Äquivalente Quellen als Zugang zur Lösung eines inversen Streuproblems

Diplomarbeit
zur Erlangung des Grades eines
Diplom-Mathematikers
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von

Erik Wallacher

Betreuer: Univ.–Prof. Dr. A.K. Louis

Saarbrücken
Juni 2002

Vorwort und Einleitung

Die heutige Entwicklung der Computertechnologie, gekoppelt mit der Entwicklung schneller optimierter Algorithmen, ermöglicht die Simulation komplexer Umweltausschnitte. Der Bereich, in dem sich Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften schneiden, stößt dadurch in Industrie und Forschung auf immer größer werdendes Interesse. Der Oberbegriff hierfür lautet Scientific Computing. Das Streuproblem ist nur eines vieler Probleme aus diesem Bereich, die zur Zeit intensiv untersucht werden. Gerade das inverse Streuproblem stellt für die Softwareentwickler und für die Technik eine große Herausforderung dar. Dabei gibt es viele verschiedene Lösungsansätze.

Das linearisierte Problem, auch Born-Approximation genannt, wurde zum Beispiel in [Lan 87] und [Che/Ros 88] untersucht. Diese Vorgehensweise liefert jedoch nur für kleine Streuer eine gute Lösung. Eine ganze Reihe von Verfahren formuliert das nichtlineare Problem als Optimierungsaufgabe. Beispiele hierfür finden sich in [Abd/Lou 99], [Wue 95], [Van/Kle 97] und [Hab/Ori 94]. Neben diesen Ansätzen sind die Eikonal-Approximation und die Dualraum-Methode, die ursprünglich zur Lösung des direkten Problems entwickelt worden waren, von Interesse.

Die mathematische Modellierung der Streuung von zeitharmonischen akustischen Wellen an Hindernissen erfolgt über die Helmholtz-Gleichung. Diese Differentialgleichung läßt sich mit Hilfe der Green'schen Funktion in eine Integralgleichung transformieren, die sogenannte Lippmann-Schwinger-Gleichung. Das Produkt aus Objektfunktion und Gesamtfeld, das im Integranden der Integralgleichung auftaucht, wird als Äquivalente Quelle bezeichnet. Durch diese Quelle wird das gestreute Feld vollkommen beschrieben und bietet damit einen Zugang zur Lösung des inversen Streuproblems. Dieser Ansatz führt zu einer Klasse von Lösungsmethoden, die das Problem nicht direkt angehen. Stattdessen lösen sie im voraus, oder auch parallel zu anderen Minimierungsaufgaben, das inverse Quellenproblem. Beispiele zu solchen Verfahren sind zu finden in [Abd/Lou 99], [Van/Kle 97] und [Hab/Ori 94]. Die Suche nach der Äquivalenten Quelle bei Kenntnis des gestreuten Feldes auf einer Meßkurve außerhalb des Rekonstruktionsgebietes ist im Sinne von Hadamard ein schlechtgestelltes Problem. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit richtet sich auf die Untersuchung des problembeschreibenden Integraloperators. Dabei werden die Ursachen, die für die Schlechtgestelltheit verantwortlich sind, aufgedeckt.

Kapitel I stellt die Hilfsmittel aus Bereichen der Mathematik, die nicht in den Grundvorlesungen behandelt aber für das Verständnis der Arbeit benötigt werden, bereit. Dabei werden zunächst wichtige grundlegende Eigenschaften kompakter Operatoren, die in jedem Lehrbuch über Funktionalanalysis zu finden sind, aufgezeigt. Anschließen tut sich die Definition schlechtgestellter Probleme. Sie führt auf direktem Weg zum Begriff der Regularisierung von Operatoren. Mehr über dieses Themengebiet kann in [Lou 89] nachgelesen werden. Der letzte Teil des Kapitels befaßt sich mit Kugelflächenfunktionen sowie Besselfunktionen. Ein enger Zusammenhang zwischen diesen Funktionen und dem Streuproblem wird in [Hoc 86] hergestellt.

Der Begriff Streuproblem ist weitreichend. Kapitel II beschreibt zunächst den für diese Arbeit relevanten Streuvorgang. Die Meßanordnung wird schematisch dargestellt. Es folgen physikalische Grundlagen und die Herleitung der reduzierten Helmholtz-Gleichung sowie der Lippmann-Schwinger-Gleichung. Nach der mathematischen Modellierung wird der Unterschied zwischen dem direkten und inversen Streuproblem herausgestellt. Im Abschluß des Kapitels werden die Äquivalenten Quellen eingeführt. Beispielhaft für die Anwendung dieser Quellen als Zugang zur Lösung des inversen Streuproblems wird das Verfahren aus [Abd/Lou 99] näher erläutert.

Kapitel III kann als Dreh- und Angelpunkt dieser Arbeit betrachtet werden. Es beinhaltet die Herleitung einer an das Problem angepaßten L_2-Basis. Sie ist der Ausgangspunkt für die Analyse des Problems in Kapitel IV und spielt bei der Herleitung der Rekonstruktionsalgorithmen in Kapitel V eine wesentliche Rolle. Desweiteren wird im Kapitel VI diese Basis zur Auswertung eines Integraloperators benutzt.

Das inverse Quellenproblem wird in Kapitel IV unter die Lupe genommen. Als Instrument zur Analyse dient die Singulärwertzerlegung des problembeschreibenden Operators. Sie wurde für den Spezialfall der vollständigen Daten bereits in [Abd/Lou 99] angegeben. Unter Verwendung der L_2-Basis aus Kapitel III erhält man das singuläre System auch für den Fall der unvollständigen Daten. Es zeigen sich Parallelen zu der Radon-Transformation (vgl [Lou 86]). Die singulären Funktionen aus dem allgemeineren Fall lassen sich auch dort als Linearkombination der singulären Funktion aus dem Fall der vollständigen Daten darstellen. Die Koeffizienten hierfür liefern dabei die Komponenten der Eigenvektoren einer sogenannten Sinc-Matrix.

Im ersten Teil von Kapitel V wird ein Lösungsweg zu dem inversen Quellenproblem aufgezeigt. Als Regularisierungverfahren des linearen unbeschränkten Operators wird die Approximative Inverse vorgeschlagen. Als direkte Konsequenz aus Kapitel IV folgt, daß die Anteile der Äquivaltenten Quellen im Nullraum des Operators nicht durch das Lösen des inversen Quellenproblems bestimmt werden können. Im zweiten Teil werden weiterführende Verfahren angegeben, die auch die Anteile im Nullraum bestimmen können.

Kapitel VI behandelt die Numerik der in Kapitel V angesprochenen Lösungsverfahren. Größere Probleme treten zunächst bei der Berechnung der Singulärwertzerlegung als auch bei der Berechnung des Rekonstruktionskerns auf. Weitere verfahrenstypische Probleme werden aufgezeigt und Lösungsvorschläge angegeben. Den Abschluß des Kapitels bilden Rekonstruktionen von Testobjekten.

An dieser Stelle will ich der angenehmen Pflicht nachkommen, all denen zu danken, die bei der Entstehung dieser Arbeit mitgewirkt haben. Allen voran danke ich Herrn Professor Louis. Über die stets hilfreichen Ratschläge hinaus, trug er Sorge für eine ausgezeichnete Ausstattung an Literatur sowie Soft- und Hardware. Bedanken will ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für das angenehme und produktive Arbeitsklima. Besonderen Dank bin ich Volker Gebhard verpflichtet, der mich während der gesamten Entstehung der Diplomarbeit betreute und auch das Korrekturlesen vornahm. Einen wichtigen Rückhalt gab mir die Familie. Danken möchte ich meinen Eltern und Schwiegereltern, die mein Studium in jeder Hinsicht unterstützten. Meinen abschließenden Dank gilt meiner lieben Frau Anja für die unglaubliche Geduld und Ausdauer, die sicherlich notwendig sind, um eine glückliche Lebensgemeinschaft mit einem Studenten zu führen.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

Allgemeine mathematische Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen ($0 \in \mathbb{N}$)
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_o^+$	Menge der reellen Zahlen größer gleich Null
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$< \cdot, \cdot >_X$	Skalarprodukt auf dem Vektorraum X
$\\| \cdot \\|_X$	Norm auf dem Vektorraum X
$L_2(X)$	$\{f : X \to \mathbb{C} \mid \int_X \|f(y)\|^2 \, dy < \infty\}$, Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen über X
$l^2(J)$	$\{(x_j)_{j\in J} \mid x_j \in \mathbb{C}$ und $\\|(x_j)_{j\in J}\\|_{l^2(J)} < \infty\}$, Hilbertraum der quadratsumierbaren Folgen ($J \subseteq \mathbb{Z}$)
$B_r(a)$	$\{x \mid \\|x - a\\| < r\}$, Offene Kugel mit Radius r um a
$\mathrm{supp}(f)$	$\overline{\{x \mid \|f(x)\| \neq 0\}}$, Träger von f
span	Lineare Hülle
$O(\cdot)$	Landau Symbol

Bezeichnungen aus der Funktionalanalysis

A	linearer Operator
$A(\cdot)$	nichtlinearer Operator
I	Identität
A^*	zu A adjungierter Operator
A^{-1}	zu A inverser Operator
$A^\dagger$	verallgemeinerte Inverse von A
$\tilde{A}^\dagger$	Fortsetzung der verallgemeinerten Inversen $A^\dagger$
$N(A)$	Nullraum von A
$R(A)$	Wertebereich von A
$L(X,Y)$	Raum der linearen und stetigen Abbildungen von X nach Y
$L(X)$	$L(X,X)$
$K(X,Y)$	Raum der kompakten und linearen Abbildungen von X nach Y
$K(X)$	$K(X,X)$
$\dim(X)$	Dimension des Raumes X

Spezielle Funktionen und Bezeichnungen

$\arg_s(x)$	Die eindeutige Zahl in $[s; s+2\pi)$ mit $e^{i\arg_s(x)} = \frac{x}{\|x\|}$
S^{p-1}	$\{x \in I\!R^p \mid \|x\| = 1\}$, p-dimensionale Einheitssphäre
$\omega(x)$	$\frac{x}{\|x\|}$, Projektion von $I\!R^p/\{0\}$ auf S^{p-1}
$Y_n(\omega(x))$	$e^{in\arg_o(x)}$, Kugelflächenfunktion im zweidimensionalen ($n \in \mathbb{Z}$)
J_ν	Besselfunktion ($\nu \in \mathbb{C}$)
N_ν	Neumannfunktion ($\nu \in \mathbb{C}$)
H_ν	Hankelfunktion 1.Art ($\nu \in \mathbb{C}$)
$H_\nu^{(2)}$	Hankelfunktion 2.Art ($\nu \in \mathbb{C}$)
$\triangle_p$	$\sum\limits_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, p-dimensionaler Laplace-Operator
$\triangle_p^*$	p-dimensionaler Beltrami-Operator
δ_x	$\delta_x f = f(x)$, Delta-Distribution : $\delta = \delta_0$
$\delta_{m,n}$	Kronecker-Delta
id	Identität
$\overline{\overline{A}}$	Integraloperator aus Abschnitt 2.3.2
$\overline{A}_f$	Integraloperator aus Abschnitt 2.3.1
γ	Regularisierungsparameter ($\gamma > 0$)
$M_\gamma,\ \tilde{M}_\gamma$	Mollifier bzw. Glättungsoperatoren aus Abschnitt 1.4
$N(p,n)$	Anzahl der linear unabhängigen homogenen harmonischen Polynome vom Grad n
$< \cdot,\cdot >_\nu$	ν-Skalarprodukt aus Abschnitt 1.4
$\\| \cdot \\|_\nu$	ν-Norm aus Abschnitt 1.4
X_ν, Y_ν	ν-Räume aus Abschnitt 1.4
sinc	$\frac{\sin(x)}{x}$, Sinc-Funktion
$S(m,n,\beta)$	Sinc-Matrix aus Abschnitt 4.1
log	Der natürliche Logarithmus

Problemspezifische Variablen und Funktionen

R	Abstand des Detektors zum Nullpunkt
Ω	$\{x \in I\!R^2 \mid \|x\| < R\}$, Rekonstruktionsgebiet
Ω_{sc}	Träger der Objektfunktion
$\vec{\alpha} \in S^1$	Ausbreitungsrichtung des einfallenden Feldes
α	$arg_o(\vec{\alpha})$
β	Meßwinkel
$\eta(\alpha)$	Polarwinkel des Detektormittelpunktes in Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung α
M	$Re^{i\eta(\alpha)}$, Detektormittelpunkt
$\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}$	$\{Re^{i\delta} \mid \delta \in [\eta(\alpha) - \beta; \eta(\alpha) + \beta]\}$, Detektor
$U(x,t)$	Wellenfunktion in Abhängigkeit von Ort x und Zeit t
u_i^α	einfallendes Feld
u_s^α	gestreutes Feld
u^α	Gesamtfeld
$n(x)$	Brechungsindex der Welle am Ort x
$f(x)$	$1 - n^2(x)$, Objektfunktion
$c(x)$	Geschwindigkeit der Welle am Ort x
c_0	Geschwindigkeit der Welle im Hintergrundmedium
ω	Frequenz der einfallenden Welle
k	$\frac{\omega}{c_0}$, Wellenzahl der einfallenden Welle

Kapitel 1

Mathematische Hilfsmittel

1.1 Grundbegriffe aus der Funktionalanalysis

In diesem Abschnitt werden einige Grundbegriffe und Sätze aus der Funktionalanalysis bereitgestellt, die für das Verständnis dieser Arbeit benötigt werden. Einige Aussagen lassen sich auf topologische Räume verallgemeinern. Diese Arbeit benötigt jedoch nur die Versionen für Hilberträume.

Definition 1.1 Ein vollständig normierter Vektorraum X mit Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >_X$ heißt Hilbertraum. Die Vollständigkeit soll bezüglich der aus dem Skalarprodukt induzierten Norm $\|f\|_X = \sqrt{< f, f >_X}$ gelten.

Im folgenden seien X, Y Hilberträume.

Bezeichnung 1.2 Sei $A : X \longrightarrow Y$ ein Operator. Dann heißt

(i) $N(A) := \{f \in X \mid Af = 0\}$ der Nullraum des Operators A

(ii) $R(A) := \{g \in Y \mid \exists\ f \in X \text{ mit } Af = g\}$ das Bild des Operators A

(iii) Für $U \subset X$ sei $AU := \{g \in Y \mid \exists\ f \in U \text{ mit } Af = g\}$

Definition 1.3 Sei $A : X \longrightarrow Y$ ein linearer Operator. Bildet A beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen ab, so nennt man A kompakt, d.h.

$$A \text{ kompakt} :\Longleftrightarrow \forall\ U \subset X \text{ beschränkt gilt} : \overline{AU} \subset Y \text{ kompakt}$$

Bezeichnung 1.4

(i) $L(X,Y) := \{A : X \longrightarrow Y \mid A \text{ linear und stetig}\}$

(ii) $L(X) := L(X,X)$

(iii) $K(X,Y) := \{A \in L(X,Y) \mid A \text{ kompakt}\}$

(iv) $K(X) := K(X,X)$

Lemma 1.5 Sei $A \in L(X,Y)$. Dann existiert genau ein Operator $A^* \in L(Y,X)$, so daß

$$< Af, g >_X = < f, A^*g >_Y \qquad \forall\ f \in X,\ g \in Y$$

Da dieser Operator A^* bei vielen Problemen eine wichtige Rolle spielt, hat er eine eigene Bezeichnung.

Definition 1.6 Sei $A \in L(X,Y)$

(i) Dann heißt der Operator A^* aus Lemma 1.5, der zu A adjungierte Operator

(ii) Gilt $A^* = A$, so heißt A selbstadjungiert

(iii) A heißt positiv (semi-)definit $:\Longleftrightarrow A = A^*$ und $< f, Af >_X > 0$ (bzw.≥ 0) $\forall\ f \in X \backslash \{0\}$

Lemma 1.7 Sei $A \in L(X,Y)$. Dann gilt :

(i) $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$

(ii) $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$

1.2 Singulärwertzerlegung kompakter Operatoren

Ausgangspunkt für die Singulärwertzerlegung kompakter Operatoren ist die Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren. Um den Spektralsatz angeben zu können, werden zunächst die Begriffe Eigenwerte, Eigenvektoren und Spektrum eingeführt.

Definition 1.8 Sei $A : X \longrightarrow Y$ ein Operator.

(i) $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I$ ist nicht invertierbar$\}$ heißt das Spektrum von A.

(ii) Sind $\lambda \in \sigma(A)$ und $f \in X \setminus \{0\}$ mit $Af = \lambda f$, so heißt λ Eigenwert zum Eigenvektor f des Operators A.

Satz 1.9 (Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren)
Sei $A \in K(X)$ selbstadjungiert mit Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und den zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt :

$$Af = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n < f, u_n >_X u_n \qquad \forall\ f \in X$$

Eine ähnliche Zerlegung kann auch für Operatoren $A \in K(X,Y)$ angegeben werden. Dazu wird jedoch der Begriff des singulären Systems benötigt. Doch zunächst noch einige wichtige Eigenschaften kompakter Operatoren.

Satz 1.10 Gilt

(i) $A \in K(X,Y) \Rightarrow A^*A \in K(X)$ und $AA^* \in K(Y)$ sind positiv semidefinit

(ii) $A \in K(X) \Rightarrow$ Nur die Null kann Häufungspunkt im Spektrum $\sigma(A)$ sein

(iii) $A \in K(X)$ selbstadjungiert mit Eigenwert $\lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

(iv) $A \in K(X)$ selbstadjungiert mit $\dim(R(A)) = \infty \Rightarrow 0 \in \sigma(A)$ und $\sigma(A) \setminus \{0\}$ hat höchstens abzählbar viele Eigenwerte mit einzigstem Häufungspunkt 0

(v) $A \in K(X)$ positiv semidefinit mit Eigenwert $\lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_o^+$

Als Folgerung aus diesem Satz ergibt sich, daß die Eigenwerte von A^*A bzw. AA^* aus $\mathbb{R}_o^+$ sind, falls $A \in K(X,Y)$. Im folgenden seien deshalb diese Eigenwerte $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Größe nach sortiert, d.h $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq 0$.

Definition 1.11 (Singuläres System) Sei $A \in K(X,Y)$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenwerte von $A^*A \in K(X)$ mit den zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setze

$$\begin{array}{rcl} \sigma_n & := & \sqrt{\lambda_n} \\ u_n & := & \sigma_n^{-1} A v_n \end{array}$$

Die so definierte Menge von Tripeln $(v_n, u_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt singuläres System von A.

Lemma 1.12 Sei $A \in K(X,Y)$ mit singulärem System $(v_n, u_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt :

(i) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $N(A)^\perp$

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $\overline{R(A)}$

(iii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt :

$$\begin{array}{rcl} Av_n & = & \sigma_n u_n \\ A^*u_n & = & \sigma_n v_n \end{array}$$

Die Hauptaussage dieses Unterkapitels läßt sich nun mit Hilfe des singulären Systems eines kompakten Operators angeben.

Satz 1.13 (Singulärwertzerlegung kompakter Operatoren) Sei $A \in K(X,Y)$ mit singulärem System $(v_n, u_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt $\forall\, f \in X$:

$$Af = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n < f, v_n >_X u_n$$

1.3 Inverse Probleme

Inverse Probleme treten immer dann auf, wenn Eigenschaften von einem Objekt nicht durch direkte Messungen feststellbar sind. Es wird deshalb versucht, durch Messungen außerhalb des Objektes auf die Eigenschaften im Inneren zu schließen. Zugrunde liegt ein mathematisches Modell, das durch einen Operator A beschrieben wird. $A : X \longrightarrow Y$ ist dabei eine Abbildung vom Raum der Eigenschaften des Objektes in den Raum der Beobachtungen. Ziel ist es, diesen Operator zu invertieren, d.h jeder Beobachtung soll eine Funktion, welche die Objekteigenschaft charakterisiert, zugeordnet werden. Dabei stellen sich unmittelbar die Fragen :

(i) Gibt es überhaupt eine Lösung ?

(ii) Ist die Lösung eindeutig ?

(iii) Hängt die Lösung stetig von den gemessenen Daten ab ?

Diese Fragen veranlaßten Hadamard [Had 23] zu folgender Definition.

Definition 1.14 Sei $A : X \longrightarrow Y$ ein Operator (nicht unbedingt linear) und $g \in Y$. Das Problem nach der Suche eines Elements $f \in X$ mit $Af = g$ heißt gut gestellt, wenn

(i) $A(f) = h$ lösbar ist $\forall\ h \in Y$

(ii) diese Lösung eindeutig ist

(iii) und stetig von den Daten abhängt

Ist eine der Bedingungen nicht erfüllt, so heißt das Problem schlecht gestellt.

Inverse Probleme sind in diesem Sinne häufig schlecht gestellt. Meist werden sogar alle drei Kriterien aus Definition 1.14 nicht erfüllt. Durch ungenaues Messen oder durch ungenaue Modelle kommt es vor, daß $g \notin R(A)$ und damit $A(f) = g$ nicht mehr lösbar ist. Die Eindeutigkeit aus Punkt (ii) der Definition gilt in vielen Fällen nur theoretisch, zum Beispiel in der Computer-Tomographie. Sind die Daten aus allen Meßrichtungen bekannt, so existiert dort eine eindeutige Lösung. Da es in der Natur der Sache liegt, Aufnahmen aus nur endlich vielen Richtungen machen zu können, gibt es keine eindeutige Lösung. Um doch noch von einem vernünftigen Lösungsbegriff sprechen zu können, wird die verallgemeinerte Lösung eingeführt (siehe Definition 1.15). Es wird als Lösung einfach das Element $f^\dagger \in X$ genommen, das den Defekt $\|Af - g\|$ minimiert und gleichzeitig selbst kleinste Norm unter allen minimierenden Funktionen besitzt. Damit werden die Punkte (i) und (ii) aus Definition 1.14 entschärft. Jedoch wird das mathematische Modell bei inversen Problemen häufig durch einen kompakten Operator beschrieben. Wie aus Satz 1.10 hervorgeht, sind diese Operatoren nicht stetig invertierbar. Dies hat zur Folge, daß kleine Meßfehler in den Daten zu großen Fehlern bei der Inversion führen können. Es wird daher versucht, eine stetige Approximation der Inversen zu finden. Diese Vorgehensweise wird Regularisierung genannt.

Definition 1.15 (Verallgemeinerte Inverse)
Sei $A \in L(X, Y)$. Das Element $f^\dagger$ mit

(i) $\|Af^\dagger - g\|_Y = \min\limits_{f \in X} \|Af - g\|_Y$ und

(ii) $\|f^\dagger\|_X = \min\{\|f\|_X \mid \|Af^\dagger - g\|_Y = \|Af - g\|_Y\}$

heißt verallgemeinerte Lösung von $Af = g$. Der dadurch definierte Operator

$$A^\dagger : R(A) \oplus R(A)^\perp \longrightarrow X$$

heißt verallgemeinerte Inverse.

Die wichtigsten Eigenschaften der verallgemeinerten Lösung und der verallgemeinerten Inversen sind in Satz 1.16 zusammengefaßt.

Satz 1.16

(i) $f^\dagger = A^\dagger g$ ist die eindeutige Lösung der Normalgleichung $A^*Af = A^*g$ in $N(A)^\perp$

(ii) $A^\dagger$ ist linear

(iii) $A^\dagger$ stetig $\Longleftrightarrow R(A)$ abgeschlossen

(iv) $N(A^\dagger) = R(A)^\perp$ und $R(A^\dagger) = N(A)^\perp$

Die verallgemeinerte Inverse läßt sich bei kompakten Operatoren mit Hilfe ihrer singulären Systeme darstellen.

Satz 1.17 Sei $A \in K(X,Y)$ mit singulärem System $(v_n, u_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dann gilt $\forall\ g \in R(A) \oplus R(A)^\perp \subset Y$:

$$f^\dagger = A^\dagger g = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-1} < g, u_n >_Y\ v_n$$

1.4 Regularisierung

Aus der Darstellung aus Satz 1.17 ist es schnell ersichtlich, daß die verallgemeinerte Inverse kompakter Operatoren nicht stetig ist. Denn dann müßte die Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt sein. Dies gilt jedoch nach Satz 1.10 nicht. Also bedarf es bei der Inversion, wie oben erwähnt, eines Regularisierungsverfahrens, da sonst Datenfehler zu sehr verstärkt werden.

