R} : L^2(\Omega^n) \longrightarrow L^2(Z, w^{1-n})
\end{aligned}
$$

sind stetig. Ihre stetigen Adjungierten sind gegeben durch:

$$(\mathrm{R}_\theta^* g)(x) = g(\theta, \langle x, \theta \rangle),$$
$$(\mathrm{R}^* g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\omega, \langle x, \omega \rangle)\, d\omega,$$

für $x \in \Omega^n$, $\theta \in S^{n-1}$, $g \in L^2(Z, w^{1-n})$.

Wir kommen nun zur Angabe des singulären Systems der Radon–Transformation, das im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch von immenser Bedeutung sein wird. Die Singulärwertzerlegung wurde von Louis innerhalb der Arbeit [9] berechnet:

Satz 2.1.3 *Das singuläre System* $\{g_{mlk}, f_{mlk}, \sigma_m\}_{mlk}$, *wobei* $m \in I\!N_0$, $l \leq m$ *mit* $l+m$ *gerade,* $1 \leq k \leq N(n,l)$ *der n-dimensionalen Radon-Transformation ist gegeben durch:*

$$g_{mlk} \in L^2(Z, w^{1-n}) \text{ mit } g_{mlk}(\theta, s) = c(m) Y_{lk}(\theta) u_m(s),$$
$$f_{mlk} \in L^2(\Omega^n) \text{ mit } f_{mlk}(x) = \sqrt{2} P_{(m-l)/2, l+(n-2)/2}(|x|^2)|x|^l Y_{lk}(x/|x|),$$
$$\sigma_m^2 = \begin{cases} 4\pi/(m+1), & \text{für} \quad n = 2 \\ \mathcal{O}(m^{1-n}), & \text{für} \quad n > 2\,. \end{cases}$$

Hierbei ist:
Y_{lk} *die k-te n-dimensionale Kugelflächenfunktion vom Grad l,*
N(n,l) die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen dieser Art,
$u_m = w^{n-1} C_m^{n/2}$ *mit den Gegenbauer-Polynomen* $C_m^{n/2}$ *vom Grad m mit Exponent* $n/2$, *die orthogonal in* $[-1, 1]$ *sind mit Gewicht* w^{n-1},
$P_{k,l}$ *sind bis auf Normierung die Jacobi-Polynome* $G_k(l + (n-2)/2, l + (n-2)/2, t)$ *und*

$$c(m) = \left(\int_{-1}^{1} w^{1-n}(s) u_m^2(s)\, ds \right)^{-1/2}.$$

Die Radon–Transformation hat also für $f \in L^2(\Omega^n)$ *folgende Darstellung:*

$$\mathrm{R}f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{l \leq m \\ l+m \text{ gerade}}} \sigma_m \sum_{k=1}^{N(n,l)} \langle f, f_{mlk} \rangle_{L^2(\Omega^n)} g_{mlk}. \tag{2.1.1}$$

Zu den in obigem Satz auftauchenden speziellen Funktionen sei auch auf das Buch von Abramowitz und Stegun [1] verwiesen.

Folgendes Ergebnis ist aus der Funktionalanalysis bekannt:

Lemma 2.1.4 *Besitzt ein stetiger Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ eine Singulärwertzerlegung, ist die 0 der einzige Häufungspunkt der Singulärwerte σ_n, und hat jeder Singulärwert σ_n mit $\sigma_n \neq 0$ endliche Vielfachheit, so ist der Operator kompakt.*

Hieraus folgt nun:

Korollar 2.1.5 *Die n-dimensionale Radon–Transformation $\mathrm{R} : L^2(\Omega^n) \to L^2(Z, w^{1-n})$ ist ein kompakter Operator.*

Die nächste Frage, die sich stellt, ist die nach der Invertierbarkeit der Radon–Transformation. Diese Frage beantwortet der folgende

Satz 2.1.6 (Inversionsformel) *Die Radon–Transformation R ist invertierbar auf ihrem Bild. Für $f \in L^2(\Omega^n)$, $g = \mathrm{R}f$ haben wir für ein $\alpha < n$:*

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\,\mathrm{I}^{-\alpha}\mathrm{R}^*\,\mathrm{I}^{\alpha-n+1}g.$$

I *bezeichnet hierbei das Riesz–Potential, welches charakterisiert ist durch:*

$$(\mathrm{I}^\alpha f)\hat{}(\xi) = |\xi|^{-\alpha}\hat{f}(\xi).$$

BEWEIS: siehe [12].
□

Betrachten wir nun das Problem

$$\text{Finde zu } g \in L^2(Z, w^{1-n}) \text{ ein } f \in L^2(\Omega^n) \text{ mit } \mathrm{R}f = g, \tag{2.1.2}$$

d.h. die Rekonstruktion von f aus den Integralen über die Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$, so können wir nun folgendes aussagen:

Korollar 2.1.7 *Das Problem* (2.1.2) *ist mäßig schlecht gestellt mit der Ordnung* $(n-1)/2$.

BEWEIS: Die Schlechtgestelltheit folgt aus der Kompaktheit von R, die Klassifizierung aus der Definition 1.1.6 und Satz 2.1.3; es ist nämlich:

$$\sigma_m = \mathcal{O}(m^{(1-n)/2}).$$

□

Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir noch einen interessanten Zusammenhang zwischen der Radon- und der Fourier–Transformation formulieren:

Satz 2.1.8 (Projektionssatz) *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

$$(\mathrm{R}_\theta f)\hat{\ }(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS: siehe [12].
□

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir uns nur noch mit der zweidimensionalen Radon-Transformation beschäftigen, also mit den Linienintegralen über f.

2.2 Das mathematische Modell

Juhlin entwirft in seiner Arbeit [6] ein mathematisches Modell, wonach in 2 Schritten ein Vektorfeld aus Meßdaten rekonstruiert wird. Im ersten Abschnitt wird dabei zunächst die Rotation

$$rot\ f = \nabla \times f$$

des Vektorfeldes f koordinatenweise aus den gegebenen Daten rekonstruiert. Dieser Teil beruht, wie wir im folgenden sehen werden, auf dem Differenzieren der Daten und Anwendung der inversen zweidimensionalen Radon–Transformation. Im zweiten Abschnitt wird durch Lösen eines Differentialgleichungssystemes aus der Rotation das Feld f selbst gewonnen. Hierzu muß die dreidimensionale Faltung

$$g = E * \{-\nabla \times q\}, \text{ mit } q = \nabla \times f$$

berechnet werden, wobei E die Fundamentallösung des Laplace–Operators in drei Dimensionen ist. Die Rotation muß dazu auf dem gesamten betrachteten Gebiet bekannt sein. Man sieht, daß dieser Teil extrem aufwendig ist, wobei der Aufwand bei nicht inkompressiblen Flüssigkeiten, oder wenn f auf dem Rand in Richtung der Normalen des Gebietes ungleich Null ist, noch erheblich größer wird.
Wir wollen uns jedoch im weiteren nur mit dem ersten Teil, der Rekonstruktion der Rotation, beschäftigen.

Wir betrachten dazu einen Querschnitt durch einen Körper endlicher Ausdehnung und legen ein karthesisches Koordinatensystem so hinein, daß der Querschnitt Ω in der xy–Ebene liegt. Eine Gerade L durch dieses Gebiet ist vollständig bestimmt durch den Abstand s vom Ursprung mit $-\infty < s < \infty$ und den Polarwinkel θ mit $0 \le \theta \le \pi$, siehe Abbildung 2.2.1.

Ist $\omega = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, so kann L beschrieben werden durch:

$$L(s,\theta) = \{x \in I\!R^3 | x^T e_z = 0,\ x^T \omega = s\},$$

wobei $e_z = (0,0,1)^T$ ist.

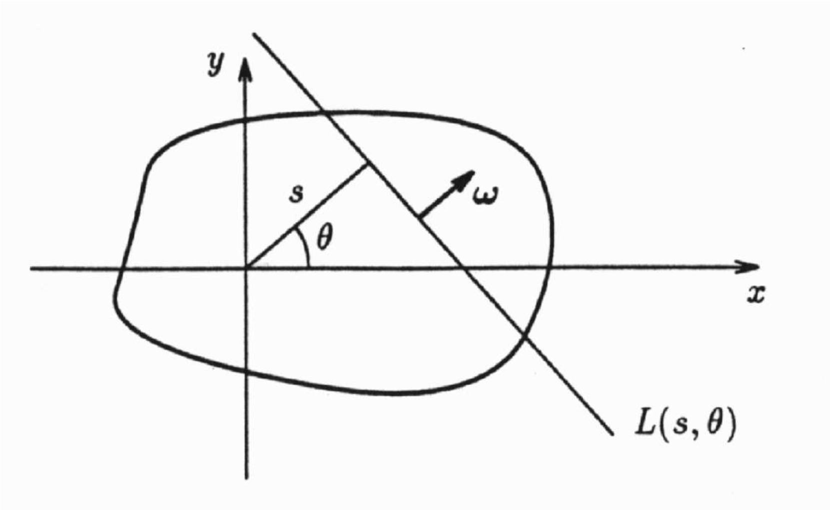


Abbildung 2.2.1

Durch Aussenden eines Signals längs L ist es möglich unter Beachtung des Doppler–Effektes, der auftritt, wenn das Signal auf eine sich bewegende Flüssigkeit trifft, analog zur Gewebedichte bei der Röntgen–Tomographie, den Mittelwert der Geschwindigkeitskomponente parallel zum Teststrahl zu bestimmen, also die Größe:

$$(\mathrm{D}f)(\omega, s) = \int_{L(s,\theta)} \langle e_z, \omega \times f(x) \rangle_2 \, dl(x).$$

Der Operator D ist der zweidimensionalen Radon–Transformation sehr ähnlich. Der Unterschied jedoch ist, daß der Integrand von der Richtung ω abhängt. Der folgende, für dieses Kapitel zentrale Satz, beseitigt diese Schwierigkeit. Es sei von jetzt an generell vorausgesetzt, daß f kompakten Träger in Ω habe.

Satz 2.2.1 *Der Operator* D *sei wie oben definiert, und* $f \in C^1(\Omega)$*. Dann gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial s}\{(\mathrm{D}f)(\omega, s)\} = \int_{L(s,\theta)} \langle e_z, \nabla \times f(x) \rangle_2 \, dl(x).$$

Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir noch den klassischen Satz von Stokes:

Satz 2.2.2 (Satz von Stokes) *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiter sei $M \subset U$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, auf der ein Kompaktum A mit glattem Rand gegeben sei. M sei durch ein Einheits–Normalenfeld*

$$\nu : M \to \mathbb{R}^3$$

orientiert. Die induzierte Orientierung des Randes ∂A definiert ein Einheits–Tangentenfeld

$$\tau : \partial A \to \mathbb{R}^3.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann:

$$\int_{\partial A} \langle F, \tau \rangle \; ds = \int_A \langle rot\, F, \nu \rangle \; dS.$$

BEWEIS: siehe z.B. [5].
□

BEWEIS von Satz 2.2.1: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Man verbinde die beiden Geraden $L(s,\theta)$ und $L(s+\varepsilon,\theta)$ außerhalb des Gebietes Ω gemäß Abbildung 2.2.2, so daß ein Rechteck Ω_ε entsteht. Die abgeschnittenen Geraden endlicher Länge seien dabei mit $\tilde{L}(s,\theta)$, bzw. $\tilde{L}(s+\varepsilon,\theta)$ bezeichnet.
Da der Träger von f in Ω liegt, ist das Integral längs der Verbindungsstrecken 0, was im folgenden ausgenutzt wird.

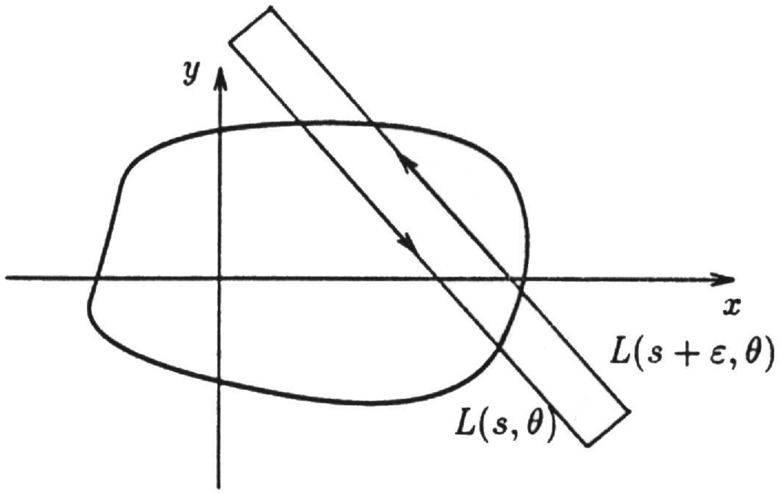


Abbildung 2.2.2

Es gilt nämlich:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{D}f)(\omega, s+\varepsilon) - (\mathrm{D}f)(\omega, s) \\
&= \int_{\tilde{L}(s+\varepsilon,\theta)} \langle e_z, \omega \times f(x)\rangle_2 \, dl(x) - \int_{\tilde{L}(s,\theta)} \langle e_z, \omega \times f(x)\rangle_2 \, dl(x) \\
&= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \langle e_z, \omega \times f(x)\rangle_2 \, dl(x) \\
&= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \langle f(x), \underbrace{e_z \times \omega}_{\tau(x)}\rangle_2 \, dl(x) \\
&= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \langle f(x), \tau(x)\rangle_2 \, dl(x) \\
&\overset{Stokes}{=} \int_{\Omega_\varepsilon} \langle rot\ f(x), \nu(x)\rangle_2 \, dS(x) \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \langle e_z, \nabla \times f(x)\rangle_2 \, dS(x).
\end{aligned}
$$

Der Satz von Stokes war anwendbar da das Tangentenfeld τ auf $\partial\Omega_\varepsilon$ und das Normalenfeld ν auf Ω_ε gerade gegeben sind durch:

$$
\begin{aligned}
&\tau : \partial\Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^3, \ \tau(x) = e_z \times \omega = (-sin(\theta), cos(\theta), 0)^T \\
&\nu : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^3, \ \nu(x) = e_z.
\end{aligned}
$$

Im folgenden sei die affin lineare Abbildung $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$B(x) = U(\varphi)x + b$$

Hierbei beschreibt $U(\varphi)$ eine Drehung um den Winkel $\varphi = \pi - \theta$ und $b \in \mathbb{R}^3$ ist so bestimmt, daß das Rechteck Ω_ε auf der positiven x-Achse im ersten Quadranten des Koordinatensystems zu liegen kommt. Die Eckpunkte sind dann: $(0,0)$, $(0,\varepsilon)$, $(|\tilde{L}(s,\theta)|, 0)$ und $(|\tilde{L}(s,\theta)|, |\tilde{L}(s+\varepsilon,\theta)|)$, wobei $|\tilde{L}|$ die Länge der Strecke $\tilde{L}$ bezeichne.
Es ist außerdem: $|\det(J_B(x))| = |\det(U(\varphi))| = 1$, für alle $x \in \Omega_\varepsilon$.
Damit folgt nun:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\{(\mathrm{D}f)(\omega, s+\varepsilon) - (\mathrm{D}f)(\omega, s)\} &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_\varepsilon} \langle e_z, \nabla \times f(x)\rangle_2 \, dS(x) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{|\tilde{L}(s,\theta)|} \langle e_z, \nabla \times f(B^{-1}(x_1, x_2, 0))\rangle_2 \, dx_1 \, dx_2 \\
&= \int_0^{1}\int_0^{|\tilde{L}(s,\theta)|} \langle e_z, \nabla \times f(B^{-1}(x_1, \varepsilon t, 0))\rangle_2 \, dx_1 \, dt
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt wurde die Substitution $x_2 = \varepsilon t$ verwendet. Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\{(\mathrm{D}f)(\omega,s)\} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{(\mathrm{D}f)(\omega,s+\varepsilon)-(\mathrm{D}f)(\omega,s)\} \\
&= \int_0^1 \int_0^{|\tilde{L}(s,\theta)|} \langle e_z, \nabla\times f(B^{-1}(x_1,0,0))\rangle_2 \, dx_1 \, dt \\
&= \int_0^{|\tilde{L}(s,\theta)|} \langle e_z, \nabla\times f(B^{-1}(x_1,0,0))\rangle_2 \, dx_1 \\
&= \int_{L(s,\theta)} \langle e_z, \nabla\times f(x) dl(x).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = (x_1,x_2) \leftrightarrow x = (x_1,x_2,0),\\
&\tilde{\omega} = (\cos\theta,\sin\theta) \leftrightarrow \omega = (\cos\theta,\sin\theta,0),\\
&\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x_1,x_2,0),\\
&g(\tilde{x}) = \langle e_z, \nabla\times\tilde{f}(\tilde{x})\rangle_2
\end{aligned}$$

ist:

$$\frac{\partial}{\partial s}\{(\mathrm{D}f)(\omega,s)\} = \int_{\langle\tilde{x},\tilde{\omega}\rangle} \langle e_z, \nabla\times\tilde{f}(\tilde{x})\rangle_2 \, dl(\tilde{x}) = (\mathrm{R}g)(\tilde{\omega},s).$$

R bezeichnet hierbei die in Kapitel 2.1. definierte zweidimensionale Radon–Transforma–
tion.

