Universität des Saarlandes Fachbereich Mathematik

Spiralgeometrie in der 3D-Computertomographie – Die Inversionsformel von Katsevich

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Mathematikers
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von
Thomas Weber

Saarbrücken
April 2004

Betreuer: Univ.-Prof. Dr. A. K. Louis

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Symbolverzeichnis

β	Richtungsvektor vom Quellpunkt zum Rekonstruktionspunkt
C	Spirale der Quelle im $\mathbb{R}^3$
Δ	Winkel, der die wichtige Region auf dem Detektor beschreibt $(= 2 \arccos \frac{r}{R})$
$Df(y, \theta)$	divergente Röntgentransformation
h	Ganghöhe der Spirale
$I_{PI}(x)$	Intervall des Spiralenparameters für das PI-Segment des Punktes x
N_γ	Anzahl der Stützstellen zur Näherung des Filterintegrals
$\mathcal{O}$	Landau-Symbol
r	Radius des Zylinders, der U umfasst
R	Radius der Spirale
$\mathrm{supp}(f)$	Träger der Funktion f
S^2	Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$
s	Spiralenparameter
$s_b(x), s_t(x)$	linker bzw. rechter Randpunkt des Intervalls $I_{PI}(x)$
θ	Richtungsvektor der divergenten Röntgentransformation
U	Rekonstruktionsgebiet innerhalb der Spirale C
$y(s)$	Quellpunkt
$\lVert x \rVert$	euklidische Norm des Vektors x
$\square$	Ende eines Beweises

Einleitung

Die 3D-Computertomographie ist heute ein Standardverfahren in der diagnostischen Medizin und beim zerstörungsfreien Prüfen, um nichtinvasiv Informationen über das untersuchte Objekt zu erhalten. Insbesondere im Bereich der Medizin spielt dabei die Spiralgeometrie eine wichtige Rolle: der Patient wird mit konstanter Geschwindigkeit durch eine rotierende Strahlenquelle und das ebenfalls rotierende Detektorgitter bewegt. Diese Methode verkürzt die Untersuchungszeiten drastisch und führt dadurch zu besseren Ergebnissen.

Heutige CT-Scanner verfügen über einige wenige Reihen an Detektoren im Detektorgitter. Mit technischer Weiterentwicklung wird in wenigen Jahren die Anzahl dieser Reihen allerdings zunehmen. Damit wird die Verwendung angepasster Verfahren aus der 2D-Computertomographie schwierig und es müssen Verfahren entwickelt werden, die sowohl die Kegelstrahlgeometrie der Strahlenquelle als auch die Ausdehnung des Detektors berücksichtigen.

Bei der Entwicklung von Rekonstruktionsverfahren für diese Geometrie stößt man im mathematischen Bereich auf die gleichen Schwierigkeiten, wie sie bereits von der 2D-Computertomographie bekannt sind: das Problem ist schlecht gestellt und analytisch exakte Inversionsverfahren sind sehr aufwendig. Eine exakte Inversionsformel vom Typ der gefilterten Rückprojektion wurde von Katsevich vorgestellt. Die Eigenschaften dieser Formel und ihre Implementierung sind Thema dieser Arbeit.

Zu Beginn wird die Inversionsformel von Katsevich vorgestellt. Wir beschäftigen uns mit einigen Eigenschaften der spiralförmigen Abtastkurve und zeigen im Anschluss Zusammenhänge der Inversionsformel mit der 2D-Radontransformation auf. Um die Berechnung zu beschleunigen, formen wir die Inversionsformel im zweiten Kapitel um. Dazu gehen wir auf das Problem des langen Objektes ein und benutzen verschiedene Invarianzen. Im letzten Kapitel stellen wir die mit den beiden Varianten der Inversionsformel berechneten Rekonstruktionen vor und vergleichen die Auswirkungen verschiedener Parameter auf die Güte der Rekonstruktion. Bei der Implementierung der angepassten Variante werden weitere Invarianzen der Geometrie ausgenutzt, die wir ebenfalls behandeln.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denen danken, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit geholfen haben. An erster Stelle Herrn Professor Louis für das interessante Thema und seine stete Hilfsbereitschaft. Weiterhin den Mitarbeitern am Lehrstuhl für ihre Ratschläge und das gute Arbeitsklima. Ein besonderer Dank geht an Dr. Uwe Schmitt für seine Hilfe im Bereich der EDV und an Volker Gebhard und Dr. Peter Jonas, die stets ein offenes Ohr für meine mathematischen Probleme hatten.

Weiterhin danke ich meinen Eltern für ihre Unterstützung während meines Studiums. Nicht zuletzt danke ich meiner Michaela für das Ertragen meiner schlechten Laune, wenn der Rechner mal wieder anderer Meinung als ich war.

1 Die Inversionsformel von Katsevich

1.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

In diesem Kapitel werden wir die Inversionsformel von Katsevich für die Spiralgeometrie kennenlernen. Es ist eine Formel vom Typ der gefilterten Rückprojektion. Sie wurde von Katsevich in [2] erstmals vorgeschlagen und von ihm in [3] nochmals verbessert. Wir beschäftigen uns in der vorliegenden Arbeit ausschließlich mit der verbesserten Formel aus [3].

Zuerst zu den Notationen: Wir bezeichnen mit C die Spirale

$$C := \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 = R\cos s,\ y_2 = R\sin s,\ y_3 = \frac{h}{2\pi}s,\ s \in \mathbb{R}\},\ h > 0,$$

s nennen wir den *Spiralenparameter*, desweiteren sei U eine offene Menge, die vollständig innerhalb der Spirale liegt

$$\overline{U} \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}, \quad R > r > 0, \quad U \text{ offen},$$

und S^2 bezeichne die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

Weiterhin sei Df die divergente Röntgentransformation von f

$$[Df](y,\theta) := \int_0^\infty f(y + t\theta)\,dt, \quad \theta \in S^2,\ y \in \mathbb{R}^3,$$

β sei der Einheitsvektor vom Spiralenpunkt $y(s)$ zum Rekonstruktionspunkt x

$$\beta(s,x) := \frac{x - y(s)}{\|x - y(s)\|}, \quad x \in U,\ y(s) \in C,$$

und $\dot{y}(s)$ bezeichne die Ableitung von $y(s)$ nach s

$$\dot{y}(s) := \frac{d}{ds}\, y(s). \tag{1.1}$$

1.1 Definition (PI-Segment). Unter einem *PI-Segment* verstehen wir eine Strecke, deren Endpunkte auf der Spirale liegen und bei der die Endpunkte innerhalb einer einzigen Windung liegen.

1.2 Satz (Existenz und Eindeutigkeit des PI-Segments). *Jeder Punkt, der echt innerhalb der Spirale liegt, gehört zu genau einem PI-Segment.*

Beweis. Wir folgen im Beweis dem Weg von Defrise et al. aus [5, Anhang B]. Da wir einige Zwischenergebnisse des Beweises später noch benötigen, führen wir den Beweis ausführlich.

Wir bezeichnen mit $x = (x_1, x_2, x_3) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, x_3)$, $\rho < R$ den Rekonstruktionspunkt innerhalb der Spirale in kartesischen bzw. Zylinderkoordinaten. Ein PI-Segment identifizieren wir anhand der Spiralenparameter $p, q \in \mathbb{R}$ der Endpunkte, wobei $p < q$. Mit $0 \leq t \leq 1$ legen wir die Position auf dem PI-Segment fest, wobei $t = 0$ dem Punkt $y(q)$ und entsprechend $t = 1$ dem Punkt $y(p)$ entspricht.

Wir müssen jetzt zeigen, dass der Punkt x zu genau einem PI-Segment gehört. Dies bedeutet, dass das folgende Gleichungssystem genau ein Lösungstripel $(p,\ q,\ t)$ mit $0 < q - p < 2\pi$ und $0 < t < 1$ hat

$$\begin{aligned} x_1 = \rho\cos\varphi &= R\,t\cos p + R(1-t)\cos q \\ x_2 = \rho\sin\varphi &= R\,t\sin p + R(1-t)\sin q \\ x_3 &= h'tp + h'(1-t)q \end{aligned} \tag{1.2}$$

mit $h' := \frac{h}{2\pi}$. Im weiteren Verlauf werden wir Gebrauch von verschiedenen Additionstheoremen machen, die wir der Übersichtlichkeit halber hier auflisten, ohne im weiteren Verlauf immer explizit auf sie zu verweisen (vgl. [8])

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$
- $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$
- $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$
- $\cos\alpha\ \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}[\cos\beta + \cos(2\alpha - \beta)]$

- $\sin\alpha\ \cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}[\sin\beta + \sin(2\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Wir bestimmen mittels der beiden ersten Gleichungen in (1.2) t und q in Abhängigkeit von p, ρ, φ. Dazu lösen wir die beiden Gleichungen nach $\cos q$ bzw. $\sin q$ auf

$$\cos q = \frac{\rho\cos\varphi - Rt\cos p}{R(1-t)} \qquad\qquad \sin q = \frac{\rho\sin\varphi - Rt\sin p}{R(1-t)},$$

quadrieren, addieren die beiden Gleichungen und vereinfachen

$$\begin{aligned} R^2(1-t)^2 &= \rho^2 - 2\,R\,\rho\,t\,(\cos\varphi\ \cos p + \sin\varphi\ \sin p) + R^2t^2 \\ R^2 - 2R^2t &= \rho^2 - 2\,R\,\rho\,t\ \cos(\varphi - p) \\ t &= \frac{R^2-\rho^2}{2\,R\,[R - \rho\cos(\varphi-p)]}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Unter der Bedingung $\rho < R$ ist $0 < t < 1$ wie gefordert.

Die Bestimmung von q in geeigneter Form ist deutlich aufwendiger ($\tan q = \ldots$ ist *keine* geeignete Form). Wir setzen das ermittelte t in die obigen Gleichungen für $\cos q$ und $\sin q$ ein und vereinfachen

$$\begin{aligned} \cos q &= \frac{\rho\cos\varphi - R\,t\cos p}{R(1-t)} \\ &= \frac{\rho\cos\varphi - R\cos p\,\frac{R^2-\rho^2}{2\,R\,[R-\rho\cos(\varphi-p)]}}{R(1-\frac{R^2-\rho^2}{2\,R\,[R-\rho\cos(\varphi-p)]})} \\ &= \frac{2\,R^2\,\rho\,\cos\varphi - 2\,R\,\rho^2\,\cos\varphi\,\cos(\varphi-p) - R^3\,\cos p + R\,\rho^2\cos p}{R^3 - 2\,R^2\,\rho\,\cos(\varphi-p) + R\,\rho^2} \\ &= \frac{2\,R\,\rho\,\cos\varphi - \rho^2\,(\cos p + \cos(2\varphi-p)) - R^2\,\cos p + \rho^2\,\cos p}{R^2+\rho^2 - 2\,R\,r\cos(\varphi-p)} \\ &= \frac{2\,R\,\rho\,\cos\varphi - \rho^2\cos(2\varphi-p) - R^2\,\cos p}{R^2+\rho^2-2\,R\,\rho\,\cos(\varphi-p)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin q &= \frac{\rho \sin\varphi - R\,t \sin p}{R(1-t)} \\
&= \frac{\rho \sin\varphi - R \sin p \,\frac{R^2-\rho^2}{2\,R\,[R-\rho\cos(\varphi-p)]}}{R(1-\frac{R^2-\rho^2}{2\,R\,[R-\rho\cos(\varphi-p)]})} \\
&= \frac{2\,R^2\,\rho\,\sin\varphi - 2\,R\,\rho^2\,\sin\varphi\,\cos(\varphi-p) - R^3\,\sin p + R\,\rho^2 \sin p}{R^3 - 2\,R^2\,\rho\,\cos(\varphi-p) + R\,\rho^2} \\
&= \frac{2\,R\,\rho\,\sin\varphi - \rho^2\,(\sin p + \sin(2\varphi - p)) - R^2\,\sin p + \rho^2\,\sin p}{R^2 + \rho^2 - 2\,R\,r\cos(\varphi-p)} \\
&= \frac{2\,R\,\rho\,\sin\varphi - \rho^2 \sin(2\varphi-p) - R^2\,\sin p}{R^2+\rho^2-2\,R\,\rho\,\cos(\varphi-p)}.
\end{aligned}
$$

Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich

$$
\sin p\,\sin q + \cos p\,\cos q = \frac{-R^2 + 2\,R\,\rho\,\cos(\varphi-p) - \rho^2\,\cos(2(\varphi-p))}{R^2+\rho^2-2\,R\,\rho\,\cos(\varphi-p)}
$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
1 + \sin p\,\sin q + \cos p\,\cos q &= \frac{\rho^2\,\{1-\cos(2(\varphi-p)\}}{R^2+\rho^2-2\,R\,\rho\,\cos(\varphi-p)} \\
&= \frac{2\,\rho^2\,\sin^2(\varphi-p)}{R^2+\rho^2-2\,R\,\rho\,\cos(\varphi-p)}.
\end{aligned}
$$

Andererseits gilt allgemein

$$
1 + \sin p\,\sin q + \cos p\,\cos q = 1 + \cos(q-p) = 2\,\cos^2\left(\frac{q-p}{2}\right).
$$

Wir haben also

$$
2\,\cos^2\left(\frac{q-p}{2}\right) = \frac{2\,\rho^2\,\sin^2(\varphi-p)}{R^2+\rho^2-2\,R\,\rho\,\cos(\varphi-p)}
$$

bzw.

$$
\cos^2\left(\frac{q-p}{2}\right) = \frac{\rho^2\,\sin^2(\varphi-p)}{R^2+\rho^2-2\,R\,\rho\,\cos(\varphi-p)}.
$$

Anhand Abbildung 1.1 erkennen wir, dass $\cos\left(\frac{q-p}{2}\right)$ und $\sin(\varphi-p)$ immer gleiches

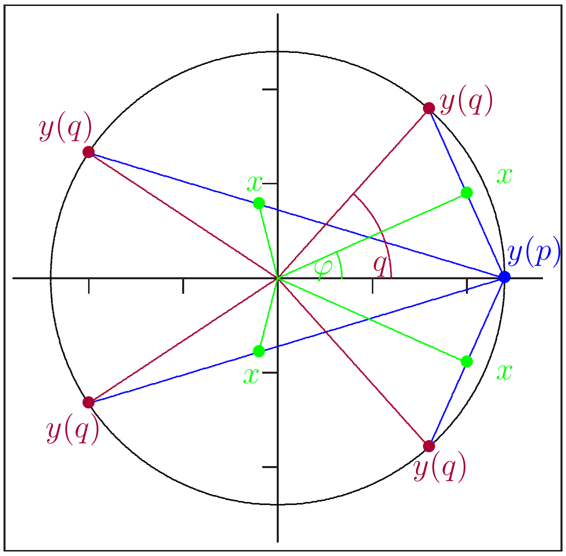


Abbildung 1.1: Verhältnis zwischen den Winkeln φ, p, q und den trigonometrischen Funktionen in (1.4) für verschiedene x und q

Vorzeichen haben; der Nenner auf der rechten Seite ist immer größer Null, da $\rho < R$. Wurzelziehen ist also problemlos möglich und es ergibt sich

$$\cos\left(\frac{q-p}{2}\right) = \frac{\rho\,\sin(\varphi - p)}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\,R\,\rho\,\cos(\varphi - p)}}. \tag{1.4}$$

Diese Gleichung legt q implizit fest. Für den weiteren Verlauf des Beweises beachten wir, dass t und q als Funktionen von p stetig differenzierbar sind.

Mit g bezeichnen wir die durch den Punkt x parallel zur z-Achse verlaufende Gerade. Betrachten wir nun die Familie der PI-Segmente, die die Gerade g schneiden. Dies ist eine eindimensionale Familie, die wir durch p parametrisieren (p kennzeichnet immer den unteren Endpunkt eines PI-Segments).

Nach Definition schneidet jedes PI-Segment aus obiger Familie die Gerade g in genau einem Punkt, den wir mit $(x_1, x_2, z(x_1, x_2, p))$ bezeichnen (Dass die ersten beiden Koordinaten mit denen von x übereinstimmen, ergibt sich aus der Konstruktion der Geraden g.), wobei $z(x_1, x_2, p)$ die folgende Bedingung erfüllt

$$z(x_1, x_2, p) = h'\,p\,t\,(x_1, x_2, p) + h'[1 - t(x_1, x_2, p)]q(x_1, x_2, p). \tag{1.5}$$

Dabei sind $t(x_1, x_2, p)$ und $q(x_1, x_2, p)$ durch (1.3) bzw. (1.4) festgelegt; die dabei notwendige Umwandlung von Polarkoordinaten (ρ, φ) in kartesische Koordinaten (x_1, x_2)

schreiben wir nicht explizit aus. Das PI-Segment schneidet die Gerade g also genau dann im Punkt x, wenn

$$z(x_1, x_2, p) = x_3$$

gilt. Wir müssen also noch zeigen, dass diese Gleichung genau eine Lösung hat. Dazu leiten wir (1.5) nach p ab (und lassen der Übersichtlichkeit halber die Argumente von t und q weg)

$$\frac{d}{dp} z(x_1, x_2, p) = h' \left((p-q)\frac{dt}{dp} + t + (1-t)\frac{dq}{dp} \right).$$

Zum weiteren Vorgehen berechnen wir die Ableitungen in obiger Gleichung; dazu leiten wir die beiden ersten Gleichungen in (1.2) nach p ab. Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem in $\frac{dq}{dp}$ und $\frac{dt}{dp}$. Lösen dieses Systems führt auf

$$\begin{aligned} \frac{dt(x_1, x_2, p)}{dp} &= \frac{t}{\tan\left(\frac{q-p}{2}\right)} \\ \frac{dq(x_1, x_2, p)}{dp} &= \frac{t}{1-t}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dp} z(x_1, x_2, p) = 2h't \left(1 - \frac{\frac{q-p}{2}}{\tan \frac{q-p}{2}} \right).$$

Dieser Ausdruck ist echt größer Null für $0 < q - p < 2\pi$, wie man z. B. mit der Reihenentwicklung des Kotangens sieht (vgl. [8]). Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} z(x_1, x_2, p) &> 0 \\ \lim_{p \to -\infty} z(x_1, x_2, p) &= -\infty \\ \lim_{p \to \infty} z(x_1, x_2, p) &= \infty, \end{aligned}$$

wie sich aus (1.5) ergibt. Da $z(x_1, x_2, p)$ eine stetige Funktion von p ist, hat die Gleichung $z(x_1, x_2, p) = x_3$ daher genau eine Lösung; diese legt zusammen mit (1.3) und (1.4) das PI-Segment eindeutig fest. □

1.3 Anmerkung. Die Abbildung 1.1 behandelt offensichtlich nur den Fall $p = 0$. Dies ist aber keinerlei Einschränkung, da in (1.4) nur die Relativwinkel zwischen q bzw. φ und p auftreten.