Definition 1.18 (Regularisierung)
Sei $A \in L(X,Y)$. Sei $\gamma : \mathbb{R}^+ \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^+$ eine Abbildung und $(T_\gamma)_{\gamma>0}$ eine Familie von Operatoren mit $T_\gamma : Y \longrightarrow X$.
Es gelte :

(i) $\lim\limits_{\epsilon\to 0,\ g^\epsilon\to g} \gamma(\epsilon, g^\epsilon) = 0$

(ii) $\lim\limits_{\epsilon\to 0,\ g^\epsilon\to g} T_{\gamma(\epsilon,\ g^\epsilon)} = A^\dagger g$

für alle $g \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ und $g^\epsilon \in Y$ mit $\|g^\epsilon - g\| \leq \epsilon$.
Dann heißt $(T_\gamma)_{\gamma>0}$ <u>Regularisierung von $A^\dagger$</u> und γ <u>Regularisierungsparameter</u>.

Um die Funktionsweise von Regularisierungsverfahren besser erklären zu können, bedarf es der Einführung geeigneter Räume. Die Definitionen folgender Normen und Räume stammen aus [Lou 89].

Bezeichnung 1.19 Sei $A \in K(X,Y)$ mit singulärem System $(v_n, u_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\nu \in \mathbb{R}$.
Dann sei

$$X_\nu := \{f \in N(A)^\perp \mid \|f\|_\nu < \infty\}$$

$$\text{wobei} \quad \|f\|_\nu = \sqrt{< f, f >_\nu}$$

$$\text{und} \quad < f_1, f_2 >_\nu = \sum_n \sigma_n^{-2\nu} < f_1, v_n >_X < f_2, v_n >_X$$

Y_ν bezeichne die entsprechenden Räume für den kompakten Operator $A^* \in K(Y,X)$.

Ein Problem bei der Inversion ist es, daß $A^\dagger$ nur auf $R(A) \oplus R(A)^\perp \subset Y$ definiert ist. Formal läßt sich $A^\dagger$ auf ganz Y fortsetzen.

$$\begin{aligned}&\tilde{A}^\dagger : Y \longrightarrow X_{-1}\\ &\tilde{A}^\dagger g = \sum_n \sigma_n^{-1} < g, u_n >_Y v_n\end{aligned}$$

Weitere Eigenschaften dieser ν-Normen und X_ν-Räume folgen in Satz 1.20.

Satz 1.20 Sei $A \in K(X,Y)$ mit singulärem System $(v_n, u_n, \sigma_n)_{n\in I\!N}$ und $\nu \leq \mu \in I\!R$. Dann gilt :

(i) $X_\nu \supset X_\mu$

(ii) $\tilde{A}^\dagger : Y \longrightarrow X_{-1}$ ist linear und stetig mit $\|\tilde{A}^\dagger\| = 1$

(iii) $A^\dagger : Y_1 \longrightarrow X$ ist linear und stetig mit $\|A^\dagger\| = 1$

(iv) $X \cap N(A)^\perp = X_0$

(v) $\|Af\|_\nu = \|f\|_{\nu-1} \qquad \forall\ f \in X_{\nu-1}$

Das Grundprinzip, das in jedem Regularisierungsverfahren steckt, wird in Abbildung (1.1) aufgezeigt. Da die Daten mit Fehlern behaftet sind, und diese Fehler bei der Inversion verstärkt werden, müssen entweder zuerst die Daten durch einen Operator $\tilde{M}_\gamma$ geglättet und mit $A^\dagger$ invertiert werden, oder man invertiert die Daten zuerst mit $\tilde{A}^\dagger$ und glättet anschließend mit M_γ.

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[dl, "A^\dagger"'] \\
X \arrow[r, "A"] & Y \arrow[u, "\tilde{M}_\gamma"'] \arrow[dl, "\tilde{A}^\dagger"] \\
X_{-1} \arrow[u, "M_\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

Abb. 1.1: Regularisierungsschema

Hinreichende Bedingungen an M_γ bzw. $\tilde{M}_\gamma$, damit $T_\gamma = A^\dagger \tilde{M}_\gamma$ bzw. $S_\gamma = M_\gamma \tilde{A}^\dagger$ Regularisierungen sind, finden sich in Satz 1.21.

Satz 1.21 Seien $(M_\gamma)_{\gamma>0} : X_{-1} \longrightarrow X$ und $(\tilde{M}_\gamma)_{\gamma>0} : Y \longrightarrow Y_1$ Familien stetiger linearer Operatoren. Sei $\gamma : I\!R^+ \times Y \longrightarrow I\!R^+$ eine Abbildung mit $\lim\limits_{\epsilon\to 0,\ g^\epsilon \to g} \gamma(\epsilon, g^\epsilon) = 0$ für alle $g \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ und $g^\epsilon \in Y$ mit $\|g^\epsilon - g\| \leq \epsilon$. Weiterhin gelte :

(i) a) $\|M_\gamma f\| \leq c(\gamma)\|f\|_{-1} \qquad \forall\, f \in X_0$

b) $\|\tilde{M}_\gamma g\|_1 \leq c(\gamma)\|g\| \qquad \forall\, g \in Y$

(ii) a) $\lim\limits_{\gamma\to 0} \|M_\gamma f - f\| = 0 \qquad \forall\, f \in X_0$

b) $\lim\limits_{\gamma\to 0} \|\tilde{M}_\gamma g - g\| = 0 \qquad \forall\, g \in R(A) \oplus R(A)^\perp$

(iii) $c(\gamma)\epsilon \to 0$ für $\epsilon \to 0$

Dann sind $(T_\gamma)_{\gamma>0} := (A^\dagger \tilde{M}_\gamma)_{\gamma>0}$ und $(S_\gamma)_{\gamma>0} := (M_\gamma \tilde{A}^\dagger)_{\gamma>0}$ Regularisierungen von $A^\dagger$.

Einige der bekanntesten Regularisierungsverfahren sind die abgeschnittene Singulärwertzerlegung, Tikhonov-Phillips-Regularisierung und die Landweber-Iteration. Darüber hinaus gibt es Projektionsverfahren und stochastische Methoden sowie weitere Iterationsverfahren, wie zum Beispiel das CG-Verfahren. Definitionen und Funktionsweisen finden sich in [Lou 89]. Allen diesen Verfahren gemein ist, daß sie in das Schema der approximativen Inversen hineinpassen.

Approximative Inverse

Sei wiederum $A : X \longrightarrow Y$ der Operator, durch den das Modell beschrieben wird, und $g \in Y$ die gemessenen Daten, aus denen $f^\dagger = A^\dagger g$ berechnet werden soll. Anstatt der exakten Lösung wird bei der approximativen Inversen eine geglättete Lösung ermittelt mit $f^\dagger \approx f_\gamma = M_\gamma \tilde{A}^\dagger g$. M_γ ist dabei geeignet zu wählen. Bei der approximativen Inversen wird im ersten Schritt das Hilfsproblem $\tilde{A}^{\dagger^*} M_\gamma^* = \Psi_\gamma^*$ gelöst, bei exakt bekannter linken Seite $\tilde{A}^{\dagger^*} M_\gamma^*$. Für diese Berechnung kann man sich genügend Zeit lassen, da dieses Problem im vorhinein unabhängig von den Daten gelöst werden kann. Ist Ψ_γ berechnet, so ergibt sich für die geglättete Lösung

$$f_\gamma = T_\gamma g = M_\gamma \tilde{A}^\dagger g = (\tilde{A}^{\dagger^*} M_\gamma^*)^* g = \Psi_\gamma g$$

Definition 1.22 (Approximative Inverse)
Sei $(M_\gamma)_{\gamma>0}$ eine Familie von Operatoren , so daß $(M_\gamma \tilde{A}^\dagger)_{\gamma>0}$ eine Regularisierung von $A^\dagger$ ist. Die Abbildung $\Psi_\gamma : Y \longrightarrow X$ mit $\tilde{A}^{\dagger^*} M_\gamma^* = \Psi_\gamma^*$ heißt <u>approximative Inverse</u>.
M_γ heißst <u>mathematische Linse</u> oder <u>Mollifier</u>.

1.5 Spezielle Funktionen

Wer sich mit dem Streuproblem beschäftigt, wird früher oder später zwangsweise auf Kugelflächen- und Besselfunktionen stoßen. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen werden in diesem Abschnitt zusammengestellt. Beweisführungen sind z.B nachlesbar in [Wat 58] und [Gra/Mat 66]. Eine umfangreiche Formelsammlung ist in [Abr/Ste 64] zu finden, und ein Zusammenhang dieser speziellen Funktionen zur Helmholtzgleichung und damit zum Streuproblem wird in [Hoc 86] hergestellt.

1.5.1 Kugelflächenfunktionen

Bezeichne $\triangle_p$ den Laplace-Operator im p-dimensionalen, d.h.

$$\triangle_p V = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$$

Definition 1.23 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P_n(x_1, \ldots, x_p)$ ein Polynom.

a) P_n heißt harmonisch, falls
$$\triangle_p P_n = 0$$

b) P_n heißt homogen vom Grad n in p Variablen, falls
$$P_n(tx_1, \ldots, tx_p) = t^n P_n(x_1, \ldots, x_p)$$

Sei $N(p,n)$ die Anzahl der linear unabhängigen homogenen harmonischen Polynome vom Grad n. Dann gilt

$$N(p,n) = \frac{(2n+p-2)(n+p-3)!}{n!(p-2)!} \tag{1.1}$$

Für den, in dieser Arbeit behandelten, Fall p=2 egibt sich $N(2,n) = 2$ falls $n \geq 1$ und $N(2,0) = 1$. Die Polynome sind gegeben durch

$$P_{n,1}(x,y) = (x+iy)^n + (x-iy)^n = 2r^n \cos n\theta$$

$$P_{n,2}(x,y) = (x+iy)^n - (x-iy)^n = 2r^n \sin n\theta$$

wobei $x + iy = re^{i\theta}$.
Der Zusammenhang der harmonischen homogenen Polynome zu den Kugelflächenfunktionen ergibt sich direkt durch :

Definition 1.24 Sei $P_n(x_1, \ldots, x_p)$ ein harmonisches homogenes Polynom vom Grad n in p Variablen, dann heißt die Funktion

$$Y_n : S^{p-1} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$Y_n(x) := P_n(x)$$

Kugelflächenfunktion vom Grad n.

Kugelfächenfunktionen sind folglich die Einschränkung harmonischer homogener Polynome auf die p-dimensionale Einheitssphäre.

Für ein $x \in \mathbb{R}^p$ gilt nun :

$$P_n(x) = P_n(\|x\| \frac{x}{\|x\|}) = \|x\|^n Y_n(\frac{x}{\|x\|})$$

Die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen spielt in der Anwendung eine große Rolle. Zunächst gilt folgendes :

Lemma 1.25 Seien Y_n und Y_k Kugelfächenfunktionen vom Grad n bzw. k. Dann gilt:

$$\int\limits_{S^{p-1}} Y_n(\xi)\overline{Y_k(\xi)}d\xi = 0 \qquad\qquad (n \neq k)$$

Seien $(Y_{n,i})_{i=1}^{N(p,n)}$ linear unabhängige Kugelflächenfunktionen vom Grad n, so können diese, zum Beispiel mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens, orthogonalisiert werden. Führt man diese Orthogonalisierung auf jeder Gradstufe durch, so erhält man ein System orhtogonaler Funktionen $\left((Y_{n,i})_{i=1}^{N(p,n)}\right)_{n=0}^{\infty}$.

Satz 1.26 Sei $\left((Y_{n,i})_{i=1}^{N(p,n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ ein System orthonormalisierter Kugelflächenfunktionen. Dann bilden diese Funktionen eine Orthonormalbasis des $L_2(S^{p-1})$.

Für den Fall $p = 2$ gibt es genau zwei (für $n = 0$ eine) linear unabhängige Kugelflächenfunktionen vom Grad n. Die allgemein gebräuchliche Festlegung ist :

Bezeichnung 1.27

$$Y_n(\omega(x)) = Y_{n,1}(\omega(x)) := e^{in\arg_o(x)}$$
$$Y_{-n}(\omega(x)) = Y_{n,2}(\omega(x)) := e^{-in\arg_o(x)}$$

1.5.2 Bessel-Funktionen

Wieder wird der Laplace-Operator $\triangle_p$ betrachtet. Die Darstellung bezüglich der Polarkoordinaten ($I\!R^p \setminus \{0\} \ni x = r\omega(x)$, mit $r = \|x\|$) lautet :

$$\triangle_p V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{p-1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\triangle_p^* V$$

p beschreibt wiederum die Dimension. Der Operator $\triangle_p^*$ wirkt nur auf die Winkelvariable und wird als Beltrami Operator bezeichnet. Für den Fall p=2 gilt

$$\triangle_p^* V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Sei P_n ein homogenes harmonisches Polynom vom Grad n.
Dann ist $P_n(r\omega(x)) = r^n Y_n(\omega(x))$ und es folgt :

$$0 = \triangle_p P_n(r\omega(x)) = r^{n-2}\left[\triangle_p^* Y_n(\omega(x)) + n(n+p-2)Y_n(\omega(x))\right]$$

Folglich sind Kugelflächenfunktionen Eigenfunktionen des Beltrami Operators.

$$\triangle_p^* Y_n = -n(n+p-2)Y_n \tag{1.2}$$

Von Interesse sind die Lösungen der homogenen Helmholtzgleichung

$$(\triangle_p + k^2)u = 0 \tag{1.3}$$

die im Zusammenhang mit dem Streuproblem auftreten.

Nach Seperation von $u(r\omega(x)) = f_n(r)Y_n(\omega(x))$ in einen radialen und einen winkelabhängigen Anteil ändert sich (1.3) zu

$$\left(f_n'' + \frac{p-1}{r}f_n' + k^2 f_n\right) Y_n + \frac{1}{r^2} f_n \triangle_p^* Y_n = 0 \tag{1.4}$$

Nach (1.2) ergibt sich

$$f_n'' + \frac{p-1}{r}f_n' + \left[k^2 - \frac{n(n+p-2)}{r^2}\right] f_n = 0 \tag{1.5}$$

Durch Substitution mit $z = kr$ und $g(z) = f(\frac{z}{k})$ folgt

$$g_n'' + \frac{p-1}{z}g_n' + \left[1 - \frac{n(n+p-2)}{z^2}\right] g_n = 0 \tag{1.6}$$

und durch nochmaliges Substituieren mit $\nu = n + \frac{p}{2} - 1$ und $g_n(z) = z^{1-\frac{p}{2}} h_\nu(z)$ reduziert sich die Differentialgleichung zu

$$h_\nu'' + \frac{h_\nu'}{z} + \left[1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right] h_\nu = 0 \tag{1.7}$$

Gleichung 1.7 heißt Besselsche Differentialgleichung. Die Lösungen dieser Gleichung heißen allgemein Besselfunktionen oder Zylinderfunktionen. Einige von ihnen haben einen speziellen Namen. Definition und einige elementare Eigenschaften dieser speziellen Besselfunktionen sind im Anhang aufgeführt. Weitere Eigenschaften werden in den noch folgenden Sätzen bereitgestellt. Die Satzaussagen sind speziell für diese Arbeit zusammengestellt. Die Beweisführungen bzw. die Beweisideen stammen aus [Hoc 86].

Satz 1.28 Sei $0 < x < y$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $\nu \in \mathbb{C}$ sei

$$\begin{aligned} & f_\nu(z) = aJ_\nu(\lambda z) + bN_\nu(\lambda z) \\ \text{und} \quad & g_\nu(z) = cJ_\nu(\mu z) + dN_\nu(\mu z) \quad \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

(i) Ist $\mu^2 \neq \lambda^2$, dann gilt :

$$\begin{aligned} \int_x^y z f_\nu(z) g_\nu(z)\, dz &= \tfrac{z}{\lambda^2-\mu^2}\left(f_\nu'(z)g_\nu(z) - f_\nu(z)g_\nu'(z)\right)\Big|_x^y \\ &= \tfrac{z}{\lambda^2-\mu^2}\left(\lambda f_{\nu+1}(z)g_\nu(z) - \mu f_\nu(z)g_{\nu+1}(z)\right)\Big|_x^y \end{aligned}$$

(ii) Ist $\mu^2 = \lambda^2$, dann gilt :

$$\int_x^y z f_\nu(z) g_\nu(z)\, dz = \tfrac{1}{2\lambda^2}\left(z^2 f_\nu'(z)g_\nu'(z) + (\lambda^2 z^2 - \nu^2) f_\nu(z)g_\nu(z)\right)\Big|_x^y$$

Beweis: zu(i) Sei $\lambda^2 \neq \mu^2$

Seien f_ν, g_ν wie im Satz, dann erfüllen sie die abgewandelte Bessel'sche Differentialgleichung (siehe 31 Anhang)

$$\begin{aligned} z^2 f_\nu^{''}(z) + z f_\nu^{'}(z) + (\lambda^2 z^2 - \nu^2) f_\nu(z) &= 0 \\ \textit{bzw.} \quad z^2 g_\nu^{''}(z) + z g_\nu^{'}(z) + (\mu^2 z^2 - \nu^2) g_\nu(z) &= 0 \end{aligned}$$

Nach Division durch z erhält man

$$(z f_\nu^{'})^{'}(z) + (\lambda^2 z - \frac{\nu^2}{z}) f_\nu(z) = 0 \tag{1.8}$$

$$(z g_\nu^{'})^{'}(z) + (\mu^2 z - \frac{\nu^2}{z}) g_\nu(z) = 0 \tag{1.9}$$

Subtraktion der mit $g_\nu(z)$ bzw. $f_\nu(z)$ multiplizierten Gleichungen (1.8) bzw. (1.9) voneinander und anschließendes Integrieren ergibt

$$0 = \int_x^y (z f_\nu^{'})^{'}(z) g_\nu(z) + (\lambda^2 - \mu^2) z f_\nu(z) g_\nu(z) - (z g_\nu^{'})^{'}(z) f_\nu(z) \; dz$$

Partielle Integration führt zu

$$0 = z f_\nu^{'}(z) g_\nu(z)\Big|_x^y - z g_\nu^{'}(z) f_\nu(z)\Big|_x^y + \int_x^y (\lambda^2 - \mu^2) z f_\nu(z) g_\nu(z) \; dz \tag{1.10}$$

und damit ist der erste Teil der Behauptung (i) bewiesen.
Mit Hilfe von 27 Anhang folgt

$$\begin{aligned} f_\nu^{'}(z) &= \lambda(\tfrac{\nu}{\lambda z} f_\nu(z) - f_{\nu+1}(z)) \\ \text{und} \quad g_\nu^{'}(z) &= \mu(\tfrac{\nu}{\mu z} g_\nu(z) - g_{\nu+1}(z)) \end{aligned}$$

Dies zusammen mit (1.10) ergibt den zweiten Teil der Behauptung (i).

zu(ii) :
Sei $\lambda^2 = \mu^2$. Multiplizieren der Gleichung (1.9) mit $z f_\nu^{'}(z)$ und anschließendes Integrieren ergibt

$$0 = \int_x^y z f_\nu^{'}(z) (z g_\nu^{'})^{'}(z) + \lambda^2 z^2 f_\nu^{'}(z) g_\nu(z) - \nu^2 f_\nu^{'}(z) g_\nu(z) \; dz \tag{1.11}$$

Analog erhält man aus (1.8)

$$0 = \int_x^y z g_\nu^{'}(z) (z f_\nu^{'})^{'}(z) + \lambda^2 z^2 g_\nu^{'}(z) f_\nu(z) - \nu^2 g_\nu^{'}(z) f_\nu(z) \; dz \tag{1.12}$$

Partielles Integieren von (1.11) führt zu

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 f_\nu'(z) g_\nu'(z)\Big|_x^y + \lambda^2 z^2 f_\nu(z) g_\nu(z)\big|_x^y - \nu^2 f_\nu(z) g_\nu(z)\big|_x^y - \int_x^y 2\lambda^2 z f_\nu(z) g_\nu(z)\ dz \\ & \underbrace{- \int_x^y z g_\nu'(z)(z f_\nu')'(z) + \lambda^2 z^2 g_\nu'(z) f_\nu(z) - \nu^2 g_\nu'(z) f_\nu(z)\ dz}_{=0 \text{ nach } (1.12)} \end{aligned}$$

■

Hieraus ergibt sich fast sofort das Korollar 1.29.

Korollar 1.29 Sind $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$ und

(i) $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Nullstellen von J_m, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \int_0^1 r J_m(\lambda r) J_m(\mu r)\ dr = 0 \qquad , \text{falls } \lambda^2 \neq \mu^2 \\ &\text{b)} \quad \int_0^1 r J_m^2(\lambda r)\ dr = \tfrac{1}{2\lambda^2} [J_m'(\lambda)]^2 \end{aligned}$$

(ii) $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Nullstellen von $aJ_m(r) + rJ_m'(r)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \int_0^1 r J_m(\lambda r) J_m(\mu r)\ dr = 0 \qquad , \text{falls } \lambda^2 \neq \mu^2 \\ &\text{b)} \quad \int_0^1 r J_m^2(\lambda r)\ dr = \tfrac{1}{2\lambda^2} [a^2 + \lambda^2 - m^2] J_m^2(\lambda) \end{aligned}$$

Beweis: Nach 10 und 11 Anhang bleiben die Besselfunktionen J_m in einer Umgebung von Null beschränkt. Ausnutzen von 28 Anhang liefert dann

$$\begin{aligned} \lim_{x \to o} \tfrac{r}{\lambda^2 - \mu^2} \Big(\lambda J_m'(\lambda r) J_m(\mu r) - \mu J_m(\lambda r) J_m'(\mu r) \Big)\Big|_x^1 &= \tfrac{1}{\lambda^2 - \mu^2} \Big(\lambda J_m'(\lambda) J_m(\mu) - \mu J_m(\lambda) J_m'(\mu) \Big) \\ \lim_{x \to o} \tfrac{1}{2\lambda^2} \Big(r^2 [\lambda J_m'(\lambda r)]^2 + (\lambda^2 r^2 - m^2) J_m^2(\lambda r) \Big)\Big|_x^1 &= \tfrac{1}{2\lambda^2} \Big([\lambda J_m'(\lambda)]^2 + (\lambda^2 - m^2) J_m^2(\lambda) \Big) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun nach Satz 1.28 mit $f(z) = J_m(\lambda z)$ und $g(z) = J_m(\mu z)$ unter Berücksichtigung der Voraussetzungen $J_m(\lambda) = 0 = J_m(\mu)$ bzw. $J_m'(\lambda) = \frac{-aJ_m(\lambda)}{\lambda}$. ■

Kapitel 2

Mathematische Modellierung

2.1 Problemstellung

Wie schon aus dem Titel hervorgeht, kann nicht von dem Streuproblem gesprochen werden. Es gibt Unterschiede in der Art der Wellen, z.B. akustische, elastische oder elektromagnetische Wellen. Die Wellen können in ihrer Frequenz modelliert werden. Weiterhin muß man zwischen der 2- und 3-dimensionalen Geometrie differenzieren. Die mathematische Modellierung ist auch von der Beschaffenheit des Objektes (z.B. durchdringlich, perfekt absorbierend, perfekt reflektierend) abhängig. Zuletzt läßt sich das Problem mit der Wahl des Hintergrundmediums variabel gestalten. Ziel dieses Abschnittes ist es, den diese Arbeit betreffenden Streuvorgang zu beschreiben.