Korollar 2.2.3 *Sei* $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^3 | e_z^T x = 0\}$ *ein beschränktes Gebiet,* $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. *Dann gilt:*

$$\boxed{g(\tilde{x}) = \langle e_z, \nabla\times f(x_1,x_2,0)\rangle_2 = [\mathrm{R}^{-1}(\frac{\partial}{\partial s}(\mathrm{D}f)(\omega,s))](\tilde{x}).}$$

BEWEIS: Nach Satz 2.1.6 ist R invertierbar auf dem Bild. Der Rest folgt mit Satz 2.2.1 und der obigen Bemerkung.
□

Von nun an bezeichne R die gesamte Arbeit hindurch die zweidimensionale Radon–Transformation. Die Tilden über x und ω werden zur Vereinfachung im folgenden weggelassen.

Mit Hilfe dieser Überlegungen können wir nun das Verfahren zur Rekonstruktion der Rotation eines Vektorfeldes wie folgt zusammenfassen:

- Man messe den Hauptwert der Geschwindigkeitskomponente parallel zum Teststrahl entlang jeder Gerade in der Ebene $z = 0$, und bezeichne die Meßdaten mit $\mathrm{D}f$.
- Differenziere $\mathrm{D}f = (\mathrm{D}f)(\omega, s)$ bezüglich s und erhalte
$$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{D}f = \mathrm{R}(\langle e_z, \nabla \times f(x,y,0)\rangle_2),$$
wobei R die zweidimensionale Radon–Transformation bezeichnet.
- Wende die inverse Radon–Transformation R^{-1} gemäß Satz 2.1.6 an, um
$$\langle e_z, \nabla \times f(x,y,0)\rangle_2$$
zu erhalten.
- Wiederhole den Vorgang für alle anderen z.
- Drehe den Körper, um auf die gleiche Weise $\langle e_x, \nabla \times f\rangle_2$ und $\langle e_y, \nabla \times f\rangle_2$ zu erhalten.

2.3 Kompaktheitsaussagen und Ausblick

Dieses zweite Kapitel wollen wir mit einigen Aussagen über die in Kapitel 2.2. auftretenden Operatoren und einem Ausblick zur rechnerischen Lösung des Problems abschließen.

Zunächst ein Standardergebnis der Funktionalanalysis:

Lemma 2.3.1 *Es seien X, Y, Z Banachräume. Ist $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{K}(Y,Z)$, so ist $BA \in \mathcal{K}(X,Z)$.*

BEWEIS: siehe z.B. [14].
□

Wir definieren folgende Räume:

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ ein beschränktes Gebiet.}\\
&L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^3 | \int_\Omega \|f(x)\|_2^2 \, dx < \infty\},\\
&H(\Omega, rot) := \overline{\{f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) | rot\ f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)\}},
\end{aligned}$$

wobei die Ableitungen zumindest im verallgemeinerten Sinne existieren sollen, und der Abschluß bezüglich der L^2-Topologie zu betrachten ist.
$H(\Omega, rot)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle_{H(\Omega, rot)} = \int_\Omega \langle rot\ f, rot\ g \rangle_2 \, dx,$$

für $f, g \in H(\Omega, rot)$.
Die Norm ist dann natürlich definiert durch:

$$\|f\|^2_{H(\Omega, rot)} = \langle f, f \rangle_{H(\Omega, rot)},$$

für $f \in H(\Omega, rot)$.

Wir können nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 2.3.2 *Der Operator* $\mathrm{D}' := \frac{\partial}{\partial s}\mathrm{D} : H(\Omega^2, rot) \to L^2(Z, w^{-1})$, *definiert durch:*

$$(\mathrm{D}'f)(\omega, s) = \int_{L(s,\theta)} \langle e_z, \nabla \times f(x, y, 0) \rangle_2 \, dl(x, y)$$

für $f \in H(\Omega^2, rot)$, $s \in [-1, 1]$, $S^1 \ni \omega = (\cos\theta, \sin\theta)$, ist stetig und kompakt.

BEWEIS: Betrachte den Operator $Q : H(\Omega^2, rot) \to L^2(\Omega^2)$, der definiert ist durch:

$$(Qf)(x) := \langle e_z, \nabla \times f(x)\rangle_2, \text{ für } x \in \Omega^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\|Qf\|^2_{L^2(\Omega^2)} &= \int_{\Omega^2} |\langle e_z, \nabla \times f(x)\rangle_2|^2 \, dx \\ &\overset{Cauchy-Schwarz}{\leq} \int_{\Omega^2} \|rot\, f(x)\|_2^2 \, dx \\ &= \|f\|^2_{H(\Omega^2, rot)}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von Q.
Nach Satz 2.1.2 wissen wir, daß R : $L^2(\Omega^2) \to L^2(Z, w^{-1})$ stetig und nach Korollar 2.1.5 kompakt ist.
Wegen $\mathrm{D}' = RQ$ folgt mit Lemma 2.3.1 die Behauptung.
□

Korollar 2.3.3 *Die Rekonstruktion des Vektorfeldes f aus den Daten $\frac{\partial}{\partial s}\{(\mathrm{D}f)(\omega, s)\}$, $s \in [-1, 1]$, $\omega \in S^1$ ist schlecht gestellt.*

Kommen wir nun zu unserem Problem der Rekonstruktion der Rotation aus den Daten $g(\omega, s) = \frac{\partial}{\partial s}\{(\mathrm{D}f)(\omega, s)\}$. Es handelt sich ja hierbei um die Rekonstruktion einer Funktion $\tilde{f} \in L^2(\Omega^2)$ mit

$$\tilde{f}(x) = \langle e_z, \nabla \times f(x)\rangle_2,$$

also um ein Problem der Form (2.1.2). Analog zu Korollar 2.1.7 können wir somit formulieren:

Korollar 2.3.4 *Die Rekonstruktion der Rotation eines Vektorfeldes aus den Daten g ist mäßig schlecht gestellt mit der Ordnung* $1/2$.

Da ein Rechner nun einmal, so gut er auch ist, nur endlich viele Daten verarbeiten kann, kann man die Daten $g(\omega, s) = \frac{\partial}{\partial s}\{(\mathrm{D}f)(\omega, s)\}$ nicht für alle $s \in [-1, 1]$ und $\omega \in S^1$ als gegeben vorraussetzen. Vielmehr sind die Daten für praktische Rechnungen nur für eine diskrete, endliche Teilmenge gegeben, d.h. wir gehen von einem Datensatz

$$g \in I\!R^N, \text{ mit } g_{jL+l} = g(\omega_j, s_l), \; j = 1, \cdots, J; \; l = 1, \cdots, L$$

aus.
Analog müssen wir statt der kontinuierlichen Radon–Transformation eine diskrete Form betrachten:

Definition 2.3.5 *Der Operator* $\mathrm{R}_D : L^2(\Omega^2) \to \mathbb{R}^N$ *sei für* $f \in L^2(\Omega^2)$ *definiert durch:*

$$(\mathrm{R}_D f)_{jl} = (\mathrm{R}_D f)_{jL+l} = (\mathrm{R} f)(\omega_j, s_l). \tag{2.3.3}$$

Hierbei sind die $s_l \in [-1,1]$ *und die* $\omega_j \in S^1$ *für* $l = 1, \cdots, L$ *und* $j = 1, \cdots, J$*;* $N = JL$.

Unsere Rekonstruktionsaufgabe sieht nun also wie folgt aus:

Finde ein $\tilde{f} \in L^2(\Omega^2)$ mit $\mathrm{R}_D f = g$ für ein gegebenes $g \in \mathbb{R}^N$.

Es ist dann

$$\tilde{f}(x,y) = \langle e_z, \nabla \times f(x,y,0)\rangle_2$$

für ein Vektorfeld f.

Da das Problem $(\mathrm{R}_D, L^2(\Omega^2), \mathbb{R}^N)$ schlecht gestellt ist mit Ordnung $1/2$, ist es nötig zu regularisieren. Ein bekanntes Verfahren zur Lösung dieses Problemes ist die bei der Computer–Tomographie verwendete *gefilterte Rückprojektion.*
Wir wollen jedoch im folgenden auf dieses Problem unsere in Kapitel 1.2. hergeleitete *approximative Inversionsformel* anwenden.

Kapitel 3

Die approximative Inverse bei der 2D–Radon–Transformation

Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben ist die zweidimensionale Radon–Transformation das Modell für die koordinatenweise Rekonstruktion der Rotation von Vektorfeldern. Außerdem modelliert sie die 2D–Computer–Tomographie in der parallelen Geometrie. Wir wollen nun in diesem Kapitel auf das Problem

$$\text{Finde } f \in L^2(\Omega^2) \text{ mit } \mathrm{R}_D f = g \in \mathbb{R}^N$$

die approximative Inversionsformel aus Kapitel 1 anwenden. Dieses Problem beschreibt die Rekonstruktion einer Funktion f im Gebiet Ω^2 aus diskreten Daten g, die den Wert der Funktion entlang einer endlichen Anzahl von Linienintegralen beschreiben. Dazu müssen wir das Gleichungssystem

$$\mathrm{R}_D \mathrm{R}_D^* v_\gamma(x) = \mathrm{R}_D e_\gamma(x, \cdot) \tag{3.0.1}$$

für ein Filter e_γ und den Rekonstruktionspunkt $x \in \Omega^2$ lösen, und anschließend das Skalarprodukt

$$(S_\gamma g)(x) = \langle v_\gamma(x), g \rangle_2$$

berechnen.
Die Hauptaufgabe besteht natürlich darin, das Gleichungssystem (3.0.1) effizient zu lösen. Dieser Problemkreis wurde schon im letzten Kapitel angesprochen. Die erste Schwierigkeit, die auftaucht, ist die Berechnung des adjungierten Operators R_D^*, da bei der Radon–Transformation als Kern die Delta–Distribution auftaucht. Dies wird Gegenstand des ersten Abschnittes sein, in dem wir einen anderen Weg beschreiten werden als Natterer in [12]. Dabei wird die Singulärwertzerlegung von R eine entscheidende Rolle spielen.

Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, daß die Rekonstruktionskerne $v_\gamma(x)$ näherungsweise Translate von bestimmten Funktionen $\bar{u}_j \in L^2(Z, w^{-1})$ sind, genauer, daß

$$[v_\gamma(x)]_{jl} \approx T^{x^T\omega_j}\bar{u}_j(s_l)$$

ist. Das wird uns veranlassen, das Gleichungssystem (3.0.1) nur noch im Punkt $x = 0$ zu lösen.
Im dritten Teilabschnitt wird gezeigt, daß man noch mehr Rechenaufwand sparen kann, da es ausreicht, ein Gleichungssystem der Dimension $L = 2q - 1$, der Anzahl der Strahlen pro Richtung s_l, zu lösen. Das Ausgangsgleichungssystem (3.0.1) hat ja die Dimension JL, wobei J die Anzahl der Richtungen darstellt. Dies macht die Methode der approximativen Inversen in diesem speziellen Fall erst effizient, d.h. die Rechenzeit bei der Berechnung der Lösung von (3.0.1) nimmt damit annehmbare Ausmaße an.

3.1 Die Adjungierte des Operators

Beginnen wollen wir mit einer Stetigkeitsaussage über den Operator R_D. Zur Erinnerung: Der Operator R_D war definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_D : L^2(\Omega^2) &\longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad N = JL, \\ f &\longmapsto [(\mathrm{R}f)(\omega_j, s_l)]_{\substack{j=1,\dots,J \\ l=1,\dots,L}}. \end{aligned}$$

Lemma 3.1.1 *Der Operator* $\mathrm{R}_D : L^2(\Omega^2) \to \mathbb{R}^N$ *ist stetig, also* $\mathrm{R}_D \in \mathcal{L}(L^2(\Omega^2), \mathbb{R}^N)$.

BEWEIS: Es genügt die Behauptung für eine dichte Teilmenge von $L^2(\Omega^2)$ zu zeigen. Es sei hierzu $f \in \mathcal{S}(\Omega^2)$. Wie Natterer in [12] zeigt ist dann $\mathrm{R}f \in \mathcal{S}(Z)$. Definiere weiter:

$$\delta_{jl} : \mathcal{S}(Z) \to \mathbb{R};\ g \mapsto g(\omega_j, s_l).$$

δ_{jl} ist als Punktauswertung einer Funktion aus $\mathcal{S}(Z)$ stetig. Die Behauptung folgt nun mit Satz 2.1.2 und aus der Tatsache, daß

$$[\mathrm{R}_D f]_{jl} = \delta_{jl}(\mathrm{R}f)$$

ist.
□

Korollar 3.1.2 R_D *besitzt einen adjungierten Operator*

$$\mathrm{R}_D^* : \mathbb{R}^N \longrightarrow L^2(\Omega^2),$$

der stetig ist.

Bezeichnung: Wir schreiben nun im folgenden immer g_{jl} statt g_{jL+l} für einen Vektor $g \in I\!R^{JL}$.

Es ist
$$[\mathrm{R}_D f]_{jl} = \int_{\Omega^2} f(x)\delta(s_l - x^T\omega_j)\, dx.$$

Mit der Gleichung (1.2.6) können wir somit formal schreiben:

$$[\mathrm{R}_D \mathrm{R}_D^*]_{(mn),(jl)} = \int_{\Omega^2} \delta(s_n - x^T\omega_m)\delta(s_l - x^T\omega_j)\, dx.$$

Allerdings ist das Produkt zweier Delta–Distributionen nicht definiert, erst recht nicht ein Integral über ein solches Produkt.
Natterer [12] löst dieses Problem, indem er Streifenintegrale statt Linienintegralen verwendet. Dabei muß man die Flächeninhalte der Schnittmenge zweier Streifen berechnen, was vor allem an krummen Rändern große Schwierigkeiten bereitet. Außerdem erscheint eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen kaum möglich.
Wir wollen hier einen anderen Weg beschreiten, wobei es wichtig ist, daß wir das singuläre System der Radon–Transformation kennen.