1.4 Definition. Mit $s = s_b(x)$ und $s = s_t(x)$ bezeichnen wir den Parameter der zum unteren (bottom) bzw. oberen (top) Endpunkt des PI-Segmentes gehört. Weiterhin bezeichnen wir mit $I_{PI}(x) := [s_b(x), s_t(x)]$ das Intervall zwischen s_b und s_t.

Wir wählen eine Funktion $\psi \in C^\infty([0, 2\pi])$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\psi(0) = 0 \qquad 0 < \dot{\psi}(t) < 1, \quad t \in [0, 2\pi] \tag{1.6}$$

$$\dot{\psi}(0) = \frac{1}{2} \qquad \psi^{2k+1}(0) = 0, \quad k \geq 1. \tag{1.7}$$

Im Beispiel 1.5 werden wir eine solche Funktion kennenlernen. Aus Formel (1.6) folgt unmittelbar, dass $\psi(t) < t$ für alle $t \in (0, 2\pi]$. Weiterhin bestehe zwischen den Zahlen $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ folgender Zusammenhang

$$s_1(s, s_2) := \begin{cases} \psi(s_2 - s) + s & \text{falls } s \leq s_2 < s + 2\pi \\ \psi(s - s_2) + s_2 & \text{falls } s - 2\pi < s_2 < s. \end{cases} \tag{1.8}$$

1.5 Beispiel. Als Beispiel einer Funktion, die die Bedingungen in (1.6) und (1.7) erfüllt, sei $\psi(t) = \frac{t}{2}$ genannt. Diese werden wir später auch für die numerischen Berechnungen benutzen. Mit dieser Funktion ergibt sich dann für s_1

$$s_1(s, s_2) := \frac{s + s_2}{2} \qquad \text{für } s - 2\pi < s_2 < s + 2\pi. \tag{1.9}$$

1.6 Anmerkung. Die Zahlen s_1, s_2 werden später durch geeignete Einschränkungen festgelegt. Bis dahin sieht ihre Definition noch recht willkürlich aus.

Benutzen wir diese drei Zahlen als Spiralenparameter, so bestimmt $s_1(s, s_2)$ den Spiralenpunkt, der (höhenmäßig) genau zwischen $y(s)$ und $y(s_2)$ liegt.

1.7 Hilfssatz. *Die Zahlen* $(s_2 - s)$ *und* $(s_1 - s)$ *mit* s, s_1, s_2 *wie in* (1.8) *besitzen immer gleiches Vorzeichen. Es gilt genau einer der folgenden drei Fälle*

a) $s < s_1 < s_2$

b) $s = s_1 = s_2$

c) $s > s_1 > s_2$.

Beweis. Es sei $s_2 > s$.
Dann ist nach (1.8) $s_1 = \psi(s_2 - s) + s$ und da $\psi(t)$ für $t > 0$ nach Definition nur positive Werte annimmt, ist $s_1 > s$. Da aber ψ eine Steigung kleiner als 1 hat, folgt $s_1 = \psi(s_2 - s) + s < s_2 - s + s = s_2$ und damit die erste Behauptung. Die anderen beiden Behauptungen folgen vollkommen analog. □

1.8 Definition. Wir definieren eine vektorwertige Funktion $u(s,s_2)$ wie folgt

$$u(s,s_2) := \begin{cases} \dfrac{[y(s_1)-y(s)]\times[y(s_2)-y(s)]}{\|[y(s_1)-y(s)]\times[y(s_2)-y(s)]\|}\operatorname{sgn}(s_2-s) & \text{für} \quad 0<|s_2-s|<2\pi \\ \dfrac{\dot y(s)\times\ddot y(s)}{\|\dot y(s)\times\ddot y(s)\|} & \text{für} \quad s_2=s. \end{cases}$$

1.9 Satz. *Die Funktion $u(s,s_2)$ ist eine vektorwertige C^∞-Funktion und $s_1(s,s_2)$ ist eine reellwertige C^∞-Funktion.*

Beweis. Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil werden wir mittels Taylorentwicklung zeigen, dass

$$u(s,s_2) = \frac{\dot y(s)\times\ddot y(s)+\mathcal{O}(s_2-s)}{\|\dot y(s)\times\ddot y(s)+\mathcal{O}(s_2-s)\|} \quad \text{für } s_2\to s. \tag{$*$}$$

Im zweiten Teil werden wir die einschränkenden Bedingungen an die Funktion ψ aus (1.6) und (1.7) benutzen, um die genannte Eigenschaft von s_1 zu beweisen.

a) Wir zeigen nun also die Formel in $(*)$.
Zur Abkürzung definieren wir eine Funktion

$$g(s,s_1,s_2) := [y(s_1)-y(s)]\times[y(s_2)-y(s)]$$

und entwickeln die beiden Terme in $g(s,s_1,s_2)$ um s. Diese Entwicklung ist möglich, da mit $s_2\to s$ wegen $\psi(0)=0$ auch $s_1 \xrightarrow{s_2\to s} s$ gilt

$$\begin{aligned} y(s_1)-y(s) &= (s_1-s)\cdot\dot y(s)+\frac{1}{2}(s_1-s)^2\cdot\ddot y(s)+\mathcal{O}((s_1-s)^3) \\ y(s_2)-y(s) &= (s_2-s)\cdot\dot y(s)+\frac{1}{2}(s_2-s)^2\cdot\ddot y(s)+\mathcal{O}((s_2-s)^3). \end{aligned}$$

Einsetzen in $g(s,s_1,s_2)$ ergibt

$$\begin{aligned} g(s,s_1,s_2) &= [(s_1-s)\cdot\dot y(s)+\frac{1}{2}(s_1-s)^2\cdot\ddot y(s)+\mathcal{O}((s_1-s)^3)] \\ &\quad\times[(s_2-s)\cdot\dot y(s)+\frac{1}{2}(s_2-s)^2\cdot\ddot y(s)+\mathcal{O}((s_2-s)^3)] \\ &= \frac{1}{2}\dot y(s)\times\ddot y(s)\left[(s_1-s)(s_2-s)^2-(s_2-s)(s_1-s)^2\right]+\mathcal{O}(h^4) \\ &= \frac{1}{2}\dot y(s)\times\ddot y(s)[s_2-s-s_1+s](s_1-s)(s_2-s)+\mathcal{O}(h^4) \\ &= \frac{1}{2}\dot y(s)\times\ddot y(s)(s_1-s)(s_2-s)(s_2-s_1)+\mathcal{O}(h^4), \end{aligned}$$

wobei $h := \max\{|s_1 - s|, |s_2 - s|, |s_2 - s_1|\}$. Im Folgenden müssen wir eine Fallunterscheidung machen, je nachdem, ob $s_2 > s$ oder $s_2 < s$ ist (vgl. Hilfssatz 1.7).
1. Fall: $s_2 > s_1 > s$
Dann ist $\operatorname{sgn}(s_2 - s) = +1$ und die Terme $(s_2 - s), (s_1 - s)$ und $(s_2 - s_1)$ sind alle echt größer Null. Beim Einsetzen der Entwicklung von g in die Definition von $u(s, s_2)$ (siehe Definition 1.8) können wir diese Terme daher problemlos aus der Norm im Nenner herausziehen

$$\begin{aligned} u(s,s_2) &= \frac{\frac{1}{2}\dot{y}(s) \times \ddot{y}(s)(s_1-s)(s_2-s)(s_2-s_1) + \mathcal{O}(h^4)}{\left\|\frac{1}{2}\dot{y}(s) \times \ddot{y}(s)(s_1-s)(s_2-s)(s_2-s_1) + \mathcal{O}(h^4)\right\|} \quad \text{für } s_2 \to s \\ &= \frac{\frac{1}{2}(s_1-s)(s_2-s)(s_2-s_1)}{\frac{1}{2}(s_1-s)(s_2-s)(s_2-s_1)} \cdot \frac{\dot{y}(s) \times \ddot{y}(s) + \mathcal{O}(h)}{\|\dot{y}(s) \times \ddot{y}(s) + \mathcal{O}(h)\|} \quad \text{für } s_2 \to s \\ &= \frac{\dot{y}(s) \times \ddot{y}(s)}{\|\dot{y}(s) \times \ddot{y}(s)\|} \quad \text{für } s_2 \to s, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $h \xrightarrow{s_2 \to s} 0$ benutzt haben.

2. Fall: $s_2 < s_1 < s$
Dann ist $\operatorname{sgn}(s_2 - s) = -1$ und die Terme $(s_2 - s), (s_1 - s)$ und $(s_2 - s_1)$ sind alle echt kleiner als Null. Damit gilt dann

$$(s_1 - s)(s_2 - s)(s_2 - s_1)(-1) = |(s_1 - s)(s_2 - s)(s_2 - s_1)|\,.$$

Die restliche Rechnung läuft vollkommen analog zum 1. Fall. Wir haben mit der obigen Rechnung nur die Stetigkeit von u bewiesen; da aber y eine C^∞-Funktion ist, folgt somit auch unmittelbar die Glattheit von u.

b) Wir wollen die Glattheit von s_1 zeigen.
Da ψ nach Voraussetzung glatt ist, müssen wir nur die Glattheit von $s_1(s, s_2)$ für $s_2 \to s$ zeigen. Dazu machen wir wieder eine Fallunterscheidung. Um die Notationen zu vereinfachen, bezeichnen wir mit ⓐ die Bedingung $\dot{\psi}(0) = \frac{1}{2}$ und mit ⓑ die Bedingung $\psi^{(2k+1)}(0) = 0,\ k \geq 1$.
1. Fall: $s_2 > s$
In diesem Fall ist $s_1(s, s_2) = \psi(s_2 - s) + s$ und für die partiellen Ableitungen von s_1 folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s} &= -\dot{\psi}(s_2 - s) + 1 \\ \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s_2} &= \dot{\psi}(s_2 - s). \end{aligned}$$

Mit ⓐ folgt dann

$$\lim_{s_2 \searrow s} \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s} = \lim_{s_2 \searrow s} \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s_2} = \frac{1}{2}.$$

2. Fall: $s_2 < s$
Es ist $s_1(s,s_2) = \psi(s-s_2) + s_2$ und es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s} &= \dot\psi(s-s_2) \\ \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s_2} &= -\dot\psi(s-s_2) + 1. \end{aligned}$$

Wiederum mit ⓐ folgt

$$\lim_{s_2 \nearrow s} \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s} = \lim_{s_2 \nearrow s} \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s_2} = \frac{1}{2}.$$

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von s_1 sind stetig, also ist s_1 eine C^1-Funktion. Wir definieren Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} f(s,s_2) &:= \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s} = \begin{cases} -\dot\psi(s_2-s)+1 & \text{für } s \le s_2 < s+2\pi \\ \dot\psi(s-s_2) & \text{für } s-2\pi < s_2 < s \end{cases} \\ g(s,s_2) &:= \frac{\partial s_1(s,s_2)}{\partial s_2} = \begin{cases} \dot\psi(s_2-s) & \text{für } s \le s_2 < s+2\pi \\ -\dot\psi(s-s_2)+1 & \text{für } s-2\pi < s_2 < s. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit sind (wir verzichten auf die Angabe der Argumente bei f und g)

$$\frac{\partial f}{\partial s_2} = \begin{cases} -\ddot\psi(s_2-s), & s \le s_2 < s+2\pi \\ -\ddot\psi(s-s_2), & s-2\pi < s_2 < s \end{cases}, \qquad \frac{\partial g}{\partial s} = \begin{cases} -\ddot\psi(s_2-s), & s \le s_2 < s+2\pi \\ -\ddot\psi(s-s_2), & s-2\pi < s_2 < s \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \begin{cases} \ddot\psi(s_2-s), & s \le s_2 < s+2\pi \\ \ddot\psi(s-s_2), & s-2\pi < s_2 < s \end{cases}, \qquad \frac{\partial g}{\partial s_2} = \begin{cases} \ddot\psi(s_2-s), & s \le s_2 < s+2\pi \\ \ddot\psi(s-s_2), & s-2\pi < s_2 < s \end{cases}$$

stetig für $s_2 \to s$. Und mit ⓑ folgt, dass f und g beides C^∞-Funktionen sind, also ist auch s_1 eine C^∞-Funktion. □

1.10 Definition. Wir bezeichnen mit $\Pi(s,s_2)$ die Ebene, die durch die Punkte $y(s), y(s_1)$ und $y(s_2)$ geht.

1.11 Anmerkung. Die Funktion $u(s, s_2)$ bildet einen Normaleneinheitsvektor auf der Ebene $\Pi(s, s_2)$. Dies erlaubt uns die Definition von $\Pi(s, s_2)$ auch für den Fall, dass $s = s_1 = s_2$ gilt.

Wir fixieren $x \in U$ und $s \in I_{PI}(x)$ und suchen dann $s_2 \in I_{PI}(x)$ so, dass die Ebene $\Pi(s, s_2)$ den Punkt x enthält. Wir müssen also die folgende Gleichung für s_2 lösen

$$\langle x - y(s),\, u(s, s_2) \rangle = 0, \qquad s_2 \in I_{PI}(x). \tag{1.10}$$

In [1] wird gezeigt, dass die Lösung dieser Gleichung eine glatte Funktion $s_2 := s_2(s, x)$ liefert. Damit können wir u als Funktion von s und x schreiben

$$u(s, x) := u(s, s_2(s, x)). \tag{1.11}$$

Zum weiteren Vorgehen benötigen wir den folgenden zentralen Satz.

1.12 Satz (Inversionsformel von Katsevich). *Für $f \in C_0^\infty(U)$ gilt*

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x - y(s)\|} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} Df(y(q), \theta(s, x, \gamma))\bigg|_{q=s} \frac{d\gamma}{\sin\gamma}\, ds}, \tag{1.12}$$

wobei

$$\begin{aligned} \theta(s, x, \gamma) &:= \cos\gamma \cdot \beta(s, x) + \sin\gamma \cdot e(s, x) \\ e(s, x) &:= \beta(s, x) \times u(s, x). \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis ist sehr umfangreich und technisch, auf eine Wiedergabe verzichten wir hier. Ein vollständiger Beweis findet sich in [1], eine Beweisskizze in [3, Anhang A]. Katsevich hat in [4] einen neuen, allgemeineren Beweis vorgelegt; dieser greift allerdings in Teilen immer noch auf den ursprünglichen Beweis zurück. □

1.13 Anmerkung. In der Inversionsformel (1.12) ist $\frac{\partial}{\partial q} Df(y(q), \theta)$ die Ableitung der gemessenen Daten bzgl. des Spiralenparameters für eine fixierte Richtung θ.

Wir werden nun diese Inversionsformel genauer untersuchen und dabei Zusammenhänge mit der Radontransformation aufzeigen. Vorher benötigen wir jedoch noch eine weitere Eigenschaft der Funktion u.

1.14 Hilfssatz. *Die Funktion $u(s, s_2)$ aus Definition 1.8 hat einen nichtverschwindenden Anteil in z-Richtung*

$$\langle u(s, s_2),\, j_3 \rangle = u_3(s, s_2) > 0,$$

wobei j_3 der Einheitsvektor in z-Richtung ist.

Beweis. Wir setzen o. B. d. A. voraus, dass $s = 0$ ist und betrachten zuerst den Fall $-2\pi < s_2 < s_1 < 0$ (diese Einschränkung ergibt sich aus der Definition von u und Hilfssatz 1.7). Damit ist

$$u(0, s_2) = -\frac{[y(s_1) - y(0)] \times [y(s_2) - y(0)]}{\|[y(s_1) - y(0)] \times [y(s_2) - y(0)]\|}. \tag{$*$}$$

Wir bezeichnen mit c den Nenner dieses Bruchs und erhalten

$$\begin{aligned} u(0, s_2) &= -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} R\cos s_1 - R \\ R\sin s_1 \\ \frac{h}{2\pi} s_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos s_2 - R \\ R\sin s_2 \\ \frac{h}{2\pi} s_2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} R\sin s_1 \frac{h}{2\pi} s_2 - R\sin s_2 \frac{h}{2\pi} s_1 \\ R(\cos s_2 - 1) \frac{h}{2\pi} s_1 - R(\cos s_1 - 1) \frac{h}{2\pi} s_2 \\ R^2(\cos s_1 - 1)\sin s_2 - R^2(\cos s_2 - 1)\sin s_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Additionstheoreme ergibt sich

$$\begin{aligned} u_3(0, s_2) &= -\frac{R^2}{c}\left((\cos s_1 - 1)\sin s_2 - \sin s_1(\cos s_2 - 1)\right) \\ &= -\frac{R^2}{c}\left(-2\sin^2\frac{s_1}{2}\,\sin s_2 + 2\sin s_1\,\sin^2\frac{s_2}{2}\right) \\ &= 2\frac{R^2}{c}\left(2\sin^2\frac{s_1}{2}\,\sin\frac{s_2}{2}\,\cos\frac{s_2}{2} - 2\sin\frac{s_1}{2}\,\cos\frac{s_1}{2}\,\sin^2\frac{s_2}{2}\right) \\ &= 4\frac{R^2}{c}\sin\frac{s_1}{2}\,\sin\frac{s_2}{2}\left(\sin\frac{s_1}{2}\,\cos\frac{s_2}{2} - \sin\frac{s_2}{2}\,\cos\frac{s_1}{2}\right) \\ &= 4\frac{R^2}{c}\sin\frac{s_1}{2}\,\sin\frac{s_2}{2}\,\sin\left(\frac{s_1}{2} - \frac{s_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Um den Beweis abzuschließen, bestimmen wir das Vorzeichen der Sinusterme in der letzten Gleichung. Da nach Voraussetzung $-\pi < \frac{s_2}{2} < \frac{s_1}{2} < 0$ (und damit $0 < \frac{s_1 - s_2}{2} < \pi$) ist, gilt

$$\sin\frac{s_1}{2} < 0, \qquad \sin\frac{s_2}{2} < 0, \qquad \sin\frac{s_1 - s_2}{2} > 0.$$

Für den bis jetzt betrachteten Fall ($-2\pi < s_2 < s_1 < 0$) haben wir den Beweis somit abgeschlossen.

Für den Fall $2\pi > s_2 > s_1 > 0$ beachten wir, dass in ($*$) das Vorzeichen (-1) wegfällt und die letzte Gleichung in obiger Rechnung das Vorzeichen ändert. Für die Sinusterme ergibt sich unter Berücksichtigung von $-\pi < \frac{s_1-s_2}{2} < 0$

$$\sin\frac{s_1}{2} > 0, \qquad \sin\frac{s_2}{2} > 0, \qquad \sin\frac{s_1-s_2}{2} < 0,$$

was zusammen mit dem zu beachtenden Vorzeichenwechsel einen Term echt größer Null ergibt. Den Fall $s_1 = s_2 = s = 0$ beweist man analog. □

Mit diesem Hilfssatz zeigen wir einen Zusammenhang zwischen der Inversionsformel von Katsevich und der 2D-Radontransformation.