Vorausgesetzt wird die 2-dimensionale Geometrie. Die Meßanordnung läßt sich, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, schematisieren. Das zu untersuchende Gebiet Ω ist eine Kreisscheibe mit Radius R um den Nullpunkt. Das Objekt, im folgendem auch Streuer genannt, befindet

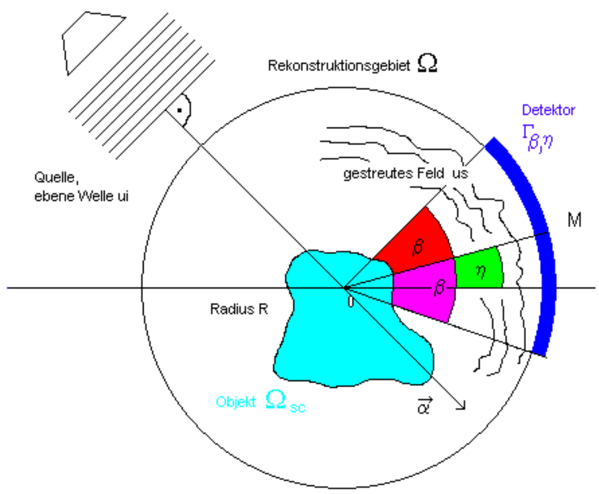

Abb. 2.1: Meßanordnung

sich im Untersuchungsgebiet Ω. Ω_{sc} bezeichnet in der Abbildung den Träger des Streuers. Der Sender generiert eine akkustische ebene[1] Welle u_i. Diese Welle bezeichnet man als einfallendes Feld. Trifft diese Welle auf das Objekt, so wird sie gebrochen, und es entstehen neue Wellen, das gestreute Feld u_s. Der Streuer sei eingebettet in einen homogenen, isotropen[2] Hintergrund. Das Modell dieser Arbeit geht von einem durchdringlichen[3] Streuer aus. Der Vektor $\vec{\alpha}$ aus der Einheitsspähre $S^1 = \{x \in I\!R^2 : \|x\| = 1\}$ beschreibe die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle. Mit Hilfe eines Detektors wird das gestreute Feld auf einem Kreisbogenstück $\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}$ gemessen. Hierbei ist $\alpha = arg_o(\vec{\alpha})$ die eindeutige Zahl in $[0; 2\pi)$ mit $e^{i\alpha} = \vec{\alpha}$. η ist eine Abbildung, die den Mittelpunkt $M = e^{i\eta(\alpha)}$ des Detektors in Abhängigkeit der Ausbreitungsrichtung $\vec{\alpha}$ festlegt. Der Detektor $\Gamma_{\beta,\eta}$ habe den Meßwinkel 2β, d.h. $\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)} = \{Re^{i\delta} \mid \delta \in [\eta(\alpha)-\beta; \eta(\alpha)+\beta]\}$. Eine Praxisrelevante Abbildung η wäre zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \eta : [0; 2\pi) &\longrightarrow [0; 2\pi) \\ \alpha &\longrightarrow \alpha \end{aligned}$$

Durch diese Zuweisung würden der Detektor und der Sender im Modell stets gegenüberstehen. Dieser Meßvorgang wird für verschiedene Richtungen $\vec{\alpha}$ wiederholt. Ziel ist es, aus diesen Daten den Streuer zu rekonstruieren.

2.2 Physikalische Grundlagen

Sei $\Omega := B_R(0)$ die Kreisscheibe in der komplexen Ebene mit Radius R und Mittelpunkt 0. Für das Objekt gelte $\overline{\Omega_{sc}} \subset \Omega$. Sei weiterhin $U(x,t)$ die Funktion der Gesamtwelle am Ort x zum Zeitpunkt t. $c(x)$ beschreibe die Geschwindigkeit der Welle am Ort x. Für zeitharmonische Wellen gilt

$$\triangle U(x,t) - \frac{1}{c^2(x)} U_{tt}(x,t) = 0 \tag{2.1}$$

Um auf den zeitabhängigen Teil der Welle verzichten zu können, wird ein Seperationsansatz vorgenommen.

$$U(x,t) = u(x) e^{-i\omega t} \tag{2.2}$$

wobei ω die Frequenz der einfallenden Welle angibt. Sei c_0 die Referenzgeschwindigkeit der Welle im Hintergrundmedium und k die Wellenzahl der einfallenden Welle. Zwischen diesen Größen besteht der Zusammenhang

$$k = \frac{\omega}{c_0} \tag{2.3}$$

und für den Brechungsindex n einer Welle gilt

$$n(x) = \frac{c_0}{c(x)} \tag{2.4}$$

[1]Die Anregung mittels ebener Wellen ist keine starke Einschränkung, da jedes Wellenfeld aus der Überlagerung ebener Wellen synthetisierbar ist.

[2]Medium, dessen physikalische Eigenschaften, wie Brechungsindex oder Wärmeleitfähigkeit, richtungsunabhängig sind.

[3]Der Unterschied zu absorbierenden bzw. reflektierenden Streuer liegt in der mathematischen Modellierung (siehe [Abd 98])

Einsetzen von (2.2) in (2.1) führt zu

$$\begin{aligned} & e^{-i\omega t}\triangle u(x) + \tfrac{1}{c^2(x)}u(x)\omega^2 e^{-i\omega t} &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \triangle u(x) + \tfrac{c_0^2}{c^2(x)}\tfrac{\omega^2}{c_0^2}u(x) &= 0 \\ \overset{(2.3)(2.4)}{\Longleftrightarrow} \quad & \triangle u(x) + n^2(x)k^2u(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ziel ist es, den Brechungsindex n im Inneren des Objektes zu bestimmen, da dieser charakteristisch für die Materialeigenschaft ist. Gleichwertig dazu ist die Berechnung der Objektfunktion f

$$f(x) := n^2(x) - 1 \tag{2.6}$$

Bemerkung 2.1

a) Die Objektfunktion beschreibt die Diskontinuität, daß heißt die relative Änderung der Schallgeschwindigkeit bezüglich des homogenen Hintergrundmediums.
b) f ist so definiert, daß $\Omega_{sc} = \mathrm{supp}(f) \subset \Omega$

Der Vektor $\vec{\alpha} \in S^1$ beschreibe die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle. In Abhängigkeit der Richtung $\vec{\alpha}$ wird folgende Wahl für die zeitharmonische ebene Welle u_i getroffen.

$$u_i^\alpha(x) = e^{ik<\vec{\alpha},x>} \tag{2.7}$$

u_i^α erfüllt somit die homogene Differentialgleichung

$$(\triangle + k^2)u_i^\alpha = 0 \tag{2.8}$$

Das einfallende Feld u_i^α und das gestreute Feldes u_s^α addieren sich nach dem Huygensschen Prinzip zum Gesamtfeld u^α

$$u^\alpha = u_i^\alpha + u_s^\alpha \tag{2.9}$$

Benutzt man (2.5) - (2.9), so hat man folgendes Problem zu lösen :

$$(\triangle + k^2)u_s^\alpha(x) = -k^2 f(x)u^\alpha(x) \tag{2.10}$$

Formel (2.10) heißt Helmholtzgleichung.

Um Eindeutigkeit für die Lösung des direkten Problems zu erhalten, stellt man an das gestreute Feld die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s\right) = 0, \quad r = \|x\| \tag{2.11}$$

Physikalisch gesehen wird durch die Gleichung (2.11) gesichert, daß es sich bei dem gestreuten Feld um eine auslaufende Welle handelt (vgl.[Col/Kre 92]).

Mit Hilfe der Green'schen Funktion läßt sich das Gleichungssystem (2.10)-(2.11) transformieren zu

$$u_s^\alpha(x) = k^2 \int_\Omega G(k\|x-y\|)f(y)u^\alpha(y)dy \tag{2.12}$$

Gleichung (2.12) heißt Lippmann-Schwinger-Gleichung. G bezeichnet die raumfreie Green'sche Funktion, d.h die Lösung der Gleichung

$$(\triangle + k^2)G = -\delta$$

Im 2-dimensionalen Fall gilt $G(k\|x-y\|) = \frac{i}{4}H_0(k\|x-y\|)$, wobei H_0 die Hankelfunktion erster Art der Ordnung 0 ist (vgl.[Mor/Fes 53]).

2.3 Mathematische Formulierung des Streuproblems

Je nach Voraussetzung unterscheidet man zwischen direktem und inversem Streuproblem.

Definition 2.2
a) Das Problem der Rekonstruktion des Objektes f, bei Kenntnis gewisser Eigenschaften des Feldes u, heißt inverses Streuproblem.

b) Andererseits kann man die Eigenschaften des Mediums als bekannt voraussetzen. Dann wird die Problematik der Bestimmung des Feldes u als direktes Streuproblem bezeichnet.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit wird auf die Lösung des inversen Problems gerichtet. Doch die hergeleiteten Algorithmen benötigen als Eingabe das gestreute Feld. Aus diesem Grund wird das direkte Problem gelöst.

Zunächst jedoch folgt eine Notationsfestlegung.

Bezeichnung 2.3 Seien alle Bezeichungen für Funktionen und Mengen wie in Abschnitt 2.2. Für $f \in L_2(\Omega)$ sei

$$\begin{aligned} &\overline{A}_f : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega) \\ &\overline{A}_f u(x) := k^2 \int_\Omega G(k\|x-y\|)f(y)u(y)dy \end{aligned}$$

2.3.1 Das direkte Streuproblem

Bei dem direkten Problem sind das einfallende Feld u_i, die Wellenzahl k und die Objektfunktion f als bekannt vorausgesetzt. Das Feld u_i löse zusätzlich die homogene Helmholtzgleichung (2.8). Gesucht ist eine Lösung des Systems (2.9)-(2.11).

Satz 2.4 Sei $f \in L_\infty(\Omega), u_i$ eine Funktion die (2.8) erfüllt und $k \in I\!R$.
Dann gibt es genau eine Lösung u des Systems (2.9)-(2.11), und u ist die eindeutige Lösung der Gleichung $(I - \overline{A}_f)u = u_i$.

Beweis: Siehe [Col/Kre 92]. ∎

Bemerkung 2.5 Satz 2.4 zeigt eine Möglichkeit, wie das direkte Problem numerisch zu lösen ist. Dafür wird die lineare Integralgleichung $(I - \overline{A}_f)u = u_i$ diskretiesiert.

Im folgenden wird das direkte Streuproblem für kreisförmige homogene Streuer analytisch gelöst. Die Lösung stammt aus [Wue 95].

Satz 2.6 Seien ρ,λ,$k \in I\!R$ und $K = B_\rho(0)$ die Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius ρ. Für die Objektfunktion f gelte:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda & \text{falls } \|x\| < \rho \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiterhin seien u_i wie in (2.7), $\vec{\alpha} \in S^1$ und $\alpha = arg_o(\vec{\alpha})$. Setze $k_1 := k\sqrt{1+\lambda}$.
Dann ist das Gesamtfeld (Angabe in Polarkoordinaten)

$$u^\alpha(r,\varphi) := \begin{cases} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} c_m i^m J_m(k_1 r) e^{im(\varphi-\alpha)} & \text{falls } r < \rho \\ \\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} i^m (J_m(kr) + a_m H_m(kr)) e^{im(\varphi-\alpha)} & \text{falls } r \geq \rho \end{cases}$$

eindeutige Lösung des Systems (2.9)-(2.11).
Die Koeffizienten c_m,a_m sind durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_m J_m(k_1\rho) &= J_m(k\rho) + a_m H_m(k\rho) \\ c_m k_1 (J_{m-1}(k_1\rho) - J_{m+1}(k_1\rho)) &= k(J_{m-1}(k\rho) - J_{m+1}(k\rho)) + a_m k(H_{m-1}(k\rho) - H_{m+1}(k\rho)) \end{aligned}$$

bestimmt.

Beweis: Die homogene Helmholtzgleichung (2.8) hat in den Polarkoordinaten (r,φ) im $I\!R^2$ die Form

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0$$

Mit dem Seperationsansatz $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ gilt

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \tag{2.13}$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0 \tag{2.14}$$

Ein Fundamentalsystem zu 2.13 ist

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} e^{im\varphi} \\ e^{-im\varphi} \end{cases} \tag{2.15}$$

und zu 2.14

$$R(r) = \begin{cases} J_m(kr) \\ H_m(kr) \end{cases} \tag{2.16}$$

für $k \neq 0, m \in \mathbb{N}$ (vgl. [Abr/Ste 64]).

Bemerkung 2.7 Die zu den Hankelfunktionen gehörenden Basislösungen $H_m(kr)e^{\pm im\varphi}$ erfüllen die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (2.11).

Die einfallende Welle u_i aus Gleichung (2.7) hat in Polarkoordinaten (r,φ) die Gestalt $u_i^\alpha(r,\varphi) = e^{ikr\cos(\varphi-\alpha)}$. Diese Funktion läßt sich wiederum in eine Fourierreihe entwickeln.

$$u_i^\alpha(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m e^{im(\varphi-\alpha)} \tag{2.17}$$

mit den Fourierkoeffizienten $u_m = i^m J_m(kr)$ (siehe [Abr/Ste 64]).

Nach Bemerkung 2.7 und (2.17) ist es klar, daß das Feld u für $r \geq \rho$ die Darstellung

$$u^\alpha(r,\varphi) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im(\varphi-\alpha)}}_{u_i} + \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m i^m H_m(kr) e^{im(\varphi-\alpha)}}_{u_s} \tag{2.18}$$

mit Koeffizienten $a_m \in \mathbb{C}$ besitzt.

Die Geschwindigkeit der Welle ist nach (2.4) konstant im Inneren des Objektes und hat somit nach (2.3) eine konstante Wellenzahl k_1. Explizit ausgerechnet ergibt sich für k_1 in Abhängigkeit von k und λ

$$k_1 = k\sqrt{1+\lambda} \tag{2.19}$$

Nach (2.15) und (2.16) besitzt u auf K die Darstellung

$$u^\alpha(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m i^m J_m(k_1 r) e^{im(\varphi-\alpha)} \tag{2.20}$$

Die Koeffizienten a_m und c_m sind noch so zu bestimmen, daß $u \in C^2(\mathbb{R})$. Um Stetigkeit zu erreichen, müssen die Gleichungen (2.20) und (2.18) auf dem Rand von K übereinstimmen. Das bedeutet für die Koeffizienten

$$c_m J_m(k_1\rho) = J_m(k\rho) + a_m H_m(k\rho)$$

Für die Differenzierbarkeit werden die Normalableitungen $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ auf dem Rand von K gleich gesetzt, d.h.

$$c_m k_1 J_m^{'}(k_1\rho) = kJ_m^{'}(k\rho) + a_m k H_m^{'}(k\rho)$$

Nach [Abr/Ste 64] gilt für die Besselfunktionen $2J_m^{'}(t) = J_{m-1}(t) - J_{m+1}(t)$ für ganzzahlige Ordnungen m. Entsprechend gilt auch für die Hankelfunktionen $2H_m^{'} = H_{m-1}(t) - H_{m+1}(t)$.

Zusammengefaßt erhält man die Bedingungen für die Koeffizienten c_m und a_m wie im Satz behauptet. Durch die Bemerkung 2.7 ist gesichert, daß das gestreute Feld die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung erfüllt, und die Eindeutigkeit folgt aus Satz 2.4.

■

2.3.2 Das inverse Streuproblem

Durch Messungen des gestreuten Feldes u_s^α auf dem Detektor $\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}$ erhält man die Daten $g^\alpha \in L_2(\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)})$ für alle $\alpha \in [0, 2\pi)$. Zusätzlich sind die durch den Sender generierten einfallenden Felder $u_i^\alpha \in L_2(\Omega)$ bekannt. Das Interesse gilt nun der Bestimmung der materialbeschreibenden Objektfunktion $f \in L_2(\Omega)$. Betrachtet man den Operator

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}}: \quad & L_2(\Omega) \longrightarrow \bigotimes_{\alpha\in[0;2\pi)} L_2(\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}) \\ & \overline{\overline{A}}f(x^\alpha)_{\alpha\in[0;2\pi)} = \left(k^2 \int_\Omega G(k\|x^\alpha - y\|)f(y)u^\alpha(y)\ dy\right)_{\alpha\in[0;2\pi)} \end{aligned}$$

für alle $(x^\alpha)_{\alpha\in[0;2\pi)} \in \bigotimes_{\alpha\in[0;2\pi)} \Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}$, so besteht das inverse Streuproblem in der Lösung der Gleichung

$$\overline{\overline{A}}f = (g^\alpha)_{\alpha\in[0;2\pi)}.$$

So formuliert entsteht der Eindruck, daß es sich hierbei um ein lineares Problem handelt. Es ist aber zu beachten, daß die Funktionen u^α, die im Operator $\overline{\overline{A}}$ auftauchen, nur auf dem Rand von Ω bekannt sind und von f selbst abhängen. Die Beziehung zwischen den Feldern u^α und f wird durch die Gleichung $(I - \overline{A}_f)u^\alpha = u_i^\alpha$ beschrieben (vgl. Satz 2.4).

2.4 Der Zugang über die äquivalenten Quellen

Einen Ausweg aus der Nichtlinearität bietet der Zugang über die äquivalenten Quellen. Dieser Lösungsweg wurde übernommen aus [Abd/Lou 99]. Dabei wird versucht, seperat für jedes einfallende Feld u_i^α, ein f^α und $u^\alpha \in L_2(\Omega)$ zu finden, so daß die Lippmann-Schwinger-Gleichung (2.12)

$$g^\alpha(x) = k^2 \int_\Omega G(k\|x - y\|)f^\alpha(y)u^\alpha(y)\ dy$$

für alle x auf dem Detektor $\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}$ erfüllt wird. Es wurde die sich anschließende Vorgehensweise vorgeschlagen :

Schritt 1: Definiere $\Phi^\alpha := fu^\alpha$

Schritt 2: Löse die lineare Integralgleichung $A^\alpha\Phi^\alpha = g^\alpha$ wobei

$$\begin{aligned} & A^\alpha : L_2(\Omega) \to L_2(\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}) \\ & A^\alpha\Phi(x) = k^2 \int_\Omega G(k\|x - y\|)\Phi(y)\ dy \end{aligned}$$

Schritt 3: Berechne mit Hilfe der Lippmann-Schwinger-Gleichung (2.12) das gestreute Feld u_s^α auf dem Rekonstruktionsgebiet Ω.

$$u_s^\alpha(x) = \overline{A}_{id}\Phi^\alpha(x) = k^2 \int_\Omega G(k\|x - y\|)\Phi^\alpha(y)\ dy$$

Schritt 4: Berechne $f^\alpha = \dfrac{\Phi^\alpha}{u^\alpha} = \dfrac{\Phi^\alpha}{\overline{A}_{id}\Phi^\alpha + u_i^\alpha}$.

Schritt 5: Mittelung der berechneten f^α über die verschiedenen Einfallsrichtungen.

Bezeichnung 2.8 Die Funktionen Φ^α aus Schritt 1 werden in der Literatur als äquivalente Quellen bezeichnet.

Ist einmal die Integralgleichung in Schritt 2 gelöst, so stellen die nachfolgenden Schritte höchstens noch numerische Probleme dar. Deshalb ist es wichtig, das Problem in Schritt 2 genauer zu analysieren. Zunächst stellt sich sofort die Frage nach der Schlechtgestelltheit (vgl. Hadamard Definition 1.14). Ist die Gleichung $A\Phi^\alpha = g^\alpha$ eindeutig lösbar und hängt die Lösung Φ^α stetig von den Daten ab? Dann ist es wichtig zu wissen, wie das Gleichungssystem gut und effektiv zu lösen ist. Weiterhin stellt sich die Frage, ob das seperate Lösen der Gleichungen, ohne die Abhängigkeit der einzelnen Richtungen untereinander zu berücksichtigen, überhaupt sinnvoll sein kann. Denn daß die äquivalenten Quellen Φ^α ($\alpha \in [0, 2\pi)$) voneinander abhängen, geht aus Abschnitt 2.3.2 hervor. Zu diesen Fragen wird in dieser Arbeit Stellung genommen.

Ein Instrument zur Analyse eines Problems bietet das singuläre System des Operators der das Problem beschreibt. Dieses wird in Kapitel 4.1 hergeleitet. Um dies jedoch angehen zu können, wird eine spezielle, dem Operator A^α angepaßte Basis des $L_2(\Omega)$ benötigt, deren Herleitung nun folgt.

Kapitel 3

Basis von $L_2(\Omega)$

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Bereitstellung einer an das Problem angepaßten Basis des $L_2(\Omega)$. Mit dieser Basis wird es möglich sein die Singulärwertzerlegung und den Nullraum des Operators A^α anzugeben. Alle benutzten Eigenschaften von Besselfunktionen sind im Anhang mit Literaturangabe aufgeführt.

Lemma 3.1 Sei $m \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Weiterhin sei $N(r) = aJ_m(r) + rJ_m^{'}(r)$. Dann gilt :

(i) λ ist genau dann Nullstelle von $N(r)$, wenn $-\lambda$ Nullstelle von $N(r)$ ist.

(ii) λ ist genau dann Nullstelle von $J_m(r)$, wenn $-\lambda$ Nullstelle von $J_m(r)$ ist.

Beweis: Es gilt $J_m(z) = (-1)^m J_m(-z)$ und damit ist der Fall (ii) schon bewiesen. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
0 = N(\lambda) \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = aJ_m(\lambda) + \lambda J_m^{'}(\lambda) \\
&\overset{28\text{ Anhang}}{\Leftrightarrow} \quad 0 = aJ_m(\lambda) + \tfrac{\lambda}{2}(J_{m-1}(\lambda) - J_{m+1}(\lambda)) \\
&\overset{3\text{ Anhang}}{\Leftrightarrow} \quad 0 = (-1)^m aJ_m(-\lambda) + (-1)^{m+1}\tfrac{\lambda}{2}(J_{m-1}(-\lambda) - J_{m+1}(-\lambda)) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = (-1)^m \left(aJ_m(-\lambda) + \tfrac{-\lambda}{2}(J_{m-1}(-\lambda) - J_{m+1}(-\lambda))\right) \\
&\overset{28\text{ Anhang}}{\Leftrightarrow} \quad 0 = aJ_m(-\lambda) + (-\lambda)J_m^{'}(-\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = N(-\lambda)
\end{aligned}$$

■

Eine erstaunliches Aussage liefert folgender Satz. Er liefert eine Verallgemeinerung der Aussage des entsprechenden Satzes in [Hoc 86]. Die Existenzen und die Abzählbarkeit der Nullstellen, die im Satz auftauchen, folgen aus den Punkten 4 - 8 Anhang.

Satz 3.2 Sei $m \in \mathbb{Z}$ und

(i) sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a+|m| \geq 0$. Seien λ_n $(n \in \mathbb{N})$ die positiven Nullstellen von $aJ_m(r)+rJ_m^{'}(r)$ und $e_n(r) := \sqrt{r}J_m(\lambda_n r)$.

(ii) sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a + |m| < 0$. Sei λ_0 die Nullstelle von $aJ_m(r) + rJ_m^{'}(r)$ auf der positiven imaginären Achse $\{ix \mid x \in \mathbb{R}^+\}$ und λ_n $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ die positiven Nullstellen von $aJ_m(r) + rJ_m^{'}(r)$. Sei $e_0(r) := i^m\sqrt{r}J_m(\lambda_0 r)$ und $e_n(r) := \sqrt{r}J_m(\lambda_n r)$ falls $n \geq 1$.

(iii) seien λ_n ($n \in I\!N$) die positiven Nullstellen von $J_m(r)$ und $e_n(r) := \sqrt{r} J_m(\lambda_n r)$.

In allen drei Fällen bilden die Funktionen $(e_n)_{n \in I\!N}$ eine Orthogonalbasis des $L_2(0,1)$.

Beweis: Die Existenz der Nullstellen in allen drei Fällen folgt aus 4-8 Anhang. Der Faktor i^m bei der Definition von e_0 im Fall (ii) garantiert, daß die Funktion reelwertig bleibt. Dies folgt aus 3 Anhang. Die Orthogonalität ist eine direkte Folgerung aus Korollar 1.29. Zu zeigen bleibt lediglich die Vollständigkeit. Nach Lemma 3.1 sind λ_n und $-\lambda_n$ Nullstellen. Da aber die Funktion $J_m(\lambda r)$ und $J_m(-\lambda r)$ nach 3 Anhang linear voneinander abhängen, werden nur die positiven Nullstellen bzw. nur eine der zwei rein imaginären Nullstellen herangezogen.

Die Funktionen e_n lösen die Differentialgleichung

$$y''(r) + \left[\lambda_n^2 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right] y(r) = 0,$$

die zwei Lösungen

$$y_1(r) = \sqrt{r} J_m(\lambda_n r)$$
$$y_2(r) = \sqrt{r} N_m(\lambda_n r)$$

besitzt.

Da sich N_ν ($\nu > 0$) verhält wie $r^{-\nu}$ für $r \longrightarrow 0$ folgt, daß das Integral $\int_0^1 y_2^2(r)dr$ nicht existiert, wenn $m \geq 1$.