Wir betrachten dazu allgemein einen kompakten Operator $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ zwischen Hilberträumen X und Y. $\{u_n, v_n, \sigma_n\}_n$ bezeichne das singuläre System des Operators A, wie es in Kapitel 1.1. definiert wurde.
Definiere zu A einen Operator A_D wie folgt:

$$\begin{aligned} A_D : X &\longrightarrow I\!R^N, \\ f &\longmapsto (\langle Af, \psi_n\rangle_Y)_{n=1,\cdots,N}, \end{aligned}$$

wobei $\psi_n \in Y$ sei. Wir lassen hier für ψ_n aber auch die Delta–Distribution zu, so daß A_D also auch eine Punktauswertung von Af sein kann.

Satz 3.1.3 *A_D ist stetig und $A_D^* \in \mathcal{L}(I\!R^N, X)$ ist gegeben durch:*

$$\boxed{A_D^*\, g = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\langle u_\nu, \psi_n\rangle}_Y\, A^* u_\nu,} \tag{3.1.2}$$

für $g \in I\!R^N$.

BEWEIS: Die Stetigkeit von A_D ist unmittelbar klar.
Sei nun $f \in X$, $g \in \mathbb{R}^N$. Dann ist:

$$\begin{aligned} \langle A_D f, g \rangle_2 &= \sum_{n=1}^{N} g_n (A_D f)_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} g_n \langle Af, \psi_n \rangle_Y \, . \end{aligned}$$

Wir nutzen nun die Tatsache aus, daß die Vektoren $\{u_n\}_n$ des singulären Systems eine Orthonormalbasis von $\overline{R(A)}$ darstellen:

$$\begin{aligned} Af &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \langle Af, u_\nu \rangle_Y \, u_\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \langle f, A^* u_\nu \rangle_X \, u_\nu \, . \end{aligned}$$

Einsetzen der letzten Gleichung in die erste ergibt:

$$\begin{aligned} \langle A_D f, g \rangle_2 &= \sum_{n=1}^{N} g_n \sum_{\nu=0}^{\infty} \langle f, A^* u_\nu \rangle_X \, \langle u_\nu, \psi_n \rangle_Y \\ &= \langle f, \underbrace{\sum_{n=1}^{N} g_n \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\langle u_\nu, \psi_n \rangle_Y} \, A^* u_\nu}_{=: A^* g} \rangle_X \, . \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.
□

Bemerkung: Die Konvergenz der Reihe $A^* g$ kann man im schwachen Sinne zeigen:
Sei dazu $H_g : X \to \mathbb{R}$ das stetige Funktional, das definiert ist durch:

$$H_g f = \langle A_D f, g \rangle_2,$$

für ein $g \in \mathbb{R}^N$.
Mit dem Rieszschen Darstellungssatz folgt die Existenz eines Vektors $h_g^* \in X$ mit:

$$H_g f = \langle f, h_g^* \rangle_X \, .$$

Definiere nun

$$A_D^* \, g := h_g^*.$$

Dann folgt $A_D^* g \in X$ und mit obigem Satz, daß $A^* g$ die behauptete Darstellung hat.

Mit Hilfe dieser Darstellung von A_D^* können wir nun auch die Matrix $A_D A_D^*$ ausrechnen:

Lemma 3.1.4 *Die Matrix $A_D A_D^*$ besitzt die Darstellung:*

$$(A_D A_D^*)_{m,n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu^2 \, \overline{\langle u_\nu, \psi_n \rangle_Y} \, \langle u_\nu, \psi_m \rangle_Y \, , \tag{3.1.3}$$

für $1 \leq m, n \leq N$.

BEWEIS: Seien $e_m, e_n \in I\!R^N$ der m-te, bzw. n-te kanonische Einheitsvektor, d.h.: $e_m = \delta_{m0}$, bzw. $e_n = \delta_{n0}$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
(A_D A_D^*)_{m,n} &= e_m^T (A_D A_D^*) e_n \\
&= e_m^T \, A_D [\sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\langle u_\nu, \psi_n \rangle_Y} \, A^* u_\nu] \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\langle u_\nu, \psi_n \rangle_Y} \, \langle A A^* u_\nu, \psi_m \rangle_Y \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu^2 \, \overline{\langle u_\nu, \psi_n \rangle_Y} \, \langle u_\nu, \psi_m \rangle_Y \, .
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei ausgenutzt, daß $AA^* u_\nu = \sigma_\nu^2 u_\nu$ ist.
□

Bei praktischen Rechnungen kann man die unendliche Reihe in der Darstellung (3.1.2) von A_D^* natürlich nicht exakt berechnen. Man wird daher die Reihe nach endlicher Länge abbrechen, d.h. man berechnet:

$$A_{D,M}^* \, g = \sum_{n=1}^{N} g_n \sum_{\nu=0}^{M} \overline{\langle u_\nu, \psi_n \rangle_Y} \, A^* u_\nu. \tag{3.1.4}$$

Entsprechend sieht die Matrix aus:

$$[A_D A_{D,M}^*]_{1 \leq m,n \leq N} = [\sum_{\nu=0}^{M} \sigma_\nu^2 \overline{\langle u_\nu, \psi_n \rangle_Y} \, \langle u_\nu, \psi_m \rangle_Y]_{1 \leq m,n \leq N} \, . \tag{3.1.5}$$

Generell kann man das eben vorgestellte Konzept auf jeden kompakten Operator A zwischen zwei Hilberträumen anwenden. Allerdings ist die Kenntnis des singulären Systems des Operators eine Grundvoraussetzung und gleichzeitig auch die große Schwierigkeit. Dafür hat man im Vergleich zu der von Natterer vorgeschlagenen Methode keine komplizierten Flächeninhalte zu berechnen und das Konzept läßt sich ohne Probleme auf höhere Dimensionen übertragen.
Unser Augenmerk soll aber nun wieder auf die zweidimensionale Radon–Transformation

gerichtet sein, auf die wir jetzt die geschilderte Methode zur Berechnung von R_D^* und $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*$ anwenden wollen. In diesem Fall approximiert die in der Darstellung (3.1.2) von R_D^* auftauchende Reihe das anfangs erwähnte Integral über das Produkt von zwei Delta–Distributionen.

Es sei also $A = \mathrm{R}$, $X = L^2(\Omega^2)$ und $Y = \mathbb{R}^N$.
Desweiteren sei wieder generell vorausgesetzt, daß f kompakten Träger in Ω^2 habe. Aus Satz 2.1.3 können wir die Singulärwertzerlegung von R herleiten. Dabei interessieren uns nur die Vektoren $\{u_n\}_n$, also die ONB von $\overline{R(\mathrm{R})}$ und die Singulärwerte σ_n, da die Vektoren $\{v_n\}_n$ in der Darstellung von R_D^* und $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*$ keine Rolle spielen.
Demnach sind die Vektoren $\{u_n\}$ und die Werte σ_n gegben durch:

$$\begin{aligned} u_{\mu\lambda}(\omega, s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, w(s) U_\mu(s) Y_\lambda(\omega)\,, \\ \sigma_\mu^2 &= \frac{4\pi}{\mu+1}\,. \end{aligned}$$

Hierbei sind:
U_μ die Tschebyscheff–Polynome 2.Art, normiert durch $U_\mu(1) = \mu + 1,\ |s| \le 1$,
$Y_\lambda(\omega) = \exp(i\lambda\varphi)$ die zweidimensionalen Kugelflächenfunktionen vom Grad λ, wobei $\omega = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ ist.

Mit diesen Bezeichnungen ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\mathrm{R}^* u_{\mu\lambda} &= \sigma_\mu^2 u_{\mu\lambda} \text{ und} \\ \mathrm{R}f &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu\ gerade}}^{\mu} \langle \mathrm{R}f, u_{\mu\lambda}\rangle_{L^2(Z,w^{-1})}\, u_{\mu\lambda} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu\ gerade}}^{\mu} \langle f, \mathrm{R}^* u_{\mu\lambda}\rangle_{L^2(\Omega^2)}\, u_{\mu\lambda}. \end{aligned}$$

Wenden wir nun Formel (3.1.3) für die Darstellung von $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*$ an, so ergibt sich:

$$(\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*)_{(nk),(jl)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma_\mu^2 \sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu\ gerade}}^{\mu} u_{\mu\lambda}(\omega_j, s_l)\overline{u_{\mu\lambda}(\omega_n, s_k)},$$

und die abgeschnittene Form:

$$(\mathrm{R}_D\mathrm{R}_{D,M}^*)_{(nk),(jl)} = \sum_{\mu=0}^{M} \sigma_\mu^2 \sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu\ gerade}}^{\mu} u_{\mu\lambda}(\omega_j, s_l)\overline{u_{\mu\lambda}(\omega_n, s_k)} \tag{3.1.6}$$

für $1 \leq n,j \leq J,\ 1 \leq k,l \leq L,\ M > 0$.
Bevor wir $\mathrm{R}_D\mathrm{R}^*_{D,M}$ explizit ausrechnen, benötigen wir noch ein kleines Lemma:

Lemma 3.1.5 *Es ist:*

$$\sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu\ gerade}}^{\mu} e^{i\lambda\varphi} = U_\mu(\cos(\varphi))\,.$$

BEWEIS: Aus einer einfachen Rechnung folgt die Behauptung.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu\ gerade}}^{\mu} e^{i\lambda\varphi} &= \sum_{\lambda=0}^{\mu} e^{i(\mu-2\lambda)\varphi} \\
&= e^{i\mu\varphi}\sum_{\lambda=0}^{\mu}(e^{-2i\varphi})^\lambda \\
&= e^{i\mu\varphi}\frac{1-e^{-2i(\mu+1)\varphi}}{1-e^{-2i\varphi}} \\
&= \frac{e^{i(\mu+1)\varphi}-e^{-i(\mu+1)\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}} \\
&= \frac{\sin(\mu+1)\varphi}{\sin\varphi} \\
&= U_\mu(\cos\varphi).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.1.6 *Für $1 \leq j,n \leq J,\ 1 \leq l,k \leq L,\ M > 0$ ist die Matrix $B_M := \mathrm{R}_D\mathrm{R}^*_{D,M}$ gegeben durch:*

$$\boxed{(B_M)_{(nk),(jl)} = 8w(s_l)w(s_k)\sum_{\mu=0}^{M}\frac{1}{\mu+1}U_\mu(s_l)U_\mu(s_k)U_\mu(\cos(\varphi_j-\varphi_n)).} \tag{3.1.7}$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned}
(B_M)_{(nk),(jl)} &\overset{(3.1.6)}{=} \sum_{\mu=0}^{M}\frac{4\pi}{\mu+1}\sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu\ gerade}}^{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,w(s_l)U_\mu(s_l)Y_\lambda(\omega_j)\times \\
&\quad\times\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,w(s_k)U_\mu(s_k)\overline{Y_\lambda(\omega_n)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 8w(s_l)w(s_k)\sum_{\mu=0}^{M}\frac{1}{\mu+1}U_\mu(s_l)U_\mu(s_k)\sum_{\substack{\lambda=-\mu\\ \lambda+\mu\ gerade}}^{\mu} e^{i\lambda(\varphi_j-\varphi_n)} \\
&= 8w(s_l)w(s_k)\sum_{\mu=0}^{M}\frac{1}{\mu+1}U_\mu(s_l)U_\mu(s_k)U_\mu(\cos(\varphi_j-\varphi_n))\,.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Lemma 3.1.5 benutzt.
□

Bemerkungen: 1) Die Matrix B_M ist eine Block–zyklische Matrix mit symmetrischen Blöcken, wenn man davon ausgeht, daß die Winkel φ_j äquidistant verteilt sind. Das resultiert aus der Tatsache, daß

$$
\begin{aligned}
\cos(\varphi_m-\varphi_n) &= \cos(\varphi_{m-1}-\varphi_{n-1}) \text{ und} \\
\cos(\varphi_m-\varphi_J) &= \cos(\varphi_{m-1}-\varphi_1)
\end{aligned}
$$

ist. Für solche Matrizen kennt man Algorithmen zur schnellen Lösung der Gleichungssysteme, die auf der schnellen Fouriertransformation beruhen. Im übernächsten Abschnitt werden wir sehen, daß man aufgrund der speziellen Struktur der rechten Seite, das Gleichungssystem noch schneller lösen kann.

2) Mit Hilfe der Formel von Christoffel–Darboux (siehe z.B. [1]) für die Tschebyscheff–Polynome 2.Art können wir in einem Spezialfall die Matrixelemente schneller berechnen. Die Formel lautet:

$$\sum_{\mu=0}^{M}U_\mu(x)U_\mu(y)=\frac{1}{2}\frac{U_{M+1}(x)U_M(y)-U_M(x)U_{M+1}(y)}{x-y},\quad x\neq y.$$

Ist nun in der Darstellung (3.1.7) $j=n, k\neq l$, so folgt wegen $U_\mu(\cos(\varphi_j-\varphi_n)) = U_\mu(1)=\mu+1$:

$$(B_M)_{(nk),(nl)}=4w(s_l)w(s_k)\frac{U_M(s_l)U_{M+1}(s_k)-U_{M+1}(s_l)U_M(s_k)}{s_k-s_l}\,.$$

Für $k=l$ hat man:

$$(B_M)_{(nl),(nl)}=4w(s_l)^2(U_M(s_l)U'_{M+1}(s_l)-U'_M(s_l)U_{M+1}(s_l))\,.$$

3) Eine Frage, die wir nun noch klären wollen, ist: Wie kann man das Abschneiden der Reihe bei $M>0$ interpretieren ?
Es gilt:

$$\mathrm{R}_\omega f=\sum_{\mu=0}^{\infty}\langle \mathrm{R}_\omega f, wU_\mu\rangle_{L^2([-1,1],w^{-1})}\,wU_\mu\,.$$

Durch Abschneiden der Reihe bei $M > 0$ erhält man:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{R}_\omega^M f)(s) &= \sum_{\mu=0}^{M} \langle \mathrm{R}_\omega f, wU_\mu \rangle_{L^2([-1,1],w^{-1})} wU_\mu \\
&= \int_{-1}^{1} (\mathrm{R}_\omega f)(\omega, t) \sum_{\mu=0}^{M} w(t)U_\mu(t)w(s)U_\mu(s)w^{-1}(t)\, dt \\
&= \langle \mathrm{R}_\omega f, \phi_M(s,\cdot) \rangle_{L^2([-1,1],w^{-1})} ,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\phi_M(s,t) &= \sum_{\mu=0}^{M} w(t)w(s)U_\mu(t)U_\mu(s) \\
&= \frac{1}{2} w(t)w(s) \frac{U_{M+1}(t)U_M(s) - U_M(t)U_{M+1}(s)}{t-s} .
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde wieder die Formel von Christoffel–Darboux verwendet. Wir erwarten somit, daß $\phi_M(s,t)$ eine Approximation an δ_{t-s} ist. Die folgenden Abbildungen 3.1.1 - 3.1.5 verdeutlichen, daß dies tatsächlich der Fall ist.