1.2 Die Inversionsformel im Zusammenhang mit der 2D-Radontransformation

1.15 Satz. *Es sei $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$, d. h. unabhängig von der z-Richtung für eine Funktion $g \in C_0^\infty(U)$. Der Träger von g liegt also innerhalb einer Scheibe mit Radius r*

$$\operatorname{supp} g \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}.$$

Dann vereinfacht sich die Inversionsformel (1.12) *zur 2D-Radontransformation.*

Beweis. Der Beweis besteht im Wesentlichen aus geschickten Substitutionen in der Inversionsformel und dem Rückzug auf die $x_1 - x_2$-Ebene.

Wir fixieren den Punkt $x \in U$ und betrachten in der Inversionsformel (1.12) das Integral bezüglich γ. Dabei benutzen wir im ersten Schritt die Definition der divergenten Röntgentransformation und im zweiten Schritt die Definition des Vektors θ

$$\begin{aligned}
A(s,x) &:= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} Df(y(q), \theta(s,x,\gamma))\Big|_{q=s} \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma \\
&= \frac{\partial}{\partial q} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(y(q) + t\,\theta(s,x,\gamma)) \frac{1}{\sin\gamma}\, dt\, d\gamma \Bigg|_{q=s} \\
&= \frac{\partial}{\partial q} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(y(q) + t[\cos\gamma \cdot \beta(s,x) + \sin\gamma \cdot e(s,x)]) \frac{t}{t\sin\gamma}\, dt\, d\gamma \Bigg|_{q=s}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten t und γ als Polarkoordinaten (dabei entspricht t dem Radius und γ dem Polarwinkel) und transformieren auf kartesische Koordinaten v und w

$$v = t\cos\gamma \qquad\qquad w = t\sin\gamma.$$

Als Funktionaldeterminante ergibt sich $\frac{1}{t}$ und damit

$$\begin{aligned} A(s,x) &= \frac{\partial}{\partial q} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y(q) + v\cdot\beta(s,x) + w\cdot e(s,x))\frac{1}{w}\,dv\,dw\Bigg|_{q=s} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y(q) + v\cdot\beta(s,x) + w\cdot e(s,x))\frac{1}{w}\,dv\,dw\Bigg|_{q=s}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Im zweiten Schritt haben wir die z-Unabhängigkeit von f ausgenutzt.

Da wir einen Zusammenhang zur 2D-Radontransformation beweisen wollen, ziehen wir uns im weiteren Verlauf ins Zweidimensionale zurück. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir Vektoren im $\mathbb{R}^2$ mit einer Tilde „$\tilde{}$“ kennzeichnen. Wo Operationen mit solchen Vektoren durchgeführt werden, die nur im $\mathbb{R}^3$ definiert sind (z. B. Kreuzprodukt), werden diese Vektoren stillschweigend um eine Null als dritte Komponente ergänzt. Weiterhin schreiben wir die Abhängigkeit von x und s nicht mehr explizit aus, also $\beta := \beta(s,x)$, $u := u(s,x)$, usw.

$$\tilde{\beta} := \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} \qquad \tilde{e} := \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2\end{pmatrix} \qquad \tilde{\beta}^{\perp} := \tilde{\beta}\times j_3,$$

wobei j_3 der Einheitsvektor in z-Richung ist. Nach Definition ist $\tilde{\beta}^{\perp}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^3$, hat aber keine Komponente in z-Richung. Da $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\beta}^{\perp}$ senkrecht aufeinander stehen, bilden sie eine Basis der $x_1 - x_2$-Ebene, d. h. wir können $\tilde{e}$ schreiben als

$$\tilde{e} = c_1\cdot\tilde{\beta} + c_2\cdot\tilde{\beta}^{\perp} \tag{1.14}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Für eine Substitution später im Beweis benötigen wir, dass der Koeffizient $c_2 > 0$ ist. Dies sehen wir wie folgt

$$c_2 = \left\langle \tilde{e},\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle$$

Es ist $\tilde{\beta}_3^{\perp} = 0$.

$$\begin{aligned}
&= \left\langle e,\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle \\
&= \left\langle \beta \times u,\, \tilde{\beta} \times j_3 \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \left\langle \beta \times u,\, \beta \times j_3 \right\rangle
\end{aligned}$$

Es gilt allgemein $\left\langle \vec{a} \times \vec{b},\, \vec{c} \times \vec{d} \right\rangle = \left\langle \vec{a},\, \vec{c} \right\rangle \left\langle \vec{b},\, \vec{d} \right\rangle - \left\langle \vec{a},\, \vec{d} \right\rangle \left\langle \vec{b},\, \vec{c} \right\rangle$.

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \left(\left\langle \beta,\, \beta \right\rangle \left\langle u,\, j_3 \right\rangle - \left\langle \beta,\, j_3 \right\rangle \left\langle u,\, \beta \right\rangle \right)$$

Der Vektor u steht senkrecht auf β (oder vielmehr: soll senkrecht stehen).

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \left\| \beta \right\|^2 \left\langle u,\, j_3 \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \left\langle u,\, j_3 \right\rangle,
\end{aligned}$$

da β nach Definition ein Einheitsvektor ist. Aus Hilfssatz 1.14 wissen wir, dass $\left\langle u,\, j_3 \right\rangle > 0$ ist, mithin ist also auch $c_2 > 0$. Dies ist für eine der folgenden Substitutionen wichtig.

Wir definieren noch $\tilde{y} := (y_1, y_2)$, $\tilde{x} := (x_1, x_2)$ und vereinfachen $A(s, x)$ weiter

$$A(s,x) = \frac{\partial}{\partial q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1(q) + v\beta_1 + we_1, y_2(q) + v\beta_2 + we_2) \frac{1}{w} \, dw \, dv \bigg|_{q=s}$$

Wir substituieren $v \mapsto \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \cdot v$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \frac{\partial}{\partial q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{y}(q) + v\tilde{\beta} + w\tilde{e}) \frac{1}{w} \, dw \, dv \bigg|_{q=s}$$

und ersetzen $\tilde{e}$ gemäß (1.14).

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \frac{\partial}{\partial q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{y}(q) + (v + c_1 w)\tilde{\beta} + c_2\, w\, \tilde{\beta}^{\perp}) \frac{1}{w}\, dw\, dv \Bigg|_{q=s}.$$

Wir substituieren $v \mapsto v + c_1 w =: v_n$ und $w \mapsto c_2 w =: w_n$, d. h. unsere Substituions-funktion ϕ sieht wie folgt aus

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \phi(v_n, w_n) = \begin{pmatrix} v_n - \frac{c_1}{c_2} w_n \\ \frac{w_n}{c_2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\phi'(v_n, w_n) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{c_1}{c_2} \\ 0 & \frac{1}{c_2} \end{bmatrix}$$

und als Funktionaldeterminante ergibt sich $\frac{1}{c_2}$. Da wir oben gezeigt haben, dass $c_2 > 0$ ist, können wir im weiteren Verlauf auf Betragszeichen verzichten; ϕ ist offensichtlich injektiv. Wir bezeichnen im Folgenden mit $\hat{g}$ die 2D-Radontransformation von g

$$\hat{g}(\theta, t) := [Rg](\theta, t) = \int\limits_{\theta^{\perp}} g(t\theta + z)\, dz \qquad \theta^{\perp} = \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z,\, \theta\, \rangle = 0\},\ \theta \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Es folgt (wir lassen die n-Indizes an den Variablen weg)

$$\begin{aligned} A(s,x) &= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \frac{\partial}{\partial q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{y}(q) + v\tilde{\beta} + w\tilde{\beta}^{\perp}) \frac{c_2}{w} \frac{1}{c_2}\, dw\, dv \Bigg|_{q=s} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \frac{\partial}{\partial q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{y}(q) + w\tilde{\beta}^{\perp} + v\tilde{\beta})\, dv \frac{1}{w}\, dw \Bigg|_{q=s} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \frac{\partial}{\partial q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{g}\left(\tilde{\beta}^{\perp}, \left\langle \tilde{y}(q),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle + w\right) \frac{1}{w}\, dw \Bigg|_{q=s}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Zuordnungen $\theta \mathrel{\widehat{=}} \tilde{\beta}^{\perp}$ und $z \mathrel{\widehat{=}} v\tilde{\beta}$ gemacht haben. Mit diesen Zuordnungen ergibt sich

$$\begin{aligned} t\tilde{\beta}^{\perp} &\overset{!}{=} \tilde{y}(q) + w\tilde{\beta}^{\perp} \qquad \mid \left\langle \cdot,\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle \\ t &= \left\langle \tilde{y}(q),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle + w \end{aligned}$$

und damit die obige Formel. Im folgenden Schritt führen wir die Ableitung nach q durch und substituieren dann $t := \left\langle \tilde{y}(q),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle + w$. Wir bezeichnen dabei mit $\hat{g}'$ bzw. $\hat{g}'_t$ die Ableitung von $\hat{g}$ nach der zweiten Variable

$$
\begin{aligned}
A(s,x) &= \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}'\left(\tilde{\beta}^{\perp}, \left\langle \tilde{y}(q),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle + w\right) \left\langle \dot{\tilde{y}}(q),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle \frac{1}{w}\, dw \Bigg|_{q=s} \\
&= \frac{\left\langle \dot{\tilde{y}}(s),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}'_t(\tilde{\beta}^{\perp}, t) \frac{1}{t - \left\langle \tilde{y}(s),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle}\, dt.
\end{aligned}
$$

Wir vereinfachen den Nenner des Bruches. Dazu benutzen wir, dass

$$
\left\langle \tilde{y}(s),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle = \left\langle \tilde{x},\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle
$$

gilt. Dies sehen wir wie folgt. Es ist $\tilde{\beta}^{\perp} = \tilde{\beta} \times j_3$ nach Definition und

$$
\tilde{\beta} = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}(s)}{\|x - y(s)\| \sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}.
$$

Es folgt

$$
0 = \left\langle \tilde{\beta}^{\perp},\, \tilde{\beta} \right\rangle = \frac{\left\langle \tilde{\beta}^{\perp},\, \tilde{x} - \tilde{y}(s) \right\rangle}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}\, \|x - y(s)\|}
$$

und damit ist $\left\langle \tilde{\beta}^{\perp},\, \tilde{x} \right\rangle = \left\langle \tilde{\beta}^{\perp},\, \tilde{y}(s) \right\rangle$.

Da $\tilde{\beta}^{\perp}$ keine Komponente in z-Richtung hat, mithin also $\left\langle \dot{\tilde{y}}(s),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle = \left\langle \dot{y}(s),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle$ gilt, erhalten wir außerdem

$$
A(s,x) = \frac{\left\langle \dot{y}(s),\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}'_t(\tilde{\beta}^{\perp}, t) \frac{1}{t - \left\langle \tilde{x},\, \tilde{\beta}^{\perp} \right\rangle}\, dt. \tag{1.15}
$$

Einsetzen des obigen Ausdrucks in die Inversionsformel (1.12) liefert

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x-y(s)\|} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} Df(y(q),\theta(s,x,\gamma))\Big|_{q=s} \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma\, ds \\
&\overset{(1.15)}{=} -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x-y(s)\|} \frac{\left\langle \dot{y}(s),\, \tilde{\beta}^\perp \right\rangle}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_t'(\tilde{\beta}^\perp, t) \frac{1}{t-\left\langle \tilde{x},\, \tilde{\beta}^\perp \right\rangle}\, dt\, ds \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{\left\langle \dot{y}(s),\, \tilde{\beta}^\perp \right\rangle}{\|x-y(s)\| \sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_t'(\tilde{\beta}^\perp, t) \frac{1}{\left\langle \tilde{x},\, \tilde{\beta}^\perp \right\rangle - t}\, dt\, ds. \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Wir vereinfachen den Term „zwischen“ den beiden Integralzeichen. Ziel dabei ist es, durch geschickte Substitution die Integration über s in obigem Integral in eine Integration über den Polarwinkel φ in der $x_1 - x_2$-Ebene umzuwandeln. Es gilt

$$\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2} = \frac{1}{\|x-y\|} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}\, \|x-y\| &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \\
&= \|\tilde{x}-\tilde{y}\|\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine einfachere Darstellung des Nenners.

Für den Zähler betrachten wir einen Kreis in der $x_1 - x_2$-Ebene mit Mittelpunkt $\tilde{x}$ und Radius $\|\tilde{x}-\tilde{y}\|$ (vgl. Abb. 1.2). Mit φ bezeichnen wir den Polarwinkel in der $x_1 - x_2$-Ebene. Da $\dot{y}(s)ds = dy(s)$ gilt, ist

$$\left\langle \tilde{\beta}^\perp,\, \dot{y}(s) \right\rangle ds$$

die Projektion des infinitesimalen Spiralelements $dy(s)$ auf die „Richtung“ $\tilde{\beta}^\perp$. Nach Definition steht $\tilde{\beta}^\perp$ senkrecht auf $\tilde{\beta}$ und liegt in der $x_1 - x_2$-Ebene. Damit ist die infinitesimale Änderung des Polarwinkels $d\varphi$ gerade gleich der infinitesimalen Änderung in Richtung von $\tilde{\beta}^\perp$, dividiert durch den Kreisradius

$$d\varphi = \frac{\left\langle \dot{y}(s),\, \tilde{\beta}^\perp \right\rangle ds}{\|\tilde{x}-\tilde{y}\|} = \frac{\left\langle \dot{y}(s),\, \tilde{\beta}^\perp \right\rangle}{\|x-y(s)\| \sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} ds.$$

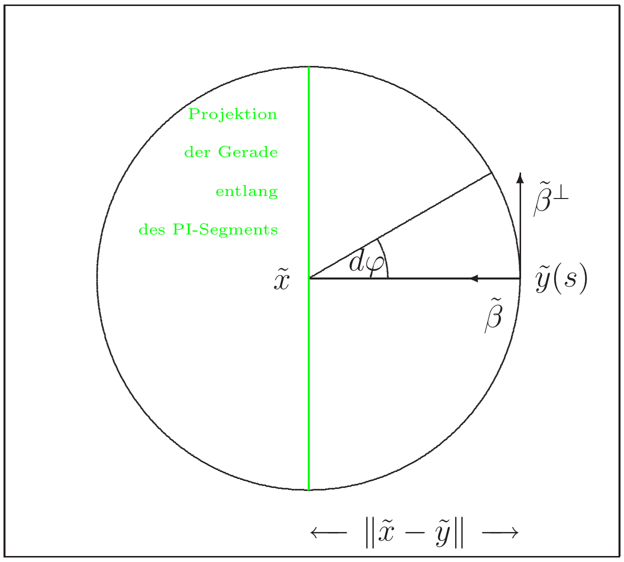


Abbildung 1.2: $x_1 - x_2$-Ebene

Das Integral über s in (1.16) geht über $I_{PI}(x)$. Daher geht die Integration über φ für ein passend gewähltes Koordinatensystem in der $x_1 - x_2$-Ebene von 0 bis π (vgl. die grüne Linie in Abb. 1.2). Insgesamt ergibt sich

$$f(x) = g(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_t'(\tilde{\beta}^\perp(\varphi), t)}{\left\langle \tilde{x},\, \tilde{\beta}^\perp(\varphi) \right\rangle - t} \, dt \, d\varphi, \tag{1.17}$$

wobei $\tilde{\beta}^\perp(\varphi) := \tilde{\beta}^\perp(s(\varphi))$. Vergleichen wir dies mit der Inversionsformel für die 2D-Radontransformation (vgl. [6, S. 1])

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{S^1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{d}{ds} h(\xi, s)}{\langle x,\, \xi \rangle - s} \, ds \, d\xi, \\ h &= Rf, \end{aligned} \tag{1.18}$$

wobei h die Radontransformation von f ist, so sehen wir als wesentliche Unterschiede noch die Art der Integration und einen Faktor 2 für die Gesamtformel. Dieses letzte Problem gehen wir nun an.

Der Hauptunterschied zwischen (1.18) und (1.17) ist der Integrationsbereich: in der Formel von Radon geht die Integration über ganz S^1, also über einen Vektor, während sie in unserer Formel nur von 0 bis π geht, also über einen Skalar. Wir betrachten daher den Einheitsvektor $\tilde{\beta}^{\perp} \in \mathbb{R}^3$ genauer. Er hängt von φ ab und ist der Tangentenvektor an den Kreis um $\tilde{x}$ mit Radius $\|\tilde{x} - \tilde{y}\|$. Ein Blick auf Abbildung 1.2 zeigt, dass

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi = 0) &= j_1\\ \tilde{\beta}^{\perp}(\varphi = \pi) &= -j_1.\end{aligned}$$

Da $\tilde{\beta}^{\perp}$ stetig von φ abhängt, überstreicht er für φ von 0 bis π den halben Einheitskreis in der $x_1 - x_2$-Ebene. Damit er den ganzen Einheitskreis S^1 durchläuft, muss φ von 0 bis 2π laufen. Es genügt also zu zeigen, dass

$$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_t'(\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi), t)}{\left\langle \tilde{x}, \tilde{\beta}^{\perp}(\varphi) \right\rangle - t}\, dt\, d\varphi = \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_t'(\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi), t)}{\left\langle \tilde{x}, \tilde{\beta}^{\perp}(\varphi) \right\rangle - t}\, dt\, d\varphi,$$

dann haben wir auch den bereits oben erwähnten Faktor 2 begründet. Wir substituieren $\varphi \mapsto \varphi - \pi$ und beachten, dass $\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi \pm \pi) = -\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi)$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_t'(\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi), t)}{\left\langle \tilde{x}, \tilde{\beta}^{\perp}(\varphi) \right\rangle - t}\, dt\, d\varphi = \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_t'(-\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi), t)}{-\left\langle \tilde{x}, \tilde{\beta}^{\perp}(\varphi) \right\rangle - t}\, dt\, d\varphi$$

Wir substituieren $t \mapsto -t$.

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_{-t}'(-\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi), -t)}{-\left\langle \tilde{x}, \tilde{\beta}^{\perp}(\varphi) \right\rangle + t}\, dt\, d\varphi$$

Es ist $\frac{\partial}{\partial(-t)} = -\frac{\partial}{\partial t}$.

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\hat{g}_t'(-\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi), -t)}{-\left(\left\langle \tilde{x}, \tilde{\beta}^{\perp}(\varphi) \right\rangle - t\right)}\, dt\, d\varphi$$

Für die Radontransformation gilt $\hat{g}(\theta, s) = [Rg](\theta, s) = [Rg](-\theta, -s) = \hat{g}(-\theta, -s)$.

$$= \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_t'(\tilde{\beta}^{\perp}(\varphi), t)}{\left\langle \tilde{x}, \tilde{\beta}^{\perp}(\varphi) \right\rangle - t}\, dt\, d\varphi.$$

Damit haben wir die Gleichheit von (1.17) und (1.18) gezeigt. $\square$

1.16 Anmerkung. Die Abbildung 1.2 ist stark vereinfacht, da im allgemeinen die Projektion des PI-Segments nicht orthogonal zum Vektor $\tilde{\beta}$ liegt. Um den Beweis nicht unnötig zu komplizieren, haben wir auf eine allgemeinere Darstellung verzichtet.