Damit lassen sich die Funktionen e_n für $m \geq 1$ bis auf Konstanten eindeutig charakterisieren als Lösung eines Eigenwertproblems. Sei im folgenden $Ly(r) := y''(r) - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} y(r)$. Mit den Restriktionen

$$y \text{ ist Eigenfunktion des Differentialoperators } L \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} ay(1) + y'(1) &= 0 \qquad \text{im Fall (i) und (ii)} \\ y(1) &= 0 \qquad \text{im Fall (iii)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\int_0^1 y^2(r)dr < \infty \tag{3.3}$$

erhält man

Satz 3.3 Sei $m \in I\!N \setminus \{0\}$. Dann gilt :
$y \in \{\text{span}\{e_n\} \mid n \in I\!N\}$ genau dann, wenn y die Bedingungen (3.1)-(3.3) erfüllt.

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus den Konstruktionen der Funktionen e_n und obigen Vorbemerkungen.

$\blacksquare$ *Satz* 3.3

Der Fall $m < 1$ wird im Anschluß seperat betrachtet.

Im weiteren Beweisverlauf werden die Bedingungen (3.1)-(3.3) ersetzt durch eine Restriktion. Dafür wird der zum Differentialoperator L gehörende Integraloperator benötigt, der die Randbedingungen (3.2) und (3.3) enthält. Gesucht ist also die Green'sche Funktion für den Differentialoperator L.

Im Fall (i) und Fall (ii) lautet sie

$$G(r,\xi) = \frac{1}{2mc_{a,m}} \begin{cases} (\xi^{\frac{1}{2}+m} - c_{a,m}\xi^{\frac{1}{2}-m})r^{\frac{1}{2}+m} & r < \xi \\ \xi^{\frac{1}{2}+m}(r^{\frac{1}{2}+m} - c_{a,m}r^{\frac{1}{2}-m}) & r > \xi \end{cases}$$

mit $c_{a,m} = \frac{a+\frac{1}{2}+m}{a+\frac{1}{2}-m}$ wie im folgenden bewiesen wird.

Lemma 3.4 Sei y Eigenfunktion des Operators L, dann gilt $y(\xi)\frac{\partial G(r,\xi)}{\partial \xi} - G(r,\xi)y^{'}(\xi)\Big|_0^1 = 0$ für alle $r \in [0,1]$ genau dann, wenn y die Bedingungen (3.2) und (3.3) erfüllt.

Beweis: Seien $v_1(r) = r^{\frac{1}{2}+m}$, $v_2(r) = r^{\frac{1}{2}+m} - c_{a,m}r^{\frac{1}{2}-m}$ und $y(\xi) = c1\sqrt{\xi}J_m(\lambda\xi) + c2\sqrt{\xi}N_m(\lambda\xi)$ eine beliebige Eigenfunktion von L mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es gelte

$$0 = y(\xi)\,\frac{\partial G(r,\xi)}{\partial \xi} - G(r,\xi)y^{'}(\xi)\Big|_0^1 \qquad \forall\ r \in [0,1] \tag{3.4}$$

Ausrechnen liefert
$0 = v_1(r)\left[y(1)\left(\frac{1}{2} + m - (\frac{1}{2} - m)c_{a,m}\right) - y^{'}(1)(1 - c_{a,m})\right] + v_2(r)\lim\limits_{\xi \to 0} \xi^{-\frac{1}{2}+m}y(\xi) - \xi^{-\frac{1}{2}-m}y^{'}(\xi)$

Da sich $N_m^{'}(\lambda\xi)$ verhält wie ξ^{-m-1} für $\xi \longrightarrow 0$ muß, damit der Grenzwert existiert, c2=0 gelten. Da sich $J_m(\lambda\xi)$ verhält wie ξ^m für $\xi \longrightarrow 0$ ist (3.4) aequivalent zu

$0 = y(1)\left(\frac{1}{2} + m - (\frac{1}{2} - m)c_{a,m}\right) - y^{'}(1)(1 - c_{a,m})$ und $\int\limits_0^1 y^2(r)\ dr < \infty$.

Durch Multiplikation der Gleichung mit $(a + \frac{1}{2} - m)$ erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= y(1)\left[(\tfrac{1}{2} + m)(a + \tfrac{1}{2} - m) - (\tfrac{1}{2} - m)(a + \tfrac{1}{2} + m)\right] - y^{'}(1)\left[(a + \tfrac{1}{2} - m) - (a + \tfrac{1}{2} + m)\right] \\ &= y(1)2ma + 2my^{'}(1) \end{aligned}$$

$\blacksquare$ *Lemma* 3.4

Lemma 3.5 Sei $Ky(r) := -\int\limits_0^1 G(r,\xi)y(\xi)\ d\xi$ und $Ly(r) = y''(r) - \frac{m^2-\frac{1}{4}}{r^2}y(r)$, dann gilt :

(i) $(Ky)''(\xi) - \frac{m^2-\frac{1}{4}}{\xi^2}Ky(\xi) = -y(\xi)$

(ii) $\frac{\partial^2 G(r,\xi)}{\partial\xi^2} - \frac{m^2-\frac{1}{4}}{\xi^2}G(r,\xi) = -\delta(r-\xi)$

(iii) $y(\xi)\ \frac{\partial G(r,\xi)}{\partial\xi} - G(r,\xi)y'(\xi)\Big|_0^1 = -y(r) + KLy(r)$

Beweis: Seien
$v_1(r) = r^{\frac{1}{2}+m}$
$v_2(r) = r^{\frac{1}{2}+m} - c_{a,m}r^{\frac{1}{2}-m}$
$I_1(r) = \int\limits_0^r v_1(\xi)y(\xi)\ d\xi$
$I_2(r) = \int\limits_r^1 v_2(\xi)y(\xi)\ d\xi$

Dann gilt :

$$-2mc_{a,m}Ky = v_1I_2 + v_2I_1$$

und

$$\begin{aligned} -2mc_{a,m}(Ky)' &= v_1'I_2 + v_1v_2y + v_2'I_1 - v_2v_1y \\ &= v_1'I_2 + v_2'I_1 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} -2mc_{a,m}(Ky)'' &= v_1''I_2 + v_1{}'v_2y + v_2''I_1 + v_2'v_1y \\ &= v_1''I_2 + v_2''I_1 + 2mc_{a,m}y \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $-2mc_{a,m}\frac{m^2-\frac{1}{4}}{r^2}Ky(r) = v_1''I_2(r) + v_2''(r)I_1(r)$, da $r^{\frac{1}{2}+m}$ und $r^{\frac{1}{2}-m}$ Lösungen von $Ly = 0$ sind. Durch Einsetzen folgt der erste Teil der Behauptung.

$$\begin{aligned} -y(\xi) &= (Ky)''(\xi) - \frac{m^2-\frac{1}{4}}{\xi^2}Ky(\xi) \\ &= \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial^2 G(r,\xi)}{\partial\xi^2} - \frac{m^2-\frac{1}{4}}{\xi^2}G(r,\xi)\right) y(r)\ dr \end{aligned}$$

Also gilt $\frac{\partial^2 G(r,\xi)}{\partial\xi^2} - \frac{m^2-\frac{1}{4}}{\xi^2}G(r,\xi) = -\delta(r-\xi)$, und der zweite Teil der Behauptung ist bewiesen. Nach partiellem Integrieren bzw. aus dem Gauß'schen Satz folgt :

$$\begin{aligned} & y(\xi)\frac{\partial G(r,\xi)}{\partial\xi} - G(r,\xi)y'(\xi)\Big|_0^1 \\ = & \int\limits_0^1 \frac{\partial^2 G(r,\xi)}{\partial\xi^2}y(\xi) - y''(\xi)G(r,\xi)\ d\xi \\ \overset{(ii)}{=} & \int\limits_0^1 \left(\frac{m^2+\frac{1}{4}}{\xi^2}G(r,\xi) - \delta(r-\xi)\right) y(\xi) - G(r,\xi)y''(\xi)\ d\xi \\ = & -y(r) + \int\limits_0^1 G(r,\xi)\left(\frac{m^2-\frac{1}{4}}{\xi^2}y(\xi) - y''(\xi)\right)\ d\xi \\ = & -y(r) + KLy(r) \end{aligned}$$

■*Lemma* 3.5

Satz 3.6 Seien die Bezeichnungen wie in den Lemmata, dann gilt :
y erfüllt die Bedingungen (3.1)-(3.3) genau dann, wenn $y = \lambda^2 K y$

Beweis:
$' \Rightarrow '$ Erfülle y die Bedingungen (3.1)-(3.3), dann gilt :

$$\begin{array}{lcl} 0 & \overset{Lemma 3.4}{=} & y(\xi)\frac{\partial G(r,\xi)}{\partial \xi} - G(r,\xi)y'(\xi)\Big|_0^1 \\ & \overset{Lemma 3.5(iii)}{=} & -y(r) + \int\limits_0^1 G(r,\xi)\left(\frac{m^2-\frac{1}{4}}{\xi^2}y(\xi) - y''(\xi)\right)\, d\xi \\ & = & -y(r) + \lambda^2 K y(r) \end{array}$$

$' \Leftarrow '$ Gelte $y = \lambda^2 K y$. Daraus folgt

$$\begin{array}{lcl} y''(r) & = & \lambda^2 (Ky)''(r) \\ & \overset{Lemma 3.5(i)}{=} & \lambda^2 \left(\frac{m^2-\frac{1}{4}}{r^2} K y(r) - y(r)\right) \\ & = & \frac{m^2-\frac{1}{4}}{r^2} y(r) - \lambda^2 y(r) \end{array}$$

Also gilt $Ly = -\lambda^2 y$ und somit ist (3.1) erfüllt.
Dann gilt

$$\begin{array}{lcl} y(\xi)\frac{\partial G(r,\xi)}{\partial \xi} - G(r,\xi)y'(\xi)\Big|_0^1 & \overset{Lemma 3.5(iii)}{=} & -y(r) + \int\limits_0^1 G(r,\xi)\lambda^2 y(\xi)\, d\xi \\ & = & -y(r) - \lambda^2 K y(r) = 0 \end{array}$$

und damit folgt aus Lemma 3.4, daß die Bedingungen (3.2) und (3.3) erfüllt sind

■*Satz* 3.6

Satz 3.6 gilt im Fall (iii) mit der entsprechenden Green'schen Funktion

$$G(r,\xi) = \frac{1}{2m}\begin{cases} (\xi^{\frac{1}{2}+m} - \xi^{\frac{1}{2}-m})r^{\frac{1}{2}+m} & r < \xi \\ \xi^{\frac{1}{2}+m}(r^{\frac{1}{2}+m} - r^{\frac{1}{2}-m}) & r > \xi \end{cases}$$

Seien im folgenden die Nullstellen λ_n mit den dazugehörigen Funktionen e_n so angeordnet, daß $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$ für alle $n \in I\!N$.
Desweiteren sei $Q_n := \{f \in L_2(0,1) \mid\ < f, e_k >= 0,\ k = 0, \ldots, n-1\}$. Dann gilt :

Lemma 3.7

$$\frac{1}{|\lambda_n|^2} = \|K\|_{Q_n}$$

.

Beweis: Nach Satz 3.6 und Satz 3.3 sind die Funktionen e_n gerade die Eigenfunktionen von K mit zugehörigen Eigenwerten $\frac{1}{\lambda_n^2}$. Die Existenz von $\|Kf\|$ folgt direkt aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung.

$$\begin{aligned}
\|Kf\|^2 &= \int_0^1 \left[\int_0^1 G(r,\xi)f(\xi)d\xi\right]^2 dr \\
&\leq \int_0^1 \left[\int_0^1 f^2(\xi)d\xi \int_0^1 G^2(r,\xi)d\xi\right] dr \\
&= \|f\|^2 \underbrace{\int_0^1 \|G(r,\cdot)\|^2 dr}_{<\infty}
\end{aligned}$$

Außerdem ist K auf Q_n ein selbstadjungierter Operator, da $G(r,\xi) = G(\xi,r)$.
Insbesondere ist K normal und somit gilt für den Spektralradius

$$\rho(K,Q_n) = \|K\|_{Q_n} = \max\{|\mu| \mid \mu \text{ Eigenwert von } K|_{Q_n}\} = \frac{1}{|\lambda_n|^2}$$

■*Lemma* 3.7

Mit Hilfe dieses Lemmas wird es nun möglich sein die Vollständigkeit des System$(e_n)_n$ zu zeigen. Dazu sei $f \in L_2(0,1)$ beliebig und $g_n := f - \sum_{i=0}^n \|e_n\|^{-2} < f, e_n > e_n$. Dann exisiert ein $g \in L_2(0,1)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (g(r) - g_n(r))^2 dr = 0$$

Nach Definition von g_n ist es klar, daß $< g_n, e_k >= 0$ für $k = 0, \ldots, n$ und damit $g_n \in Q_{n+1}$.
Mit Hilfe des Lemmas 3.7 folgt

$$\frac{\|Kg_n\|}{\|g_n\|} \leq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|^2}$$

Weiterhin folgt aus $\|g_n\| \leq \|f\|$

$$\|Kg_n\| \leq \frac{\|f\|}{|\lambda_{n+1}|^2}$$

Nach den im Anhang angegebenen Eigenschaften der Besselfunktion gilt $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und man erhält

$$\lim_{n\to\infty} \|Kg_n\| = \|Kg\| = 0$$

Also $Kg = 0$. Nach Anwendung von Lemma 3.5(i) ergibt sich

$$0 = (Kg)'' - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2}(Kg) = -g.$$

Damit wurde der Beweis für $m \geq 1$ abgeschlossen. Für $m \leq -1$ folgt die Behauptung direkt aus der Beziehung $J_{-m}(r) = (-1)^m J_m(r)$. Für den Fall m=0 ersetze die L_2-Bedingung (3.3) durch die Randbedingung $\lim\limits_{r\to 0} r^{-\frac{1}{2}}y(r) = 1$. Dadurch werden die Funktionen e_n wieder eindeutig charakterisiert, denn $J_0(0) = 1$ und N_0 hat eine Singularität in der Null. Auch hier kann man zeigen, daß Satz 3.6 mit den entsprechenden Green'schen Funktionen Gültigkeit besitzt. Im Fall (i) und (ii) gilt dann

$$G(r,\xi) = \frac{\sqrt{2}}{2c_{a,o}} \begin{cases} (\xi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} - c_{a,o}\xi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}})r^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} & r < \xi \\ \xi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}(r^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} - c_{a,o}r^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}) & r > \xi \end{cases}$$

mit $c_{a,o} = \frac{a+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{a+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Im Fall (iii) lautet die Green'sche Funktion

$$G(r,\xi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} (\xi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} - \xi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}})r^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} & r < \xi \\ \xi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}(r^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} - r^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}) & r > \xi \end{cases}$$

Entsprechende Überlegung führen auch in diesen Fällen wieder zum Ziel. ■

Nun ist es möglich eine L_2-Basis für die Kreisscheibe Ω anzugeben. Dabei werden die Basisfunktionen in einen radialen Anteil und einen winkelabhängigen Anteil separiert. Der radiale Anteil besteht im wesentlichen aus einer Besselfunktion und der winkelabhängige aus einer Kugelflächenfunkion.

Satz 3.8 Seien $k, R \in \mathbb{R}^+$ und seien für alle $m \in \mathbb{Z}$

$$a_m = \begin{cases} \frac{-kRJ_m'(kR)}{J_m(kR)} & \text{falls } J_m(kR) \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$b_m = \begin{cases} 1 & \text{falls } J_m(kR) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiterhin seien $\lambda_{m,n}$ die positiven Nullstellen von $a_m J_m(r) + b_m r J_m'(r)$, bei eventueller Hinzunahme der Nullstelle auf der positiven imaginären Achse $\{ix \mid x \in \mathbb{R}^+\}$, falls a+|m|<0. Nach eventuellem Vertauschen sei $\lambda_{m,o} = kR$.
Mit der Normierungskonstanten

$$c_{m,n} = \begin{cases} \left(\frac{\pi R^2}{\lambda_{m,n}^2}\left[a_m^2 + \lambda_{m,n}^2 - m^2\right] J_m^2(\lambda_{m,n})\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{falls } b_m = 1 \\ \left(\frac{\pi R^2}{\lambda_{m,n}^2}[J_m'(\lambda_{m,n})]^2\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{falls } b_m = 0 \end{cases}$$

bilden die Funktionen

$$w_{m,n}(r\omega) := c_{m,n} J_m(\frac{\lambda_{m,n}}{R} r) Y_m(\omega)$$

eine Orthonormalbasis auf $L_2(\Omega)$.
Weiterhin gilt, daß

$$w_{m,o}(r\omega) = c_{m,o} J_m(kr) Y_m(\omega)$$

Beweis: Zunächst wird die Orthonormalität bewiesen.

$$
\begin{aligned}
< w_{m,n}, w_{p,q} >_{L_2(\Omega)} &= c_{m,n}c_{p,q}\int_0^R rJ_m(\tfrac{\lambda_{m,n}}{R}r)J_p(\tfrac{\lambda_{p,q}}{R}r)\underbrace{\int_{S^1} Y_m(\omega)\overline{Y_p(\omega)}d\omega}_{=2\pi\delta_{m,p}}\, dr \\
&= \delta_{m,p}c_{m,n}c_{p,q}2\pi R^2\int_0^1 rJ_m(\lambda_{m,n}r)J_p(\lambda_{p,q}r)dr \\
&\overset{Satz 1.29}{=} \begin{cases} \delta_{m,p}\delta_{n,q}c_{m,n}c_{p,q}\frac{R^2\pi}{\lambda_{m,n}^2}\left[a_m^2+\lambda_{m,n}^2-m^2\right]J_m^2(\lambda_{m,n}) & ,b_m=1 \\ \delta_{m,p}\delta_{n,q}c_{m,n}c_{p,q}\frac{R^2\pi}{\lambda_{m,n}^2}[J_m'(\lambda_{m,n})]^2 & ,b_m=0 \end{cases} \\
&= \delta_{m,p}\delta_{n,q}
\end{aligned}
$$

Zu zeigen bleibt noch die Vollständigkeit. Sei dazu $f \in L_2(\Omega)$ eine Funktion, die zu allen $w_{m,n}$ orthogonal ist. f läßt sich nach Fubini für festes $r \in (0,R)$ fast überall in eine Fourierreihe entwickeln.

$$
f(r\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\underbrace{< f(r\cdot), Y_l >}_{=:f_l(r)}Y_l(\omega)
$$

Dann gilt für alle $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
0 &= < f, w_{m,n} >_{L_2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega f(y)\overline{w_{m,n}(y)}dy \\
&= c_{m,n}\int_0^R rJ_m(\tfrac{\lambda_{m,n}}{R}r)\int_{S^1} f(r\omega)\overline{Y_m(\omega)}d\omega dr \\
&= \tfrac{c_{m,n}}{2\pi}\int_0^R rJ_m(\tfrac{\lambda_{m,n}}{R}r)\int_{S^1}\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_l(r)Y_l(\omega)\overline{Y_m(\omega)}d\omega dr \\
&= \tfrac{c_{m,n}}{2\pi}\int_0^R rJ_m(\tfrac{\lambda_{m,n}}{R}r) < \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_l(r)Y_l, Y_m >_{L_2(S^1)} dr \\
&= \tfrac{c_{m,n}}{2\pi}\int_0^R rJ_m(\tfrac{\lambda_{m,n}}{R}r)\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_l(r)\underbrace{< Y_l, Y_m >_{L_2(S^1)}}_{=2\pi\delta_{m,l}} dr \\
&= c_{m,n}R^2\int_0^1 \sqrt{r}J_m(\lambda_{m,n}r)\sqrt{r}f_m(Rr)dr
\end{aligned}
$$

Wenn $\sqrt{r}f_m(Rr) \in L_2(0,1)$, dann gilt wegen der Vollständigkeit der Funktionen $(\sqrt{r}J_m(\lambda_{m,n}r))_n$ auf $L_2(0,1)$, daß $f_m(r)=0$. Da dies für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt, folgt daß $f=0$. Zu zeigen bleibt also noch $\sqrt{r}f_m(Rr) \in L_2(0,1)$.

$$
\begin{aligned}
\|\sqrt{r}f_m(Rr)\|_{L_2(0,1)}^2 &= \int_0^1 r|f_m(Rr)|^2 dr \\
&= R^{-2}\int_0^R r\left|\int_{S^1} f(r\omega)\overline{Y_m(\omega)}d\omega\right|^2 dr \\
&\leq R^{-2}\int_0^R r\int_{S^1} |f(r\omega)|^2\underbrace{|\overline{Y_m(\omega)}|^2}_{=1} d\omega dr \\
&= R^{-2}\|f\|_{L_2(\Omega)}^2 < \infty
\end{aligned}
$$

Die Gleichheit $w_{m,o} = c_{m,o} J_m(kr) Y_m(\omega(\varphi))$ gilt, da $\lambda_{m,o} = kR$.

$\blacksquare$

Kapitel 4

Analyse des linearen Problems

Die Singulärwertzerlegung bietet eine gute Möglichkeit zur Analyse eines Problems. So können zum Beispiel der Bildraum eines Operators und der zum Nullraum orthogonale Teilraum direkt an den singulären Funktionen abgelesen werden. Das Verhalten der Singulärwerte gibt Aufschluß über die Schlechtgestelltheit des Problems. Eine Klassifizierung dieser Probleme mittels singulärem System findet sich zum Beispiel in [Lou 89]. Die Singulärwertzerlegung bietet auch einen allgemeinen Zugang zu einer großen Klasse von Regularisierungsverfahren (vgl. [Lou 89]). Eine weitere Anwendung ist die Darstellung der verallgemeinerten Inversen durch das singuläre System (siehe Satz 1.17). Das singuläre System für den Spezialfall $\beta = \pi$ wurde bereits in [Abd/Lou 99] entdeckt. Die Herleitung des allgemeineren Falls lehnt sich an diese Arbeit an.

Das Interesse gilt dem Operator A^α aus Abschnitt 2.4 Zur Wiederholung :

$$\begin{aligned} &A^\alpha : L_2(\Omega) \to L_2(\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}) \\ &A^\alpha\Phi(x) = k^2 \int_\Omega G(k\|x-y\|)\Phi(y)\, dy \end{aligned}$$

4.1 Singulärwertzerlegung

Für die Berechnung der Singuläwertzerlegung von A^α wird zunächst eine geeignete Darstellungs des Operators A^*A benötigt.

Satz 4.1 Sei $A = A^\alpha$ der Operator wie oben für ein festes $\alpha \in [0; 2\pi)$. Sei $f \in L_2(\Omega)$ und $w_{m,n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) die L_2-Basis aus Satz 3.8 mit den zugehörigen Koeffizienten $c_{m,n}$. Ohne Einschränkung sei die Basis so angeordnet, daß

$$w_{m,o}(r\omega) = c_{m,o} J_m(kr) Y_m(\omega)$$

Dann gilt:

$$(A^*Af)(r\omega) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha(n-m)} S(m,n,\beta) < f, w_{n,o} > w_{m,o}(r\omega)$$

mit $S(m,n,\beta) = \frac{|k^2|^2 R}{8} \frac{\overline{H_m(kR)} H_n(kR)}{c_{m,o}c_{n,o}} \beta \operatorname{sinc}(\beta(n-m))$.