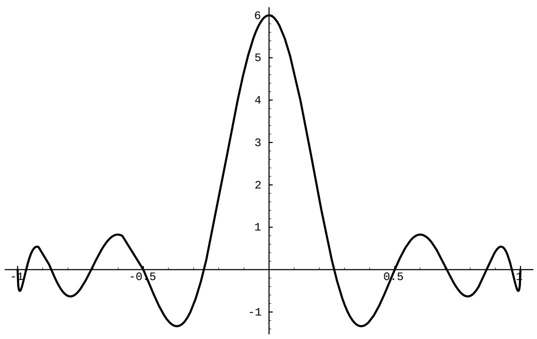


Abbildung 3.1.1 $\phi_M(0,t)$, $M = 10$

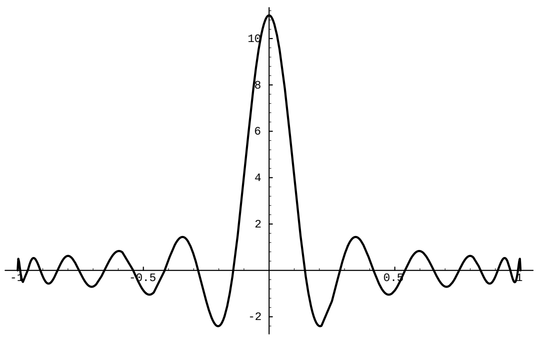
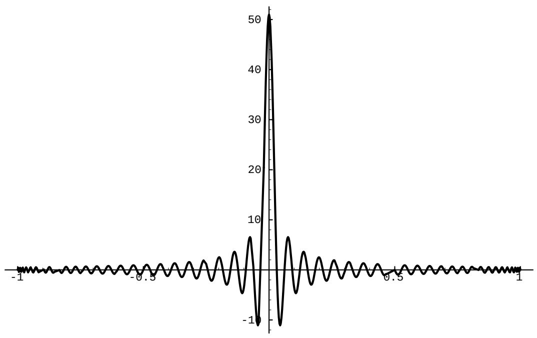


Abbildung 3.1.2 $\phi_M(0,t)$, $M = 20$



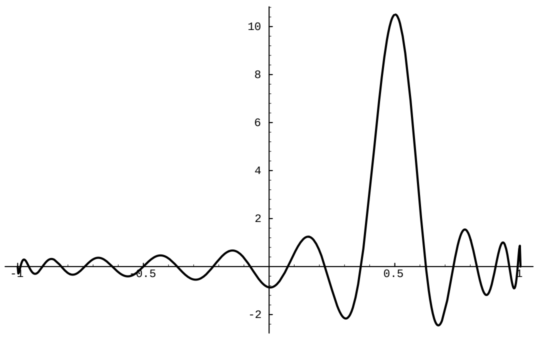


Abbildung 3.1.3 $\phi_M(0,t), \quad M = 100$

Abbildung 3.1.4 $\phi_M(0.5,t), \quad M = 20$

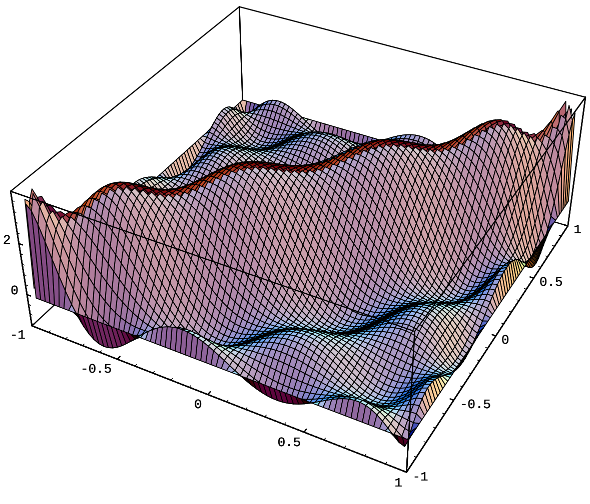


Abbildung 3.1.5 $\phi_M(s,t), \; M = 5$

3.2 Die Berechnung des Rekonstruktionskernes

In diesem Abschnitt wollen wir uns nun eingehend mit dem Lösen der Normalengleichung

$$\mathrm{R}_D \mathrm{R}_D^* v_\gamma(x) = \mathrm{R}_D e_\gamma(x, \cdot) \tag{3.2.8}$$

beschäftigen, also mit der Berechnung des Rekonstruktionskernes $v_\gamma(x)$ für $x \in \Omega^2$. In der Praxis wird man hierbei natürlich statt R_D^* den im vorangegangenen Abschnitt definierten Operator $\mathrm{R}_{D,M}^*$ verwenden. Unser Ziel wird es sein, einen Satz zu beweisen, der dem Satz 1.2.7 ähnlich ist, wobei hier die Operatoren T_1, T_2 Translationsoperatoren sein werden. Unser Hauptergebnis wird dabei sein, daß sich der Rekonstruktionskern an der Stelle x näherungsweise als Translation von Funktionen $\bar{u}_j$ darstellen läßt, die auf $[-1, 1]$ definiert sind, genauer, daß

$$[v_\gamma(x)]_{jl} \approx T^{x^T \omega_j} \bar{u}_j(s_l) \tag{3.2.9}$$

ist.
Man erreicht dabei eine hinreichende Genauigkeit, wenn man die Anzahl der Strahlen pro Richtung hinreichend groß macht.

Für diesen und den nächsten Abschnitt sei folgendes vorausgesetzt:

Für das Filter e_γ in (3.2.8) gelte:

$$e_\gamma(x, y) = T^x \tilde{e}_\gamma(y) = \tilde{e}_\gamma(y - x)\,,$$

wobei $\tilde{e}_\gamma$ rotationssymmetrisch sein soll, also $\tilde{e}_\gamma(x) = \tilde{e}_\gamma(|x|)$. Die Filter aus den Beispielen in Abschnitt 1.2 erfüllen alle diese Voraussetzung. Die Rotationssymmetrie wird vor allem in Abschnitt 3.3 zum Tragen kommen.
Ferner seien die Richtungen ω_j und die Abstände vom Ursprung s_l gegeben durch:

$$\omega_j = (\cos\varphi_j, \sin\varphi_j),\ \text{mit}\ \varphi_j = (j-1)\frac{2\pi}{J},\ j = 1, \ldots, J,$$
$$s_l = lh,\ \text{mit}\ h = \frac{1}{q},\ l = -q+1, \ldots, q-1.$$

Warum wir hier $l \notin \{q, -q\}$ fordern, wird gleich klar werden.

Zunächst stellt man sich die Frage, ob die Gleichung (3.2.8) überhaupt lösbar ist in ganz $\mathbb{R}^N$. Die Antwort ist natürlich "ja", denn sonst wäre dieses Kapitel und damit die gesamte Arbeit hier schon zu Ende. Die Invertierbarkeit der Matrix $\mathrm{R}_D \mathrm{R}_D^*$ resultiert aus dem folgenden Lemma:

Lemma 3.2.1 *Der Operator* $\mathrm{R}_D : L^2(\Omega^2) \longrightarrow \mathbb{R}^N$, *mit* ω_j, s_l *wie oben definiert, ist surjektiv.*

BEWEIS: Sei $\mathbb{R}^N \ni e_{jl} = \delta_{jL+l,0}$ der jl-te kanonische Einheitsvektor, und $L(\omega_j, s_l) = \{x \in \Omega^2 | x^T\omega_j = s_l\}$.
Definiere nun $f_{jl}(x)$ durch:

$$f_{jl}(x) = \frac{1}{2}w^{-1}(s_l)\chi_{jl}(x)\,,$$

wobei χ_{jl} die charakteristische Funktion von $L(\omega_j, s_l)$ sei. Eine Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{R}_D f_{jl})_{jl} &= \int_{L(\omega_j,s_l)} f_{jl}(x)\,dx \\
&= \int\limits_{-w(s_l)}^{w(s_l)} f_{jl}(s_l\omega_j + \lambda\omega_j^{\perp})\,d\lambda \\
&= \frac{1}{2}w^{-1}(s_l) \int\limits_{-w(s_l)}^{w(s_l)} 1\,d\lambda \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Außerdem ist $(\mathrm{R}_D f_{jl})_{mn} = 0$ für $(jl) \neq (mn)$, und somit:

$$\mathrm{R}_D f_{jl} = e_{jl}\,.$$

Aus der Linearität von R_D folgt nun die Behauptung.
□

Korollar 3.2.2 *Die Matrix* $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*$ *ist invertierbar. Mithin besitzt die Gleichung (3.2.8) nach Satz 1.1.3 eine eindeutige Lösung in* $\overline{R(\mathrm{R}_D)} = \mathbb{R}^N$.

BEWEIS: Sei $c \in \mathbb{R}^N$ mit $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* c = 0$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 0 = \langle \mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* c, c\rangle = \|\mathrm{R}_D^* c\|^2 \\
&\Leftrightarrow\quad \mathrm{R}_D^* c = 0 \\
&\Leftrightarrow\quad c \in N(\mathrm{R}_D^*) = R(\mathrm{R}_D)^{\perp} = \{0\}.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde Lemma 3.2.1 verwendet. Dies zeigt die Invertierbarkeit der Matrix $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*$, der Rest ist mit Lemma 3.2.1 und Satz 1.1.3 sowieso klar.

□

Hiermit wird auch deutlich, warum wir $l \neq q, -q$ gefordert haben. Es ist nämlich $(\mathrm{R}f)(\omega_j, s_q) = (\mathrm{R}f)(\omega_j, 1) = 0 = (\mathrm{R}f)(\omega_j, -1) = (\mathrm{R}f)(\omega_j, s_{-q})$. Somit wäre $R(\mathrm{R}_D)$ ein echter Teilraum von $\mathbb{R}^N$ und R_D damit nicht surjektiv.

Wir definieren zwei Translationsoperatoren:

$$\begin{aligned} T^x : L^2(\Omega^2) \to L^2(\Omega^2), \quad (T^x f)(y) = f(y-x), \quad x \in \Omega^2\,, \\ T_1^z : L^2(Z, w^{-1}) \to L^2(Z, w^{-1}), \quad (T_1^z g)(s) = g(s-z), \quad z \in [-1,1]\,. \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Lemma 3.2.3 *Für $f \in L^2(\Omega^2)$, $\omega \in S^1$ gilt:*

$$(\mathrm{R}_\omega T^x f)(s) = T_1^{x^T\omega}(\mathrm{R}_\omega f)(s)\,.$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} (\mathrm{R}_\omega T^x f)(s) &= \int_{\Omega^2} f(y-x)\delta(s - y^T\omega)\, dy \\ &= \int_{\Omega^2} f(z)\delta(s - (z+x)^T\omega)\, dz \\ &= \int_{\Omega^2} f(z)\delta(s - x^T\omega - z^T\omega)\, dz \\ &= T_1^{x^T\omega}(\mathrm{R}_\omega f)(s)\,. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Substitution $z = y - x$ verwendet.
□

Um unserem Ziel, dem Beweis der Formel (3.2.9) näherzukommen, müssen wir irgendwie die darin enthaltenen Funktionen $\bar{u}_j$ definieren. Hierzu führen wir noch eine semi–diskrete Version der Radon–Transformation ein, den Operator R_{SD}:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{SD} : L^2(\Omega^2) &\to [L^2([-1,1], w^{-1})]^J =: L^{2,J} \\ f &\mapsto (\mathrm{R}_{\omega_i} f)_{i=1}^J\,. \end{aligned}$$

$L^{2,J}$ wird zu einem Hilbertraum, vermöge dem Skalarprodukt:

$$\langle g, h\rangle_{L^{2,J}} = \sum_{j=1}^J \langle g_j, h_j\rangle_{L^2([-1,1],w^{-1})}$$

und der daraus resultierenden Norm:

$$\|g\|_{L^{2,J}}^2 = \langle g, g\rangle_{L^{2,J}} = \sum_{j=1}^{J} \|g_j\|_{L^2([-1,1],w^{-1})}^2 ,$$

für $g, h \in L^{2,J}$.

Wir untersuchen nun im folgenden die Lösung $v^x \in L^{2,J}$ der semi–diskreten Normalengleichung

$$(G^x) \qquad\qquad \mathrm{R}_{SD}\mathrm{R}_{SD}^* v^x = \mathrm{R}_{SD} e_\gamma(x,\cdot)\,.$$

Wir lassen dabei der Übersicht halber den Index γ bei v^x weg.
Zunächst müssen wir jedoch noch den adjungierten Operator R_{SD}^* berechnen. Daß dieser existiert und stetig ist, folgt aus der Stetigkeit der Operatoren R_{ω_i}, siehe Satz 2.1.2.
Bei Skalarprodukten ohne Index handelt es sich immer um das euklidische.

Lemma 3.2.4 $\mathrm{R}_{SD}^* : L^{2,J} \to L^2(\Omega^2)$ *ist gegeben durch:*

$$(\mathrm{R}_{SD}^* g)(x) = \sum_{j=1}^{J} g_j(\langle x, \omega_j\rangle) w^{-1}(\langle x, \omega_j\rangle)\,,$$

$x \in \Omega^2$, $g \in L^{2,J}$.

BEWEIS: Sei $g = (g_j)_{j=1}^J \in L^{2,J}$, $f \in L^2(\Omega^2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{R}_{SD} f, g\rangle_{L^{2,J}} &= \sum_{j=1}^{J} \langle \mathrm{R}_{\omega_j} f, g_j\rangle_{L^2([-1,1],w^{-1})} \\
&= \sum_{j=1}^{J} \langle f, \mathrm{R}_{\omega_j}^* g_j\rangle_{L^2(\Omega^2)} \\
&= \langle f, \sum_{j=1}^{J} \mathrm{R}_{\omega_j}^* g_j\rangle_{L^2(\Omega^2)}\,.
\end{aligned}$$

Mit Satz 2.1.2 ergibt sich die Behauptung.
□

Nach Satz 1.1.3 besitzt die Gleichung (G^x) eine eindeutige Lösung in $\overline{R(\mathrm{R}_{SD})}$. Wichtig für uns ist die Existenz einer Lösung. Das nächste Lemma zeigt, daß es Lösungen von (G^x) von besonderer Form gibt:

Lemma 3.2.5 *Es sei $v^0 \in L^{2,J}$ eine Lösung von (G^0). Dann ist*

$$[T_1^{x^T\omega_j}(v_j^0 w^{-1})w]_{j=1}^J$$

eine Lösung von (G^x).

BEWEIS: Für $1 \leq i \leq J$ ist:

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{R}_{SD}\mathrm{R}_{SD}^*[T_1^{x^T\omega_j}(v_j^0 w^{-1})w]_{j=1}^J)_i \\
= \; & \mathrm{R}_{\omega_i}[\sum_{j=1}^J v_j^0(\langle\cdot,\omega_j\rangle - \langle x,\omega_j\rangle)w^{-1}(\langle\cdot,\omega_j\rangle - \langle x,\omega_j\rangle)] \\
= \; & \mathrm{R}_{\omega_i}[\sum_{j=1}^J T^x(v_j^0(\langle\cdot,\omega_j\rangle)w^{-1}(\langle\cdot,\omega_j\rangle))] \\
= \; & \mathrm{R}_{\omega_i}T^x(\sum_{j=1}^J v_j^0(\langle\cdot,\omega_j\rangle)w^{-1}(\langle\cdot,\omega_j\rangle)) \\
= \; & T_1^{x^T\omega_i}\mathrm{R}_{\omega_i}[\sum_{j=1}^J v_j^0(\langle\cdot,\omega_j\rangle)w^{-1}(\langle\cdot,\omega_j\rangle)] \\
= \; & T_1^{x^T\omega_i}(\mathrm{R}_{SD}\mathrm{R}_{SD}^* v^0)_i \\
= \; & T_1^{x^T\omega_i}(\mathrm{R}_{SD}\tilde{e}_\gamma(\cdot))_i \\
= \; & T_1^{x^T\omega_i}(\mathrm{R}_{\omega_i}\tilde{e}_\gamma(\cdot)) \\
= \; & \mathrm{R}_{SD}[T^x\tilde{e}_\gamma(\cdot)]_i \\
= \; & (\mathrm{R}_{SD}e_\gamma(x,\cdot))_i\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurden die Lemmata 3.2.3 und 3.2.4 verwendet.
□

Wir sehen also, daß es Lösungen der semi–diskreten Gleichung gibt, die eine ähnliche Struktur haben, wie wir sie im diskreten Fall gerne hätten. Um zu diesem Ziel zu gelangen, benötigen wir jedoch noch einige Hilfssätze, die im folgenden angeführt sind.