Der obige Satz liefert uns einen Zusammenhang zwischen der Inversionsformel von Katsevich und der Inversionsformel für die 2D-Radontransformation für eine besondere Klasse von Funktionen. Eine grundsätzliche Frage bei 3D-Problemen sind die Effekte bei Reduktion der Dimensionen: was passiert mit der Inversionsformel, falls wir von einem 3D-Problem auf ein 2D-Problem vereinfachen? Dies entspricht dem Grenzwert $h \to 0$ für die Ganghöhe h. Der folgende Satz zeigt, dass sich auch in diesem Fall die Inversionsformel von Katsevich zur Inversionsformel für die 2D-Radontransformation vereinfacht.

1.17 Satz. *Für $f \in C_0^\infty(U)$ geht die Inversionsformel von Katsevich für $h \to 0$ in die Inversionsformel für die 2D-Radontransformation über*

$$-\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x - y(s)\|} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} Df(y(q), \theta(s,x,\gamma))\Big|_{q=s} \frac{d\gamma}{\sin\gamma}\, ds$$

$$\xrightarrow{h \to 0} \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_t'(\tilde{\beta}^\perp(\varphi), t)}{\left\langle \tilde{x}, \tilde{\beta}^\perp(\varphi) \right\rangle - t}\, dt\, d\varphi.$$

Beweis. Zum Beweis des Satzes benutzen wir Satz 1.15 und beschaffen uns dazu eine Funktion, die unabhängig von der z-Richtung ist. Zuerst können wir uns o. B. d. A. auf die $x_1 - x_2$-Ebene beschränken (die wir mit E bezeichnen), sei also $x_3 = 0$. Im Folgenden sei immer $x \in U$ vorausgesetzt. Wir rekonstruieren die Funktion f nur in der Ebene E und definieren dazu eine Hilfsfunktion

$$f_1(x_1, x_2, x_3) := f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, 0). \tag{1.19}$$

Da $f \in C_0^\infty(U)$ gilt, ist auch $f_1 \in C_0^\infty(U)$ und es folgt

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, 0) + f_1(x_1, x_2, x_3).$$

Wir können nun Satz 1.15 auf die Funktion $f(x_1, x_2, 0)$ anwenden. Für diese Funktion ergibt sich damit die Inversionsformel für die 2D-Radontransformation in der Ebene E. Wir definieren eine weitere Hilfsfunktion f_2

$$f_2(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} \dfrac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, 0)}{x_3}, & x_3 \neq 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_3 = 0}, & x_3 = 0. \end{cases}$$

Die Funktion f_2 ist offensichtlich stetig und da $f \in C_0^\infty(U)$, ist auch $f_2 \in C_0^\infty(U)$. Wegen (1.19) können wir dann

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, x_2, x_3)\cdot x_3$$

schreiben.

Da wir f nur in der Ebene E rekonstruieren, müssen wir $f(x)$ nur für die $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x_3 = 0$ bestimmen. Die Inversionsformel (1.12) enthält ein Integral über $s \in I_{PI}(x)$ für diese x. Damit ist der Wertebereich für s beschränkt und wir können $y_3(s) = \frac{h}{2\pi}s = \mathcal{O}(h)$ schreiben.

Weiter ist

$$\beta_3 = \frac{y_3(s)}{\sqrt{(x_1 - y_1(s))^2 + (x_2 - y_2(s))^2 + y_3^2(s)}} = \mathcal{O}(h).$$

Wir beachten dabei, dass $(x_1 - y_1(s))^2 + (x_2 - y_2(s))^2 \neq 0$ für alle $s \in I_{PI}(x)$ und für alle $x \in E$ ($x \in U$ ist ja immer vorausgesetzt), d. h. der Nenner bleibt größer als Null für $h \to 0$. Ebenso gilt

$$u_1(s, x),\ u_2(s, x) = \mathcal{O}(h)$$

für $s \in I_{PI}(x)$ und $x \in E$. Wir wenden die Inversionsformel von Katsevich in Form der Gleichung (1.13) auf die Funktion f_1 an und bezeichnen mit $A(s, x)$ das Integral über γ in der Inversionsformel

$$A(s, x) := \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} Df_1(y(q), \theta(s, x, \gamma))\bigg|_{q=s} \frac{d\gamma}{\sin\gamma} \tag{1.20}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} f_1(y(q) + v\cdot \beta(s, x) + w\cdot e(s, x))\bigg|_{q=s} dv\, \frac{dw}{w} \tag{1.21}$$

Wir benutzen unsere Funktion f_2.

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q}\Big[\big\{f_2(y(q) + v\cdot \beta(s, x) + w\cdot e(s, x))\big\} \cdot \big\{y_3(q) + v\cdot \beta_3(s, x) + w\cdot e_3(s, x)\big\}\Big]\bigg|_{q=s} dv\, \frac{dw}{w}. \tag{1.22}$$

Wir führen die Ableitung aus und teilen das Integral passend auf

$$
\begin{aligned}
A(s,x) = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \dot{y}(s),\, \nabla f_2(y(s)+v\cdot\beta(s,x)+w\cdot e(s,x))\,\rangle}{w}\, dw\,(y_3(s)+v\cdot\beta_3(s,x))\, dv \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle \dot{y}(s),\, \nabla f_2(y(s)+v\cdot\beta(s,x)+w\cdot e(s,x))\,\rangle \cdot e_3\, dw\, dv \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_2(y(s)+v\cdot\beta(s,x)+w\cdot e(s,x))}{w}\, dw \frac{h}{2\pi}\, dv,
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

wobei wir im letzten Integral benutzen, dass $\frac{\partial}{\partial q} y_3(q) = \frac{h}{2\pi}$.

Im Folgenden werden wir zeigen, dass die drei Integrale in obiger Formel alle $\mathcal{O}(h)$ sind, um dann schließlich den Beweis durch Einsetzen von $A(s,x)$ in die Inversionsformel abzuschließen. Zuerst zeigen wir, dass die drei Integrale in Wirklichkeit nur über kompakte Intervalle gehen. Da weiterhin

$$
f_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2,x_3) - f(x_1,x_2,0)}{x_3}, \quad x_3 \neq 0
$$

gilt, haben die Funktion f_2 und ihre Ableitungen kompakten Träger (f hat nach Voraussetzung kompakten Träger), insbesondere bzgl. der Variablen x_1 und x_2.

Der Vektor $\beta(s,x) = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ hat immer einen Anteil in x_1- oder x_2-Richtung. Ebenso hat $e(s,x)$ immer einen Anteil in eine dieser beiden Richtungen. Denn angenommen, dies sei nicht so, sprich

$$
e_1 = 0 = e_2.
$$

Bis auf die Länge ist dann der Vektor e identisch mit dem Vektor j_3; nach Definition ist

$$
e(s,x) = \beta(s,x) \times u(s,x).
$$

Da e aber in die x_3-Richtung zeigt, müssen β und u in der Ebene E liegen, haben also keinen Anteil in x_3-Richtung. Dies ist aber ein Widerspruch zu Hilfssatz 1.14 (da $u_3 > 0$).

Die Integrationen in den obigen drei Integralen erfolgen also nur über kompakte Intervalle; geht nämlich z. B. $w \to \infty$, so liegt der Vektor $w\cdot e$ irgendwann außerhalb des Trägers von f_2. Und da wir weiter oben schon gesehen haben, dass

$$
y_3(s) + v\cdot\beta_3(s,x) = \mathcal{O}(h), \qquad e_3(s,x) = \mathcal{O}(h), \qquad \frac{h}{2\pi} = \mathcal{O}(h)
$$

und diese drei Terme in den Integralen in der Formel $(*)$ vorkommen, gilt

$$A(s, x) = \mathcal{O}(h).$$

Wir beachten dabei, dass $f_2(x_1, x_2, x_3)$ eine C^∞-Funktion ist, auf kompakten Mengen sind ihre Ableitungen und sie selbst also beschränkt. Setzen wir nun $A(s, x)$ wieder in die Inversionsformel ein und integrieren bzgl. s über $I_{PI}(x)$ (wobei $|I_{PI}(x)| < 2\pi$), so sehen wir, dass die Inversionsformel angewandt auf

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, 0)$$

einen Term der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ liefert. Damit geht die Inversionsformel von Katsevich angewandt auf $f(x_1, x_2, x_3)$ für $h \to 0$ gegen die Inversionsformel für $f(x_1, x_2, 0)$. Wie wir bereits wissen (vgl. Satz 1.15), ist diese Inversionsformel aber identisch mit der Inversionsformel für die 2D-Radontransformation. $\square$

Nachdem wir die Zusammenhänge zwischen der 2D-Radontransformation und der Inversionsformel von Katsevich aufgezeigt haben, wenden wir uns Vereinfachungen zu, die hilfreich für die numerische Implementierung sind. Dazu bestimmen wir zuerst eine abgewandelte Form der Inversionsformel.

2 Vereinfachungen für die numerische Implementierung

2.1 Die Inversionsformel in angepasster Form

Bei Verfahren, die auf Rückprojektionen basieren, ist die Rückprojektion in den meisten Fällen der aufwendigste Teil. Der Grund dafür ist, dass spätestens bei der Rückprojektion der genaue Rekonstruktionspunkt eine Rolle spielt. Bei einem 3D-Gitter ist die Anzahl der Rekonstruktionspunkte natürlich sehr hoch. Daher versuchen wir die Abhängigkeit vom Rekonstruktionspunkt soweit wie möglich zu eliminieren bzw. diese Abhängigkeit so spät wie möglich in das Verfahren zu integrieren. Dies erreichen wir durch ein Umformulieren der Inversionsformel (1.12). Der Weg zu dieser Umformulierung ist allerdings etwas lang. Wir beginnen ihn mit dem folgenden Hilfssatz.

2.1 Hilfssatz (Eigenschaften von $\boldsymbol{\theta(s, x, \gamma)}$). *Für θ wie in Satz 1.12 gilt*

1.) $\|\theta\| = 1$

2.) $\langle \theta, \theta'_s \rangle = 0$

3.) $\theta \perp u$.

Beweis. Zum ersten Punkt:

$$\begin{aligned}
\|\theta\|^2 &=< \theta, \theta > \\
&=< \cos\gamma\cdot \beta + \sin\gamma\cdot e, \cos\gamma\cdot \beta + \sin\gamma\cdot e > \\
&= \cos^2\gamma \; \|\beta\|^2 + \sin^2\,\gamma\, \|e\|^2 + 2\sin\gamma\, \cos\gamma\; \langle \beta,\, e\rangle \\
&= \cos^2\gamma + \sin^2\gamma \\
&= 1,
\end{aligned}$$

wobei wir ausnutzen, dass $\|\beta\| = 1$, die Vektoren β und u senkrecht aufeinander stehen (vgl. (1.10)) und dass

$$\begin{aligned}
\|e\|^2 &=< e, e >=< \beta \times u, \beta \times u > \\
&=< \beta, \beta >< u, u > - \langle \beta,\, u \rangle \langle \beta,\, u \rangle \\
&= \|\beta\|^2 \|u\|^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

gilt.

Für den zweiten Punkt beachten wir, dass $\|\theta\| = 1$ und damit

$$0 = \frac{\partial}{\partial s} \left(\|\theta\|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial s} < \theta, \theta >= 2 \, \langle \theta,\, \theta'_s \rangle \, .$$

Den dritten und letzten Punkt sehen wir wie folgt

$$\begin{aligned}
\theta &= \cos\gamma \cdot \beta + \sin\gamma \cdot e \\
\langle \theta,\, u \rangle &= \cos\gamma \cdot \underbrace{\langle \beta,\, u \rangle}_{=0} + \sin\gamma \cdot \underbrace{\langle e,\, u \rangle}_{=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Der Hilfssatz wird uns beim Beweis des folgenden, für unser weiteres Vorgehen grundlegenden, Satzes helfen.

2.2 Satz. *Für $f \in C_0^\infty(U)$ gilt*

$$
\begin{aligned}
f(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \Bigg\{ & \left[\frac{1}{\|x-y(s)\|} \int_0^{2\pi} Df(y(s),\theta(s,x,\gamma)) \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma \right]_{s=s_b(x)}^{s=s_t(x)} \\
& - \int_{I_{PI}(x)} \left(\frac{d}{ds} \frac{1}{\|x-y(s)\|} \right) \int_0^{2\pi} Df(y(s),\theta(s,x,\gamma)) \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma\, ds \\
& - \int_{I_{PI}(x)} \frac{\langle \beta_s'(s,x),\, u(s,x) \rangle}{\|x-y(s)\|} \int_0^{2\pi} [\nabla_{u(s,x)} Df](y(s),\theta(s,x,\gamma)) \cot\gamma\, d\gamma\, ds \qquad (2.1) \\
& - \int_{I_{PI}(x)} \frac{\langle e_s'(s,x),\, u(s,x) \rangle}{\|x-y(s)\|} \int_0^{2\pi} [\nabla_{u(s,x)} Df](y(s),\theta(s,x,\gamma))\, d\gamma\, ds \\
& - \int_{I_{PI}(x)} \frac{\langle \beta_s'(s,x),\, e(s,x) \rangle}{\|x-y(s)\|} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial\gamma} Df(y(s),\theta(s,x,\gamma)) \right) \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma\, ds \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnet $\nabla_u Df$ die Richtungsableitung von Df in Richtung von u

$$
[\nabla_u Df]\,(y(s),\theta) := \frac{\partial}{\partial t} Df\left(y(s), \sqrt{1-t^2}\theta + tu \right)\Big|_{t=0} \qquad \theta \perp u,\ \|\theta\| = 1, \qquad (2.2)
$$

sowie $\beta_s' := \frac{\partial\beta}{\partial s}$, $e_s' := \frac{\partial e}{\partial s}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die obige Definition der Richtungsableitung mit der allgemein benutzten Definition

$$
\frac{\partial f}{\partial u}(\xi) := \lim_{t\to 0} \frac{f(\xi+tu) - f(\xi)}{t}
$$

übereinstimmt, wobei f eine reellwertige Funktion, u ein Richtungsvektor (d. h. $\|u\| = 1$) und ξ ein Punkt im Definitionsbereich von f ist. Nach [7, Abschnitt 166] kann man die Richtungsableitung für „unsere" Funktionen (d. h. für differenzierbare Funktionen) schreiben als

$$
\frac{\partial f}{\partial u}(\xi) = \langle u,\, \operatorname{grad} f(\xi) \rangle .
$$

Die Rechnung dazu ist sehr kurz; wir bezeichnen dabei mit ∇_2 die Ableitung nach der zweiten Variablen (die hier ein Vektor ist)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} Df\left(y(s), \sqrt{1-t^2}\theta + tu\right)\Big|_{t=0} &= \left\langle \left[\nabla_2 Df\right](y(s), \sqrt{1-t^2}\theta + tu), \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\theta + u\right) \right\rangle\Big|_{t=0} \\ &= \left\langle \left[\nabla_2 Df\right](y(s), \theta), \, u \right\rangle .\end{aligned}$$

Wir benutzen die obige Definition, weil sie in den weiteren Betrachtungen leichter anwendbar ist und sich auch für numerische Implementierungen eignet.

Zum Beweis des eigentlichen Satzes integrieren wir die Inversionsformel partiell nach s. Wir setzen die Identität

$$\frac{\partial}{\partial q} Df(y(q), \theta(s,x,\gamma))\Big|_{q=s} = \frac{d}{ds} Df(y(s), \theta(s,x,\gamma)) - \frac{\partial}{\partial q} Df(y(s), \theta(q,x,\gamma))\Big|_{q=s} \qquad (*)$$

in die Inversionsformel (1.12) ein

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x-y(s)\|} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} Df(y(q), \theta(s,x,\gamma))\Big|_{q=s} \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma\, ds \\ &\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x-y(s)\|} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{ds} Df(y(s), \theta(s,x,\gamma)) \\ &\qquad\qquad - \frac{\partial}{\partial q} Df(y(s), \theta(q,x,\gamma))\Big|_{q=s} \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma\, ds. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wir konzentrieren uns zunächst auf den ersten Term in obigem Integral und erinnern daran, dass $I_{PI}(x) = [s_b(x), s_t(x)]$ ist

$$\begin{aligned} &\int\limits_{I_{PI}(x)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\|x-y(s)\|} \left(\frac{d}{ds} Df(y(s), \theta(s,x,\gamma))\right) \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma\, ds \\ &\overset{\substack{part.\\ Int.}}{=} \left[\frac{1}{\|x-y(s)\|} \int\limits_0^{2\pi} Df(y(s), \theta(s,x,\gamma)) \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma \right]_{s=s_b(x)}^{s=s_t(x)} \\ &\qquad - \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\|x-y(s)\|}\right) \int\limits_0^{2\pi} Df(y(s), \theta(s,x,\gamma)) \frac{1}{\sin\gamma}\, d\gamma\, ds. \end{aligned}$$

Dies ergibt die ersten beiden Zeilen in (2.1).

Betrachten wir jetzt den zweiten Term in (2.3). Wir beschaffen uns im Folgenden ein geeignetes Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$, mittels dessen wir dann

$$\frac{\partial}{\partial q} Df(y(s), \theta(q, x, \gamma))\Big|_{q=s}$$

ausdrücken.

Nach Hilfssatz 2.1 bilden $\theta, u, \theta \times u$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ($\theta \times u$ ist ein Einheitsvektor, da $\|\theta\| = 1 = \|u\|$ und $\theta \perp u$). Wir können θ'_s in dieser Basis schreiben

$$\begin{aligned}\theta'_s &= \underbrace{< \theta'_s, \theta >}_{0}\theta + < \theta'_s, u > u + < \theta'_s, \theta \times u > (\theta \times u) \\ &= < \theta'_s, u > u + < \theta'_s, \theta \times u > (\theta \times u).\end{aligned}$$

Ebenso schreiben wir $\frac{\partial}{\partial q} Df(y(s), \theta(q, x, \gamma))\Big|_{q=s}$ in dieser Basis

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q} Df(y(s), \theta(q, x, \gamma))\Big|_{q=s} &= \left\langle \nabla_2 Df(y(s), \theta(q, x, \gamma)), \, \frac{\partial \theta}{\partial q}(q, x, \gamma) \right\rangle\Big|_{q=s} \\ &= \langle \theta'_s(s, x, \gamma), \, \nabla_2 Df(y(s), \theta(s, x, \gamma)) \rangle .\end{aligned}$$

Wir schreiben θ, θ'_s und ∇_2 nicht mehr in der Standardbasis, sondern in θ, u und $\theta \times u$; dabei behalten wir die Bezeichnungen θ und θ'_s bei

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q} Df(y(s), \theta(q, x, \gamma))\Big|_{q=s} &= \theta'_s \cdot \Big\{ [\nabla_{\theta \times u} Df(y(s), \theta(s, x, \gamma))] \, (\theta \times u) \\ &\quad + [\nabla_u Df(y(s), \theta(s, x, \gamma))] \, u + [\nabla_\theta Df(y(s), \theta(s, x, \gamma))] \, \theta \Big\} \\ &= [\nabla_{\theta \times u} Df(y(s), \theta(s, x, \gamma))] \, \langle \theta \times u, \, \theta'_s \rangle \\ &\quad + [\nabla_u Df(y(s), \theta(s, x, \gamma))] \, \langle u, \, \theta'_s \rangle , \qquad (**)\end{aligned}$$

da $\theta \perp \theta'_s$, wie wir oben gesehen haben (Der Punkt „·“ kennzeichnet das Skalarprodukt).