Beweis:

$$\begin{aligned} < Af, g > &= \int\limits_{\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}} \int\limits_{\Omega} k^2 G(k\|x-y\|) f(y)\, dy\, \overline{g(x)}\, dx \\ &= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}} \overline{\overline{k^2 G(k\|x-y\|)} g(x)\, dx} f(y)\, dy \\ &= < f, A^* g > \end{aligned}$$

Daraus folgt :

$$\begin{aligned} (A^*Af)(x) &= \overline{k^2} \int\limits_{\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}} \overline{G(k\|x-y\|)} k^2 \int\limits_{\Omega} G(k\|y-z\|) f(z)\, dz\, dy \\ &\overset{Kap.2}{=} \frac{|k^2|^2}{16} \int\limits_{\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}} \overline{H_0(k\|x-y\|)} \int\limits_{\Omega} H_0(k\|y-z\|) f(z)\, dz\, dy \end{aligned}$$

Nach Übergang zu den Polarkoordinaten und unter Ausnutzung der Reihendarstellung der Hankelfunktion (siehe 23 Anhang) folgt:

$$\begin{aligned} (A^*Af)(r_x\omega_x) &= \frac{|k^2|^2 R}{16} \int\limits_{\omega(\Gamma)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{H_m(kR) Y_m(\omega_y) J_m(kr_x)} Y_m(\omega_x) \\ &\quad \times \int\limits_0^R \int\limits_{S^1} r_z \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n(kR) Y_n(\omega_y) \\ &\quad \times J_n(kr_z) \overline{Y_n(\omega_z)} f(r_z\omega_z)\, d\omega_z\, dr_z\, d\omega_y \end{aligned}$$

Ausnutzen der gleichmäßigen Konvergenz führt zu:

$$\begin{aligned} (A^*Af)(r_x\omega_x) &= \frac{|k^2|^2 R}{16} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{H_m(kR)}\, \underbrace{J_m(kr_x) Y_m(\omega_x)}_{c_{m,o}^{-1} w_{m,o}(r_x\omega_x)} H_n(kR) \\ &\quad \times \underbrace{\int\limits_{\omega(\Gamma)} \overline{Y_m(\omega_y)} Y_n(\omega_y)\, d\omega_y}_{e^{i\alpha(n-m)} 2\beta \operatorname{sinc}(\beta(n-m))} \\ &\quad \times \underbrace{\int\limits_0^R r_z J_n(kr_z) \int\limits_{S^1} \overline{Y_n(\omega_z)} f(r_z\omega_z)\, dr_z\, d\omega_z}_{c_{n,o}^{-1} < f, w_{n,o} >} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha(n-m)} S(m,n,\beta) < f, w_{n,o} > w_{m,o}(r_x\omega_x) \end{aligned}$$

■

Einige oft gebrauchte Eigenschaften der Matrix $(S(m,n,\beta))_{m,n\in\mathbb{Z}}$ werden in einem Lemma festgehalten.

Lemma 4.2 Seien die Bezeichnungen wie in den Sätzen 3.8 und 4.1. Dann gilt:

(i) $a_m = a_{-m}$

(ii) $\lambda_{m,n} = \lambda_{-m,n}$

(iii) $c_{m,n} = c_{-m,n}$

(iv) $S(m,n,\beta) = S(-m,-n,\beta)$

(iv) $S(m,n,\beta) = \overline{S(n,m,\beta)}$

(vi) Der Operator $(S(m,n,\beta))_{m,n\in\mathbb{Z}} \; : \; l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$ ist selbstadjungiert

Beweis: Punkt (i) folgt direkt aus der Beziehung $J_m(r) = (-1)^m J_{-m}(r)$.
Punkt (ii) folgt mit (i) ebenfalls aus diesem Zusammenhang.
zu (iii) :

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= \left(\tfrac{\pi R^2}{\lambda_{m,n}^2}\left[a_m^2 + \lambda_{m,n}^2 - m^2\right] J_m^2(\lambda_{m,n})\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\overset{(i)+(ii)}{=} \left(\tfrac{\pi R^2}{\lambda_{-m,n}^2}\left[a_{-m}^2 + \lambda_{-m,n}^2 - (-m)^2\right] J_{-m}^2(\lambda_{-m,n})\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= c_{-m,n} \end{aligned}$$

zu (iv) :
$S(m,n,\beta) = \frac{|k^2|^2 R}{8} \frac{\overline{H_m(kR)} H_n(kR)}{c_{m,o} c_{n,o}} \beta \operatorname{sinc}(\beta(n-m))$
Da $H_m(kR) = (-1)^m H_{-m}(kR)$ und $\operatorname{sinc}(t) = \operatorname{sinc}(-t)$, gilt mit (iii)

$$\begin{aligned} S(m,n,\beta) &= \frac{|k^2|^2 R}{8} \frac{\overline{H_{-m}(kR)} H_{-n}(kR)}{c_{-m,o} c_{-n,o}} \beta \operatorname{sinc}(\beta(-n+m)) \\ &= S(-m,-n,\beta) \end{aligned}$$

zu (v) :
Da nur die Hankelfunktionen einen komplexwertigen Anteil in der Formel für $S(m,n,\beta)$ besitzen, gilt :

$$\begin{aligned} S(m,n,\beta) &= \overline{\frac{|k^2|^2 R}{8} \frac{H_m(kR) \overline{H_n(kR)}}{c_{m,o} c_{n,o}} \beta \operatorname{sinc}(\beta(n-m))} \\ &= \overline{S(n,m,\beta)} \end{aligned}$$

zu (vi) :
Sei $B = (S(m,n,\beta))_{m,n\in\mathbb{Z}}$ und $W = \overline{\operatorname{span}\{w_{m,o} \mid m \in \mathbb{Z}\}} \subset L_2(\Omega)$. Dann bilden die Funktionen $(w_{m,o})_{m\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis auf dem Hilbertraum W und damit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : \; l^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow W \\ (x_m)_{m\in\mathbb{Z}} &\longmapsto \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_m w_{m,o} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Es gilt

$$\begin{aligned}
B(x_m)_{m\in\mathbb{Z}} &= \iota^{-1}\iota B(x_m)_{m\in\mathbb{Z}} \\
&= \iota^{-1}\iota\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} S(m,n,\beta)x_n\right)_{m\in\mathbb{Z}} \\
&= \iota^{-1}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} S(m,n,\beta)x_n w_{m,o}\right) \\
&\stackrel{\alpha=0}{=} \iota^{-1}\underbrace{\left(A^*A\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_m w_{m,o}\right)\right)}_{\in W} \in l^2(\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Somit ist B wohldefiniert. Die Selbstadjungiertheit ist eine direkte Folgerung aus (v).

■

Gesucht werden die Eigenvektoren und Eigenfunktionen von A^*A aus denen sich die Singulärwertzerlegung von A berechnen läßt. Es wird sich dabei zeigen, daß die Eigenvektoren und Eigenfunktionen der gewichteten 'Sinc-Matrix' $(S(m,n,\beta))_{m,n\in\mathbb{Z}}$ eine wesentliche Rolle spielen. Eine ähnliche Vorgehensweise bei unvollständigen Daten (d.h. $\beta < \pi$) wurde bei der Radon-Transformation in [Lou 86] gewählt. Auch hier zeigte sich, daß für die Singulärwertzerlegung des Problems die Eigenfunktionen und Eigenvektoren der 'Sinc-Matrix' $(\,\mathrm{sinc}(m-n)\beta)_{m,n}$ berechnet werden mußten.

Satz 4.3 Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.1. Seien weiterhin $(v_{p,m})_{m\in\mathbb{Z}}$ $(p\in\mathbb{Z})$ die orthonormalen Eigenvektoren der Matrix $(S(m,n,\beta))_{m,n\in\mathbb{Z}}$ zu den Eigenwerten λ_p (Die Existenz folgt aus Lemma 4.2 (vi)). Die Normierung soll bzgl. des $l^2(\mathbb{Z})$ Skalarproduktes gelten, d.h. $\|(v_{p,m})_{m\in\mathbb{Z}}\|_{l^2}^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |v_{p,m}|^2$. Dann hat der Operator A^α das singuläre System $(v_p, u_p, \sigma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit :

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \sqrt{\lambda_p} \\
v_p(r\omega) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} v_{p,m}e^{-im\alpha}w_{m,o}(r\omega) \\
u_p(R\omega) &= \frac{ik^2}{4\sigma_p}\sum_{m\in\mathbb{Z}} v_{p,m}\frac{H_m(kR)}{c_{m,o}}e^{-im\alpha}Y_m(\omega)
\end{aligned}$$

Beweis: Seien die Bezeichnungen wie im Satz.
Da der Operator $(S(m,n,\beta))_{m,n\in\mathbb{Z}}$ nach Lemma 4.2 selbstadjungiert ist, existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Es gilt

$$\begin{aligned}
(A^*Av_p)(r\omega) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha(n-m)}S(m,n,\beta) < \sum_{q\in\mathbb{Z}} v_{p,q}e^{-i\alpha q}w_{q,o}\ ,\ w_{n,o} > w_{m,o}(r\omega) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha(n-m)}S(m,n,\beta)v_{p,n}e^{-i\alpha n}w_{m,o}(r\omega) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} S(m,n,\beta)v_{p,n}\right)}_{\lambda_p v_{p,m}} e^{-i\alpha m}w_{m,o}(r\omega) \\
&= \lambda_p\sum_{m\in\mathbb{Z}} v_{p,m}e^{-im\alpha}w_{m,o}(r\omega) \\
&= \lambda_p v_p(r\omega)
\end{aligned}$$

Die Normierungsbedingung folgt aus :

$$\begin{aligned} 1 \overset{!}{=} \|v_p\|^2 &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} < v_{p,m}e^{-im\alpha}w_{m,o} \; , v_{p,n}e^{-in\alpha}w_{n,o} > \\ &= \textstyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} |v_{p,m}|^2 = \|(v_{p,m})_{m\in\mathbb{Z}}\|_{l^2}^2 \end{aligned}$$

Ist die Existenz weiterer Eigenvektoren auszuschließen ?

Annahme: Sei u ein Eigenvektor von A^*A zum Eigenwert λ und $u \neq v_p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. u habe bzgl. der Basis $(w_{m,n})_{m,n}$ die Darstellung : $u = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{m,n}w_{m,n}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} (A^*Au)(r\omega) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha(n-m)}S(m,n,\beta) < \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q\in\mathbb{N}} u_{p,q}w_{p,q} \; , \; w_{n,o} > w_{m,o}(r\omega) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha(n-m)}u_{n,o}S(m,n,\beta)w_{m,o}(r\omega) \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$A^*Au = \lambda u = \lambda \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{m,n}w_{m,n}$$

Koeffizientenvergleich ergibt dann:

1.) $u_{m,n} = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$ und

2.)

$$\begin{aligned} \lambda u_{m,o} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha(n-m)}u_{n,o}S(m,n,\beta) \\ \Leftrightarrow \quad \lambda e^{im\alpha}u_{m,o} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha n}u_{n,o}S(m,n,\beta) \end{aligned}$$

Folglich ist $(e^{im\alpha}u_{m,o})_{m\in\mathbb{Z}}$ Eigenvektor von $(S(m,n,\beta))_{m,n}$. Es existiert also ein $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$, so daß $(e^{im\alpha}u_{m,o})_{m\in\mathbb{Z}} = (v_{\tilde{p},m})_{m\in\mathbb{Z}}$. Es folgt :

$u = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} u_{m,o}w_{m,o} = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} e^{-im\alpha}v_{\tilde{p},m}w_{m,o} = v_{\tilde{p}}$

Dies ist ein Widerspruch zu $u \neq v_p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $Av_p = \sigma_p u_p$. Nach Übergang zu den Polarkoordinaten und unter Ausnutzung der Reihendarstellung der Hankelfunktion H_0 aus 23 Anhang ergibt sich

$$\begin{aligned} Av_p(R\omega_x) &= \frac{ik^2}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} H_m(kR)Y_m(\omega_x)\int_0^R r_yJ_m(kr_y)\int_{S^1} \overline{Y_m(\omega_y)}v_p(r_y\omega_y)\,d\omega_y\,dr_y \\ &= \frac{ik^2}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} H_m(kR)Y_m(\omega_x)c_{m,o}^{-1} < v_p, w_{m,o} >_{L_2(\Omega)} \\ &= \frac{ik^2}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} H_m(kR)Y_m(\omega)c_{m,o}^{-1}v_{p,m}e^{-im\alpha} \end{aligned}$$

■

Für den Fall der vollständigen Daten $\beta = \pi$ erhält man :

Korollar 4.4 Sei $\beta = \pi$ und die Bezeichnungen wie in Satz 4.1.
Dann hat der Operator A^α ein von α unabhängiges singuläres System $(v_p, u_p, \sigma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \left(\frac{|k^2|^2 R\pi |H_p(kR)|^2}{8c_{p,o}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ v_p(r\omega) &= w_{p,o}(r\omega) \\ u_p(R\omega) &= \frac{ik^2 H_p(kR)}{4\sigma_p c_{p,o}} Y_p(\omega) \end{aligned}$$

Beweis: Es gilt $\mathrm{sinc}(\pi(n-m)) = \delta_{m,n}$ und damit hat die Matrix $(S(m,n,\beta))_{m,n\in\mathbb{Z}}$ nur Einträge auf der Diagonalen. Somit hat der Operator die kanonische Basis als Eigenvektorsystem mit Eigenwerten $S(m,m,\pi)$. Da das singuläre System nur eindeutig bis auf einen komplexen Faktor aus der Einheitssphäre S^1 ist, folgt die Behauptung mit Satz 4.3. ∎

4.2 Analyse der Stetigkeit

Der Operator A^α ist ein kompakter Operator. Diese Operatoren haben die unangenehme Eigenschaft, falls das Bild unendlichdimensional ist, nicht stetig invertierbar zu sein. Der Grund hiefür liegt im Verhalten der Singulärwerte $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dieser Operatoren. Sind sie ihrer Größe nach angeordnet, so gilt nach Satz 1.10 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$. Und genau das ist der Grund für die unstetige Inverse, denn wäre der Operator $A^\dagger$ stetig, dann würde gelten

$$\begin{aligned} \|A^\dagger g\|^2 &\overset{Satz 1.17}{=} \|\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-1} < g, u_n > v_n\|^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-2} |< g, u_n >|^2 \\ &\leq c \sum_{n\in\mathbb{N}} |< g, u_n >|^2 \\ &= c\|g\|^2 \end{aligned}$$

Das kann aber wegen der Konvergenz der σ_n für beliebige g nicht richtig sein. Salopp könnte gesagt werden, je schneller die Singulärwerte σ_n gegen die Null konvergieren, desto schlechter ist ein Problem gestellt. Diese Überlegung führt zu einer Klassifikation von Problemen die durch einen kompakten Operator beschrieben werden (vgl. [Lou 89]).

Definition 4.5 Sei $A \in K(X,Y)$ mit $\dim(R(A)) = \infty$. A habe das singuläre System $(v_n, u_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Existiert ein $\mu > 0$, so daß $O(n^{-\mu}) = \sigma_n$, dann heißt der Operator A <u>schlecht gestellt der Ordnung μ</u>.

b) Existiert ein $\mu > 0$ und ein $c \in \mathbb{R}^+$, so daß $|\log\sigma_n| \geq cn^\mu$, so heißt der Operator <u>exponentiell schlecht gestellt</u>.

c) Ist der Operator schlecht gestellt von der Ordnung μ und die Lösung des ungestörten Problems $f \in X_\nu$ mit $\nu = \frac{\lambda}{\mu}$, $\beta \geq 0$, so heißt das Problem <u>schlecht gestellt von der Ordnung (μ, λ)</u>.

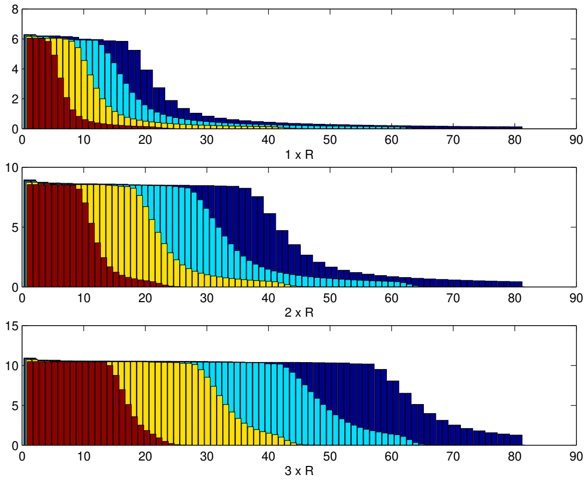

Abb. 4.1: Singulärwerte von A^{α}

In Abbildung 4.1 sind die ersten 81 Singulärwerte des Operators für $\beta = (\pi \hat{=} \text{blau}, \frac{3\pi}{4} \hat{=} \text{hellblau}, \frac{\pi}{2} \hat{=} \text{gelb}, \frac{\pi}{4} \hat{=} \text{rot})$ und für Detektorradien R =1.5, 3 und 4.5 aufgetragen. Wie mit dem bloßem Auge zu erkennen ist, bleiben die Singulärwerte anfangs auf gleichhohem Niveau bis zu einem gewissen Punkt, ab dem sie schnell gegen die Null fallen. Bei der Inversion sollten die zu diesen kleinen σ_n gehörenden Anteile herausgefiltert bzw. gedämpft werden, denn sie verstärken den Datenfehler $e^{\varepsilon} = g^{\varepsilon} - g$ erheblich. Gut zu sehen ist dies mit Hilfe der Inversionsformel.

$$A^{\dagger} e^{\varepsilon} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n^{-1} < e^{\varepsilon}, u_n > v_n$$

g bezeichne hierbei die exakten Daten und g^{ε} die durch Messfehler gestörten Daten. Dieses Herausfiltern wird durch Regularisierung erreicht.

Um das Problem in eine der oben angegebenen Klassen einteilen zu können, müßte eine analytische Formel oder zumindestens eine Abschätzung für die Eigenwerte der Matrix $(S(m, n, \beta))_{m,n \in \mathbb{Z}}$ vorliegen. Eine Klassifizierung ist mir jedenfalls noch nicht gelungen. Für den Fall der vollständigen Daten, das heißt für $\beta = \pi$, liegt, wie in Korollar 4.4 angegeben, eine analytische Darstellung vor. In [Abd 98] wurde gezeigt, daß sich die Singulärwerte verhalten wie $n^{-\frac{3}{2}}$. Damit ist das Problem im Spezialfall $\beta = \pi$ schlecht gestellt von der Ordnung $\frac{3}{2}$. Rein nach der optischen Anschauung liegt die Vermutung nahe, daß für $\beta < \pi$ das Problem ähnlich schlecht gestellt ist.

4.3 Analyse der Eindeutigkeit

Die verallgemeinerte Lösung $\Phi^{\dagger} = A^{\dagger} g$ ist die eindeutige Lösung von $A\Phi = g$ im Raum $N(A)^{\perp}$. Durch hinzuaddieren eines Elementes Φ_N aus dem Nullraum des Operatos A zu $\Phi^{\dagger}$ erhält man wieder eine Lösung des Problems $A\Phi = g$. Deshalb ist es wichtig zu wissen, wie groß der Nullraum eines Operators ist.

Korollar 4.6 Sei $A = A^\alpha$ der Operator wie oben und $w_{m,n}$ die Basisfunktionen aus Satz 3.8. Dann gilt

(i) für $\beta < \pi : N(A) \supset \overline{\text{span}\{w_{m,n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}}$

(ii) für $\beta = \pi : N(A) = \overline{\text{span}\{w_{m,n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}}$

Beweis:

zu(i) Es gilt für die singulären Funktionen

$$v_p = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_{p,m} e^{-im\alpha} w_{m,o} \in \overline{\text{span}\{w_{n,o} \mid n \in \mathbb{Z}\}}$$

also gilt nach Lemma 1.12, daß $N(A)^\perp \subset \overline{\text{span}\{w_{m,o} \mid m \in \mathbb{Z}\}}$.

zu (ii) Im Fall $\beta = \pi$ gilt

$$v_p = c_{p,o} w_{p,o}$$

und damit $N(A)^\perp = \overline{\text{span}\{w_{m,o} \mid m \in \mathbb{Z}\}}$.

■

Zusammenfassung :

Die Inverse von A^α ist nicht stetig. Das Problem $A^\alpha \Phi = g$ ist schlecht gestellt von der Ordnung $\mu \geq \frac{3}{2}$. Deshalb bedarf es für die Inversion von A^α eines Regularisierungsverfahrens. Weiterhin ist die Gleichung $A^\alpha \Phi = g$ nicht eindeutig lösbar, da der Nullraum nicht trivial ist. Dies ist aber nicht verwunderlich. Hätte die Gleichung eine eindeutige Lösung, so könnte ein 2-dimensionales Objekt Φ und damit die gesuchte Funktion f aus Daten g einer Richtung rekonstruiert werden. Die Inversionsformel (Satz 1.17) zeigt, daß durch die Linearisierung mit Hilfe der äquivalenten Quellen maximal die Anteile $< \Phi^\alpha, v_p > \in \overline{\text{span}\{w_{m,o} \mid m \in \mathbb{Z}\}}$ von Φ^α rekonstruierbar sind. Die noch fehlenden Anteile im Nullraum von A^α müssen daher durch ein weitergehendes Verfahren bestimmt werden. Die Nichtlinearität des Ausgangsproblems bleibt auf diese Weise bestehen. Ein Regularisierungsverfahren zur Lösung des Problems $A^\alpha \Phi = g$ wird im nächsten Kapitel angegeben. Zusätzlich werden auch Verfahren vorgestellt, die die Anteile von Φ^α im Nullraum bestimmen.

Kapitel 5

Lösen des Gesamtproblems

Werden als Zugang zur Lösung des inversen Streuproblems $\overline{\overline{A}}f = (g^\alpha)_{\alpha\in[0;2\pi)}$ die äquivalenten Quellen herangezogen, so muß das Problem in zwei Teilschritten gelöst werden, falls die dadurch erreichte Linearisierung ausgenutzt werden soll. Im ersten Schritt werden die linearen Probleme $A^\alpha\Phi^\alpha = g^\alpha$ gelöst. Man erhält dabei nur Anteile von Φ^α, die nicht im Nullraum von A^α liegen. Der Rest der äquivaltenen Quellen Φ^α im Nullraum muß durch ein weiteres Verfahren bestimmt werden.

5.1 Lösen des linearen Problems

Im Kapitel 1.4 wurde das Grundprinzip von Regularisierungsverfahren diskutiert. Speziell wurde die approximative Inverse vorgestellt. Hierbei wird zuerst das Hilfsproblem $\Psi_\gamma^* = \tilde{A}^{\dagger *}M_\gamma^*$ gelöst, um damit eine geglättete Lösung $f_\gamma = \Psi_\gamma g$ berechnen zu können. Dabei wurde offengelassen, wie der Mollifier M_γ zu wählen ist. Liegen die Daten exakt vor, so soll

$$\lim_{\gamma\to o} \Psi_\gamma g = \lim_{\gamma\to o} M_\gamma \tilde{A}^\dagger g = A^\dagger g$$

gelten, und damit stellt sich an M_γ die Bedingung

$$\lim_{\gamma\to o} M_\gamma f(x) = f(x) \tag{5.1}$$

Wird M_γ als Integraloperator aufgefaßt mit einem Kern e_γ

$$M_\gamma f(x) = \int e_\gamma(x,y) f(y)\, dy$$

so folgt aus Gleichung (5.1), daß

$$\lim_{\gamma\to o} e_\gamma(x,\cdot) = \delta_x$$

gelten muß.

Beispiele für die Wahl von e_γ im $\mathbb{R}^2$:

(i) $e_\gamma(x,y) = \frac{1}{\pi\gamma^2}\chi_{B_\gamma(x)}(y)$
wobei χ die charakteristische Funktion bezeichnet.

(ii) $e_\gamma(x,y) = \frac{1}{2\pi\gamma} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\gamma^2}}$
Die Gaußglocke im $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung 5.1

a) Die Funktion e_γ wird wegen ihrer engen Beziehung zu M_γ auch als Mollifier oder mathematische Linse bezeichnet.

b) Gilt $e_\gamma(x,y) = e_\gamma(\|x-y\|)$, so spricht man von einem radialsymmetrischen Mollifier. Die in den Beispielen angegebenen Funktionen e_γ sind radialsymmetrisch. Solche Mollifier werden in der Praxis wegen ihrer Invarianzeigenschaften gern benutzt (vgl. Kapitel 6).

c) Hat man sich für eine Glättungsfunktion e_γ entschieden und gilt das Interesse zum Beispiel der Ableitung f' der gesuchten Abbildung, so kann $\tilde{e}_\gamma = \frac{\partial e_\gamma(x,y)}{\partial x}$ als Mollifier nützlich sein. Die Linse $\tilde{e}_\gamma$ muß also nicht unbedingt eine Approximation der Delta-Distribution sein.

Als nächstes stellt sich die Frage, wie das Problem $\Psi_\gamma^* = \tilde{A}^{\dagger *} M_\gamma^*$ zu lösen ist. Die Gleichung ist äquivalent zu $A^*\Psi_\gamma^* = M_\gamma^*$. Ist ein zu M_γ gehörender Mollifier e_γ gewählt, und ist e_γ^* der zu M_γ^* gehörende Kern, so sei $\psi_\gamma^*(\cdot,x)$ Lösung der Gleichung $A^*\psi_\gamma^*(\cdot,x) = e_\gamma^*(\cdot,x)$, falls $e_\gamma^*(\cdot,x) \in R(A^*)$. Andernfalls soll ψ_γ^* den Defekt $\|A^*\psi_\gamma^*(\cdot,x) - e_\gamma^*(\cdot,x)\|$ minimieren.