Lemma 3.2.6 *Sei $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $h = (b-a)/n$, $t_i = a + ih$, $i = 0,\ldots,n$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$T(h) := h\,[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + \frac{1}{2}f(b)]$$

sei die Trapezsumme zur Schrittweite h. Dann ist:

$$T(h) - \int_a^b f(t)\,dt = \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\tau)\,,$$

für ein $\tau \in [a,b]$.

BEWEIS: siehe [4].
□

Lemma 3.2.7 *Für $q \in \mathbb{N}$ sei $s_l = lh$, $l = -q,\ldots,q$, $h = 1/q$. Weiter sei $g \in L^2([-1,1])$. Dann gilt:*

$$h \sum_{l=-q}^{q} g(s_l) U_\mu(s_l) w(s_l) \to \langle wg, wU_\mu \rangle_{L^2([-1,1],w^{-1})} \quad \text{für} \quad q \to \infty\,.$$

BEWEIS: Die Behauptung folgt aus Lemma 3.2.6 unter Beachtung, daß $w(s_q) = w(1) = 0 = w(-1) = w(s_{-q})$.
□

Bezeichnung: $C_\mu^{n/2} \in L^2([-1,1], w^{n-1})$ seien die Gegenbauer–Polynome vom Grad μ mit Exponent $n/2$, normiert durch $C_\mu^{n/2}(1) = 1$.
Für $n = 2$ erhalten wir gerade die Tschebyscheff–Polynome 2.Art, genauer gilt:

$$C_\mu^1 = \frac{1}{\mu+1} U_\mu\,.$$

Lemma 3.2.8 *Es seien $u_\mu = w^{n-1} C_\mu^{n/2}$, $\omega_1, \omega_2 \in S^{n-1}$. Dann gilt:*

$$\mathrm{R}_{\omega_1} \mathrm{R}_{\omega_2}^* u_\mu = \alpha_\mu(\omega_1^T \omega_2) u_\mu\,,$$

mit $\alpha_\mu(t) = c(n) C_\mu^{n/2}(t)$, $t \in [-1,1]$ und $c(n) = |\Omega^{n-2}| \int_{-1}^1 (1-u^2)^{(n-2)/2}\,du = \pi^{(n-1)/2}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$, wobei $|\Omega^n|$ das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ darstellt und Γ die Eulersche Gamma–Funktion.

BEWEIS: Der Beweis, der auf Louis zurückgeht findet man z.B. in Natterer [12].
□

Korollar 3.2.9 *Sei $n = 2$. Dann ist:*

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{\omega_1}\mathrm{R}^*_{\omega_2}u_\mu &= 2\,C^1_\mu(\cos(\varphi_1-\varphi_2))u_\mu \\ &= \frac{2}{\mu+1}U_\mu(\cos(\varphi_1-\varphi_2))u_\mu\,, \end{aligned}$$

wobei $u_\mu = wU_\mu$, $\omega_1, \omega_2 \in S^1$, $\omega_i = (\cos\,\varphi_i, \sin\,\varphi_i)^T$, $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2$ ist.

BEWEIS:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{\omega_1}\mathrm{R}^*_{\omega_2}u_\mu &= \mathrm{R}_{\omega_1}\mathrm{R}^*_{\omega_2}(wU_\mu) \\ &= (\mu+1)\mathrm{R}_{\omega_1}\mathrm{R}^*_{\omega_2}(wC^1_\mu) \\ &= (\mu+1)\alpha_\mu(\omega_1^T\omega_2)wC^1_\mu \\ &= \alpha_\mu(\omega_1^T\omega_2)u_\mu \\ &= 2\,C^1_\mu(\cos(\varphi_1-\varphi_2))u_\mu\,. \end{aligned}$$

Es war dabei zu beachten, daß $c(2) = 2$ ist in Lemma 3.2.8, das in diesem Beweis verwendet wurde.
□

Jetzt endlich können wir den schon angekündigten Satz formulieren und beweisen, der uns veranlassen wird das Gleichungssystem (3.2.8) nur noch im Punkt $x = 0$ zu lösen.

Satz 3.2.10 *Es sei $v^0 \in L^{2,J}$ eine Lösung der semi–diskreten Normalgleichung (G^0), und $\bar{v}^x \in L^{2,J}$ für $x \in \Omega^2$ definiert durch:*

$$\bar{v}^x_j = T_1^{x^T\omega_j}(v^0_j w^{-1})\,,$$

für $j = 1, \ldots, J$.
Definiere nun weiter für $j = 1, \ldots, J;\ l = -q+1, \ldots, q-1$:

$$\tilde{u}^x_{jl} := \bar{u}^x_j(s_l) := \frac{1}{4q}\,\bar{v}^x_j(s_l)\,.$$

Sei $u^x \in I\!R^N$ die nach Korollar 3.2.2 eindeutige Lösung des Gleichungssystems (3.2.8). Dann gilt:

1) Unter der Voraussetzung, daß $\bar{v}^x \in [\mathcal{C}^2([-1,1])]^N$ ist, gilt:

$$\|u^x - \tilde{u}^x\|_2 \le \frac{\delta}{\lambda_{max}+\delta}\,(\|\tilde{u}^x\|_2 + \|u^x\|_2) + K\delta^{-1}h^2\,. \qquad (3.2.10)$$

Hierbei ist $K > 0$ eine Konstante, $h = 1/q$, λ_{max} der größte Eigenwert der Matrix $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*$ und $0 < \delta \ll 1$ ein frei wählbarer Parameter.

2)

$$\boxed{\tilde{u}^x_{jl} = \bar{u}^x_j(s_l) = T_1^{x^T\omega_j}\bar{u}^0_j(s_l)\,,}$$

für $1 \le j \le J;\ -q+1 \le l \le q-1.$

BEWEIS: zu 1): Es sei wieder $u_\mu = wU_\mu,\ U_\mu(1) = \mu + 1.$
Nun ist ja $\bar{v}^x w = (\bar{v}^x_j)_{j=1}^J \in L^{2,J}$ und besitzt damit eine Fourier–Reihen–Entwicklung:

$$\bar{v}^x_j w = \sum_{\mu=0}^{\infty} \langle \bar{v}^x_j w, u_\mu \rangle_{L^2([-1,1],w^{-1})} u_\mu\,.$$

Außerdem löst $\bar{v}^x w$ nach Lemma 3.2.1 die semi–diskrete Normalengleichung. Diese beiden Tatsachen nutzen wir jetzt aus, wobei die auftretenden Skalarprodukte immer die im $L^2([-1,1],w^{-1})$ sind:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{R}_D e_\gamma(x,\cdot)]_{jl} &= (\mathrm{R}_{\omega_j} e_\gamma(x,\cdot))(s_l) \\
&= [\mathrm{R}_{SD}\mathrm{R}_{SD}^*(\bar{v}^x w)]_j(s_l) \\
&= \mathrm{R}_{\omega_j}[\sum_{m=1}^{J} \mathrm{R}^*_{\omega_m}(\bar{v}^x_m w)](s_l) \\
&= \sum_{m=1}^{J} \mathrm{R}_{\omega_j}\mathrm{R}^*_{\omega_m}[\sum_{\mu=0}^{\infty}\langle \bar{v}^x_m w, u_\mu\rangle u_\mu](s_l) \\
&= \sum_{m=1}^{J}\sum_{\mu=0}^{\infty}\langle \bar{v}^x_m w, wU_\mu\rangle\, \mathrm{R}_{\omega_j}[\mathrm{R}^*_{\omega_m} u_\mu](s_l) \\
&= \sum_{m=1}^{J}\sum_{\mu=0}^{\infty}\langle \bar{v}^x_m w, wU_\mu\rangle\, 2\,C^1_\mu(\cos(\varphi_j - \varphi_m)) w(s_l) U_\mu(s_l)\,.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde Korollar 3.2.9 angewendet.
Andererseits gilt mit Formel (3.1.7) (mit $M = \infty$):

$$\begin{aligned}
[\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*\tilde{u}^x]_{jl} &= \sum_{m=1}^{J}\sum_{k=-q}^{q}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{8}{\mu+1} w(s_k)w(s_l)U_\mu(s_k)U_\mu(s_l)U_\mu(\cos(\varphi_j-\varphi_m))\bar{u}_m(s_k) \\
&= \sum_{m=1}^{J}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{q}\sum_{k=-q}^{q}\bar{v}^x_m(s_k)w(s_k)U_\mu(s_k)\,2\,C^1_\mu(\cos(\varphi_j-\varphi_m))w(s_l)U_\mu(s_l)\,.
\end{aligned}$$

Beachte hierbei, daß $w(s_{-q}) = w(s_q) = 0$. Mit den Lemmata 3.2.7 und 3.2.6 folgt nun:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*(u^x - \tilde{u}^x)\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=-q}^{q}[\sum_{m=1}^{J}\sum_{\mu=0}^{\infty}(\langle \bar{v}_m^x w, u_\mu\rangle - \frac{1}{q}\sum_{k=-q}^{q}\bar{v}_m^x(s_k)w(s_k)U_\mu(s_k)) \times \\ &\quad \times 2\,C_\mu^1(\cos(\varphi_j - \varphi_m))U_\mu(s_l)w(s_l)]^2 \\ &= \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=-q}^{q}[\sum_{m=1}^{J}\sum_{\mu=0}^{\infty} ch^2\, 2\,C_\mu^1(\cos(\varphi_j - \varphi_m))U_\mu(s_l)]^2 \\ &= 4c^2h^4\|F\|_2^2\,,\end{aligned}$$

mit $F \in I\!R^N$,

$$F_{jl} = \sum_{m=1}^{J}\sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^1(\cos(\varphi_j - \varphi_m))U_\mu(s_l)w(s_l)\,.$$

Wir definieren für ein $0 < \delta \ll 1$ den Vektor u_δ^x in folgender Weise:

$$u_\delta^x := (\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* + \delta I)^{-1}\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* u^x\,.$$

In analoger Weise sei $\tilde{u}_\delta^x$ definiert. Hiermit gilt nun:

$$\begin{aligned}\|u_\delta^x - \tilde{u}_\delta^x\|_2 &= \|(\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* + \delta I)^{-1}\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*(u^x - \tilde{u}^x)\|_2 \\ &\leq K\|(\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* + \delta I)^{-1}\|_2\, h^2 \\ &\leq K\delta^{-1}h^2, \text{ wobei } K = 2c\|F\|_2\,.\end{aligned}$$

Wir schätzen nun $\|u_\delta^x - u^x\|_2$ ab.

$$\begin{aligned}\|u_\delta^x - u^x\|_2 &= \|[(\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* + \delta I)^{-1}\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* - I]u^x\|_2 \\ &\leq \|(\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* + \delta I)^{-1}\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* - I\|_2\|u^x\|_2 \\ &= \sup_\nu |(\lambda_\nu + \delta)^{-1}\lambda_\nu - 1|\|u^x\|_2 \\ &= |(\lambda_{max} + \delta)^{-1}\lambda_{max} - 1|\|u^x\|_2 \\ &= \frac{\delta}{\lambda_{max} + \delta}\|u^x\|_2\,.\end{aligned}$$

Hierbei sind λ_ν die Eigenwerte der Matrix $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*$.

Ebenso folgt: $\|\tilde{u}_\delta^x - \tilde{u}^x\|_2 \leq \dfrac{\delta}{\lambda_{max} + \delta}\|\tilde{u}^x\|_2\,.$

Fassen wir die Normabschätzungen zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}^x - u^x\|_2 &\le \|\tilde{u}^x - \tilde{u}^x_\delta\|_2 + \|\tilde{u}^x_\delta - u^x_\delta\|_2 + \|u^x_\delta - u^x\|_2 \\ &\le \frac{\delta}{\lambda_{max}+\delta}\|\tilde{u}^x\|_2 + K\delta^{-1}h^2 + \frac{\delta}{\lambda_{max}+\delta}\|u^x\|_2 \\ &= \frac{\delta}{\lambda_{max}+\delta}(\|\tilde{u}^x\|_2 + \|u^x\|_2) + K\delta^{-1}h^2 .\end{aligned}$$

Hiermit folgt Teil 1).

zu 2): Ganz offensichtlich ist:

$$\begin{aligned}\bar{u}^x_j(s_l) &= \frac{1}{4q}\bar{v}^x_j(s_l) \\ &= \frac{1}{4q}T_1^{x^T\omega_j}(v^0_j w^{-1})(s_l) \\ &= T_1^{x^T\omega_j}(\frac{1}{4q}v^0_j w^{-1})(s_l) \\ &= T_1^{x^T\omega_j}\bar{u}^0_j(s_l) .\end{aligned}$$

Hiermit ist der ganze Satz bewiesen.
□

Bemerkungen: 1) In der Ungleichung (3.2.10) tauchen auf der rechten Seite die Normen $\|u^x\|_2$ und $\|\tilde{u}^x\|_2$ auf, und man muß sich überzeugen, daß diese nicht zu groß werden für große q. Hierzu betrachten wir die Normen etwas genauer. Es ist

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}^x\|_2 &= \frac{1}{4q}\sqrt{\sum_{j,l}\bar{v}^x_j(s_l)^2} \\ &\le \frac{1}{4q}\sqrt{(2q-1)\sum_j \|\bar{v}^x_j\|^2_{sup}} \\ &= \frac{\sqrt{2q-1}}{4q}\sqrt{\sum_j \|\bar{v}^x_j\|^2_{sup}} \\ &= \mathcal{O}(q^{-1/2}) .\end{aligned}$$

Die sup–Norm ist endlich, da $\bar{v}^x_j \in \mathcal{C}^2([-1,1])$ ist für $j = 1, \ldots, J$. Diese Voraussetzung ist bei einem hinreichend glatten Filter e_γ keine Einschränkung, sondern automatisch erfüllt.

Die Norm $\|u^x\|_2$ können wir leider nicht so leicht abschätzen, aber in diesem Vektor steckt ja noch der Regularisierungsparameter γ, und es gilt, da u^x ein Filter ist:

$$\|u^x_\gamma\|_2 \longrightarrow 0, \quad \text{für} \quad \gamma \to \infty\,.$$

Eine Abschätzung wie im Falle $\tilde{u}^x$ wäre natürlich aufschlußreicher.

2) Setzen wir $\delta = 1/q$, so hat die Ungleichung (3.2.10) folgende Gestalt:

$$\|\tilde{u}^x - u^x\|_2 \leq \frac{1}{q\lambda_{max}+1}\left(\|\tilde{u}^x\|_2 + \|u^x\|_2\right) + \frac{K}{q}\,.$$

Nach obigen Überlegungen ist damit:

$$\|\tilde{u}^x - u^x\|_2 = \mathcal{O}(q^{-1})\,.$$

3) Es gilt also insgesamt:

$$u^x_{jl} \approx \bar{u}^x_j(s_l) = T_1^{x^T\omega_j}\bar{u}^0_j(s_l) \approx T_1^{x^T\omega_j}u^0(s_l)\,.$$

Man wird bei der Lösung des Gleichungssystems (3.2.8) wie folgt vorgehen:

a) Löse das Gleichungssystem für $x = 0$.
b) Berechne $T_1^{x^T\omega_j}u^0_j(s_l)$ für beliebiges $x \in \Omega^2$ durch (z.B. lineare) Interpolation der diskreten Werte u^0_{jl} und verwende dies als Näherung für u^x_{jl}.