Wir konzentrieren uns zunächst auf den ersten Term in (**)

$$\begin{aligned}\theta \times u &= (\cos \gamma \cdot \beta + \sin \gamma \cdot e) \times u \\ &= (\cos \gamma \cdot \beta + \sin \gamma \cdot (\beta \times u)) \times u.\end{aligned}$$

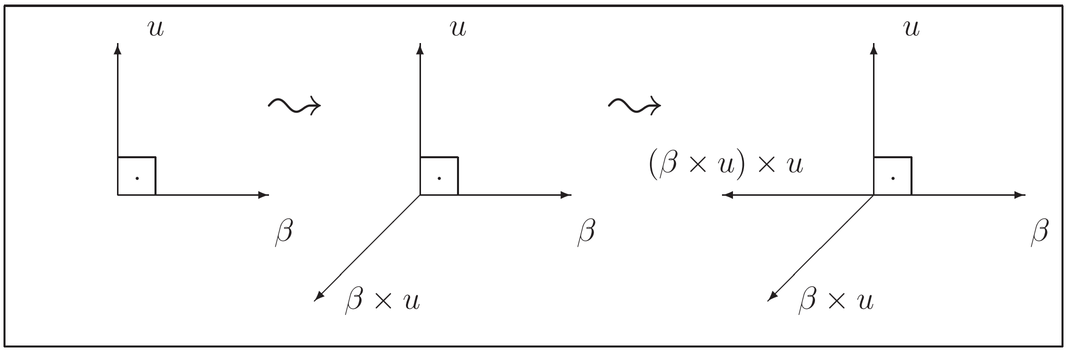


Abbildung 2.1: Zusammenhang zwischen u, β und $\beta \times u$

Wie wir aus Abbildung 2.1 erkennen, ist

$$(\beta \times u) \times u = -\beta$$

und da $\beta \times u = e$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \theta \times u &= \cos\gamma \cdot e - \sin\gamma \cdot \beta \\ &= \theta'_\gamma(s, x, \gamma). \end{aligned} \tag{$***$}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \langle \theta \times u, \, \theta'_s \rangle &= \langle \cos\gamma \cdot e - \sin\gamma \cdot \beta, \, \cos\gamma \cdot \beta'_s + \sin\gamma \cdot e'_s \rangle \\ &= \cos^2\gamma \cdot \langle e, \, \beta'_s \rangle - \sin\gamma \, \cos\gamma \, \langle \beta, \, \beta'_s \rangle + \sin\gamma \cos\gamma \, \langle e, \, e'_s \rangle - \sin^2\gamma \, \langle \beta, \, e'_s \rangle \end{aligned}$$

Es gilt $\|\beta\|^2 = 1 = \|e\|^2$ und damit $0 = \frac{d}{ds} \|\beta\|^2 = 2 \langle \beta, \, \beta'_s \rangle = 2 \langle e, \, e'_s \rangle$.

$$\begin{aligned} &= \cos^2\gamma \, \langle e, \, \beta'_s \rangle - \sin^2\gamma \, \langle \beta, \, e'_s \rangle \\ &= \langle \beta'_s, \, e \rangle , \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass $e \perp \beta$

$$\langle e, \, \beta \rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \frac{d}{ds} \langle e, \, \beta \rangle = \langle e'_s, \, \beta \rangle + \langle e, \, \beta'_s \rangle .$$

Weiterhin ist (wir beachten, dass $\|\theta'_\gamma\| = 1$)

$$
\begin{aligned}
[\nabla_{\theta\times u} Df](y(s), \theta(s,x,\gamma)) &\overset{(***)}{=} [\nabla_{\theta'_\gamma} Df](y(s), \theta(s,x,\gamma)) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} Df(y(s), \sqrt{1-t^2}\theta + t\theta'_\gamma)\Big|_{t=0} \\
&= \left\langle [\nabla_2 Df](y(s), \theta),\, \theta'_\gamma \right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial \gamma} Df(y(s), \theta(s,x,\gamma)).
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also

$$
[\nabla_{\theta\times u} Df](y(s), \theta(s,x,\gamma))\cdot \langle \theta \times u,\, \theta'_s \rangle = \frac{\partial}{\partial \gamma} Df(y(s), \theta(s,x,\gamma))\cdot \langle \beta'_s,\, e \rangle \,.
$$

Damit ergibt sich die letzte Zeile in Formel (2.1).

Der Term $[\nabla_u Df](y(s), \theta(s,x,\gamma))\cdot \langle u,\, \theta'_s \rangle$ in Formel $(**)$ muss also für die dritte und vierte Zeile in Formel (2.1) verantwortlich sein. Dies sehen wir recht schnell. Die Ableitung $[\nabla_u Df](y(s), \theta(s,x,\gamma))$ steht exakt so auch in (2.1), und da

$$
\langle u,\, \theta'_s(s,x,\gamma) \rangle = \langle u,\, \cos\gamma \cdot \beta'_s + \sin\gamma \cdot e'_s \rangle \,,
$$

folgen die Zeilen drei und vier in (2.1). □

Die Formel des obigen Satzes werden wir noch weiter vereinfachen. Dazu werden wir eine Invarianz von $s_2(s,x)$ benutzen. Zuerst müssen wir uns aber noch Gedanken über die Rekonstruktion langer Objekte innerhalb der Spirale machen.

2.2 Das Problem des langen Objekts

Ein grundsätzliches Problem bei der Spiralgeometrie ist die Länge des Objektes und die damit zusammenhängende Größe des Detektors. Befindet sich die Strahlenquelle bspw. am Fuß eines Menschen, so treffen die Strahlen der Quelle (falls keine Abschirmung erfolgt) auch den Kopf. Ein Detektor, der diese Strahlen noch erfassen würde, müsste etwa die doppelte Länge des menschlichen Körpers haben. Dies ist eine zu starke Einschränkung, die die entsprechenden Verfahren umgehen müssen. Ebenso kann man natürlich in der Praxis nur eine Spirale endlicher Länge durchlaufen. Das *Problem des langen Objekts* ist daher nach Definition das Problem der Rekonstruktion eines Gebiets, das von zwei transaxialen (bzgl. z-Achse) Ebenen begrenzt wird, wobei wir nur axial begrenzte Daten eines endlichen Spiralwegs zur Verfügung haben.

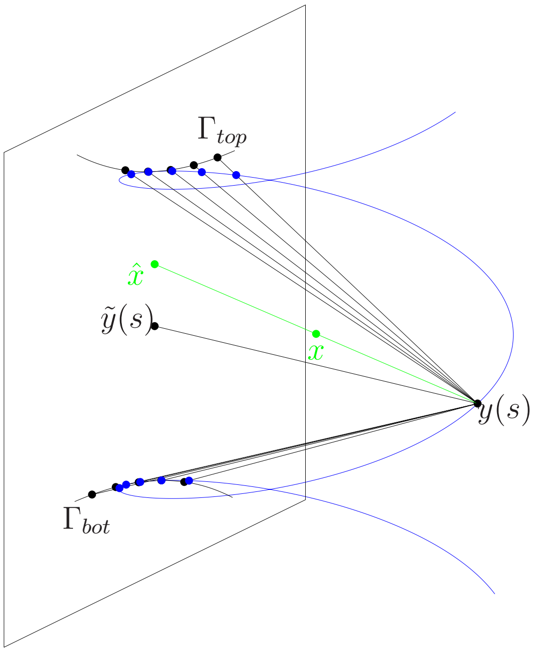


Abbildung 2.2: Stereographische Projektion der Spiralwindungen und des Rekonstruktionspunktes

Zur Begrenzung des Detektors projizieren wir die obere und untere Windung der Spirale auf die Detektorebene (vgl. Abb. 2.2), die wir mit E bezeichnen. Da die Detektoren mit der Quelle rotieren, hängt die Detektorebene von s ab: $DE = DE(s)$. Wir gehen davon aus, dass diese Ebene parallel zur Spiralachse und tangential an der Spirale gegenüber der Quelle liegt; damit beträgt der Abstand Strahlenquelle – Detektor $2R$.

Die Projektion ergibt zwei Kurven auf dem Detektor (vgl. Formel (2.15)). Diese Kurven begrenzen den Detektor nach oben und unten; die seitliche Begrenzung ergibt sich aus dem Radius r des Rekonstruktionsgebiets U.

2.3 Anmerkung. Die beiden begrenzenden Kurven werden wir später noch genauer analysieren. In [5, Anhang A] wird gezeigt, dass diese beiden Kurven auf dem Detektor konvex bzw. konkav sind. Daher haben sie mit jeder Geraden auf dem Detektor höchstens zwei Schnittpunkte.

2.3 Invarianzen von s_2

Im Folgenden sei $s \in \mathbb{R}$ fixiert, d. h. die Position der Röntgenquelle. Aus der Gleichung

$$\langle x - y(s),\, u(s, s_2) \rangle = 0, \qquad s_2 \in I_{PI}(x) \tag{1.10}$$

folgt, dass $s_2(s,x)$ nur von s und $\beta(s,x)$ abhängt, d. h. wir haben $s_2 = s_2(s,\beta)$.

Der Detektor liegt dem Punkt $y(s)$ genau gegenüber, hat zu diesem also den Abstand $2R$. Mit $\hat{x}$ bezeichnen wir den Punkt des Detektors, auf den ein Strahl von $y(s)$, der durch $x \in U$ geht, trifft – also den „Meßpunkt“ (dabei soll gelten, dass $s \in I_{PI}(x)$ – der Punkt x liegt also in jedem Fall innerhalb derselben Spiralwindung wie $y(s)$, vgl. auch Abb. 2.2).

Jeder Punkt $z \in U$, der auf der Halbgerade von $y(s)$ durch x liegt, hat offensichtlich denselben Meßpunkt $\hat{x}$ und denselben Vektor $\beta = \beta(s,z) = \beta(s,x)$. Wir setzen voraus, dass z so gewählt wird, dass $s \in I_{PI}(z)$ gilt. Jeder solche Punkt z hat also denselben Vektor β. Damit hat er wegen Formel (1.10) und der Einschränkung $s \in I_{PI}(z)$ aber auch denselben Wert $s_2 = s_2(s,z) = s_2(s,x)$ (ein Beweis dieser Behauptung, der auf der Projektion des PI-Segments auf DE beruht, findet sich in [5, Seite 8]). Nach der Definition von $s_1(s,s_2)$ und $u(s,z)$ gehören zu diesen Punkten dann auch dieselben Vektoren $u(s,z)$ und $e(s,z)$. Für fixiertes s und Punkte z wie oben können wir dann also

$$e = e(s,\beta), \qquad u = u(s,\beta), \qquad \theta(s,\beta,\gamma) = \cos\gamma\cdot\beta + \sin\gamma\cdot e(s,\beta) \tag{2.4}$$

schreiben. Mit dieser Schreibweise definieren wir uns Hilfsfunktionen $\psi_1 \ldots \psi_4$ (vgl. Formel (2.1))

$$\begin{aligned}
\psi_1(s,\beta) &:= \int_0^{2\pi} Df(y(s),\theta(s,\beta,\gamma))\frac{1}{\sin\gamma}\,d\gamma \\
\psi_2(s,\beta) &:= \int_0^{2\pi} [\nabla_{u(s,\beta)}Df](y(s),\theta(s,\beta,\gamma))\cot\gamma\,d\gamma \\
\psi_3(s,\beta) &:= \int_0^{2\pi} [\nabla_{u(s,\beta)}Df](y(s),\theta(s,\beta,\gamma))\,d\gamma \\
\psi_4(s,\beta) &:= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial\gamma}Df(y(s),\theta(s,\beta,\gamma))\right)\frac{1}{\sin\gamma}\,d\gamma.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Diese Hilfsfunktionen beschreiben die Filterung der Daten. Im Folgenden werden wir die Koeffizienten dieser Funktionen in (2.1) vereinfachen.

2.4 Hilfssatz. *Es gilt:*

a)

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{\|x-y(s)\|} = \frac{\langle \beta(s,x),\, \dot{y}(s)\,\rangle}{\|x-y(s)\|^2}$$

b)

$$\beta_s'(s,x) = \frac{\beta(s,x)}{\|x-y(s)\|}\,\langle \beta(s,x),\, \dot{y}(s)\,\rangle - \frac{\dot{y}(s)}{\|x-y(s)\|}.$$

Beweis.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\frac{1}{\|x-y(s)\|} &= \frac{d}{ds}\left\{\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i(s))^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{\|x-y(s)\|^3}\cdot 2\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i(s))(-\dot{y}_i(s)) \\
&= \frac{1}{\|x-y(s)\|^3}\,\langle x-y(s),\, \dot{y}(s)\,\rangle \\
&= \frac{\langle \beta(s,x),\, \dot{y}(s)\,\rangle}{\|x-y(s)\|^2}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\beta_s'(s,x) &= \frac{d}{ds}\frac{x-y(s)}{\|x-y(s)\|} \\
&= (x-y(s))\cdot\frac{\langle \beta(s,x),\, \dot{y}(s)\,\rangle}{\|x-y(s)\|^2} - \frac{\dot{y}(s)}{\|x-y(s)\|} \\
&= \frac{\beta(s,x)}{\|x-y(s)\|}\,\langle \beta(s,x),\, \dot{y}(s)\,\rangle - \frac{\dot{y}(s)}{\|x-y(s)\|}.
\end{aligned}$$

□

Da nach Definition $u(s,\beta) \perp \beta \perp e(s,\beta)$ gilt, folgt

$$\langle \beta_s'(s,x),\, u(s,x)\,\rangle = -\frac{\langle \dot{y}(s),\, u(s,x)\,\rangle}{\|x-y(s)\|} \tag{2.6}$$

$$\langle \beta_s'(s,x),\, e(s,x)\,\rangle = -\frac{\langle \dot{y}(s),\, e(s,x)\,\rangle}{\|x-y(s)\|}. \tag{2.7}$$

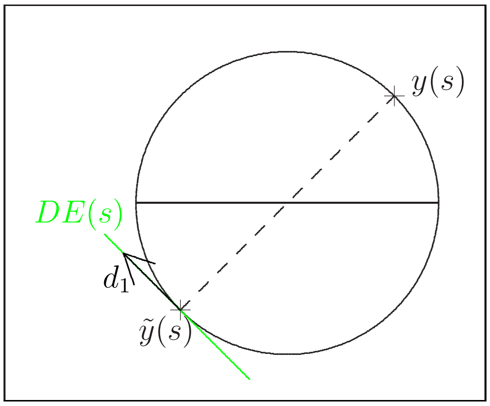


Abbildung 2.3: Draufsicht auf $DE(s)$ und die Lage von d_1

Den letzten verbleibenden Koeffizienten in (2.1) vereinfachen wir, indem wir ausnutzen, dass $\langle e(s,x),\, u(s,x) \rangle = 0$; es folgt

$$\langle e_s'(s,x),\, u(s,x) \rangle = -\langle e(s,x),\, u_s'(s,x) \rangle . \tag{2.8}$$

Wir müssen also $u_s'(s,x)$ vereinfachen. Da $u(s,x) = u(s, s_2(s,x))$ war, folgt

$$\frac{d}{ds}u(s,x) = \frac{\partial}{\partial s}u(s,s_2) + \frac{\partial}{\partial s_2}u(s,s_2)\frac{\partial}{\partial s}s_2(s,x). \tag{2.9}$$

Wir bestimmen im Folgenden die Ableitung $\frac{\partial}{\partial s}s_2(s,x)$.

2.4 Bestimmung von $\frac{\partial s_2}{\partial s}$

Auf der Detektorebene führen wir ein Koordinatensystem ein: die d_1-Achse stehe senkrecht auf der z-Achse, die d_2-Achse liege parallel zu ihr. Mit $\tilde{y}(s)$ bezeichnen wir den Kontaktpunkt der Ebene $DE(s)$ mit dem Zylinder auf der Höhe von $y(s)$. Damit ergibt sich

$$y(s) = \begin{pmatrix} R\cos s \\ R\sin s \\ \frac{h}{2\pi}s \end{pmatrix} \qquad \tilde{y}(s) = \begin{pmatrix} -R\cos s \\ -R\sin s \\ \frac{h}{2\pi}s \end{pmatrix}.$$

Den Ursprung des Koordinatensystems für $DE(s)$ legen wir dabei in den Punkt $\tilde{y}(s)$. Damit $d_1(s)$ parallel zu $DE(s)$ liegt, brauchen wir noch

$$d_1(s) \perp \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \\ 0 \end{pmatrix},$$

somit ergibt sich dann

$$d_1(s) = \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Projektion der Spiralwindungen

Wir benötigen die Koordinaten der Projektion der Spiralwindungen auf $DE(s)$ bzw. die von diesen Punkten erzeugte parametrische Kurve. Dazu bestimmen wir den Schnittpunkt der Geraden durch $y(s)$ und $y(s')$ mit der Ebene $DE(s)$; $y(s')$ durchläuft dabei die obere bzw. untere Windung der Spirale von $y(s)$ aus

$$y(s) = \begin{pmatrix} R\cos s \\ R\sin s \\ \frac{h}{2\pi}s \end{pmatrix} \qquad y(s') = \begin{pmatrix} R\cos s' \\ R\sin s' \\ \frac{h}{2\pi}s' \end{pmatrix} \qquad 0 < |s - s'| < 2\pi. \tag{2.11}$$

Es ergibt sich die Geradengleichung

$$[g(s,s')](t) := \begin{pmatrix} R\,(\cos s' - \cos s) \\ R\,(\sin s' - \sin s) \\ \frac{h}{2\pi}(s' - s) \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} R\cos s \\ R\sin s \\ \frac{h}{2\pi}s \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Für die Ebene $DE(s)$ folgt

$$\begin{aligned} [DE(s)](p,q) &= \tilde{y}(s) + p\,d_1(s) + q\,d_2(s) \\ &= \begin{pmatrix} -R\cos s \\ -R\sin s \\ \frac{h}{2\pi}s \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p,q \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Additionstheoreme folgt für den Schnittpunkt $SP(s,s')$

$$t = \frac{2}{1-\cos(s'-s)}; \qquad p = 2R\frac{\sin(s'-s)}{1-\cos(s'-s)}; \qquad q = \frac{h}{\pi}\frac{s'-s}{1-\cos(s'-s)}.$$