Nun gilt

$$\begin{aligned} < \int e_\gamma(\cdot,y) f(y)\, dy, g > &= \int\int e_\gamma(x,y) f(y)\, dy\, \overline{g(x)}\, dx \\ &= \int f(x) \int \overline{\overline{e_\gamma(y,x)} g(y)}\, dy\, dx \\ &= < f, \int e_\gamma^*(y,\cdot) g(y)\, dy > \end{aligned}$$

und damit $e_\gamma(x,y) = \overline{e_\gamma^*(y,x)}$. Weiterhin folgt, daß $\psi_\gamma(x,y) := \overline{\psi_\gamma^*(y,x)}$ Lösung der Gleichung $A^*e_\gamma(x,\cdot) = \psi_\gamma(x,\cdot)$ bzw. Lösung des Minimierungsproblems $\|A^*\psi_\gamma(x,\cdot) - e_\gamma(x,\cdot)\|$ ist.

Bemerkung 5.2 Ist das Hilfsproblem $A^*e_\gamma(x,\cdot) = \psi_\gamma(x,\cdot)$ gelöst worden, so berechnet sich die geglättete Lösung an einem Rekonstruktionspunkt x

$$f_\gamma(x) =< e_\gamma(x,\cdot), f >=< A^*\psi_\gamma(x,\cdot), f >=< \psi_\gamma(x,\cdot), g >$$

aus der Intergration der Daten gegen die Funktion $\psi_\gamma(x,\cdot)$. Aus diesem Grund wird ψ_γ auch als Rekonstruktionskern bezeichnet.

Satz 5.3 Sei $e_\gamma : \Omega^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Mollifier und A^α der Operator aus Kapitel 4.1 mit singulärem System $(v_p, u_p, \sigma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$. Dann gilt für den Rekonstruktionskern $\psi_{\gamma,\eta(\alpha)} : \Omega \times \Gamma_{\beta,\eta(\alpha)} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\psi_{\gamma,\eta(\alpha)}(r\omega,\cdot) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sigma_m^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{v_{p,n}} e^{in\alpha} < e_\gamma(r\omega,\cdot), w_{n,o} > u_m(\cdot)$$

Beweis: Die Behauptung folgt sofort durch Einsetzen des singulären System in Satz 1.17. ∎

Die geglättete Lösung Φ_γ^α von $A^\alpha\Phi = g^\alpha$ berechnet sich im Rekonstruktionspunkt x als Skalarprodukt $\Phi_\gamma^\alpha(x) =< \psi_{\gamma,\eta(\alpha)}(x,\cdot), g^\alpha >$ des Rekonstruktionskerns mit den Daten.

Die Vorteile in der Verwendung der approximativen Inversen gegenüber anderen Regularisierungsverfahren sind :

(i) Der Rekonstruktionskern Ψ_γ kann im vorhinein aus exakt bekanntem A^α und M_γ berechnet werden. Datenfehler gehen bei dieser Berechnung folglich nicht ein.

(ii) Das Verfahren hat eine hohe Geschwindigkeit, falls ein Problem $A\Phi = g$ für mehrere rechte Seiten g gelöst werden soll.

(iii) Oft geht ein Operator A^α durch Drehung zum Beispiel aus einem Operator A hervor. Häufig läßt sich dann auch der Rekonstruktionskern von A^α durch Ausnutzung von Invarianzen aus dem von A bestimmen. Somit hat das Verfahren wiederum eine hohe Effektivität.

Anzusprechen bleibt noch die Wahl des Regularisierungsparameters γ. Wird er zu klein gewählt, so werden die Datenfehler zu sehr verstärkt. Ein zu großes γ hat den Effekt, daß die gesuchte Lösung in zu hohem Maße geglättet wird. Vorinformationen über den Datenfehler oder über die gesuchte Lösung f können bei der Wahl von γ nützlich sein. Einige Parameterwahlstrategien finden sich in [Lou 89]. Jedoch ist die Theorie noch nicht vollends abgeschlossen. Oftmals bleibt dem Anwender nur die Probiermethode.

5.2 Lösen des Folgeproblems

Die Anteile der äquivalenten Quellen außerhalb des Nullraums von A^α können mit Hilfe der approximativen Inversen effektiv berechnet werden. Doch wie sind die Anteile aus dem weit größeren Nullraum zu berechnen. Es wurde bei der Lösung des linearen Problems nicht berücksichtigt, daß die äquivalenten Quellen Φ^α gegenseitig voneinander abhängen. Und zwar gilt nach Abschnitt 2.4

$$f = \frac{\Phi^\alpha}{u^\alpha} = \frac{\Phi^\alpha}{\overline{A}_{id}\Phi^\alpha + u_i^\alpha}$$

für alle $\alpha \in [0, \pi)$.

Die zwei nachfolgenden, miteinander engverwandten Verfahren, basieren auf diesem Zusammenhang. Ähnliche Verfahren wurden bereits in [Hab/Ori 94] und [Van/Kle 97] konzipiert. Die Anteile der äquivalenten Quellen außerhalb des Nullraums des Operators wurden allerdings nicht seperat bestimmt.

5.2.1 Das Verfahren Gauß-Newton-Koeff1 (GNK1)

Seien $(g^{\alpha_k})_{k=1}^P$ die vorliegenden Daten und $\Phi_R^{\alpha_k}$ die Lösungen des linearen Problems $A^{\alpha_k}\Phi^{\alpha_k} = g^{\alpha_k}$, die durch ein Regularisierungsverfahren bestimmt wurden. Desweiteren seien $\Phi_N^{\alpha_k}$, die noch zu bestimmenden Anteile der äquivalenten Quellen im Nullraum von A^{α_k}. Das Verfahren soll den Defekt

$$\left\| \frac{\Phi^{\alpha_k}}{\overline{A}_{id}\Phi^{\alpha_k} + u_i^{\alpha_k}} - \frac{\Phi^{\alpha_{k+1}}}{\overline{A}_{id}\Phi^{\alpha_{k+1}} + u_i^{\alpha_{k+1}}} \right\|$$

für $k = 1, \ldots, P-1$ minimieren. Dabei ist $\Phi^{\alpha_k} = \Phi_R^{\alpha_k} + \Phi_N^{\alpha_k}$ die äquivalente Quelle. Dies geschieht mit Hilfe des Gauß-Newton-Algorithmus. Dabei werden nicht die Funktionen Φ^{α_k} selbst, sondern die Entwicklungskoeffizienten $\Phi_{m,n}^{\alpha_k} =< \Phi_N^{\alpha_k}, w_{m,n} >$ bezüglich der Basis

$(w_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\geq 1}$ des Nullraums bestimmt. Daher die Begriffsbestimmung des Verfahrens. Zu minimieren bleibt das Funktional

$$\left\| F(\Phi^{\alpha_k}_{m,n})^{k=1,\dots,P-1}_{m\in\mathbb{Z},n\geq 1} \right\|^2_{L_2^{P-1}(\Omega)}$$

mit

$$\left(F(\Phi^{\alpha_k}_{m,n})^{k=1,\dots,P-1}_{m\in\mathbb{Z},n\geq 1} \right)_j =$$

$$\frac{\Phi_R^{\alpha_j} + \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{n\geq 1} \Phi^{\alpha_j}_{m,n} w_{m,n}}{\overline{A}_{id}\Phi_R^{\alpha_j} + u_i^{\alpha_j} + \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{n\geq 1} \Phi^{\alpha_j}_{m,n}\overline{A}_{id} w_{m,n}} - \frac{\Phi_R^{\alpha_{j+1}} + \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{n\geq 1} \Phi^{\alpha_{j+1}}_{m,n} w_{m,n}}{\overline{A}_{id}\Phi_R^{\alpha_{j+1}} + u_i^{\alpha_{j+1}} + \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{n\geq 1} \Phi^{\alpha_{j+1}}_{m,n}\overline{A}_{id} w_{m,n}}$$

für $j = 1, \dots, P-1$.

5.2.2 Das Verfahren Gauß-Newton-Koeff2 (GNK2)

Das Verfahren GNK1 hat den Nachteil, daß in jedem Iterationsschritt ein riesiges lineares Gleichungssystem zu lösen ist. Dies wird in diesem Verfahren umgangen. Seien die Bezeichnungen wieder wie bei dem Verfahren GNK1. Auch bei diesem Verfahren wird mit Hilfe des Gauß-Newton-Verfahrens versucht den Defekt

$$\left\| \frac{\Phi^{\alpha_k}}{\overline{A}_{id}\Phi^{\alpha_k} + u_i^{\alpha_k}} - \frac{\Phi^{\alpha_{k+1}}}{\overline{A}_{id}\Phi^{\alpha_{k+1}} + u_i^{\alpha_{k+1}}} \right\|$$

für $k = 1, \dots, P-1$ zu minimieren. Jedoch geschieht dies in zwei Schritten.

ALGORITHMUS GNK2

Wähle beliebige Startfunktion f_o.

Solange $\sum\limits_{k=1}^{P-1} \left\| \frac{\Phi^{\alpha_k}}{\overline{A}_{id}\Phi^{\alpha_k} + u_i^{\alpha_k}} - \frac{\Phi^{\alpha_{k+1}}}{\overline{A}_{id}\Phi^{\alpha_{k+1}} + u_i^{\alpha_{k+1}}} \right\| > \varepsilon$

1.Schritt: Führe eine begrenzte Anzahl Gauß-Newton-Iterationen durch, wobei für $k = 1, \dots, P$ die Funktionale

$$\left\| F(\Phi^{\alpha_k}_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\geq 1} \right\|^2$$

mit

$$F(\Phi^{\alpha_k}_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\geq 1} = \frac{\Phi_R^{\alpha_k} + \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{n\geq 1} \Phi^{\alpha_k}_{m,n} w_{m,n}}{\overline{A}_{id}\Phi_R^{\alpha_k} + u_i^{\alpha_k} + \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{n\geq 1} \Phi^{\alpha_k}_{m,n}\overline{A}_{id} w_{m,n}} - f_j$$

minimiert werden.

2.Schritt Setze $f_{j+1} = \frac{1}{P}\sum\limits_{k=1}^{P} \frac{\Phi_R^{\alpha_k} + \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{n\geq 1} \Phi^{\alpha_k}_{m,n} w_{m,n}}{\overline{A}_{id}\Phi_R^{\alpha_k} + u_i^{\alpha_k} + \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{n\geq 1} \Phi^{\alpha_k}_{m,n}\overline{A}_{id} w_{m,n}}$

Vorteile und Nachteile dieser Verfahren werden mit Ergebnissen in Kapitel 6 zusammengestellt.

Kapitel 6

Numerische Aspekte

Oftmals gibt es erhebliche Probleme bei der Umsetzung der Theorie in einen brauchbaren Algorithmus. Zum einen spielen dabei die Geschwindigkeit der Programme und Speicherplatzbedarf eine große Rolle. Auf der anderen Seite tauchen immer wieder Probleme bei der Diskretisierung auf.

6.1 Singulärwertzerlegung des Operators

Im Fall $\beta < \pi$ können die singulären Funktionen u_p bzw. v_p als Linearkombination der Eigenfunktionen von A^*A bzw. AA^* im Fall $\beta = \pi$ dargestellt werden (vgl Satz 4.3 und Korollar 4.4). Die Koeffizienten hierbei bilden im wesentlichen die Komponenten der Eigenvektoren der Matrix $B = (S(m,n,\beta))_{m,n\in\mathbb{Z}}$. Eine Lösung dieses Eigenwertproblems ist noch nicht bekannt. Bezeichnet $B_M = (S(m,n,\beta))_{m,n=-M}^{M}$ die diskrete Version von B, dann gilt folgendes.

Satz 6.1 Sei $\varepsilon > 0$ und B, B_M wie im Text. Dann existiert ein $\tilde{M} \in \mathbb{N}$, so daß für alle $M \geq \tilde{M}$ und für alle Eigenvektoren v von B_M mit $\|v\| = 1$ mit den zugehörigen Eigenwerten λ gilt

$$\|Bv - \lambda v\| < \varepsilon.$$

Beweis: Zunächst wird die Matrix B_M als Operator auf $l^2(\mathbb{Z})$ aufgefaßt.

$$(B_M(x_n)_{n\in\mathbb{Z}})_m = \begin{cases} \sum\limits_{n=-M}^{M} S(m,n,\beta)x_n & \text{falls } |m| \leq M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt

$$\|B_M\| = \sup_{x\in l^2} \|B_M \frac{x}{\|x\|}\| \leq \sup_{x\in l^2} \|B_{M+1} \frac{x}{\|x\|}\| = \|B_{M+1}\| \tag{6.1}$$

Desweiteren gilt:

$$Bx = \lim_{M\to\infty} B_M x$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus folgt, daß

$$\|B\| \leq \lim_{M\to\infty} \inf \|B_M\|$$

Nach (6.1) folgt

$$\lim_{M\to\infty} \|B_M - B\| = 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und v ein Eigenvektor von B_M zum Eigenwert λ mit $\|v\| = 1$. Es gilt

$$\|Bv - \lambda v\| = \|Bv - B_M v\| \leq \|B - B_M\| < \varepsilon$$

für M groß genug. ■

Wird M genügend groß gewählt, so erfüllen die durch die Diskretisierung bestimmten Vektoren und Skalare fast die Kriterien eines Eigenvektors bzw. eines Eigenwertes des Operators B. Für große M wird jedoch die Berechnung der Eigenvektoren und Eigenwerte von B_M erheblich zeitaufwendig. Gute Algorithmen benötigen $O((2M)^3)$ Operationen. Das Problem läßt sich jedoch auf zwei Eigenwertprobleme der Dimensionen $M+1$ bzw. M reduzieren. Die Anzahl der Operationen mindert sich dann auf $O(2M^3)$. Der Trick besteht in der Zerlegung des $\mathbb{C}^{2M+1}$ in zwei zueinander orthogonale Teilräume.

Bezeichnung 6.2 Sei $M \in I\!N$ und $v = (v_m)_{m=1}^M \in \mathbb{C}^M$ und $w = (w_m)_{m=1}^{M+1} \in \mathbb{C}^{M+1}$. Dann seien $E_1 : \mathbb{C}^M \longrightarrow \mathbb{C}^{2M+1}$ und $E_2 : \mathbb{C}^{M+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{2M+1}$ zwei Abbildungen mit

$$\begin{aligned}
(E_1(v))_m &= \begin{cases} v_m & m > 1 \\ -v_{-m} & m < 1 \\ 0 & m = 0 \end{cases} \\
(E_2(w))_m &= \begin{cases} w_m & m \geq 0 \\ w_{-m} & m < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\mathbb{C}^{2M+1} = E_1(\mathbb{C}^M) \oplus E_2(\mathbb{C}^{M+1}),$$

denn für jeden Vektor $v = (v_m)_{m=-M}^M$ gilt : $(v_m)_{m=-M}^M = \underbrace{(\frac{v_m - v_{-m}}{2})_{m=-M}^M}_{\in E_1(\mathbb{C}^M)} + \underbrace{(\frac{v_m + v_{-m}}{2})_{m=-M}^M}_{\in E_2(\mathbb{C}^{M+1})}$.

Satz 6.3 Sei $M \in I\!N$ und $B_M = (S(m,n,\beta))_{m,n=-M}^M =: (b_{m,n})_{m,n=-M}^M$. Seien weiterhin $C_M = (c_{m,n})_{m,n=1}^M$ und $D_M = (d_{m,n})_{m,n=0}^M$ Matrizen mit

$$\begin{aligned}
c_{m,n} &= b_{m,n} - b_{-m,n} && \text{für } m,n = 1,\ldots,M \\
d_{m,n} &= \begin{cases} b_{m,o} \\ b_{m,n} + b_{m,-n} \end{cases} && \begin{matrix} \text{für } n = 0, m = 0,\ldots,M \\ \text{sonst} \end{matrix}
\end{aligned}$$

Sind $v_p = (v_{p,m})_{m=1}^M$ $(p = 1,\ldots,M)$ die orthogonalisierten Eigenvektoren von C_M zu den Eigenwerten λ_p und $w_q = (w_{q,m})_{m=0}^M$ $(q = 0,\ldots,M)$ ein System linear unabhängiger Eigenvektoren von D_M zu den Eigenwerten μ_p, dann gilt:

(i) $E_1\mathbb{C}^M \perp E_2\mathbb{C}^{M+1}$

(ii) $E_1 v_p \perp E_1 v_{\tilde{p}}$ für $p \neq \tilde{p} \in \{1,\ldots,M\}$

(iii) $(E_1 v_p)_{p=1}^M$ vereinigt mit den Vektoren $(E_2 w_q)_{q=1}^{M+1}$ bilden ein System unabhängiger Eigenvektoren von B_M mit Eigenwerten λ_p bzw. μ_q.

Beweis: Nach Lemma 4.2 gilt

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= b_{m,n} - b_{-m,n} \\ &= \overline{b_{m,n} - b_{m,-n}} \\ &= \overline{b_{n,m} - b_{-n,m}} \\ &= \overline{c_{n,m}} \end{aligned}$$

und damit ist der Operator C_M selbstadjungiert und besitzt somit eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren.

(i) Sei $x = (x_m)_{m=-M}^M \in E_1\mathbb{C}^M$ und $y = (y_m)_{m=-M}^M \in E_2\mathbb{C}^{M+1}$. Dann gilt

$$< x, y >= \sum_{m=-M}^{M} x_m\overline{y_m} = \sum_{m=1}^{M} x_m\overline{y_m} - x_m\overline{y_m} = 0$$

(ii) Seien $x = (x_m)_{m=1}^M$ und $y = (y_m)_{m=1}^M$ Eigenvektoren von C_M die zueinander orthogonal sind, dann gilt :

$$\begin{aligned} < E_1 x, E_1 y > &= \sum_{m=1}^{M} x_m\overline{y_m} + \sum_{m=1}^{M} (-x_{-m})\overline{(-y_{-m})} \\ &= 2 < x, y > \\ &= 0 \end{aligned}$$

(iii) Sei $x = (x_m)_{m=1}^M$ Eigenvektor von C_M mit Eigenwert λ und $y = (y_m)_{m=0}^M$ Eigenvektor von D_M mit Eigenwert μ. Dann gilt unter Verwendung von Lemma 4.2

$$\begin{aligned} (B_M E_1 x)_m &= \sum_{n=-M}^{M} b_{m,n}(E_1 x)_n \\ &= \sum_{n=1}^{M} (b_{m,n} - b_{m,-n}) x_n \\ &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{M} (b_{m,n} - b_{-m,n}) x_n & m > 0 \\ \sum_{n=1}^{M} (b_{-m,n} - b_{-m,-n})(-x_n) & m < 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases} \\ &= \lambda (E_1 x)_m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (B_M E_2 y)_m &= \sum_{n=-M}^{M} b_{m,n}(E_2 y)_n \\ &= b_{m,o} y_o + \sum_{n=1}^{M} (b_{m,n} + b_{m,-n}) y_n \\ &= \begin{cases} b_{m,o} y_o + \sum_{n=1}^{M} (b_{m,n} + b_{m,-n}) y_n & m \geq 0 \\ b_{-m,o} y_o + \sum_{n=1}^{M} (b_{-m,-n} + b_{-m,n}) y_n & m < 0 \end{cases} \\ &= \mu (E_2 y)_m \end{aligned}$$

Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $(E_1 v_p)_{p=1}^M$ folgt aus (ii) und die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $(E_1 v_p)_{p=1}^M$ zu $(E_2 w_q)_{q=0}^M$ ergibt sich aus (i). Weiterhin wird durch E_2 die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $(w_q)_{q=0}^M$ auf die Vektoren $(E_2 w_q)_{q=0}^M$ vererbt.

■

Existieren Eigenräume mit einer Dimension größer als eins, so muß im schlimmsten Fall das so gewonnene Eigenvektorsystem orthogonalisiert werden.

6.2 Invarianzen des Rekonstruktionskerns

Der Nachteil der Rekonstruktionskerne $\psi_\gamma^\alpha(x,y)$ liegt in ihrem immensen Speicherplatzbedarf. Für jeden Rekonstruktionspunkt $x \in \Omega$ und jede Richtung α muß eine Funktion $\psi_\gamma^\alpha(x,\cdot)$ auf $\Gamma_{\beta,\eta(\alpha)}$ gespeichert werden. Ist dies aus Platzgründen nicht möglich, so sollten zumindestens die Integrale $< e_\gamma(x,\cdot), w_{m,o} >$ für alle $x \in \Omega$ vorberechnet werden. Damit kann der Rekonstruktionskern im Bedarfsfall ausreichend schnell über die Summenformel aus Satz 5.3 berechnet werden. Jedoch kann der Speicherplatzbedarf durch den folgenden Satz 6.4 noch erheblich reduziert werden.

Satz 6.4 Sei e_γ ein radialsymmetrischer Mollifier, d.h $e_\gamma(x,y) = e_\gamma(\|x-y\|)$ und $w_{m,o}$ $(m \in \mathbb{Z})$ ein Teil der Basisfunktionen aus Satz 3.8. Dann gilt

$$< e_\gamma(r\omega,\cdot), w_{m,o} >= Y_m(\omega) < e_\gamma(r,\cdot), w_{m,o} >$$

Beweis: Seien $c_{m,o}$ die zu den Funktionen $w_{m,o}$ gehörenden Normierungskonstanten.

$$\begin{aligned}
& c_{m,o}^{-1} < e_\gamma(r_x e^{i\varphi_x},\cdot), w_{m,o} > \\
= \quad & \int_o^R r_y J_m(kr_y) \int_o^{2\pi} \overline{Y_m(e^{i\varphi_y})} e_\gamma(\|r_x e^{i\varphi_x} - r_y e^{i\varphi_y}\|)\, d\varphi_y\, dr_y \\
\overset{\varphi_y=\varphi_z-\varphi_x}{=} \quad & \int_o^R r_y J_m(kr_y) \int_{\varphi_x}^{\varphi_x+2\pi} \overline{Y_m(e^{i(\varphi_z-\varphi_x)})} e_\gamma(\|r_x e^{i\varphi_x} - r_y e^{i(\varphi_z-\varphi_x)}\|)\, d\varphi_z\, dr_y \\
= \quad & Y_m(e^{i\varphi_x}) \int_o^R r_y J_m(kr_y) \int_{\varphi_x}^{\varphi_x+2\pi} \overline{Y_m(e^{i\varphi_z})} e_\gamma(\|e^{i\varphi_x}[r_x - r_y e^{i\varphi_z}]\|)\, d\varphi_z\, dr_y
\end{aligned}$$

Da die Funktion $\overline{Y_m(e^{i\varphi_z})} e_\gamma(\|\omega(\varphi_x)[r_x - r_y e^{i\varphi_z}]\|)$ $2\pi-$periodisch ist und $\|e^{i\varphi_x}\| = 1$ gilt

$$< e_\gamma(r_x e^{i\varphi_x},\cdot), w_{m,o} >= Y_m(e^{i\varphi_x}) < e_\gamma(r_x,\cdot), w_{m,o} >$$

■

Es genügt daher die Integrale $< e_\gamma(r,\cdot), w_{m,o} >$ für alle $r \in [0,R]$ zu berechnen. Ist es jedoch wegen Speichermangels erforderlich den Rekonstruktionskern während der Inversion über die Summenformel zu berechnen, so verliert das Verfahren der approximativen Inversen erheblich an Geschwindigkeit. Doch im Spezialfall $\beta = \pi$ kann der Speicherplatzbedarf nochmals stark verringert werden.

Korollar 6.5 Sei $\beta = \pi$ und e_γ ein radialsymmetrischer Mollifier. Dann gilt für den Rekonstruktionskern ψ_γ^α des Operators A^α aus Kapitel 2.4

(i) ψ_γ ist unabhängig von α

(ii) $\psi_\gamma(re^{i\varphi_x}, Re^{i\varphi_y}) = \psi_\gamma(r, Re^{i(\varphi_x+\varphi_y)})$.

Beweis: Der Operator A^α und das dazugehörende singuläre System $(v_p, u_p, \sigma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ sind im Fall $\beta = \pi$ nach Korolar 4.4 unabhängig von α. Einsetzen des singulären Systems $(v_p, u_p, \sigma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ in Satz 5.3 und Anwendung von Satz 6.4 ergeben dann Teil (i) und (ii) der Behauptung.