Wir werden nunmehr also nur noch ein Gleichungssystem lösen, und zwar dasjenige für $x = 0$. Jedoch hat dieses System immer noch die Dimension $N = JL$, was der Anzahl der Daten entspricht, und somit ist eine Lösung immer noch sehr aufwendig. Von dieser Schwierigkeit wird uns der nächste Abschnitt befreien.

3.3 Reduktion des Gleichungssystems

Bis jetzt haben wir noch zwei Dinge nicht ausgenutzt, nämlich die spezielle Struktur der Matrix $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*$ und die Rotationssymmetrie unseres Filters $\tilde{e}_\gamma$. Wir betrachten dabei nur noch das Gleichungssystem (3.2.8) für $x = 0$, also das System

$$\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* v_\gamma(0) = \mathrm{R}_D e_\gamma(0,\cdot)\,, \tag{3.3.11}$$

denn auf Grund unserer Überlegungen im vorigen Abschnitt genügt es, dieses zu lösen. Ein besonderer Sachverhalt wirkt sich dabei sehr günstig aus: die spezielle Form der rechten Seite dieses Gleichungssystems. Diese ist nämlich gegeben durch:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{R}_D e_\gamma(0,\cdot)]_{jl} &= [\mathrm{R}_{\omega_j}\tilde{e}_\gamma](s_l) \\
&= \int\limits_{-w(s_l)}^{w(s_l)} \tilde{e}_\gamma(|s_l\omega_j + \lambda\omega_j^\perp|)\,d\lambda \\
&= \int\limits_{-w(s_l)}^{w(s_l)} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{s_l^2+\lambda^2})\,d\lambda\,.
\end{aligned}$$

Auf Grund der Rotationssymmetrie von $\tilde{e}_\gamma$ hängt also die Radon–Transformierte nicht von der speziellen Richtung ω_j ab, die rechte Seite des Gleichungssystems hat also die Form:

$$(\underbrace{w, w, \ldots, w}_{J\ mal})^T,\ w \in I\!R^L \text{ mit } w_l = [\mathrm{R}\tilde{e}_\gamma](s_l)\,.$$

Nun ist die Matrix $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*$ Block-zyklisch, so daß das Gleichungssystem (3.3.11) die folgende Gestalt hat:

$$Au = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_J \\ A_J & A_1 & \cdots & A_{J-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_2 & A_3 & \cdots & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix}, \tag{3.3.12}$$

wobei $A = \mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^* \in I\!R^{JL\times JL}$.

Wir können nun zeigen, daß die Lösung eines solchen Gleichungssystems dieselbe Form wie die rechte Seite hat.

Satz 3.3.1 *Es sei* $A \in I\!R^{JL\times JL}$ *eine Block–zyklische Matrix wie in* (3.3.12) *gegeben mit Blöcken* $A_j \in I\!R^L$. *Es sei nun*

$$C = \sum_{j=1}^{J} A_j \in I\!R^{L\times L}$$

die Matrix die entsteht, wenn man die Blockmatrizen aufaddiert. Dann gilt:

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(C) \neq 0\,.$$

Mithin besitzt das Gleichungssystem (3.3.12) *eine eindeutige Lösung* $u \in I\!R^{JL}$ *der Form:*

$$u = (v, v, \ldots, v)^T,\ \textit{mit}\ Cv = w\,.$$

BEWEIS: Annahme: $\det(C) = 0$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ \text{es gibt ein } 0 \neq z \in I\!R^L \text{ mit } Cz = 0 \\ &\Rightarrow \ AU = 0 \text{ mit } 0 \neq U = (z, z \ldots, z)^T \in I\!R^{JL} \\ &\Rightarrow \ \det(A) = 0\,, \end{aligned}$$

Ist nun $\det(A) \neq 0$, so ist A injektiv.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ C \text{ ist injektiv} \\ &\Rightarrow \ Cv = w \text{ hat eine eindeutige Lösung} \\ &\Rightarrow \ V = (v, v, \ldots, v)^T \text{ löst } AV = (w, w \ldots, w)^T \\ &\qquad \text{und dies ist die einzige Lösung wegen der Injektivität von A}\,. \end{aligned}$$

□

Wie wir bewiesen haben ist $\det(\mathrm{R}_D\mathrm{R}_D^*) \neq 0$ und somit garantiert uns der obige Satz, daß unser Gleichungssystem (3.3.11) eine eindeutige Lösung der Form:

$$v_\gamma(0) = (v, v, \ldots, v)^T \in I\!R^{JL}$$

hat, wobei v das Gleichungssystem

$$Cv = \left(\sum_{j=1}^{J} A_j\right) v = w$$

löst. Die Lösung dieses letzten Gleichungssystemes geht schnell vonstatten, da C aufgrund der Symmetrie der Blockmatrizen A_j selbst symmetrisch ist. Außerdem ist die Dimension dieses Gleichungssystems nur noch L, also gleich der Anzahl der Strahlen pro Richtung s_l.

Fazit: Bei der Berechnung des Filters $v_\gamma(x)$, der das Gleichungssystem

$$\mathrm{R}_D \mathrm{R}_D^* v_\gamma(x) = \mathrm{R}_D e_\gamma(x, \cdot)$$

löst, geht man nun wie folgt vor:

1. Löse das Gleichungssystem $Cv = w$, wobei $C = \sum_{j=1}^{J} A_j$ ist und $w_l = (\mathrm{R}\tilde{e}_\gamma)(s_l)$. Es ist dann $v_\gamma(0) = (v, v \ldots, v)^T$.

2. Berechne $T_1^{x^T \omega_j}(\bar{u}^0_{\gamma,j}(s_l))$ durch lineare Interpolation aus den Werten $[v_\gamma(0)]_{jl}$ und benutze dies als Näherung für $v_\gamma(x)$.

Das folgende Korollar zeigt, wie sehr die Rechenzeit und der Speicherplatzbedarf verringert wird, wenn man den Filter auf diese Weise berechnet.

Korollar 3.3.2 *Es sei K die Anzahl der Rekonstruktionspunkte. Berechnet man die Rekonstruktionskerne $v_\gamma(x)$ auf die obige Art und Weise und löst man das Gleichungssystem für $x = 0$ mit der Gauss–Elimination, so benötigt man*

$$\mathcal{O}(L^3)$$

Multiplikationen und hat einen Speicherplatzbedarf von

$$\mathcal{O}(\frac{1}{2}L(L+1)).$$

Demgegenüber stehen $\mathcal{O}(KJ^3L^3)$ Multiplikationen und ein Speicheraufand von $\mathcal{O}(\frac{1}{2}JL(L+1))$, wenn man das Gleichungssystem (3.2.8) *für jeden Punkt x löst.*

BEWEIS: Der Aufwand der Gauss–Elimination ist in [4] nachzulesen, für den Speicherplatzbedarf beachte man, daß die einzelnen Blöcke der Matrix $\mathrm{R}_D \mathrm{R}_{D,M}^*$ und damit auch die Blocksummenmatrix C symmetrisch sind. Der Rest ergibt sich dann in offensichtlicher Weise.
□

Kapitel 4

Anwendung der approximativen Inversen bei der Vektor–tomographie

Im vorangegangenen Kapitel haben wir gesehen, wie wir mit Hilfe der approximativen Inversionsformel eine Funktion f rekonstruieren können, wenn uns als Daten eine endliche Menge von Linienintegralen dieser Funktion zur Verfügung stehen. Generell ist dieses Konzept ganz allgemein auf Funktionen $f \in L^2(\Omega^2)$ anwendbar. Aus dem zweiten Kapitel ist uns bekannt, daß wir die Rotation eines Vektorfeldes ebenfalls aus den Linienintegralen rekonstruieren können, genauer, daß

$$\mathrm{R}g = \frac{\partial}{\partial s}\mathrm{D}f$$

ist, wobei g folgende Form hat:

$$g(x,y) = \langle e_z, \nabla \times f(x,y,0)\rangle_2 \,.$$

In unseren Rechnungen werden wir also das Konzept aus dem vorangegangenen Kapitel speziell auf die Vektortomographie anwenden, also auf die Rekonstruktion von Funktionen g der obigen Form aus ihren Linienintegralen. Das Vektorfeld f wird hierbei das Geschwindigkeitsfeld einer sich bewegenden Flüssigkeit in einem Zylinder sein. Als Beispiel hierfür wäre der Fluß von Blut durch ein zylinderförmiges Blutgefäß anzuführen. Es werden die beiden Fälle unterschieden, ob die Flüssigkeit beschleunigt wird oder nicht. Im ersten Abschnitt wird hierzu die theoretische Grundlage kurz behandelt, wobei die Navier–Stokes–Gleichung eine Rolle spielt. Im zweiten Abschnitt werden dann endlich einige rechnerische Ergebnisse hierzu angeführt.

4.1 Bewegung einer Flüssigkeit in einem Körper

Der Fluß einer linearen, viskosen Flüssigkeit in einem Körper Ω wird beschrieben durch die Navier–Stokes–Gleichung. Da es nicht Sinn dieser Arbeit sein kann, eine detaillierte physikalische Beschreibung abzuliefern, werden die Gleichungen nur hingeschrieben. Wir halten uns weitestgehend an die Arbeit von Juhlin [6]. Für eine eingehendere Theorie sei auf das Buch von Chorin und Marsden [3] verwiesen.

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu \Delta u \quad \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Hierbei ist u das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit, p der Druck, ϱ die Dichte der Flüssigkeit, λ und μ die Viskositätskoeffizienten.
Dieses Randwertproblem ist nur sehr schwer in dieser vollen Allgemeinheit zu lösen. Wir vereinfachen die Gleichung daher, indem wir gewisse Annahmen an die Flüssigkeit und ihre Bewegung machen. Die Flüssigkeit soll nämlich inkompressibel sein, d.h. $\nabla \cdot u = 0$, die Bewegung zeitunabhängig sein, d.h. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und der Druck p soll in jeder Variable linear sein, so daß $\nabla p = c \in \mathbb{R}^3$ ist. Handelt es sich bei der Flüssigkeit um Blut, daß durch eine Ader fließt, so ist dies eine gute Approximation. Das daraus resultierende Randwertproblem sieht nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{\mu} \nabla p \text{ in } \Omega\,, \\ \nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega\,, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Bei uns soll Ω nun ein Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt sein, dessen Mittelachse die x–Achse bildet. Der Radius des Querschnittes sei R, siehe Abbildung 4.1.1.

Eine Lösung des vereinfachten Randwertproblems für $\mu = 1$ und $\nabla p = -2\, e_x$ ist ganz offensichtlich:

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{2}(y^2 + z^2 - R^2)e_x\,.$$

Wird nun die Flüssigkeit beschleunigt, so verhält sich das Geschwindigkeitsfeld u annäherungsweise wie:

$$u(x,y,z) = C\,(1 - (\sqrt{y^2 + z^2}/R)^\alpha)e_x\,.$$

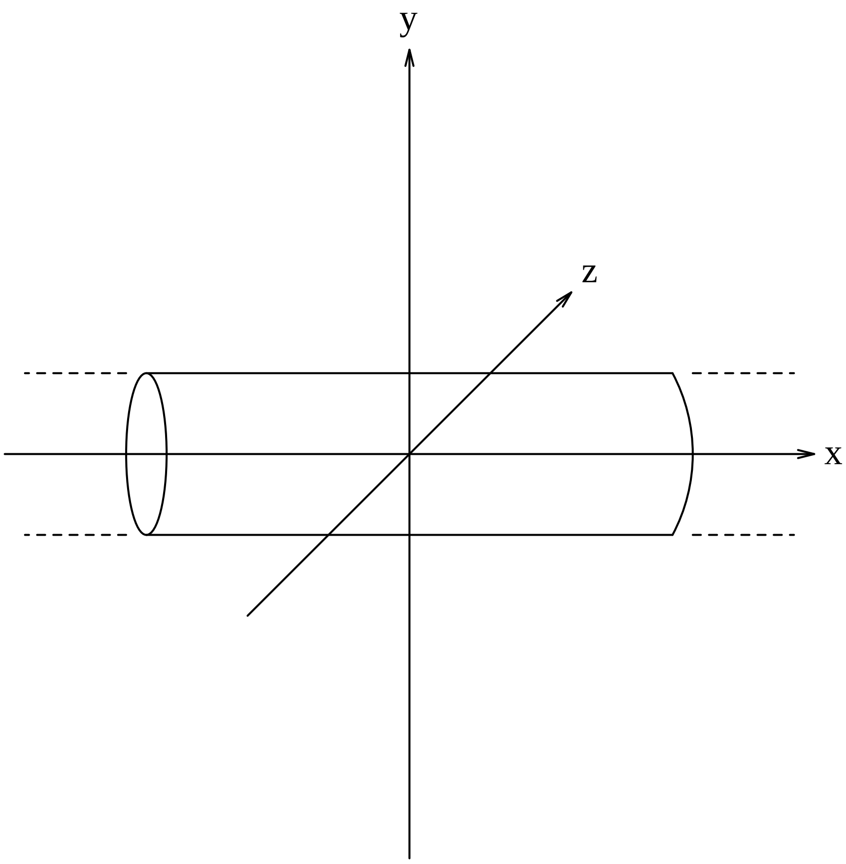


Abbildung 4.1.1 Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt, der auf der x–Achse liegt

Hierbei ist C eine Konstante und $\alpha \geq 2$, wobei α mit der Beschleunigung anwächst. Bei uns sei nun $R = 1$ und $C = -\frac{1}{2}$. Die beiden Geschwindigkeitsfelder, die wir betrachten wollen, sehen also wie folgt aus:

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z) &= -\frac{1}{2}(y^2+z^2-1)e_x\,, \\ u_2(x,y,z) &= -\frac{1}{2}(1-(\sqrt{y^2+z^2})^\alpha)e_x\,. \end{aligned}$$

Als Rotationen ergeben sich hiermit:

$$rot\, u_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix},$$

$$rot\, u_2(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha(\sqrt{y^2+z^2})^{\alpha-2}\, z \\ \frac{1}{2}\alpha(\sqrt{y^2+z^2})^{\alpha-2}\, y \end{pmatrix} .$$

Wir wählen nun $\alpha = 4$. Die beiden Funktionen, die wir rekonstruieren wollen, sind demnach:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= \langle e_z, \nabla \times u_1(x,y,0)\rangle_2 = \; y\,, \\ g_2(x,y) &= \langle e_z, \nabla \times u_2(x,y,0)\rangle_2 = \; 2\,y^3\,. \end{aligned}$$

4.2 Numerische Beispiele

Unser Problem hat die in Kapitel 3 behandelte Form:

$$\text{Gesucht ist } f \in L^2(\Omega^2) \text{ mit } \mathrm{R}_D f = G \in I\!R^N .$$

Die Rolle von f spielen nun die Funktionen g_1 und g_2 aus dem vorangegangenen Abschnitt. Die Daten G müssen wir uns selbst berechnen. Hierzu schlagen wir zwei Wege ein:

1) Nach Satz 2.2.1 ist

$$G_{jl} = \frac{\partial}{\partial s}(\mathrm{D}u)(\omega_j, s_l) .$$

D.h. wir müssen zuerst das Integral $(\mathrm{D}u)(\omega_j, s_l)$ berechnen und dann durch numerische Differentiation die Ableitung nach s.
Für u_1 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}u_1)(\omega_j, s_l) &= \int_{\substack{x^T\omega_j = s_l \\ z=0}} \langle e_z, \omega_j \times u_1(x)\rangle_2 \, dx \\
&= \int_{x^T\omega_j = s_l} \frac{1}{2}(x_2^2 - 1) \sin\,\varphi_j \, dx \\
&= \int\limits_{-w(s_l)}^{w(s_l)} \frac{1}{2}((s_l \sin\,\varphi_j + \lambda \cos\,\varphi_j)^2 - 1) \sin\,\varphi_j \, d\lambda .
\end{aligned}$$

Dabei war zu beachten, daß

$$\omega_j \times u_1(x) = \begin{pmatrix} \cos\,\varphi_j \\ \sin\,\varphi_j \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2 - 1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2 - 1) \sin\,\varphi_j \end{pmatrix} .$$

ist. Hierbei sei $x = (x_1, x_2, x_3)^T$.
Analog ergibt sich für u_2:

$$(\mathrm{D}u_2)(\omega_j, s_l) = -\int\limits_{-w(s_l)}^{w(s_l)} \frac{1}{2}((s_l \sin\,\varphi_j + \lambda \cos\,\varphi_j)^2 - 1) \sin\,\varphi_j \, d\lambda .$$

Die Ableitung nach s berechnen wir nun mit dem vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten zur Schrittweite $\frac{1}{q}$. Die Stelle s_{q-1} ist dabei gesondert zu betrachten. Es ist ja $(\mathrm{D}u_i)(\omega_j, s_q) = (\mathrm{D}u_i)(\omega_j, 1) = 0$ für $i = 1, 2$.

$$\frac{\partial}{\partial s}(\mathrm{D}u_i)(\omega_j, s_l) \approx \begin{cases} q[(\mathrm{D}u_i)(\omega_j, s_{l+1}) - (\mathrm{D}u_i)(\omega_j s_l)] & , \quad l = -q+1, \ldots, q-2 \\ -q(\mathrm{D}u_i)(\omega_j, s_l) & , \quad l = q-1 \end{cases} ,$$

für $i = 1, 2$.