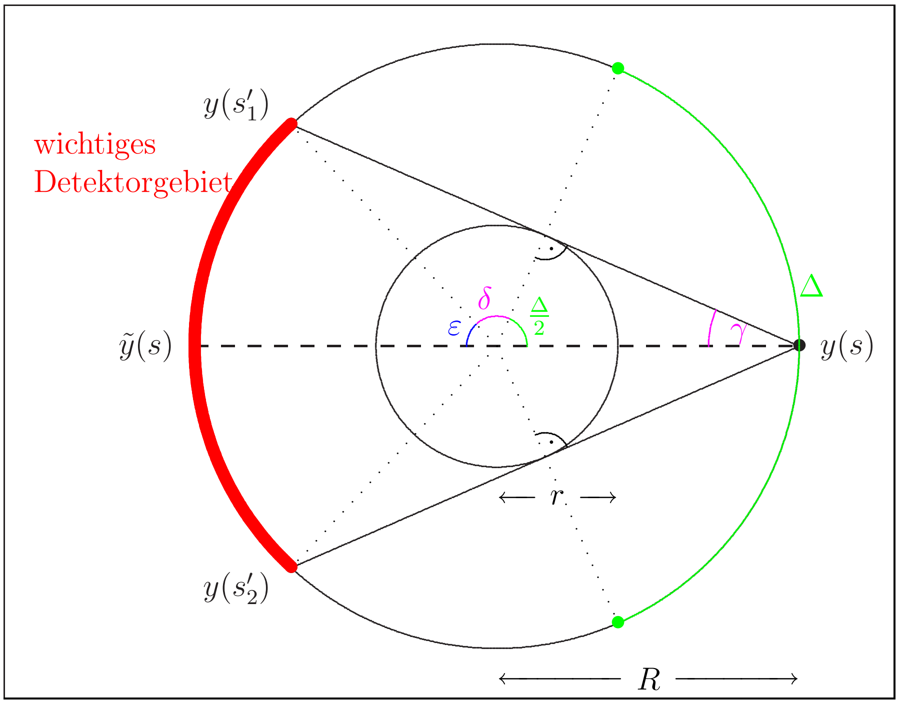


Abbildung 2.4: Draufsicht auf $x_1 - x_2$-Ebene

Die Werte p und q sind die Koeffizienten des Schnittpunkts im Koordinatensystem des Detektors; für den Relativvektor $SP(s,s') - \tilde{y}(s)$, ausgedrückt in der Basis $d_1(s), d_2(s)$ für $DE(s)$, ergibt sich

$$\begin{aligned} (SP(s,s') - \tilde{y}(s))_{d_1(s)} &= 2R\frac{\sin(s'-s)}{1-\cos(s'-s)} \\ (SP(s,s') - \tilde{y}(s))_{d_2(s)} &= \frac{h}{\pi}\frac{s'-s}{1-\cos(s'-s)}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Einschränkung der Projektionen

Die in (2.11) gemachte Einschränkung für den Wertebereich von s' ist zu großzügig, da nur die Strahlen der Quelle von Bedeutung sind, die das Objekt innerhalb der Spirale/Röhre auch treffen. Wir schränken daher den Wertebereich von s' im Folgenden ein. Dabei gehen wir davon aus, dass sich das Objekt innerhalb des Gebiets U befindet, d. h. einen Radius kleiner als r hat. Mit Δ bezeichnen wir den Winkel in der $x_1 - x_2$-Ebene, der sich als Kreiswinkel zwischen den Schnittpunkten der beiden Tangenten von $y(s)$ an den Kreis mit Radius r innerhalb der Spirale ergibt (vgl. Abb. 2.4). Es gilt

$$\cos\frac{\Delta}{2} = \frac{r}{R}.$$

Da in (2.12) nur die Differenz $s' - s$ auftaucht, benötigen wir nur die Differenzen $s'_1 - s$ und $s'_2 - s$ (für die Definition von s'_1, s'_2 vgl. Abb. 2.4). Es ist

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{2}, \qquad \delta \overset{gleichsch.}{\underset{Dreieck}{=}} \frac{\Delta}{2}, \qquad \varepsilon = \pi - \frac{\Delta}{2} - \delta = \pi - \Delta.$$

Damit folgt

$$s'_1 - s = \delta + \frac{\Delta}{2} = \pi - \varepsilon = \Delta \tag{2.13}$$

$$s'_2 - s = s'_1 - s + 2\varepsilon = \pi + \varepsilon = 2\pi - \Delta \qquad s'_2 > s'_1 > s, \tag{2.14}$$

wobei wir bei der zweiten Gleichung die Symmetrie des Dreiecks $(y(s'_1), y(s'_2), 0)$ ausgenutzt haben. Für die einschränkende Bedingung an s' in (2.11) bzw. (2.12) folgt

$$\begin{aligned} (SP(s,s') - \tilde{y}(s))_{d_1(s)} &= 2R\frac{\sin(s'-s)}{1-\cos(s'-s)} =: \hat{d}_1(s'-s) \\ (SP(s,s') - \tilde{y}(s))_{d_2(s)} &= \frac{h}{\pi}\frac{s'-s}{1-\cos(s'-s)} =: \hat{d}_2(s'-s) \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\Delta \le s'-s \le 2\pi - \Delta \ \text{ oder } \ \Delta - 2\pi \le s' - s \le -\Delta,$$

wobei der zweite Fall für $s'_2 < s'_1 < s$ auftritt (wir haben oben nur den Fall $s'_2 > s'_1 > s$ behandelt).

Bestimmen von s_2 über Schnitte von Ebenen

Die obere der beiden Kurven in (2.15) bezeichnen wir mit Γ_{top}, die untere mit Γ_{bot} (vgl. Abb. 2.2). Die Kurve Γ_{top} ist die Projektion der Spiralenwindung oberhalb von $y(s)$ auf $DE(s)$, Γ_{bot} die Projektion der Windung unterhalb von $y(s)$, jeweils ausgehend von $y(s)$. Wir erinnern uns, dass die Funktion $s_2(s,x)$ letztlich über die Gleichung (1.10) implizit festgelegt wurde. Das Bestimmen von $s_2(s,x)$ bzw. der Ableitung $\frac{\partial s_2}{\partial s}$ über diese Gleichung wäre sehr aufwendig. Wir wählen daher einen anderen Weg, der auf Schnitten von Ebenen mit der Detektorebene DE beruht.

Wie bereits erwähnt schreiben wir $\hat{x}$ für die Projektion des Rekonstruktionspunktes x auf $DE(s)$. Da die Rekonstruktionspunkte innerhalb von U liegen, wird $\hat{x}$ im Fall $s \in I_{PI}(x)$ in den Bereich zwischen Γ_{top} und Γ_{bot} projiziert. Wir bezeichnen mit L_0 die Schnittgerade der Ebene $DE(s)$ mit der Ebene, die durch den Punkt $y(s)$ geht und parallel zu $\dot{y}(s), \ddot{y}(s)$ liegt (Dies ist gerade die Ebene, die sich für $\Pi(s, s_2)$ im Fall $s_2 \to s$ ergibt, vgl. Anmerkung 1.11). Aufgrund der Stetigkeit nähern Γ_{top} sich für $s' \searrow s$ von oben und $\Gamma_{bot}(s' - s)$ für $s' \nearrow s$ von unten der Gerade L_0 an.

Für fixiertes s betrachten wir die einparametrige Familie $\Pi(s, s_2), |s_2 - s| < 2\pi$ von Ebenen, die durch die Punkte $y(s)$, $y(s_2)$, $y(s_1(s, s_2))$ gehen. Die Schnitte dieser Ebenen mit $DE(s)$ erzeugen eine Familie von Geraden $L(s_2)$.

Nach Hilfssatz 1.7 gilt immer genau einer der drei Fälle

$$s < s_1 < s_2 \qquad\qquad s_2 < s_1 < s \qquad\qquad s_2 = s_1 = s.$$

Für $s < s_1 < s_2$ „erzeugt“ (2.15) die Kurve Γ_{top} auf $DE(s)$. Die Ebene $\Pi(s, s_2)$ schneidet die Spirale C nach Konstruktion in den Punkten $y(s_1(s, s_2))$ und $y(s_2)$. Da außerdem $y(s) \in \Pi(s, s_2)$ gilt, liegen die Relativvektoren $y(s_1) - y(s)$ und $y(s_2) - y(s)$ parallel zu $\Pi(s, s_2)$; mithin liegen die Projektionen $\hat{y}(s_1)$ und $\hat{y}(s_2)$ auf $DE(s)$ in der Ebene $\Pi(s, s_2)$ und auf der Kurve Γ_{top}. Die Gerade $L(s_2)$ schneidet die Kurve Γ_{top} also in mindestens zwei Punkten. Nach Anmerkung 2.3 gibt es aber höchstens zwei Schnittpunkte einer Gerade auf dem Detektor mit den Projektionskurven. Daher sind diese beiden Punkte auch die einzigen Schnittpunkte.

Eine analoge Argumentation für $s_2 < s_1 < s$ zeigt, dass $L(s_2)$ in diesem Fall Γ_{bot} in zwei Punkten schneidet; und da die involvierten Funktionen stetig sind, gilt $L(s_2) = L_0$ für $s = s_1 = s_2$.

Für einen Rekonstruktionspunkt x sei nun $s \in (s_b(x), s_t(x))$ und $\hat{x} \notin L_0$. Falls nämlich $\hat{x} \in L_0$, so haben wir nach Definition von L_0

$$s_2 = s$$

und wir können uns die folgende „Suche“ nach der „passenden“ Geraden $L(s_2)$ ersparen.

Wir suchen s_2 so, dass die Gerade $L(s_2)$ den Punkt $\hat{x}$ enthält. Damit liegt x dann in der Ebene $\Pi(s, s_2)$ und Gleichung (1.10) ist automatisch erfüllt (da mit $x, y(s) \in \Pi(s, s_2)$ der Vektor $\beta(s, x)$ parallel zu $\Pi(s, s_2)$ liegt und $u(s, s_2) \perp \Pi(s, s_2)$ nach Konstruktion von $u(s, s_2)$).

2.5 Satz. *Haben wir s_2 so wie oben dargestellt, dann erfüllt s_2 die Gleichung*

$$\frac{\hat{x}_2(s) - \hat{d}_2(s_2 - s)}{\hat{x}_2(s) - \hat{d}_2(s_1 - s)} = \frac{\hat{x}_1(s) - \hat{d}_1(s_2 - s)}{\hat{x}_1(s) - \hat{d}_1(s_1 - s)} \qquad \textit{für } s_b \leq s_2 \leq s_t, \tag{2.16}$$

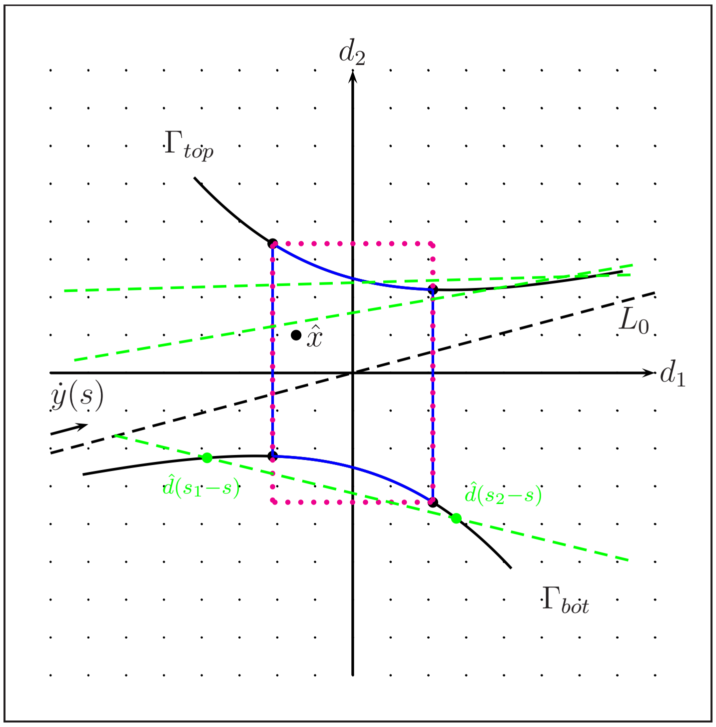


Abbildung 2.5: Position von Γ_{top}, $\hat{x}$ und $\hat{d}(s_{1,2}-s)$. Linien der Familie $L(s_2)$ sind grün eingezeichnet, der minimale Detektor ist blau, der verwendete Rechteckdetektor ist magentafarben.

wobei wir mit $\hat{d}(s_1 - s), \hat{d}(s_2 - s)$ die Projektionen der Punkte $y(s_1), y(s_2)$ auf $DE(s)$ bezeichnen (vgl. Formel (2.15)) und mit $\hat{x}_1(s), \hat{x}_2(s)$ die Koordinaten von $\hat{x}$ auf $DE(s)$ bzgl. des Koordinatensystems $d_1(s), d_2(s)$.

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass $\hat{x}$ auf $DE(s)$ oberhalb der Geraden L_0 liegt (vgl. Abb. 2.5). Da $y(s_1)$ und $y(s_2)$ auf der Spirale liegen, werden diese Punkte auf Γ_{top} projiziert. Nach Voraussetzung haben wir s_2 so bestimmt, dass $\hat{x} \in L(s_2)$. Wir erinnern uns, dass $L(s_2)$ sich aus dem Schnitt von $DE(s)$ mit der Ebene $\Pi(s, s_2)$ – die die Punkte $y(s), y(s_1), y(s_2)$ enthält – ergibt. Damit liegen also auch die Projektionen von $y(s_1)$ und $y(s_2)$ auf $L(s_2)$; insgesamt gilt also

$$\hat{x},\ \hat{d}(s_1 - s),\ \hat{d}(s_2 - s) \in L(s_2),$$

die drei Projektionen liegen also auf einer Geraden. Die in Abbildung 2.6 angedeuteten

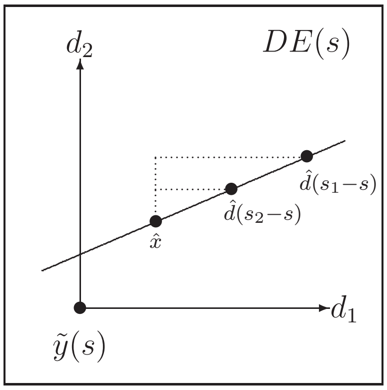


Abbildung 2.6: Lage der Punkte auf $L(s_2)$

Dreiecke sind ähnlich und für die Koordinaten folgt

$$\frac{\hat{x}_1 - \hat{d}_1(s_2 - s)}{\hat{x}_1 - \hat{d}_1(s_1 - s)} = \frac{\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_2 - s)}{\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_1 - s)}.$$

□

Für fixiertes s (und somit fixiertes $y(s)$) hängt $\hat{x}$ nur über $\beta(s,x)$ von x ab. Ebenso hängen $\hat{d}(s_{1,2} - s)$ nur von $\beta(s,x)$ ab. Denn wie gerade erläutert, sind dies Punkte, die auf Γ_{bot} bzw. Γ_{top} liegen und deren Verbindungsgerade $\hat{x}$ trifft. Da aber nach [1, Seite 8 unten] der Wert von s_2, für den $\hat{x} \in L(s_2)$ gilt, eindeutig ist, hängt s_2 – und damit s_1 – eindeutig von $\hat{x}$ und damit von β ab.

Unser ursprüngliches Ziel war die Bestimmung von $\frac{\partial s_2}{\partial s}$, die wir in Formel (2.9) brauchen. Daher bestimmen wir im Folgenden die Ableitung der Terme in (2.16). Um uns diese Rechnung zu vereinfachen, berechnen wir vorher noch die Ableitungen $\frac{d}{ds}\hat{x}_{1,2}(s)$.

Wie wir gerade gesehen haben, hängt (für fixiertes s) $\hat{x}$ nur über $\beta(s,x)$ von s ab. Dies ermöglicht uns die Berechnung von $\frac{d}{ds}\hat{x}_{1,2}(s)$, allerdings noch mit expliziter Abhängigkeit vom Rekonstruktionspunkt x.

2.6 Satz. *Mit $\alpha := \frac{\partial \beta}{\partial s} \cdot \left\|\frac{\partial \beta}{\partial s}\right\|^{-1}$ gilt*

$$\frac{d}{ds}\hat{x}_{1,2}(s) = \nabla_\alpha \hat{x}_{1,2}(\beta) \frac{\sqrt{\|\dot{y}(s)\|^2 - \langle \beta, \dot{y}(s) \rangle^2}}{\|x - y(s)\|}. \tag{2.17}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\hat{x}_{1,2}(s) &= \frac{d}{ds}\hat{x}_{1,2}(\beta(s,x)) \\ &= \left\langle \nabla\hat{x}_{1,2}(\beta),\, \frac{\partial\beta}{\partial s} \right\rangle.\end{aligned}$$

Mit α wie oben erhalten wir

$$\nabla_\alpha\hat{x}_{1,2}(\beta) = \left\|\frac{\partial\beta}{\partial s}\right\|^{-1} \left\langle \frac{\partial\beta}{\partial s},\, \nabla\hat{x}_{1,2}(\beta) \right\rangle,$$

wobei wir $[\nabla_u f] = \langle u,\, \nabla f\,\rangle$ ausgenutzt haben; es folgt

$$\frac{d}{ds}\hat{x}_{1,2}(s) = \left\|\frac{\partial\beta}{\partial s}\right\| \nabla_\alpha\hat{x}_{1,2}(\beta).$$

Nach Hilfssatz 2.4 gilt

$$\frac{\partial\beta}{\partial s} = \frac{\langle \beta,\, \dot{y}(s)\,\rangle\,\beta - \dot{y}(s)}{\|x-y(s)\|}.$$

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt allgemein

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\left\langle \vec{a},\, \vec{b}\right\rangle + \left\|\vec{b}\right\|^2.$$

Mit $\vec{a} := \langle \beta,\, \dot{y}(s)\,\rangle\,\beta$ und $\vec{b} := \dot{y}(s)$ folgt

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\beta}{\partial s}\right\|^2 &= \frac{1}{\|x-y(s)\|^2}\left\{\langle \beta,\, \dot{y}(s)\,\rangle^2 + \|\dot{y}(s)\|^2 - 2\,\langle \beta,\, \dot{y}(s)\,\rangle\,\langle \beta,\, \dot{y}(s)\,\rangle\right\} \\ &= \frac{\|\dot{y}(s)\|^2 - \langle \beta,\, \dot{y}(s)\,\rangle^2}{\|x-y(s)\|^2},\end{aligned}$$

wobei wir $\|\beta\| = 1$ ausgenutzt haben. Wurzelziehen und Einsetzen liefert die Behauptung. □

Dieses Zwischenergebnis werden wir jetzt nutzen, um mit Hilfe von Satz 2.5 einen Ausdruck für $\frac{\partial s_2}{\partial s}$ zu finden.