■

Nach diesem Korollar genügt es einen Rekonstruktionskern für alle Richtungen α zu berechnen. Der Kern $\psi_\gamma(x,\cdot)$ an einer Stelle $x \in \Omega$ geht durch Drehung um den Winkel $\arg_o(x)$ aus dem Kern $\psi_\gamma(\|x\|,\cdot)$ hervor.

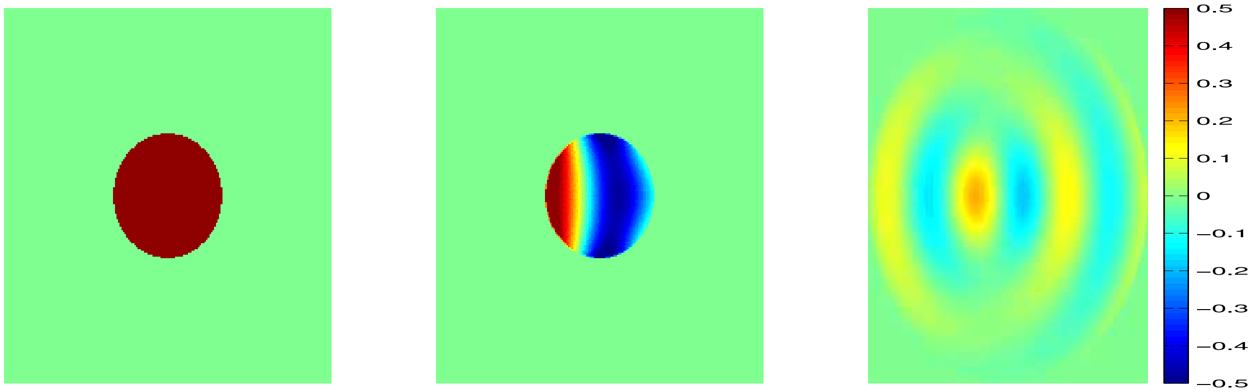

Abb. 6.1: Testobjekt

Abbildung 6.1 zeigt links das zu rekonstruierende Testobjekt. Dabei wurden die Parameter folgendermaßen gewählt: Radius $R = 1.5$, Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{0.9}$, Objektfunktion $f = 0.5\chi_{B_{0.5}(0)}$. In der Mitte ist die zum einfallenden Feld u_i^α $(\alpha = 0)$ gehörende äquivalente Quelle $\Phi^\alpha = fu^\alpha$ abgebildet. u^α wurde mit Hilfe der analytischen Formel aus Satz 2.6 berechnet. Im günstigsten Fall können aus der linearen Integralgleichung $A^\alpha\Phi = g^\alpha$ nur die Anteile außerhalb des Nullraums von A^α rekonstruiert werden. Das rechte Bild zeigt die Projektion der äquivalenten Quellen auf $N(A)^\perp$. Dabei wurde $\beta = \pi$ benutzt.

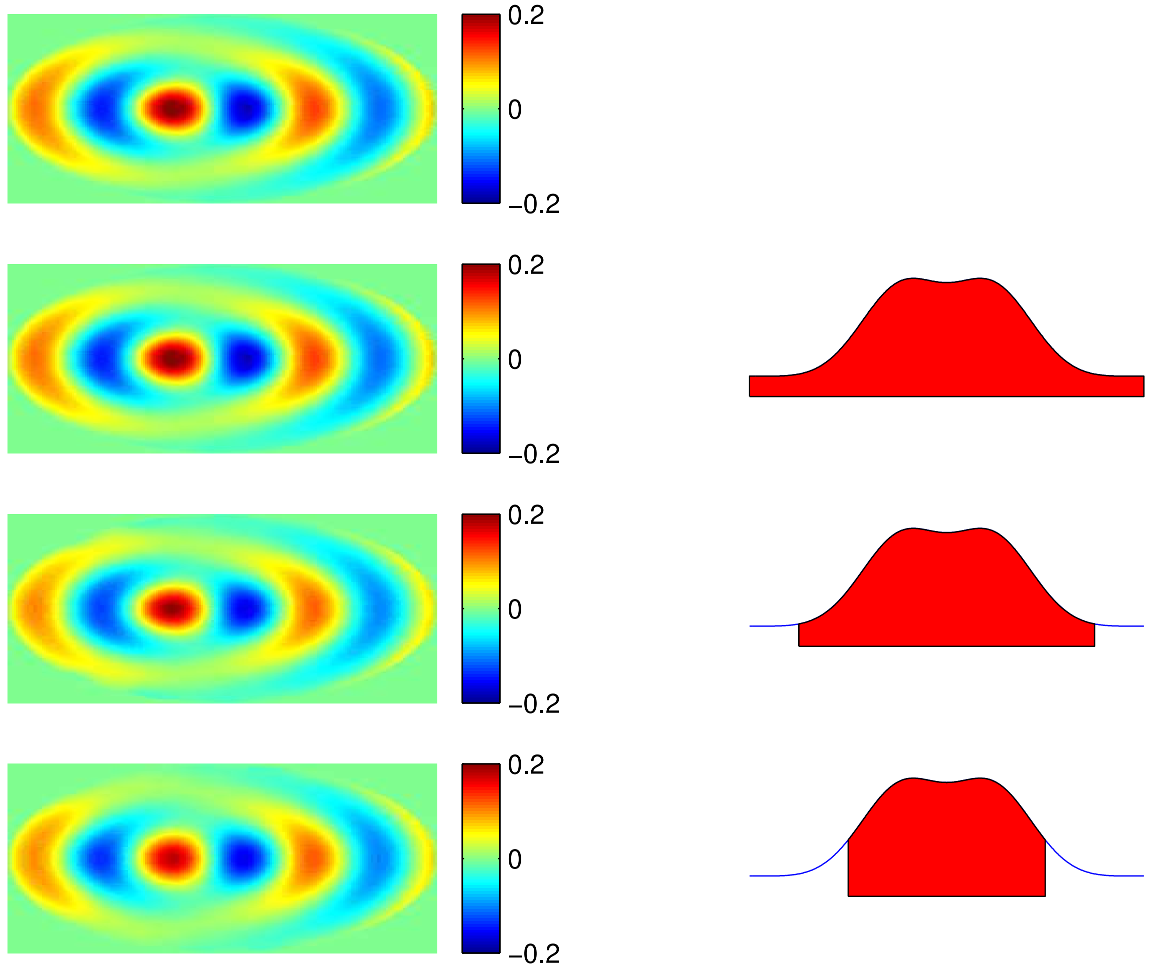

Abb. 6.2: Rekonstruktionen 1

Abbildung 6.2 zeigt die Rekonstruktionen der äquivalente Quelle für verschiedene Detektoren $\Gamma_{\beta_{\eta(\alpha)}}$, wobei der Detektormittelpunkt $\eta(\alpha) = \alpha = 0$ gesetzt wurde. Oben links ist zum Vergleich die Projektion der äquivalenten Quelle auf $N(A)^{\perp}$ dargestellt. Der Meßwinkel beträgt jeweils $\beta = \pi$, $\frac{3\pi}{4}$, bzw. $\frac{\pi}{2}$. In der rechten Spalte sind die Realteile der Daten dargestellt. Rotuntermalt ist der Teil der Daten, der für die Rekonstruktion benutzt wurde.

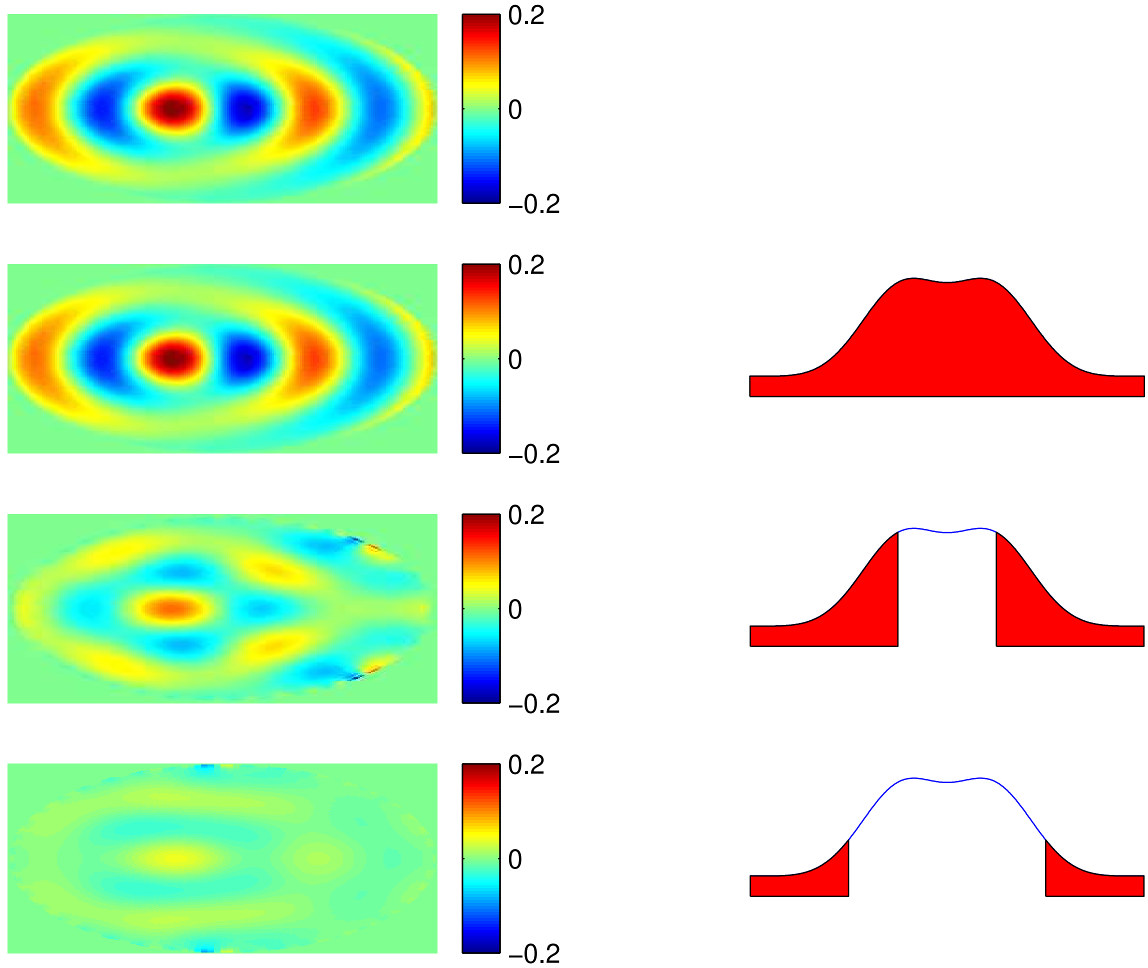

Abb. 6.3: Rekonstruktionen 2

Dem Anschein nach sind die Rekonstruktionen aus unvollständigen Daten fast so gut wie die bei vollständigen Daten. Wird jedoch der Detektor gedreht, d.h $\eta(\alpha) = \pi$, und dadurch der betragsmäßig kleinere Anteil der Daten für die Rekonstruktion benutzt, so erhält man bei entsprechendem Meßwinkel β die Ergebnisse wie in Abbildung 6.3 gezeigt. Größere Datenmengen führen ,wie nicht anders zu erwarten ist, folglich zu besseren Rekonstruktionen.

6.3 Gauß-Newton-Koeff1 und -Koeff2

Das Gauß-Newton-Verfahren ist einer der ältesten Algorithmen zur Lösung nichtlinearer Probleme und wird bereits in den Grundvorlesungen vorgestellt. Trotzdem folgt eine Kurzfassung des Verfahrens.

ALGORITHMUS GAUSS-NEWTON

Sei $\|F(x)\|^2$ das zu minimierende Funktional und x_o ein beliebiger Startwert.

Solange $\|F(x_k)\|^2 > \varepsilon$

1.Schritt : Berechne die Jakobi-Matrix $F^{'}(x_k)$.

2.Schritt : Löse das lineare Gleichungssystem

$$\overline{F^{'}(x_k)^\top} F^{'}(x_k) z = -\overline{F^{'}(x_k)^\top} F(x_k)$$

3.Schritt : $x_{k+1} = x_k + z$

Näheres hierzu findet sich zum Beispiel in [Deu/Hoh 93]. Bei den Verfahren GNK1 und GNK2 werden in der Funktion F die Operatorauswertungen $\overline{A}_{id} w_{m,n}$ benötigt. Diese können zwar in einer Vorberechnung bestimmt werden, doch stellt sich die Frage, wie die numerische Integration

$$\overline{A}_{id} w_{m,n}(x) = \frac{ik^2}{4} \int\limits_\Omega H_o(k\|x-y\|) w_{m,n}(y)\ dy$$

am besten zu bewerkstelligen ist, gerade da der Integrand an der Stelle $x = y$ eine Singularität besitzt.

Satz 6.6 Sei $r\omega \in \Omega$ und sei $(w_{m,n})_{m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}}$ die Basis des $L_2(\Omega)$ aus Satz 3.8 mit entsprechenden Konstanten $c_{m,n}$ und $\lambda_{m,n}$. Dann gilt

$$\overline{A}_{id} w_{m,n}(r\omega) = \frac{ik^2\pi}{2} c_{m,n} [H_m(kr) I^1_{m,n}(r) + J_m(kr) I^2_{m,n}(r)] Y_m(\omega)$$

wobei

$$I^1_{m,n}(r) = \begin{cases} \frac{r}{k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2}[kJ_{m+1}(kr)J_m(\frac{\lambda_{m,n}}{R}r) - \frac{\lambda_{m,n}}{R}J_m(kr)J_{m+1}(\frac{\lambda_{m,n}}{R}r)] & ; n \geq 1 \\ \frac{1}{2k^2}[r^2k^2(J_m^{'}(kr))^2 + ([kr]^2 - m^2)J_m^2(kr)] & ; n = 0 \end{cases}$$

$$I^2_{m,n}(r) = \begin{cases} \frac{s}{k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2}[kH_{m+1}(ks)J_m(\frac{\lambda_{m,n}}{R}s) - \frac{\lambda_{m,n}}{R}H_m(ks)J_{m+1}(\frac{\lambda_{m,n}}{R}s)]\Big|_r^R & ; n \geq 1 \\ \frac{1}{2k^2}[s^2k^2H_m^{'}(ks)J_m^{'}(ks) + ([ks]^2 - m^2)H_m(ks)J_m(ks)]\Big|_r^R & ; n = 0 \end{cases}$$

Beweis:

$$\frac{4}{ik^2}\overline{A}_{id} w_{m,n}(x) = \int\limits_\Omega H_o(k\|x-y\|) w_{m,n}(y)\ dy$$

Nach Übergang zu den Polarkoordinaten und Ausnutzen der Reihendarstellung der Hankelfunktion aus 23 Anhang ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{4}{ik^2} \quad \tfrac{1}{c_{m,n}}\overline{A}_{id} w_{m,n}(r_x\omega_x) \\
= &\sum_{p\in\mathbb{Z}} \quad H_p(kr_x)Y_p(\omega_x)\int_0^{r_x} r_y J_p(kr_y)J_m(\tfrac{\lambda_{m,n}}{R}r_y)\underbrace{\int_{S^1}\overline{Y_p(\omega_y)}Y_m(\omega_y)\ d\omega_y}_{2\pi\delta_{m,p}}\ dr_y \\
&\qquad +J_p(kr_x)\overline{Y_p(\omega_x)}\int_{r_x}^{R} r_y H_p(kr_y)J_m(\tfrac{\lambda_{m,n}}{R}r_y)\underbrace{\int_{S^1} Y_p(\omega_y)Y_m(\omega_y)\ d\omega_y}_{2\pi\delta_{-m,p}}\ dr_y \\
= &\ 2\pi \quad [H_m(kr_x)Y_m(\omega_x)\underbrace{\int_0^{r_x} r_y J_m(kr_y)J_m(\frac{\lambda_{m,n}}{R}r_y)\ dr_y}_{=:I^1_{m,n}(r_x)} \\
&\qquad +J_{-m}(kr_x)\overline{Y_{-m}(\omega_x)}\int_{r_x}^{R} r_y H_{-m}(kr_y)J_m(\tfrac{\lambda_{m,n}}{R}r_y)\ dr_y]
\end{aligned}
$$

Da $J_{-m} = (-1)^m J_m$, $H_{-m} = (-1)^m H_m$ auf $\mathbb{R}$, und weil $\overline{Y_{-m}} = Y_m$, gilt mit $I^2_{m,n}(r) := \int_r^R r_y H_m(kr_y)J_m(\frac{\lambda_{m,n}}{R}r_y)\ dr_y$:

$$\overline{A}_{id}w_{m,n}(r\omega) = \frac{ik^2\pi}{2}c_{m,n}[H_m(kr)I^1_{m,n}(r) + J_m(kr)I^2_{m,n}(r)]Y_m(\omega)$$

Mit Satz 1.28 und da die Besselfunktionen J_m in einer Umgebung von 0 beschränkt sind folgt

$$
I^1_{m,n}(r) = \begin{cases} \frac{r}{k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2}[kJ_{m+1}(kr)J_m(\frac{\lambda_{m,n}}{R}r) - \frac{\lambda_{m,n}}{R}J_m(kr)J_{m+1}(\frac{\lambda_{m,n}}{R}r)] & ; n \geq 1 \\ \frac{1}{2k^2}[r^2k^2(J_m'(kr))^2 + ([kr]^2 - m^2)J_m^2(kr)] & ; n = 0 \end{cases}
$$

$$
I^2_{m,n}(r) = \begin{cases} \frac{s}{k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2}[kH_{m+1}(ks)J_m(\frac{\lambda_{m,n}}{R}s) - \frac{\lambda_{m,n}}{R}H_m(ks)J_{m+1}(\frac{\lambda_{m,n}}{R}s)]\Big|_r^R & ; n \geq 1 \\ \frac{1}{2k^2}[s^2k^2H_m'(ks)J_m'(ks) + ([ks]^2 - m^2)H_m(ks)J_m(ks)]\Big|_r^R & ; n = 0 \end{cases}
$$

■

Mit Hilfe dieses Satzes kann eine numerische Integration vollständig umgangen werden. Für den Fall $r = 0$ muß jedoch $\lim_{r\to o} I^2_{m,n}(r)$ berechnet werden. Numerisch kann dies durch Einsetzen eines Wertes $0 < r << 1$ realisiert werden. Eine elegante Lösung dieses Problems bietet folgender Satz für den Fall $m \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$.

Satz 6.7 Sei $r\omega \in \Omega$ und sei $(w_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$ die Basis des $L_2(\Omega)$ aus Satz 3.8 mit entsprechenden Konstanten $c_{m,n}$ und $\lambda_{m,n}$. Dann gilt für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$:

$$\overline{A}_{id}w_{m,n}(r\omega) = d_{m,n}w_{m,o}(r\omega) + e_{m,n}w_{m,n}(r\omega)$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} d_{m,n} &= \frac{ik^2\pi c_{m,n}}{2(k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2)c_{m,o}}\left[kRH_{m+1}(kR)J_m(\lambda_{m,n}) - \lambda_{m,n}H_m(kR)J_{m+1}(\lambda_{m,n})\right] \\ e_{m,n} &= \frac{-k^2}{k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2} \end{aligned}$$

Beweis: Seien $I^1_{m,n}(r)$ und $I^2_{m,n}(r)$ wie in Satz 6.6. Damit gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{ik^2\pi c_{m,n}c_{p,q}} < \overline{A}_{id}w_{m,n}, w_{p,q} > \\ = & \int_o^R r\left[H_m(kr)I^1_{m,n}(r) + J_m(kr)I^2_{m,n}(r)\right] J_p(\tfrac{\lambda_{p,q}}{R}r) \underbrace{\int_{S^1} Y_m(\omega)\overline{Y_p(\omega)}\ d\omega}_{=2\pi\delta_{m,p}}\ dr \\ = & \frac{2\pi\delta_{m,p}}{k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2}\left[\int_o^R rT_m(r)J_m(\tfrac{\lambda_{m,n}}{R}r)J_m(\tfrac{\lambda_{m,q}}{R}r) + rS_m(R)J_m(kr)J_m(\tfrac{\lambda_{m,q}}{R}r)\ dr\right] \end{aligned} \tag{6.2}$$

mit

$$T_m(r) = kr[H_m(kr)J_{m+1}(kr) - J_m(kr)H_{m+1}(kr)]$$
$$S_m(R) = kRH_{m+1}(kR)J_m(\lambda_{m,n}) - \lambda_{m,n}H_m(kR)J_{m+1}(\lambda_{m,n})$$

Unter Verwendung von 29 Anhang in Verbindung mit $H_m = J_m + iN_m$ erhält man:

$$T_m(r) = \frac{2i}{\pi}$$

Nach Einsetzen von T_m und S_m in (6.2) folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2}{ik^2\pi^2 c_{m,n}c_{p,q}} < \overline{A}_{id}w_{m,n}, w_{p,q} > \\ = & \frac{2i\delta_{m,p}}{\pi}\underbrace{\int_o^R rJ_m(\frac{\lambda_{m,n}}{R}r)J_m(\frac{\lambda_{m,q}}{R}r)\ dr}_{\frac{1}{2\pi c^2_{m,n}}\delta_{n,q}} + S_m(R)\delta_{m,p}\underbrace{\int_o^R rJ_m(kr)J_m(\frac{\lambda_{m,q}}{R}r)\ dr}_{\frac{1}{2\pi c^2_{m,o}}\delta_{o,q}} \end{aligned}$$

Elementare Umformungen führen schließlich zu:

$$< \overline{A}_{id}w_{m,n}, w_{p,q} >= \frac{-k^2}{k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2}\delta_{m,p}\delta_{n,q} + \frac{ik^2\pi c_{m,n}}{2(k^2-(\frac{\lambda_{m,n}}{R})^2)c_{m,o}}S_m(R)\delta_{m,p}\delta_{o,q}$$

$\blacksquare$

Bemerkung 6.8 Das Problem ist oftmals die Auswertung von $\overline{A}_{id}f$ für eine beliebige Funktion $f \in L_2(\Omega)$. Schwierigkeiten verursacht dabei die Singularität der Hankelfunktion H_o. Dieses Problem kann jedoch mit obigen Satz umgangen werden, indem nur die Integrale $< f, w_{m,n} >$ berechnet werden und anschließend $\overline{A}_{id}f = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{N}} < f, w_{m,n} > \overline{A}_{id}w_{m,n}$. In meinen Anwendungen war dieses Verfahren effizient schneller und exakter als die numerische Integration $Af(x)$. Die Geschwindigkeit hängt natürlich davon ab, wieviele Basisfunktionen $w_{m,n}$ benötigt werden, um die Funktion f annähernd genau darstellen zu können. In Zahlen ergibt sich folgendes.

In den betrachteten Beispielen wurde mit 210 Basisfunktionen ($m = -10, \ldots, 10$ und $n = 0, \ldots, 9$) gearbeitet. Damit mußten 210 Integrationen $< f, w_{m,n} >$ durchgeführt werden, ohne ein Problem mit irgendwelchen Singularitäten zu haben. Im anderen Fall mußten für jeden Gitterpunkt $x \in \Omega$ ein Integral $\overline{A}_{id}f(x)$ berechnet werden mit dem Problem der Singularität an der Stelle $x = y$. Die Anzahl der Gitterpunkte war größer gleich 2000, damit die Integrale ausreichend genau bestimmt werden konnten.