Durch die numerische Differentiation bekommen wir natürlich einen zusätzlichen Fehler in den Daten. Dieser Fehler taucht bei der 2D–Röntgentomographie nicht auf, da man dort direkt die Daten $\mathrm{R}_D f$ mißt und diese nicht noch, wie es hier der Fall ist, differenzieren muß. Da wir aber die Rotationen schon explizit kennen, können wir das Differenzieren umgehen, indem wir $\mathrm{R}_D g_i$ exakt berechnen.

2) Es ist

$$G_{jl} = (\mathrm{R}_D g)_{jl} \,.$$

Rechnen wir dieses Integral aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\mathrm{R}_D g_1)_{jl} &= (\mathrm{R} g_1)(\omega_j, s_l) \\ &= \int_{\Omega^2} \langle e_z, \nabla \times u_1(x) \rangle_2 \, \delta(s_l - x^T \omega_j) \, dx \\ &= \int_{-w(s_l)}^{w(s_l)} s_l \sin\, \varphi_j + \lambda \cos\, \varphi_j \; d\lambda \\ &= 2\, s_l \sin(\varphi_j) \sqrt{1 - s_l^2} \,. \end{aligned}$$

Analog für g_2 erhält man:

$$(\mathrm{R}_D g_2)_{jl} = 4\, w(s_l) s_l \, \sin(\varphi_j)(s_l^2 (\sin\, \varphi_j)^2 + (\cos\, \varphi_j)^2 w(s_l)^2) \,.$$

Hiermit hätten wir die nötigen Daten erzeugt. Wenden wir uns nun dem Gleichungssystem zur Berechnung des Rekonstruktionskernes zu. Wir müssen das Gleichungssystem

$$\mathrm{R}_D \mathrm{R}_{D,M}^* v_\gamma(0) = \mathrm{R}_D e_\gamma(0, \cdot)$$

lösen. Hierzu berechnen wir erst den Vektor auf der rechten Seite. Als Filter verwenden wir den Kern der Wärmeleitungsgleichung, also:

$$\begin{aligned} e_\gamma(x, y) &= T^x \tilde{e}_\gamma(\|y\|), \quad \text{wobei} \\ \tilde{e}_\gamma(\|y\|) &= 2\pi\, \gamma^{-2} \, \exp(-\|y\|^2 / (2\, \gamma^2)) \,. \end{aligned}$$

Für $\gamma \to 0$ gilt $e_\gamma(x,y) \to \delta_{x-y}$.
Die Fourier–Transformierte von $\tilde{e}_\gamma$ ist:

$$\hat{\tilde{e}}_\gamma(\|\xi\|) = 2\pi \exp(-\gamma^2 \|\xi\|^2/2)\,.$$

Die folgenden Abbildungen zeigen die Funktion $\hat{\tilde{e}}_\gamma(\sigma) = 2\pi \exp(-\gamma^2\sigma^2/2)$, $\sigma \in I\!R$ mit verschiedenen Werten für γ.

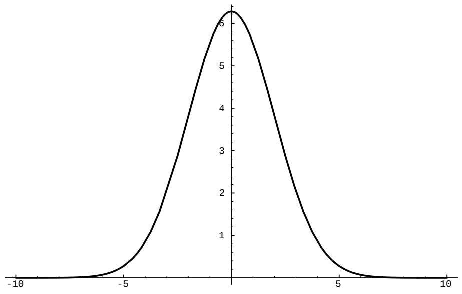


Abbildung 4.2.1 $\hat{\tilde{e}}_\gamma$, $\gamma = 0.5$, $\pi/\gamma = 6.2831$

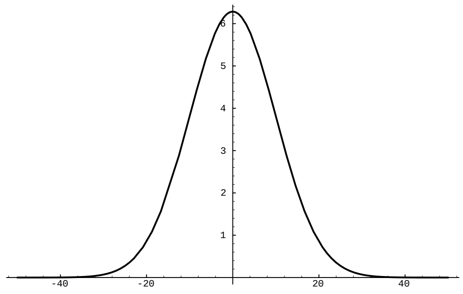


Abbildung 4.2.2 $\hat{\tilde{e}}_\gamma$, $\gamma = 0.1$, $\pi/\gamma = 31.4159$

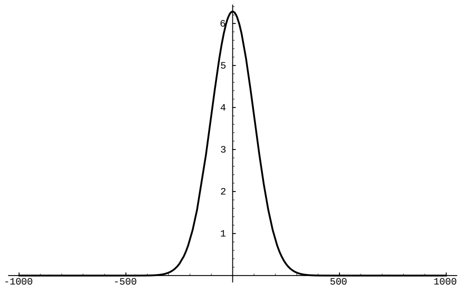


Abbildung 4.2.3 $\hat{\tilde{e}}_\gamma$, $\gamma = 0.01$, $\pi/\gamma = 314.1593$

Es wird dabei deutlich, daß $\hat{\tilde{e}}_\gamma(\sigma) \approx 2\pi\, \chi_{[-\frac{\pi}{\gamma},\frac{\pi}{\gamma}]}(\sigma)$ ist, d.h. es werden die Frequenzen ξ mit $\|\xi\| > \frac{\pi}{\gamma}$ abgeschnitten. Die Werte π/γ sind in den Bildern jeweils angegeben.

Wie gesehen hängt die rechte Seite wegen der Rotationssymmetrie von $\tilde{e}_\gamma$ nicht von j ab, und es ist:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{R}_D e_\gamma(0,\cdot))_l &= (\mathrm{R}_D \tilde{e}_\gamma)_l \\
&= \int_{-w(s_l)}^{w(s_l)} \tilde{e}_\gamma(\|s_l\omega_j + \lambda\omega_j^\perp\|)\, d\lambda \\
&= \int_{-w(s_l)}^{w(s_l)} 2\pi\, \gamma^{-2} \exp\left(-\frac{s_l^2+\lambda^2}{2\gamma^2}\right)\, d\lambda \\
&= 4\pi \int_0^{w(s_l)} \exp\left(-\frac{s_l^2+\lambda^2}{2\gamma^2}\right)\, d\lambda\,.
\end{aligned}
$$

Dieses letzte Integral berechnen wir mit der summierten Simpsonregel.
Gemäß Kapitel 3 betrachten wir nur das Gleichungssystem

$$Cv = w\,,$$

wobei $w_l = (\mathrm{R}_D\tilde{e}_\gamma)_l$, $l = -q+1,\ldots,q-1$, und $C \in \mathbb{R}^{L\times L}$ die Matrix ist, die entsteht, wenn man die Blöcke in der Matrix $\mathrm{R}_D\mathrm{R}_{D,M}^*$ aufaddiert.

Nun stellt sich noch die Frage, wie man den Rekonstruktionskern $v_\gamma(x)$ aus dem errechneten Kern $v_\gamma(0)$ erhält. Dies geschieht durch lineare Interpolation, wie folgt:

$$[v_\gamma(x)]_{jl} = (1-h)[v_\gamma(0)]_k + h[v_\gamma(0)]_{k+1}\,,$$

mit: $s_k \le s_l - x^T\omega_j < s_{k+1}$, $h = |(s_l - x^T\omega_j)q - k|$, $k = -q+1,\ldots,q-2$.

Hierbei taucht jedoch ein entscheidendes Problem auf: Es kann nämlich der Fall sein, daß $|s_l - x^T\omega_j| \ge 1$. In diesem Fall muß man den Rekonstruktionskern sinnvoll außerhalb von $[-1,1]$ fortsetzen. Die erste Idee wäre, $v_\gamma(0)$ außerhalb dieses Intervalls durch 0 fortzusetzen. Dies erweist sich jedoch als sehr nachteilig, wie an der Abbildung 4.2.7 zu sehen ist. Indem man nämlich den Kern außerhalb von $[-1,1]$ auf 0 setzt, geht eine Menge an Information verloren, da ja dadurch auch im Skalarprodukt $S_\gamma G$ viele Daten G_{jl} ignoriert werden. So bleibt einem nur übrig, die Fortsetzung zu raten. Hierzu betrachtet man sich den Kern $v_\gamma(0)$ und setzt ihn außerhalb von $[-1,1]$ stückweise konstant so fort, wie man den Verlauf dort vermutet. Dies ist natürlich alles andere als eine mathematisch exakte Vorgehensweise. Das Problem ist eben, daß es kein stabiles Extrapolationsverfahren gibt. An dieser Stelle wird noch einiges zu tun sein, zumal der Qualitätsunterschied in den Abbildungen 4.2.6 und 4.2.7 beweist, daß dieses Problem nicht vernachlässigt werden darf.

Außer dem Parameter γ hat man noch einen weiteren Regularisierungsparameter, nämlich den Abbruchindex M in der Darstellung von $\mathrm{R}^*_{D,M}$. Je höher der Grad der Tschebyscheff–Polynome ist, desto stärker oszillieren diese. Man kann also das Abschneiden der Reihe als Abschneiden der hohen Frequenzen interpretieren. Es empfiehlt sich auch, M nicht zu groß zu wählen, denn den größte Rechenaufwand in der gesamten Rekonstruktion nimmt die Berechnung der Blocksummenmatrix C in Anspruch.

Bevor wir nun zu den Bildern kommen, hier noch einmal in Kürze der Gesamtalgorithmus:

- Berechne die Blocksummenmatrix C, indem für R^*_D die Approximation $\mathrm{R}^*_{D,M}$ verwendet wird.
- Löse das Gleichungssystem $Cv = w$, wobei $w \in I\!R^L$ wie oben angegeben zu errechnen ist. Es ist dann $v_\gamma(0) = (\underbrace{v, v, \ldots, v}_{J\,mal})$.
- Berechne durch lineare Interpolation die Translate $T^{x^T\omega_j}[v_\gamma(0)]_l$ und verwende dies als Näherung für $v_\gamma(x)$. Setze hierzu $v_\gamma(0)$ 'geschickt' außerhalb von $[-1,1]$ fort.
- Berechne $g(x) = (S_\gamma G)(x) = \langle G, v_\gamma(x)\rangle_2$, wobei $G \in I\!R^{JL}$ die Daten sind, die hier berechnet werden, im Realfall jedoch Meßdaten sind.

Nach so viel Theorie kommen wir nun endlich zu einigen rechnerischen Ergebnissen. Die Abbildung 4.2.4 zeigt eine Rekonstruktion der Funktion $g_1(x_1,x_2) = x_2, \quad (x_1,x_2) \in \Omega^2$. Die Daten $\mathrm{R}_D g_1$ wurden exakt berechnet. Außerhalb der Einheitskreisscheibe wurde die Funktion auf 0 gesetzt. Bei dieser Rekonstruktion waren die Parameter wie folgt gewählt:
$q = 100$, $J = 200$, $\gamma = 0.8$, $M = 10$ und es wurde auf einem Gitter mit 100×100 Gitterpunkten rekonstruiert. Der Rekonstruktionskern $v_\gamma(x)$ wurde außerhalb von $[-1,1]$ wie folgt fortgesetzt:
Sei $s = s_l - x^T\omega_j, \quad |s| \geq 1$.

$$[v_\gamma(x)]_{jl} = \begin{cases} -0.000005 & , \quad 1 \leq |s| \leq 1.4 \\ -0.0001 & , \quad 1.4 < |s| \leq 1.7 \\ -0.000127 & , \quad 1.7 < |s| \leq 2.0 \end{cases} .$$

(Der Fall $|s| > 2$ braucht nicht beachtet zu werden, da $|s_l - x^T\omega_j| \leq 2$ ist.)

Die Abbildung 4.2.5 zeigt den Betrag des absoluten Fehlers dieser Rekonstruktion. Auffallend sind die beiden Maxima in der Mitte, und daß der Fehler zum Rand hin größer wird. Die beiden Merkmale zeigen, daß die Fortsetzung des Rekonstruktionskernes außerhalb von $[-1, 1]$ noch nicht optimal ist.

Um diese Funktion gut zu rekonstruieren genügt also schon eine geringe Zahl an Richtungen und Strahlen pro Richtung. Allerdings sieht auf diesem Bild die Rekonstruktion exakt aus, da die Fehler im Schwarz–Weiß Bild nicht zu erkennen sind. Die Abbildung 4.2.6 zeigt einen Querschnitt bei $x_1 = 0$, also die Funktion $g_1(0, x_2)$ zusammen mit der exakten Lösung. Hier werden doch noch kleinere Abweichungen deutlich.

Daß es wichtig ist den Rekonstruktionskern $v_\gamma(x)$ geschickt fortzusetzen, sehen wir an der Abbildung 4.2.7. Es ist wieder nur der Querschnitt bei $x_1 = 0$ gezeichnet, zusammen mit der exakten Lösung.

Hier wurde $v_\gamma(x)$ für $|s_l - x^T\omega_j| \geq 1$ durch 0 fortgesetzt. Für die Rekonstruktionspunkte (x_1, x_2) mit $|(x_1, x_2)| > 0.5$ wird der Fehler sehr groß, denn je größer die Punkte betragsmäßig werden, für desto mehr Paare (l, j) ist $|s_l - x^T\omega_j| \geq 1$. Es geht also viel Information verloren.

Wie am Anfang dieses Abschnittes beschrieben, entstehen die Daten bei der Vektortomographie dadurch, indem man die Meßdaten nach s differenziert. Im allgemeinen kennt man ja die die Werte der Linienintegrale über die Rotation des Feldes, also $\mathrm{R}_D g$, nicht. Die Abbildung 4.2.8 zeigt, wie die Resultate sind, wenn man die Daten G durch Differenzieren mit finiten Differenzen der Werte $(\mathrm{D}f)(\omega_j, s_l)$ erzeugt. Man kann den Fehler durch die numerische Differentiation auch als Rauschen interpretieren. Der Fehler, der hierbei entsteht ist in diesen Bildern gut zu erkennen.

Zum Abschluß nun noch die Bilder der Rekonstruktion der Funktion $g_2(x_1, x_2) = 2x_2^3$. Es wurden die Werte $\mathrm{R}_D g_2$ als Daten benutzt, also keine Differentiation vorgenommen. Bei dieser Funktion waren jedoch mehr Richtungen und mehr Strahlen pro Richtung nötig, außerdem mußte der Regularisierungsparameter γ erhöht werden und die Anzahl der Polynome erniedrigt.