2.7 Satz. *Es ist*

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_2}{\partial s} = \frac{1}{\kappa}\cdot \Big\{ & \hat{d}_2'(s_2-s)\left[\hat{d}_1(s_1-s)-\hat{x}_1\right] + \hat{d}_1'(s_2-s)\left[\hat{x}_2-\hat{d}_2(s_1-s)\right] \\ & + \hat{d}_1'(s_1-s)(\frac{\partial s_1}{\partial s}-1)\left[\hat{x}_2-\hat{d}_2(s_2-s)\right] \\ & + \hat{d}_2'(s_1-s)(\frac{\partial s_1}{\partial s}-1)\left[-\hat{x}_1+\hat{d}_1(s_2-s)\right] \\ & - \hat{x}_2'\hat{d}_1(s_2-s) - \hat{x}_1'\hat{d}_2(s_1-s) + \hat{x}_1'\hat{d}_2(s_2-s) + \hat{x}_2'\hat{d}_1(s_1-s)\Big\},\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\kappa := {} & \hat{x}_2\hat{d}_1'(s_2-s) + \hat{x}_1\hat{d}_2'(s_1-s)\frac{\partial s_1}{\partial s_2} - \hat{d}_1'(s_2-s)\hat{d}_2(s_1-s) - \hat{d}_1(s_2-s)\hat{d}_2'(s_1-s)\frac{\partial s_1}{\partial s_2} \\ & - \hat{x}_1\hat{d}_2'(s_2-s) - \hat{x}_2\hat{d}_1'(s_1-s)\frac{\partial s_1}{\partial s_2} + \hat{d}_1'(s_1-s)\hat{d}_2(s_2-s)\frac{\partial s_1}{\partial s_2} + \hat{d}_1(s_1-s)\hat{d}_2'(s_2-s) \\ = {} & \hat{d}_1'(s_2-s)[\hat{x}_2-\hat{d}_2(s_1-s)] + \hat{d}_2'(s_1-s)\frac{\partial s_1}{\partial s_2}[\hat{x}_1-\hat{d}_1(s_2-s)] \\ & + \hat{d}_2'(s_2-s)[\hat{d}_1(s_1-s)-\hat{x}_1] + \hat{d}_1'(s_1-s)\frac{\partial s_1}{\partial s_2}[\hat{d}_2(s_2-s)-\hat{x}_2].\end{aligned}$$

Beweis. Wir multiplizieren Formel (2.16) aus und erhalten

$$\begin{aligned}& -\hat{x}_2\hat{d}_1(s_2-s) - \hat{x}_1\hat{d}_2(s_1-s) + \hat{d}_1(s_2-s)\hat{d}_2(s_1-s) \\ & \qquad = -\hat{x}_1\hat{d}_2(s_2-s) - \hat{x}_2\hat{d}_1(s_1-s) + \hat{d}_1(s_1-s)\hat{d}_2(s_2-s).\end{aligned}$$

Ableiten nach s (unter Beachtung von $s_1 = s_1(s, s_2)$) liefert

$$\begin{aligned}& -\hat{x}_2'\hat{d}_1(s_2-s) - \hat{x}_2\hat{d}_1'(s_2-s)[\frac{\partial s_2}{\partial s}-1] - \hat{x}_1'\hat{d}_2(s_1-s) - \hat{x}_1\hat{d}_2'(s_1-s)[\frac{\partial s_1}{\partial s}+\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial s}-1] \\ & \quad + \hat{d}_1'(s_2-s)\hat{d}_2(s_1-s)[\frac{\partial s_2}{\partial s}-1] + \hat{d}_1(s_2-s)\hat{d}_2'(s_1-s)[\frac{\partial s_1}{\partial s}+\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial s}-1] \\ & = \\ & -\hat{x}_1'\hat{d}_2(s_2-s) - \hat{x}_1\hat{d}_2'(s_2-s)[\frac{\partial s_2}{\partial s}-1] - \hat{x}_2'\hat{d}_1(s_1-s) - \hat{x}_2\hat{d}_1'(s_1-s)[\frac{\partial s_1}{\partial s}+\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial s}-1] \\ & \quad + \hat{d}_1'(s_1-s)\hat{d}_2(s_2-s)[\frac{\partial s_1}{\partial s}+\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial s}-1] + \hat{d}_1(s_1-s)\hat{d}_2'(s_2-s)[\frac{\partial s_2}{\partial s}-1].\end{aligned}$$

Wir lösen diese Gleichung nach $\frac{\partial s_2}{\partial s}$ auf (Wir bringen alle Terme mit $\frac{\partial s_2}{\partial s}$ auf die rechte Seite.). Dabei ergibt sich ein Bruch, dessen Nenner gerade κ ist. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_2}{\partial s} = \frac{1}{\kappa}\cdot \Big\{ & -\hat{x}_2'\hat{d}_1(s_2-s) + \hat{x}_2\hat{d}_1'(s_2-s) - \hat{x}_1'\hat{d}_2(s_1-s) - \hat{x}_1\hat{d}_2'(s_1-s)[\frac{\partial s_1}{\partial s} - 1] \\
& - \hat{d}_1'(s_2-s)\hat{d}_2(s_1-s) + \hat{d}_1(s_2-s)\hat{d}_2'(s_1-s)[\frac{\partial s_1}{\partial s} - 1] \\
& + \hat{x}_1'\hat{d}_2(s_2-s) - \hat{x}_1\hat{d}_2'(s_2-s) + \hat{x}_2'\hat{d}_1(s_1-s) + \hat{x}_2\hat{d}_1'(s_1-s)[\frac{\partial s_1}{\partial s} - 1] \\
& - \hat{d}_1'(s_1-s)\hat{d}_2(s_2-s)[\frac{\partial s_1}{\partial s} - 1] + \hat{d}_1(s_1-s)\hat{d}_2'(s_2-s)\Big\} \\
= \frac{1}{\kappa}\cdot \Big\{ & \hat{d}_2'(s_2-s)\left[\hat{d}_1(s_1-s) - \hat{x}_1\right] + \hat{d}_1'(s_2-s)\left[\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_1-s)\right] \\
& + \hat{d}_1'(s_1-s)(\frac{\partial s_1}{\partial s} - 1)\left[\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_2-s)\right] \\
& + \hat{d}_2'(s_1-s)(\frac{\partial s_1}{\partial s} - 1)\left[\hat{d}_1(s_2-s) - \hat{x}_1\right] \\
& - \hat{x}_2'\hat{d}_1(s_2-s) - \hat{x}_1'\hat{d}_2(s_1-s) + \hat{x}_1'\hat{d}_2(s_2-s) + \hat{x}_2'\hat{d}_1(s_1-s)\Big\}.
\end{aligned}$$

□

2.8 Anmerkung. In [1] wird die Wohldefiniertheit des obigen Ausdrucks für $\frac{\partial s_2}{\partial s}$ gezeigt, inbesondere

- $\kappa \neq 0$
- $\hat{x} \to L_0$ für $s_2 \to s$ d. h. der Punkt $\hat{x}$ nähert sich der Geraden L_0 an
- $\frac{\partial s_2}{\partial s} \to -1$ für $s_2 \to s$.

Wir benutzen Formel (2.17) und die Definition von κ und schreiben

$$\frac{\partial s_2}{\partial s}(s,x) = a(s,\beta) + \frac{b(s,\beta)}{\|x - y(s)\|},$$

wobei

$$
\begin{aligned}
a(s,\beta) &:= \frac{1}{\kappa}\Big\{ \hat{d}_2'(s_2-s)\left[\hat{d}_1(s_1-s)-\hat{x}_1\right] + \hat{d}_1'(s_1-s)(\frac{\partial s_1}{\partial s}-1)\left[\hat{x}_2-\hat{d}_2(s_2-s)\right] \\
&\qquad + \hat{d}_1'(s_2-s)\left[\hat{x}_2-\hat{d}_2(s_1-s)\right] + \hat{d}_2'(s_1-s)(\frac{\partial s_1}{\partial s}-1)\left[\hat{d}_1(s_2-s)-\hat{x}_1\right]\Big\} \\
b(s,\beta) &:= \frac{\gamma}{\kappa}\left\{\nabla_\alpha \hat{x}_1(\beta)\left[\hat{d}_2(s_2-s)-\hat{d}_2(s_1-s)\right] + \nabla_\alpha \hat{x}_2(\beta)\left[\hat{d}_1(s_1-s)-\hat{d}_1(s_2-s)\right]\right\} \\
\gamma &:= \sqrt{\|\dot{y}(s)\|^2 - \langle \beta,\, \dot{y}(s)\,\rangle^2}.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Es war (vgl. (2.8) und (2.9))

$$
\begin{aligned}
\langle e_s'(s,x),\, u(s,x)\,\rangle &= -\,\langle e(s,x),\, u_s'(s,x)\,\rangle \\
\frac{d}{ds}u(s,x) &= \frac{\partial u(s,s_2)}{\partial s} + \frac{\partial u(s,s_2)}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial s}.
\end{aligned}
$$

Die Ableitungen $\frac{\partial u(s,s_2)}{\partial s}$ und $\frac{\partial u(s,s_2)}{\partial s_2}$ hängen nur über β von x ab; denn wir hatten gezeigt, dass $s_2(s,x) = s_2(s,\beta)$ (vgl. Formel (2.4)) und damit gilt $u(s,s_2) = u(s,x) = u(s,\beta)$ sowie $e(s,x) = e(s,\beta)$. Wir definieren daher

$$
\begin{aligned}
h_1(s,\beta) &:= \frac{\partial u(s,s_2)}{\partial s} \\
h_2(s,\beta) &:= \frac{\partial u(s,s_2)}{\partial s_2}
\end{aligned}
$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
\langle e_s'(s,x),\, u(s,x)\,\rangle &= -\,\langle e(s,x),\, u_s'(s,x)\,\rangle \\
&= -\,\langle e(s,\beta),\, u_s'(s,x)\,\rangle \\
&= -\left\langle e(s,\beta),\, h_1(s,\beta) + h_2(s,\beta)\frac{\partial s_2}{\partial s}\right\rangle \\
&= -\left\langle e(s,\beta),\, h_1(s,\beta) + h_2(s,\beta)\cdot\left\{a(s,\beta) + \frac{b(s,\beta)}{\|x-y(s)\|}\right\}\right\rangle \\
&= \nu_0(s,\beta) + \nu_1(s,\beta)\frac{1}{\|x-y(s)\|}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

mit

$$\nu_0(s,\beta) := -\left\langle e(s,\beta),\, \frac{\partial u(s,s_2)}{\partial s} + \frac{\partial u(s,s_2)}{\partial s_2} a(s,\beta) \right\rangle \tag{2.20}$$

$$\nu_1(s,\beta) := -\left\langle e(s,\beta),\, \frac{\partial u(s,s_2)}{\partial s_2} b(s,\beta) \right\rangle. \tag{2.21}$$

Wir fassen unsere bis hierhin erreichten Vereinfachungen zusammen.

2.9 Satz. *Für f wie in Satz 2.2 gilt*

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\left\{ \left[\frac{1}{\|x-y(s)\|}\psi_1(s,\beta)\right]_{s=s_b(x)}^{s=s_t(x)} - \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x-y(s)\|}\Phi_1(s,\beta)\,ds - \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x-y(s)\|^2}\Phi_2(s,\beta)\,ds \right\}, \tag{2.22}$$

wobei

$$\Phi_1(s,\beta) := \nu_0(s,\beta)\psi_3(s,\beta) \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(s,\beta) := {}& \langle \beta,\, \dot y(s)\,\rangle\, \psi_1(s,\beta) - \langle u(s,\beta),\, \dot y(s)\,\rangle\, \psi_2(s,\beta) \\ &+ \nu_1(s,\beta)\,\psi_3(s,\beta) - \langle e(s,\beta),\, \dot y(s)\,\rangle\, \psi_4(s,\beta).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich aus der Definition der ψ_i in Formel (2.5) zusammen mit der Vereinfachung der zugehörigen Koeffizienten in Hilfssatz 2.4 und den Formeln (2.6), (2.7) und (2.19). □

Worin liegt der große Vorteil dieser Formel gegenüber unserer Ausgangsformel aus Satz 1.12? Die Antwort ist klar: in den Funktionen ψ_i. Diese hängen nicht mehr vom konkreten Rekonstruktionspunkt x ab, sondern nur noch von der „Rekonstruktionsrichtung“ β. Liegen zwei Rekonstruktionspunkte in der gleichen Richtung (vom Quellpunkt $y(s)$ aus gesehen), so haben sie auch die gleichen Werte für die ψ_i und eine erneute Auswertung der Integrale über γ kann unterbleiben.

2.10 Anmerkung. Die Funktionen ψ_1, ψ_2 und ψ_4 kann man als Faltungen schreiben, wie in [1] gezeigt wird. Wir verzichten hier auf eine Wiedergabe dieses Beweises, da wir die Faltungseigenschaft nicht ausnutzen werden. Eine Begründung hierfür folgt im nächsten Kapitel.

3 Implementierung und numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden wir die bei der Implementierung benutzten Vereinfachungen und Näherungen besprechen. Dabei behandeln wir zuerst die Implementierung der Formel (1.12) und dann die Formel (2.22).

3.1 Implementierung der ersten Variante

Es war

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x - y(s)\|} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} Df(y(q), \theta(s, x, \gamma)) \Big|_{q=s} \frac{d\gamma}{\sin\gamma} \, ds.$$

3.1.1 Berechnung von $I_{PI}(x)$

Für jeden Rekonstruktionspunkt x benötigen wir das Intervall $I_{PI}(x)$. Dies erhalten wir durch numerisches Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems (1.2). Hierfür wurde eine beim benutzten Softwarepaket ([10]) enthaltene Lösungsfunktion verwendet. Da wir uns nicht schwerpunktmäßig mit dem Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme beschäftigen, gehen wir auf diese Funktion nicht weiter ein. Ebenso benötigen wir für jeden Rekonstruktionspunkt x den Vektor $u(s, x)$. Diesen erhalten wir durch numerisches Lösen der Gleichung (1.10).

3.1.2 Das Filterungsintegral

Der Integrand im Integral über γ ist aufgrund des $\frac{1}{\sin\gamma}$-Terms singulär für $\gamma \in \{0, \pi, 2\pi\}$. Diese Singularitäten analysieren wir genauer und beginnen dabei mit dem Fall $\gamma = \pi$. Dann ist

$$\theta(s, x, \pi) = \cos\pi \cdot \beta(s, x) + \sin\pi \cdot e(s, x) = -\beta(s, x). \tag{3.1}$$

	Auflösung 64×64		Auflösung 256×256	
	Rek. 1	Rek. 2	Rek. 1	Rek. 2
N_γ	256	512	256	512
Zeit in h (siehe Anm. 3.1)	40 (1)	50 (1)	20 (40)	25 (40)

Tabelle 3.1: Daten zur Rekonstruktionen der Hohlkugel. N_γ bezeichnet dabei die Anzahl der Stützstellen für das Integral über γ. Die Zahlen in Klammern bezeichnen die Anzahl der Prozessoren, auf denen die Rechnung lief.

Für jeden Punkt $x \in U$ zeigt der Vektor $-\beta(s,x)$ aus der Spirale heraus. Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{supp}(f) \subset U$. Außerhalb der Spirale verschwindet f also; daher gilt

$$[Df](y(s), -\beta(s,x)) \equiv 0 \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial q}[Df](y(q), -\beta(s,x))\bigg|_{q=s} \equiv 0.$$

Die Singularität bei $\gamma = \pi$ spielt also nur insofern eine Rolle, als wir bei der Diskretisierung des Integrals den entsprechenden Anteil an dieser Stelle auf Null setzen und eine Division durch $0 = \sin\pi$ abfangen müssen.

Die Singularitäten bei $\gamma = 0$ und $\gamma = 2\pi$ können wir offensichtlich nicht so einfach eliminieren, da in beiden Fällen $\theta(s,x,0) = \theta(s,x,2\pi) = \beta(s,x)$ gilt; d. h. θ zeigt in Richtung des aktuellen Rekonstruktionspunktes x. Dort ist f im Allgemeinen ungleich Null und somit ist ebenfalls $[Df](y(s), \beta(s,x)) \neq 0$.

Daher betrachten wir den Integranden an diesen Stellen genauer. Für $\gamma \searrow 0$ und $\gamma \nearrow 2\pi$ geht $\theta(s,x,\gamma) \to \beta(s,x)$. Allerdings gilt für den Sinus-Term

$$\sin\gamma \nearrow 0 \quad \text{für} \quad \gamma \nearrow 2\pi \qquad\qquad \sin\gamma \searrow 0 \quad \text{für} \quad \gamma \searrow 0.$$

Damit heben sich die beiden Werte an den Rändern des Integrationsbereichs auf; es genügt also, diese beiden (singulären) Stellen bei der Berechnung abzufangen. Die Ableitung $(\frac{\partial}{\partial q})$ implementieren wir mit einem Vorwärtsdifferenzenquotienten und benutzen dabei die Daten der nächsten Quellposition.

Mit diesem Verfahren wurde der Schnitt durch eine Hohlkugel in den Abbildungen 3.1 und 3.2 rekonstruiert. Die Daten der Hohlkugel finden sich in Anhang A.2; die Daten der einzelnen Rekonstruktionen in Tabelle 3.1.