Ein weiteres großes Problem, das beim Verfahren GNK1 auftaucht, ist der enorm große Speicherbedarf der Matrix $F'(x_k)$. Jedoch ist diese Matrix reichlich dünn besetzt. Ist Q die Anzahl der Gitterpunkte, P die Anzahl der Richtungen, aus denen die Daten bereitstehen, und $L = (2M+1)N$ die Anzahl der Basisfunktionen, dann hat die Jakobi-Matrix $F'(x_k)$ die Struktur :

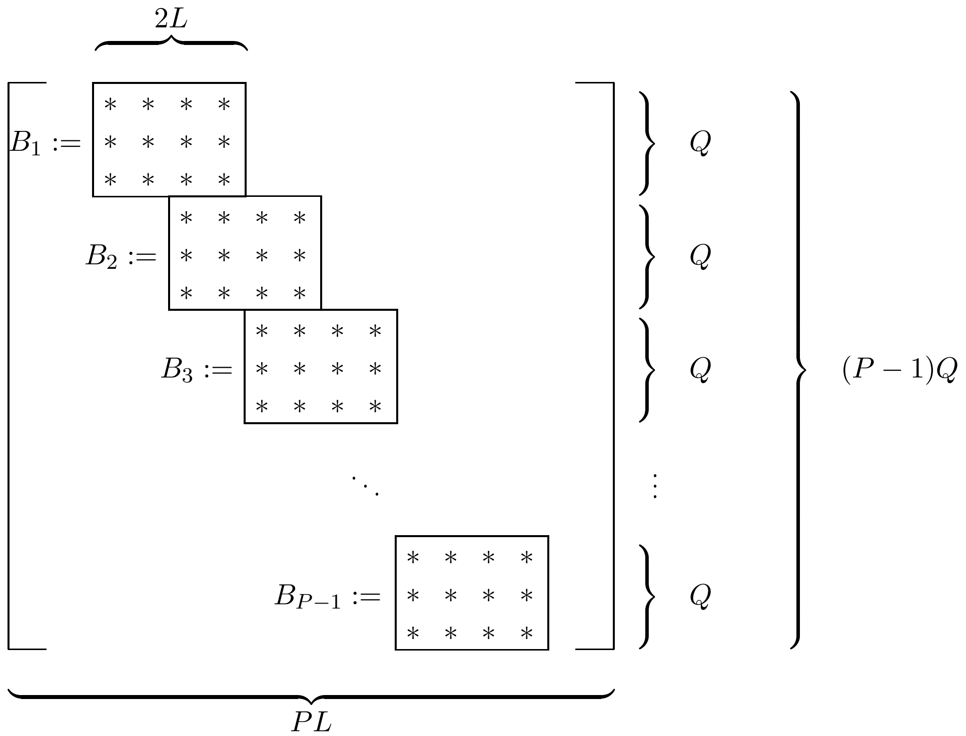

Abb. 6.4: Struktur von F' bei GNK1

Sind zwei aufeinander folgende Blöcke B_n und B_{n+1} berechnet, so können durch geschicktes

Programmieren die Anteile der Matrix $\overline{F'^{\top}F'}$ und des Vektors $\overline{F'^{\top}F}$, die durch B_n betroffen sind, berechnet werden. Anschließend kann der Block B_n wieder verworfen werden. Die Matrix $\overline{F'^{\top}F'}$ ist wiederrum dünn besetzt. Sie hat die Struktur

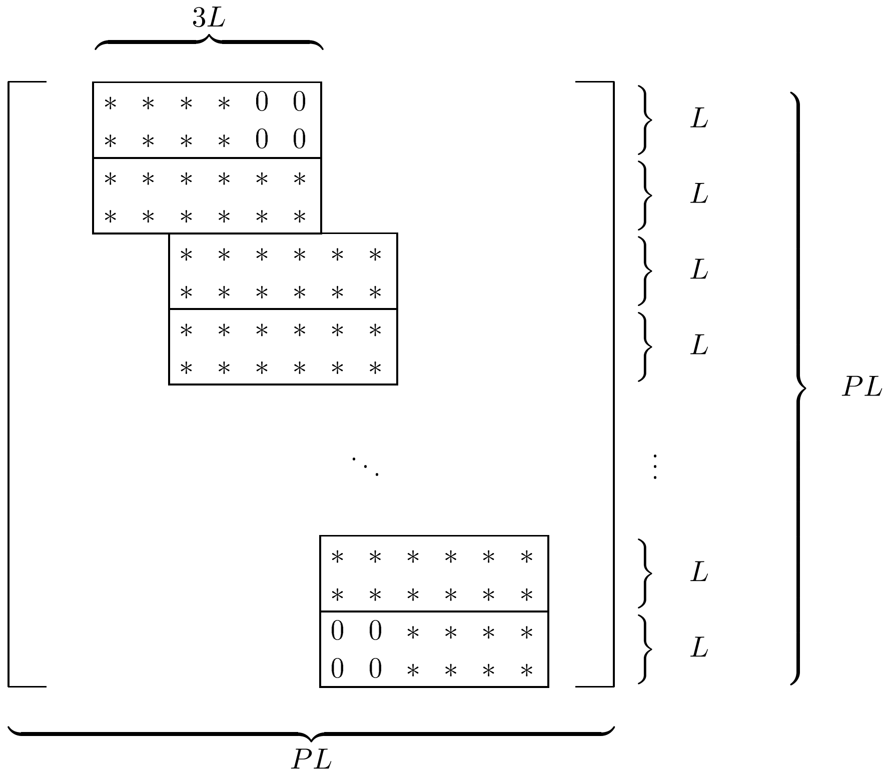

Abb. 6.5: Struktur von $\overline{F'^{\top}F'}$ bei GNK1

Es müssen daher nur $3PL^2$ anstatt $((P-1)Q)^2$ Werte gespeichert werden.

Ergebnisse

Die Qualität der Rekonstruktionen beider Verfahren ist gleich gut. Jedoch benötigt der Algorithmus von GNK2 mehr Iterationen als GNK1. Dafür ist der Zeitaufwand in GNK1 für jeden Iterationschritt größer als bei dem Verfahren GNK2.

Nachteile der Verfahren

1.) Dadurch, daß die Verfahren die Entwicklungskoeffizienten $< \Phi, w_{m,n} >$ bestimmen, ist nicht zu erwarten, daß die Algorithmen bei zu klein gewähltem Unterraum scharfe Kanten wiedergeben.

2.) Die Gauß-Newton-Iteration bleibt je nach Startwert in Nebenminima stecken.

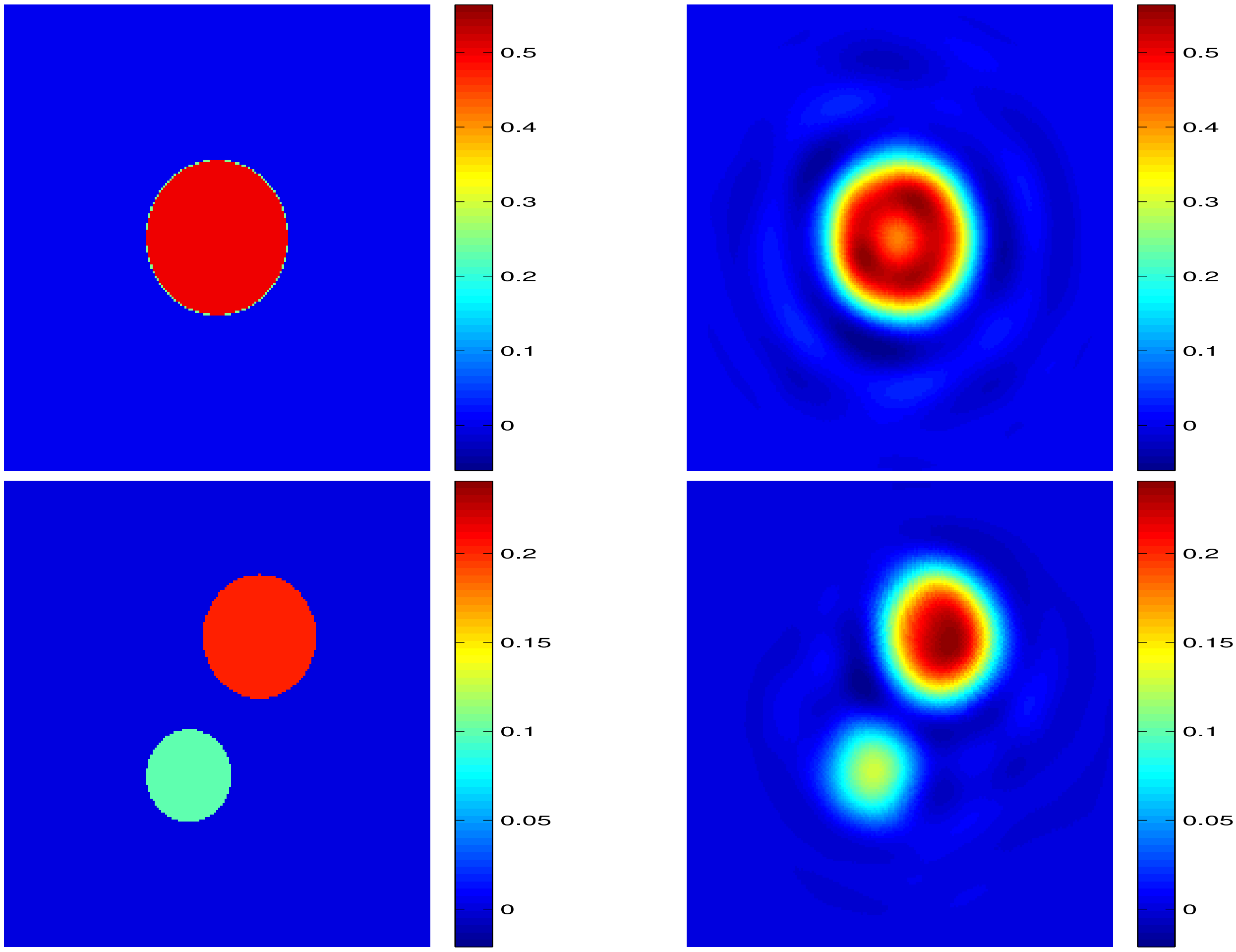

Abb. 6.6: Rekonstruktionen

Vorteile der Verfahren

1.) Durch das Lösen des linearen Problems $A^\alpha \Phi^\alpha = g^\alpha$ im voraus ist in jedem Schritt der Gauß-Newton-Iteration sichergestellt, daß die äquivalenten Quellen Φ^α die Bedingung an die Daten erfüllen, da Φ^α nur im Nullraum von A^α geändert wird.

2.) Sind die Koeffizient $\Phi^\alpha_{m,n}$ durch die Verfahren bestimmt, so läßt sich die Rekonstruktion der Objektfunktion f auf einem beliebig feinen Gitter bewerkstelligen.

Die Abbildungen 6.6 zeigt jeweils links das exakte Objekt und rechts die Rekonstruktion. Die Daten für das obere Objekt in Abbildung 6.6 wurden analytisch mit Hilfe von Satz 2.6 berechnet. Die Daten für das untere Objekt wurden wie in Bemerkung 2.5 beschrieben numerisch ermittelt. Für die Rekonstruktion wurden Daten aus 120 verschiedenen Einfallsrichtungen benutzt. Die Parameter wurden wie folgt gewählt: Radius $R = 1.5$, Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{0.9}$, Meßwinkel $\beta = \pi$. Die Objektfunktion für das erste Objekt lautet $f(x) = 0.5\chi_{B_{0.5}(0)}(x)$, und für das zweite Objekt $f(x) = 0.2\chi_{B_{0.4}(0.3+0.5i)}(x) + 0.1\chi_{B_{0.3}(-0.2-0.4i)}(x)$.

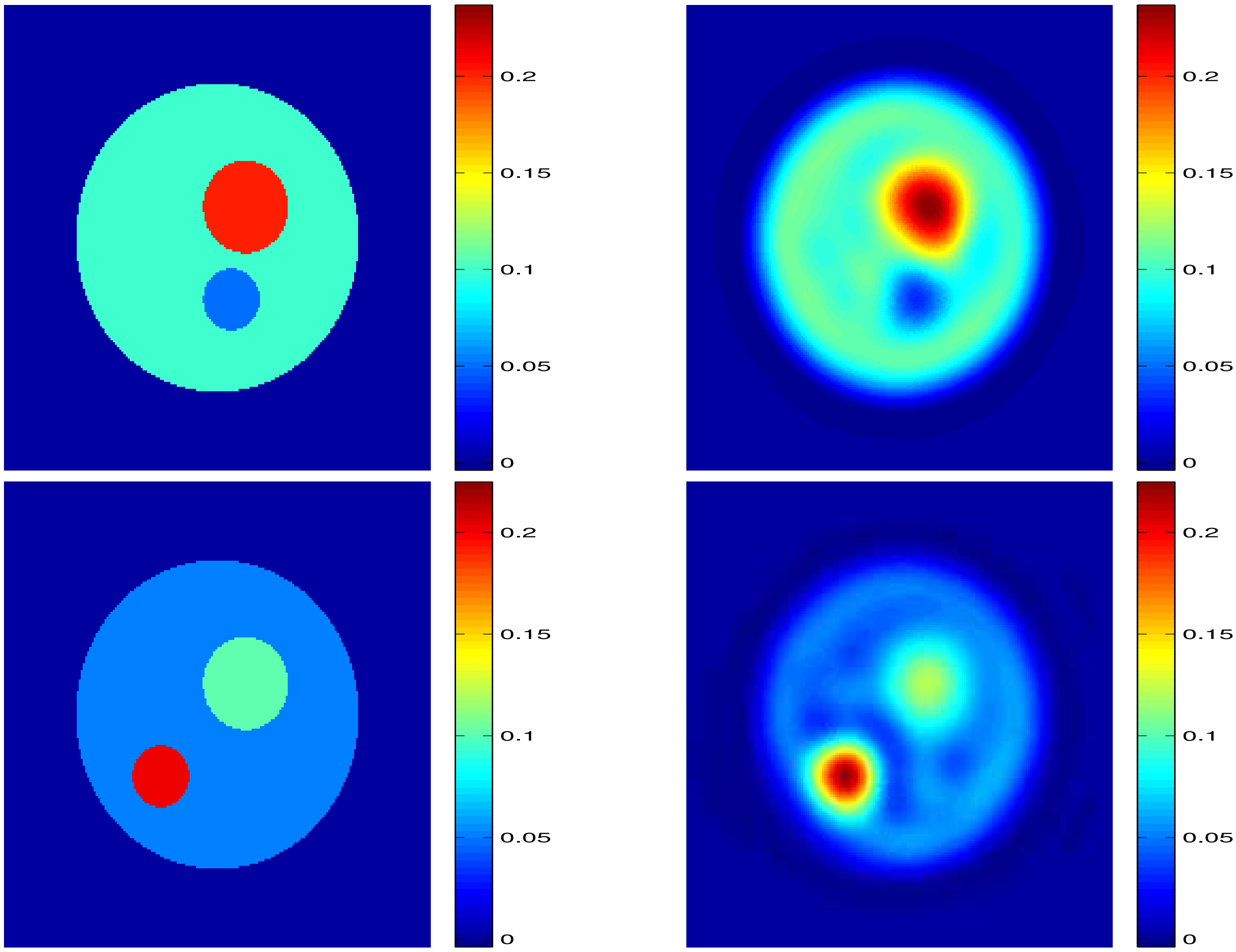

Abb. 6.7: Rekonstruktion einer kompexwertigen Funktion

Die abschließende Abbildung 6.7 zeigt links eine komplexwertige Objektfunktion und rechts die dazugehörige Rekonstruktion (Realteil oben und Imaginärteil unten). Die Funktion f lautet

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(f(x)) &= 0.1\chi_{B_1(0)}(x) + 0.1\chi_{B_{0.3}(0.2+0.2i)}(x) - 0.05\chi_{B_{0.2}(0.1-0.4i)}(x) \\ \mathrm{Im}(f(x)) &= 0.05\chi_{B_1(0)}(x) + 0.05\chi_{B_{0.3}(0.2+0.2i)}(x) + 0.15\chi_{B_{0.2}(-0.4-0.4i)}(x) \end{aligned}$$

Wie klar zu beobachten ist, konnten die Kanten der Objekte nicht scharf rekonstruiert werden. Die Ursachen liegen hierfür zunächst in der Regularisierung des linearen Problems. Weiterhin führt die Beschränkung nach der Suche einer Lösung auf einem endlichdimensionalen Unterraum des $L_2(\Omega)$ zu einer Verstärkung der Glättung. Desweiteren wirkt die Diskretisierung des Rekonstruktionsgebietes ebenfalls regularisierend und damit glättend. Die Rekonstruktionen erbringen jedoch den numerischen Nachweis, daß die Aussagen im analytischen Teil der Arbeit korrekt sind.

Anhang A

Definition und Eigenschaften von Besselfunktionen

	1.) Besselfunktion J_ν (Besselfunktion 1.Art)		
1	$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)}$	$z, \nu \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
	$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(z \sin\theta - \nu\theta)\ d\theta$	$\nu \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
	$= \frac{i^{-\nu}}{\pi} \int\limits_0^\pi e^{iz\cos\theta} \cos(\nu\theta)\ d\theta$	$\nu \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
2	$J_\nu(z) \sim z^\nu$ für $z \to 0$	$\mathbb{C} \ni \nu \neq -1, -2, -3, \ldots$	[Abr/Ste 64]
3	$J_\nu(ze^{im\pi}) = e^{im\nu\pi} J_\nu(z)$	$z, \nu \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}$	[Abr/Ste 64]
4	J_ν hat nur reelle Nullstellen	$\nu > -1$	[Wat 58]
5	$aJ_\nu(z) + zbJ_\nu^{'}(z)$ hat nur reelle Nullstellen	$\nu > -1, 0 \neq b \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}, \frac{a}{b} + \nu \geq 0$	[Dix 03]
6	$aJ_\nu(z) + zbJ_\nu^{'}(z)$ hat bis auf zwei rein imaginäre Nullstellen nur reelle Nullstellen	$\nu > -1, 0 \neq b \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}, \frac{a}{b} + \nu < 0$	[Dix 03]
7	Die positiven Nullstellen von $aJ_\nu(z) + zbJ_\nu^{'}(z)$ und $cJ_\nu(z) + zdJ_\nu^{'}(z)$ sind ineinander verschachtelt	$\nu > -1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $ad \neq bc$	[Wat 58]
8	J_ν hat abzählbar unendlich viele positive Nullstellen $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$	$\nu \in \mathbb{R}$	[Abr/Ste 64]
9	$J_\nu, J_{-\nu}$ bilden Fundamentallösung zu der Bessel'schen Differenzialgleichung	$\nu \notin \mathbb{Z}$	[Abr/Ste 64]
10	$J_m = (-1)^m J_{-m}$	$m \in \mathbb{Z}$	[Abr/Ste 64]
11	J_ν ist in der Umgebung von 0 beschränkt	$Re(\nu) \geq 0$	[Abr/Ste 64]
12	$J_m(0) = 0$	$m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	[Abr/Ste 64]
13	J_ν ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$	$\nu \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
	2.) Neumann- oder Weberfunktion N_ν (Besselfunktion 2.Art)		
14	$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$ $= \lim\limits_{\mu\to\nu} \frac{J_\mu(z)\cos(\mu\pi) - J_{-\mu}(z)}{\sin(\mu\pi)}$	$\nu \notin \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$ $\nu \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64] [Abr/Ste 64]
15	$N_0(z) \sim \log z$ für $z \to o$	$z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
16	$N_\nu(z) \sim z^{-\nu}$ für $z \to o$	$z \in \mathbb{C}, Re(\nu) > 0$	[Abr/Ste 64]
17	J_ν, N_ν bilden Fundamentallösung zu der Bessel'schen Differenzialgleichung	$\nu \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
	3.) Hankelfunktion $H_\nu, H_\nu^{(2)}$ (Besselfunktion 3.Art)		
18	$H_\nu(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z)$	$\nu, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
19	$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z)$	$\nu, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
20	$H_\nu(z) = e^{i\pi\nu} H_{-\nu}(z)$	$\nu, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
21	$H_\nu^{(2)}(z) = e^{-i\pi\nu} H_{-\nu}^{(2)}(z)$	$\nu, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
22	$H_\nu, H_\nu^{(2)}$ bilden Fundamentallösung zu der Bessel'schen Differenzialgleichung	$\nu \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
23	$H_0(k\\|x-y\\|) =$ $\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} H_m(k\\|x\\|) Y_m(\frac{x}{\\|x\\|}) J_m(k\\|y\\|) \overline{Y_m(\frac{y}{\\|y\\|})}$	$\\|x\\| > \\|y\\|$	[Abr/Ste 64]

χ bezeichne die Funktion $J, N, H, H^{(2)}$ oder irgendeine Linearkombination dieser Funktionen.

Sonstige Eigenschaften von Besselfunktionen			
24	$\chi_{\nu-1}(z) + \chi_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\chi_\nu(z)$	$\nu, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
25	$\chi_{\nu-1}(z) - \chi_{\nu+1}(z) = 2\chi_\nu^{'}(z)$	$\nu, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
26	$\chi_\nu^{'}(z) = \chi_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}\chi_\nu(z)$	$\nu, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
27	$\chi_\nu^{'}(z) = -\chi_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z}\chi_\nu(z)$	$\nu, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
28	$\chi_\nu^{'}(z) = \frac{1}{2}\left(\chi_{\nu-1} - \chi_{\nu+1}\right)$	$\nu, z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
29	$J_{\nu+1}(z)Y_\nu(z) - J_\nu(z)Y_{\nu+1}(z) = \frac{2}{\pi z}$	$\nu \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$	[Abr/Ste 64]
Abwandlungen der Bessel'schen Differenzialgleichung und ihre Lösungen			
30	$h_\nu^{''} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2-1/4}{z^2}\right) h_\nu = 0$	$h_\nu(z) = \sqrt{z}\chi_\nu(\lambda z)$	[Abr/Ste 64]
31	$z^2 h_\nu^{''} + z h_\nu^{'}(z) + \left(\lambda^2 z^2 - \nu^2\right) h_\nu = 0$	$h_\nu(z) = \chi_\nu(\lambda z)$	[Abr/Ste 64]

Literaturverzeichnis

[Abd 98] Abdullah H.: Anwendung der approximativen Inversen zur Herleitung einer Rekonstruktionsformel für ein zweidimensionales inverses Streuproblem, Dissertation, Universität des Saarlandes, 1998.

[Abd/Lou 99] Abdullah H. - Louis A.K.: The approximate inverse for solving an inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium. Inverse Problems 15(1999) 1213-1229.

[Abr/Ste 64] Abramowitz M. - Stegun I.A.: Handbook for mathematical functions. Department of commerce,USA 1964.

[Che/Ros 88] Cheney M. - Rose J.H.: Three-dimensional inverse scattering for the wave equation: weak scattering approximation with error estimation, Inverse Problems 4 435-47, 1988.

[Col/Kre 92] Colton D.L - Kress R.: Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Spinger, Berlin 1992.

[Deu/Hoh 93] Deuflhard P. - Hohmann A.: Numerische Mathematik I. De-Gruyter-Lehrbuch, Berlin 1993.

[Dix 03] Dixon A.C.: On a property of Bessel's functions. Messenger, XXXII. 1903.

[Gra/Mat 66] Gray A. - Mathews G.B.: A treatise on Bessel functions and their applications to physics. New York, Dover publication 1966.

[Hab/Ori 94] Habashy T.M. - Oristaglio M.L. : Simultaneous nonlinear reconstruction of two-dimensional permittivity and conductivity. Radio Science, Volume 29, Number 4, Pages 1101-1118, July-August 1994.

[Had 23] Hadamard J.: Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations, Yale University Press, New Haven, 1923.

[Hoc 86] Hochstadt H.: The functions of mathematical physics. New York, Dover publication 1986.

[Lan 87] Langenberg K.J.: Applied inverse problems for acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering. Basic methods of tomography and inverse problems ed G.T. Hermann (Bristol:Hilger) 1987.

[Lob 96] Lobel P.: Problème de diffraction inverse: reconstruction d'image et optimisation avec régularisation par préservation des discontinuités- application à l'imagerie microonde PhD Thesis L'Université de Nice-Sophia Antipolis 1996.

[Lou 86] Louis A.K.: Incomplete Data Problems in X-Ray Computerized Tomograhpie, Numerische Mathematik 48, 251-262(1986).

[Lou 89] Louis A.K.: Inverse und schlecht gestellte Probleme. Stuttgart, Teubner, 1989.

[Mor/Fes 53] Morse P.M. - Feshbach H.: Methods of theoretical physics, Parts I and II. International student edition. McGraw-Hill 1953.

[Van/Kle 97] Van den Berg P.M. - Kleinman R.E.: A contrast source inversion method, Inverse Problems 13(1997) 1607-1620.

[Wat 58] Watson G.N.: A treatise on the theory of Bessel functions. Second edition. At the university press, Cambridge 1958.

[Wue 95] Wuebbling F.: Das direkte und das inverse Streuproblem bei fester Frequenz. Disertation, Universität Münster 4/95-N.

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, im Juni 2002

Erik Wallacher