Die Werte der Parameter sind wie folgt:
$q = 200$, $J = 400$, $M = 8$, $\gamma = 2.5$ und $v_\gamma(x)$ wurde wie folgt fortgesetzt:

$$[v_\gamma(x)]_{jl} = \begin{cases} 0 & , \quad 1 \leq s \leq 1.2 \\ -0.00002 & , \quad 1.2 < s \leq 1.4 \\ -0.00005 & , \quad 1.4 < s \leq 1.7 \\ -0.00016 & , \quad 1.7 < s \leq 2 \end{cases} .$$

Wieder wurde auf einem Gitter mit 100×100 Punkten rekonstruiert. Da in der Schwarz–Weiß–Darstellung der Rekonstruktion kein Unterschied zu der Rekonstruktion von g_1 zu sehen wäre, zeigen die Abbildungen 4.2.9 und 4.2.10 auch wegen der Aussagekraft nur den absoluten Fehler der Rekonstruktion und den Querschnitt bei $x_1 = 0$. In diesem Fall ist der Fehler schon deutlicher, vor allen Dingen am Rand und zwar in der Diagonal–Richtung. Dies erklärt sich aus der Tatsache, daß die Funktion g_2 keinen kompakten Träger in Ω^2 hat.

Man sieht, daß das ganze Konzept noch bei weitem nicht ausgereift ist. Nicht zuletzt denke ich, daß eine weitere Untersuchung dieses Verfahrens, die nicht mehr Bestandteil dieser Arbeit ist, durchaus gewinnbringend wäre.

Ich beende somit diese Arbeit mit einem passenden Wort eines bekannten Literaturkritikers:
Wir sehen betroffen den Vorhang zu und alle Fragen offen.

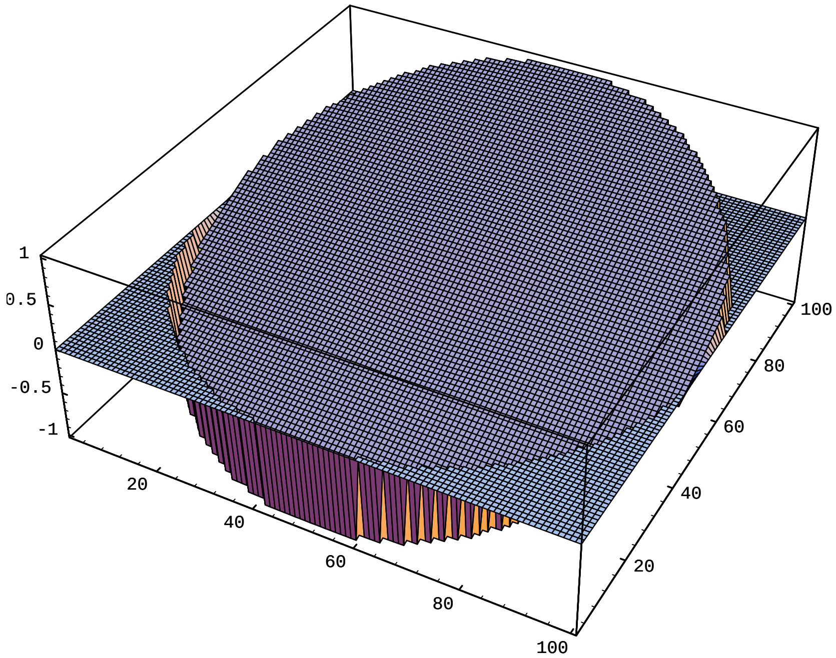


Abbildung 4.2.4 Rekonstruktion von g_1 mit exakten Daten auf einem 100×100–Gitter

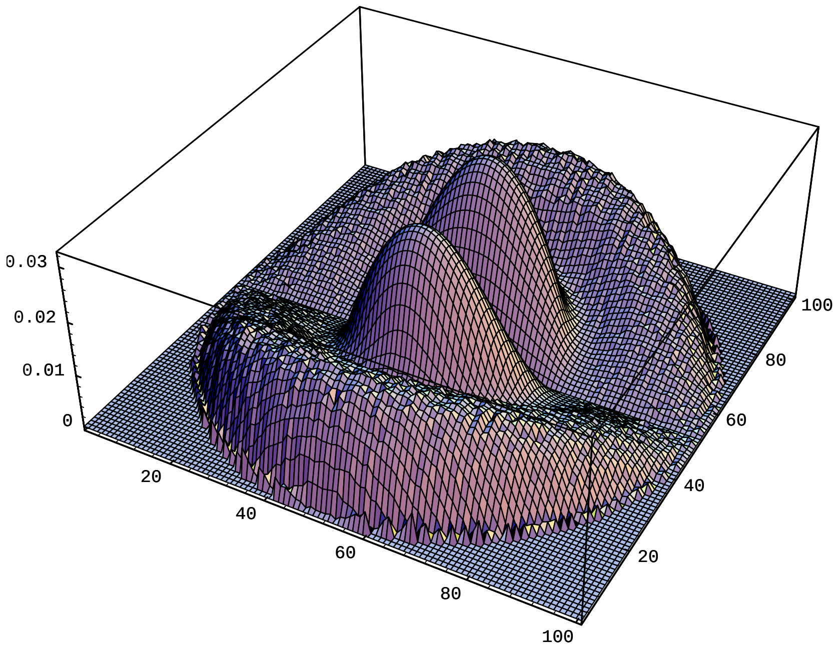


Abbildung 4.2.5 Absoluter Fehler bei der Rekonstruktion von g_1 mit exakten Daten

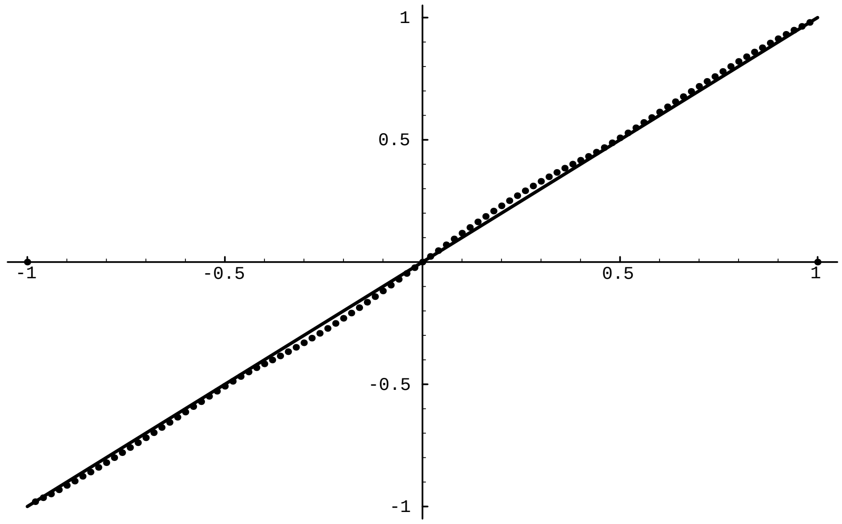


Abbildung 4.2.6 Querschnitt der Rekonstruktion der Funktion g_1 bei $x_1 = 0$ (gepunktet) und die exakte Lösung (durchgezogen)

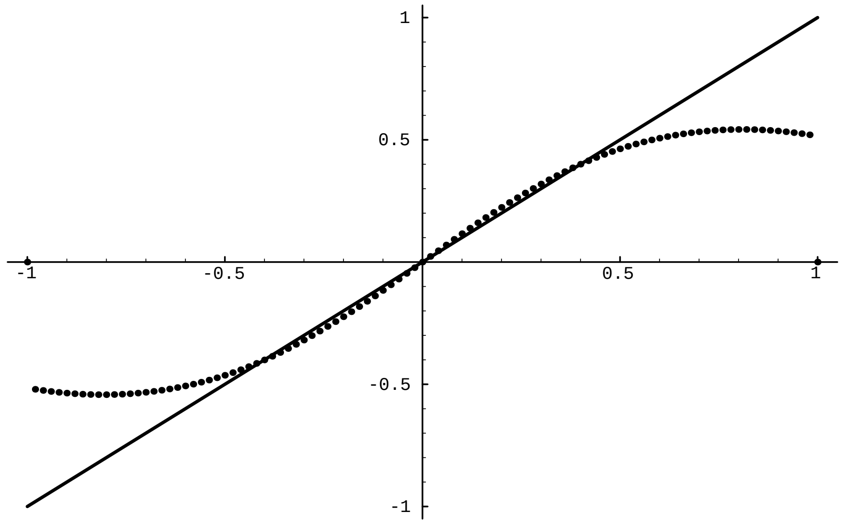


Abbildung 4.2.7 Querschnitt durch die Rekonstruktion der Funktion g_1 bei $x_1 = 0$ (gepunktet) mit der exakten Lösung (durchgezogen), der Rekonstruktionskern wurde durch 0 fortgesetzt. Man sieht deutlich das Abfallen der Rekonstruktion für $|x_2| > 0.5$.

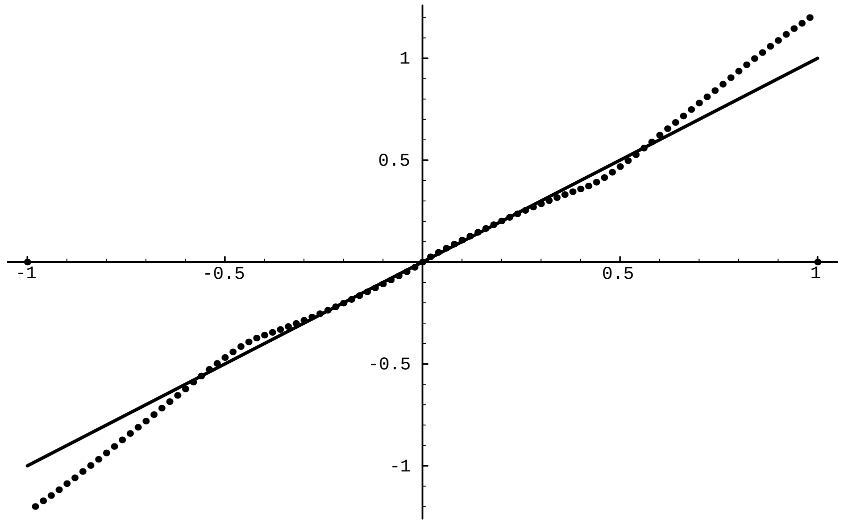


Abbildung 4.2.8 Querschnitt bei $x_1 = 0$ durch die Rekonstruktion der Funktion g_1 (gepunktet) unter Benutzung von gestörten Daten durch die Differentiation. Wieder ist die exakte Lösung als durchgezogene Linie gezeichnet.

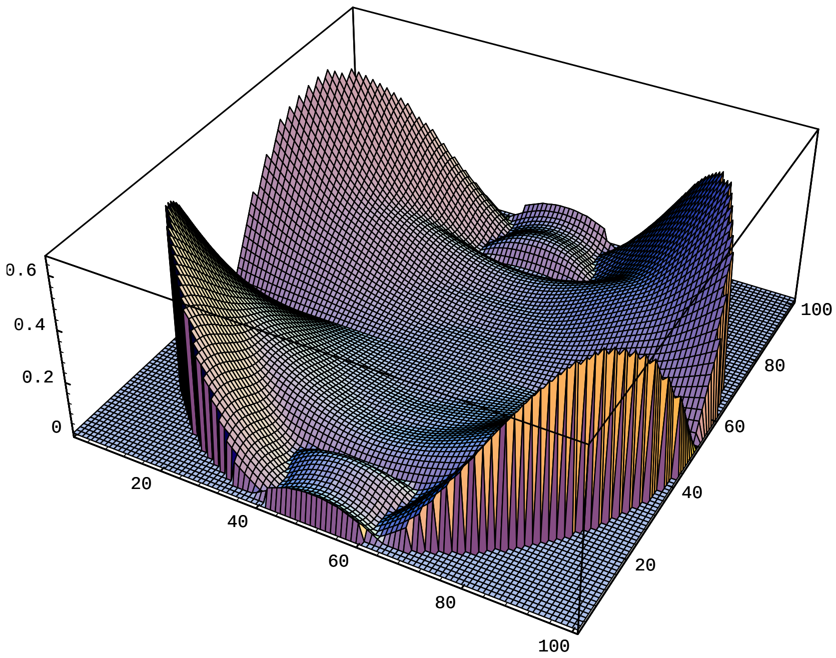


Abbildung 4.2.9 Absoluter Fehler bei der Rekonstruktion von g_2 mit exakten Daten.

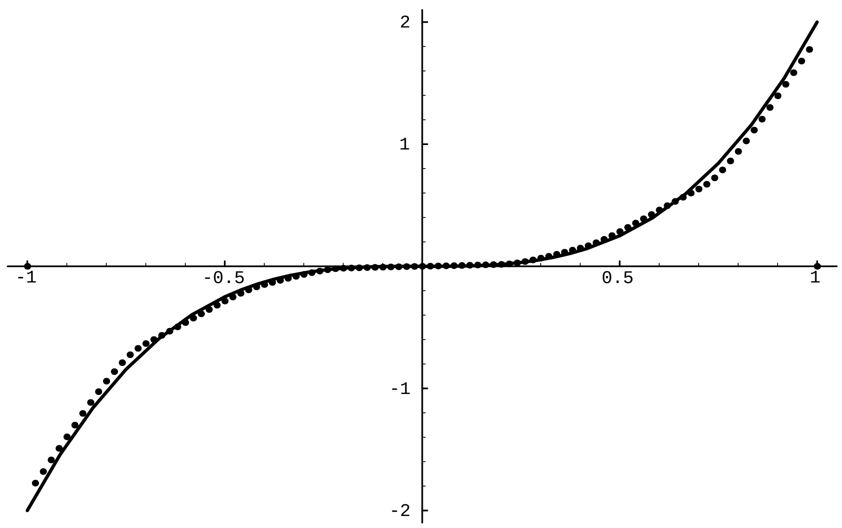


Abbildung 4.2.10 Querschnitt bei $x_1 = 0$ durch die Rekonstruktion der Funktion g_2 (gepunktet) mit der exakten Lösung (durchgezogen). Es wurde mit exakten Daten gerechnet.

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1965.

[2] J. Baumeister, Stable Solution of Inverse Problems, Vieweg, 1987.

[3] A.J. Chorin, J.E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer, 1979.

[4] P. Deuflhard, A. Hohmann, Numerische Mathematik I, de Gruyter, Berlin, New York, 1993.

[5] O. Forster, Analysis 3, vieweg, 1984.

[6] P. Juhlin, Principles of Doppler Tomography, Technical Report CODEN:LUTFD2 /(TFMA-92)7002, Dept. of Mathematics, Lund Institute of Technology, 1992.

[7] A.K. Louis, Approximative inverse for linear and some nonlinear problems, to appear, 1995.

[8] A.K. Louis, Inverse und schlechtgestellte Probleme, Teubner, 1989.

[9] A.K. Louis, Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform, SIAM J. Math. Anal., Vol. 15, No. 3, 1984.

[10] A.K. Louis, P. Maaß, A mollifier method for linear operator equations of the first kind, Inverse Problems,6, 1990, S. 746-769

[11] A.K.. Louis, P. Maaß, A. Rieder, Wavelets, Teubner, 1994.

[12] F. Natterer, Mathematics of Computerized Tomography, Wiley and Teubner, 1986.

[13] J. Radon, Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, 69, 1917.

[14] W. Rudin, Functional Analysis, Tata McGraw-Hill, 1973.

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, im August 1995

Thomas Schuster