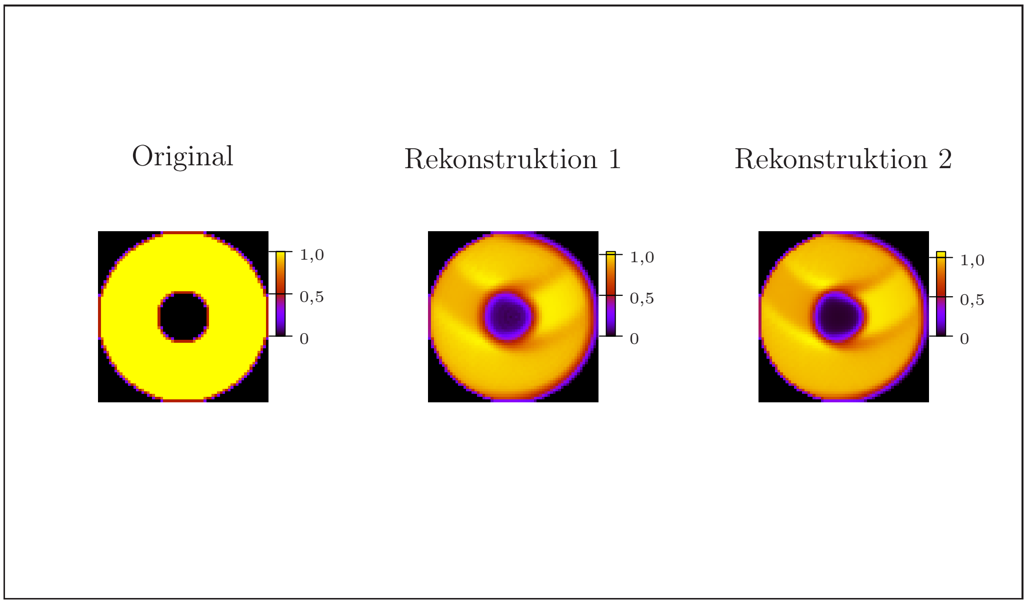


Abbildung 3.1: Rekonstruktion der Hohlkugel mit 64×64 *Bildpunkten*

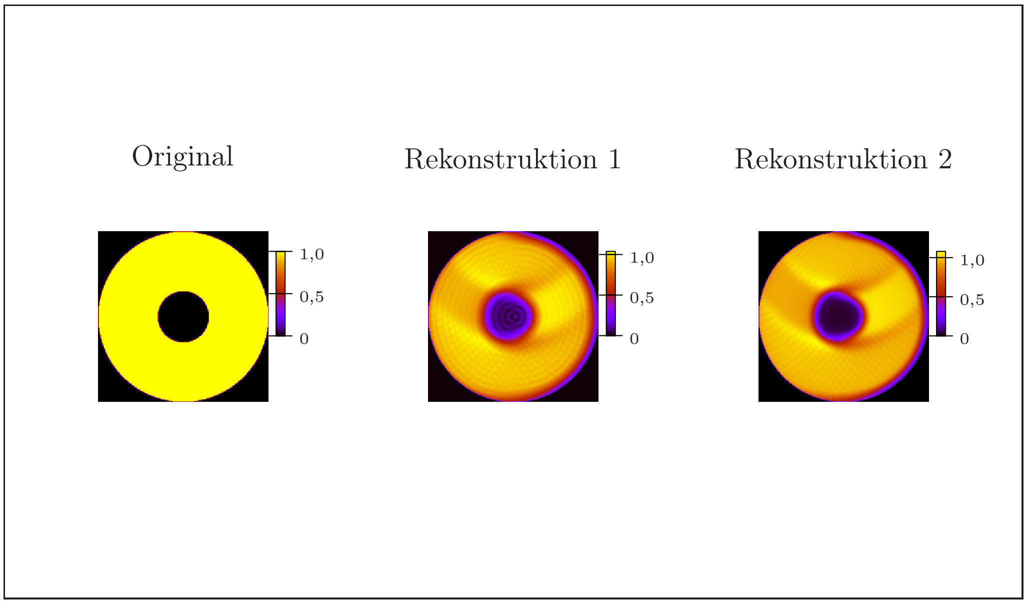


Abbildung 3.2: Rekonstruktion der Hohlkugel mit 256×256 *Bildpunkten*

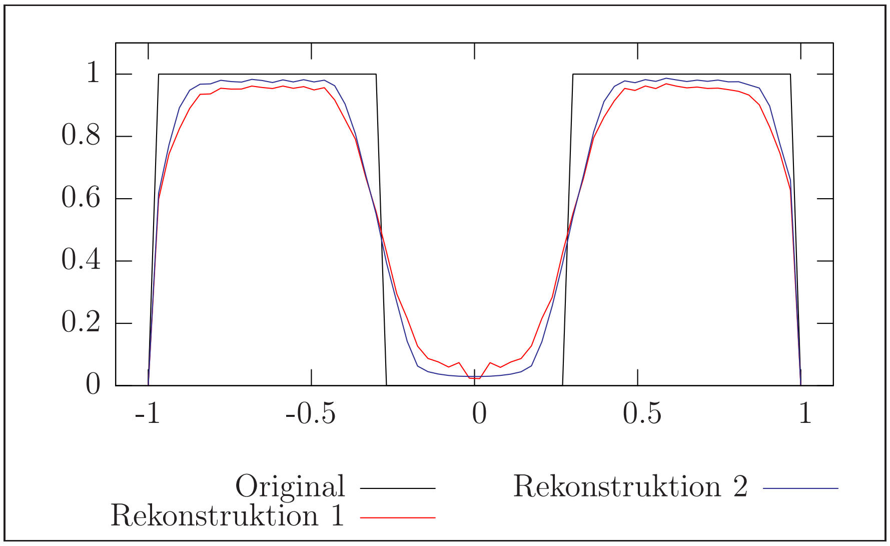


Abbildung 3.3: Schnitt durch die Rekonstruktion der Hohlkugel mit einer Auflösung von 64×64. Für die Daten der Rekonstruktion siehe Tabelle 3.1.

3.1 Anmerkung. Die in Tabelle 3.1 angegebenen Berechnungszeiten auf mehreren Prozessoren sind die Zeiten, die maximal von einem der Prozessoren benötigt wurden. Aufgrund des verwendeten Verfahrens zur Verteilung der Rechnung auf die Prozessoren sind die Zeiten der einzelnen Prozessoren sehr unterschiedlich.

Der Grund für die sehr lange Dauer der Rekonstruktion ist die sehr feine Diskretisierung des Integrals über γ. Vergleicht man die jeweiligen Rekonstruktionen in den Abbildungen 3.1 und 3.2, so sieht man, dass eine grobe Diskretisierung von γ nicht ausreicht, um das Innere der Hohlkugel als leer erscheinen zu lassen. Den Unterschied erkennt man bei einem Schnitt durch die Rekonstruktionsebene in den Abbildungen 3.3 und 3.4; die Schnitte erfolgten jeweils bei $y = 0$.

3.1.3 Analyse des Winkels γ

Der Grund für die notwendig hohe Auflösung für γ wird klar, wenn wir uns überlegen, was bei der Integration über γ passiert. Durchläuft γ das Intervall $[0, 2\pi]$, so durchläuft $\theta = \cos\gamma \cdot \beta + \sin\gamma \cdot e$ eine Ebene, die von den Vektoren β und e aufgespannt wird. Da β senkrecht auf e steht, können wir die beiden Vektoren als Basis eines kartesischen Koordinatensystems in dieser Ebene ansehen; γ ist dann der Winkel bei Verwendung von Polarkoordinaten in dieser Ebene.

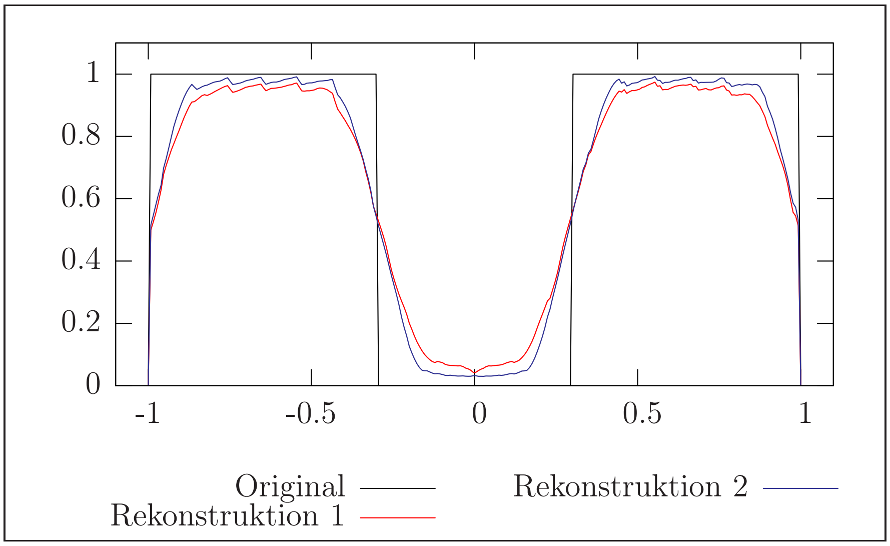


Abbildung 3.4: Schnitt durch die Rekonstruktion der Hohlkugel mit einer Auflösung von 256×256. Für die Daten der Rekonstruktion siehe Tabelle 3.1.

Für die Rekonstruktion benötigen wir offensichtlich die Werte der Röntgentransformation $[Df](y(q), \theta(s, x, \gamma))$ auf dem Detektor; wir benötigen also die Strahlen θ, die den Detektor treffen.

Die Ausmaße des Detektors ergeben sich aus dem Problem des langen Objekts: also aus dem Radius r des Zylinders U, der Ganghöhe h und dem Radius R der Spirale. Der Einfachheit halber gehen wir von einem rechteckigen Detektor aus. Theoretisch könnte man ihn entlang der Kurve $\hat{d}_1(s' - s), \hat{d}_2(s' - s)$ (vgl. (2.15)) begrenzen. Da dies im vorliegenden Fall allerdings nur bei der Messung bzw. virtuellen Erzeugung der Daten eine Rolle spielt, verzichten wir auf diese Präzisierung.

Die aus der hier verwendeten Geometrie folgenden Maße des Detektors finden sich in Tabelle 3.2. Der größte Abstand zweier Punkte auf dem Detektor beträgt daher 4,30. Gehen wir in einer groben Näherung davon aus, dass wir einen Kreisausschnitt der Bogenlänge 4,30 des Kreises mit Radius $2R$ haben, so sehen wir, dass (bei äquidistanter Diskretisierung des Intervalls) nur etwa ein Fünftel der Strahlen $\theta(s, x, \gamma)$ den Detektor treffen – bei einem Wert von $N_\gamma = 256$ treffen also nur etwa 50 Strahlen den Detektor und sind damit für unsere Rekonstruktion von Nutzen.

3.2 Anmerkung. Das Verhältnis von Breite und Höhe des Detektors in Tabelle 3.2 (der Detektor ist deutlich breiter als höher) deckt sich nicht mit der Abbildung 2.5. Dies liegt daran, dass für die Abbildung ein Wert von $h = 5{,}0$ verwendet wurde, um den Verlauf

R (Spiralradius)	$3,00$
r (Radius des Rekonstruktionsgebiets)	$1,00$
h (Ganghöhe der Spirale)	$0,50$
Breite des Detektors	$4,25$
Höhe des Detektors	$0,65$
Anzahl der Reihen des Detektorgitters	64
Anzahl der Spalten des Detektorgitters	512

Tabelle 3.2: Parameter der Datenerzeugung und Rekonstruktion für die Hohlkugel.

von Γ_{bot} und Γ_{top} zu verdeutlichen.

3.2 Implementierung der zweiten Variante

Die Implementierung der Inversionsformel gemäß Formel (2.22) erscheint deutlich aufwendiger, ist für reale Anforderungen aber deutlich schneller. Wir hatten gezeigt

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{\|x-y(s)\|}\psi_1(s,\beta)\right]_{s=s_b(x)}^{s=s_t(x)} - \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x-y(s)\|}\Phi_1(s,\beta)\,ds \right.$$
$$\left. - \int\limits_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x-y(s)\|^2}\Phi_2(s,\beta)\,ds\right\}. \tag{2.22}$$

Für eine feste Quellposition müssen wir also die Werte der Funktionen $\Phi_1(s,\beta)$ und $\Phi_2(s,\beta)$ für alle auftretenden Vektoren β berechnen. Würden wir nun den Vektor β abhängig vom Rekonstruktionspunkt x wählen, so müssten wir $\Phi_{1,2}(s,\beta)$ für jedes x bestimmen (die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Punkte des diskreten, kartesischen Rekonstruktionsgitters den gleichen Vektor β haben, ist Null). Dies würde unsere Vereinfachungsbemühungen ad absurdum führen. Daher wählen wir einen anderen Weg. Für jeden festen Quellpunkt $y(s)$ berechnen wir die Einheitsvektoren von $y(s)$ in Richtung der diskreten Detektorpunkte (bei einem Detektorgitter mit 64 Zeilen und 512 Spalten sind dies 32768 Vektoren für jeden Quellpunkt). Zur Vereinfachung bezeichnen wir im weiteren Verlauf diese diskrete Menge an Einheitsvektoren als *Rekonstruktionsrichtungen.*

3.2.1 Bestimmung der Rekonstruktionsrichtungen

Für einen festen Spiralenparameter ($s = 0$) bestimmen wir die Rekonstruktionsrichtungen β. Für jede dieser Richtungen berechnen wir dann den zugehörigen Wert von s_2 gemäß Gleichung (1.10). Da der Detektor sich mit der Strahlenquelle mitbewegt, ergeben sich die Rekonstruktionsrichtungen β für Spiralenparameter $s \neq 0$ durch eine einfache Drehung; die jeweils zugehörigen Werte von s_2 durch Addition des aktuellen Spiralenparameters s. Die Rotationsinvarianz der Vektoren β überträgt sich auf die Vektoren $u(s, \beta)$ und $e(s, \beta)$, die wir damit schnell und unabhängig vom exakten Rekonstruktionspunkt berechnen können.

Ein weiterer Vorteil dieser Berechnung ist die direkte Verwendung der gemessenen Daten. Die Punkte des Detektorgitters, die durch die Vektoren β bestimmt werden, sind genau die Meßpunkte; für einen beliebigen Punkt x des Rekonstruktionsgitters müssten wir erst den Auftreffpunkt des Strahls von $y(s)$ in Richtung $\beta(s, x)$ auf dem Detektor bestimmen, um dann den Wert der Röntgentransformation in diesem Auftreffpunkt aus den Werten in den benachbarten Meßpunkten anzunähern.

In einem realen CT-Scanner sind die Geometrie des Detektorgitters und somit die Werte der β und s_2 bereits vor der Messung bekannt. Um dies bei unseren Rechnungen zu berücksichtigen, erfolgt die Berechnung dieser Werte bereits bei der Erzeugung der virtuellen Daten.

3.2.2 Vereinfachungen

Zur Bestimmung der Funktionen Φ_1 und Φ_2 benötigen wir unter anderem die Funktionen $a(s, \beta)$ und $b(s, \beta)$ aus Formel (2.18). Die folgenden Hilfssätze erleichtern uns die Berechnung dieser Funktionen.

3.3 Hilfssatz. *Für $\psi(t) := \frac{t}{2}$ wie im Beispiel 1.5 gilt:*

$$a(s, \beta) \equiv 1. \tag{3.2}$$

Beweis. Wir hatten (vgl. Formel (2.18))

$$\begin{aligned} a(s,\beta) = \frac{1}{\kappa}\Big\{ & \hat{d}_2'(s_2 - s)\left[\hat{d}_1(s_1 - s) - \hat{x}_1\right] + \hat{d}_1'(s_1 - s)(\frac{\partial s_1}{\partial s} - 1)\left[\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_2 - s)\right] \\ & + \hat{d}_1'(s_2 - s)\left[\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_1 - s)\right] + \hat{d}_2'(s_1 - s)(\frac{\partial s_1}{\partial s} - 1)\left[\hat{d}_1(s_2 - s) - \hat{x}_1\right]\Big\} \end{aligned}$$

und (vgl. Satz 2.7)

$$\kappa = \hat{d}_1'(s_2 - s)[\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_1 - s)] - \hat{d}_2'(s_1 - s)\frac{\partial s_1}{\partial s_2}[\hat{d}_1(s_2 - s) - \hat{x}_1]$$
$$+ \hat{d}_2'(s_2 - s)[\hat{d}_1(s_1 - s) - \hat{x}_1] - \hat{d}_1'(s_1 - s)\frac{\partial s_1}{\partial s_2}[\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_2 - s)].$$

Mit $\psi(t) = \frac{t}{2}$ gilt $s_1(s, s_2) = \frac{s+s_2}{2}$ und damit

$$\frac{\partial s_1}{\partial s} - 1 = -\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial s_1}{\partial s_2} = \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Es folgt

$$\kappa = \hat{d}_2'(s_2 - s)[\hat{d}_1(s_1 - s) - \hat{x}_1] - \frac{1}{2}\hat{d}_1'(s_1 - s)[\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_2 - s)]$$
$$+ \hat{d}_1'(s_2 - s)[\hat{x}_2 - \hat{d}_2(s_1 - s)] - \frac{1}{2}\hat{d}_2'(s_1 - s)[\hat{d}_1(s_2 - s) - \hat{x}_1].$$

Vergleichen mit $a(s, \beta)$ liefert die Behauptung. □

3.4 Hilfssatz. *Für* $\alpha := \frac{\partial \beta}{\partial s} \left\| \frac{\partial \beta}{\partial s} \right\|^{-1}$ *gilt*

$$\alpha = \frac{\langle \dot{y}, \beta \rangle \beta - \dot{y}}{\sqrt{\|\dot{y}\|^2 - \langle \dot{y}, \beta \rangle^2}}. \tag{3.4}$$

Beweis. Es gilt

$$\frac{d}{ds}\|x - y(s)\| = -\frac{\langle \dot{y}, x - y \rangle}{\|x - y\|} = -\langle \dot{y}, \beta \rangle$$

und mit Hilfssatz 2.4 folgt

$$\frac{d}{ds}\beta(s, x) = \frac{\langle \dot{y}, \beta \rangle \beta - \dot{y}}{\|x - y\|}$$

$$\left\|\frac{d}{ds}\beta(s, x)\right\|^2 = \frac{\|\dot{y}\|^2 + \langle \dot{y}, \beta \rangle^2 - 2\langle \dot{y}, \beta \rangle^2}{\|x - y\|^2}$$
$$= \frac{\|\dot{y}\|^2 - \langle \dot{y}, \beta \rangle^2}{\|x - y\|^2}.$$

Ziehen der Wurzel und Zusammenfassen liefert die Behauptung. □

Mit Hilfssatz 3.4 können wir die Richtungsableitung nach α in der Funktion $b(s, \beta)$ (vgl. Formel (2.18)) verhältnismäßig einfach implementieren.

3.2.3 Faltungseigenschaft der Filterfunktionen

Wie in Anmerkung 2.10 bereits erwähnt, kann man die Funktionen ψ_1, ψ_2 und ψ_4 als Faltung schreiben; am Beispiel von ψ_1 erläutern wir dies kurz

$$\begin{aligned}\psi_1(s,\beta) &= \int_0^{2\pi} Df(y(s),\theta(s,\beta,\gamma))\frac{1}{\sin\gamma}\,d\gamma \\ \theta(s,\beta,\gamma) &= \cos\gamma\cdot\beta + \sin\gamma\cdot e.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Wir können γ als Winkel in der von β und e aufgespannten Ebene E betrachten (Es ist $\beta \perp e$.). In dieser Ebene führen wir Polarkoordinaten ein mit dem Polarwinkel φ und können damit

$$\beta = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix} \qquad\qquad e = \begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

schreiben (Beide Vektoren sind Einheitsvektoren.). Somit folgt

$$\begin{aligned}\psi_1(s,\beta) &= \int_0^{2\pi} Df\left(y(s), \cos\gamma\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix} + \sin\gamma\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sin\gamma}\,d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} Df\left(y(s), \begin{pmatrix}\cos(\gamma+\varphi) \\ \sin(\gamma+\varphi)\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sin\gamma}\,d\gamma.\end{aligned}$$

Durch Ausnutzen des Faltungssatzes für die Fouriertransformation können wir nun die Werte von $\psi_1(s,\beta)$ für alle Vektoren $\beta \in E$ bestimmen.

Das Problem an dieser Idee liegt im letzten Satz verborgen, genauer in der Einschränkung $\beta \in E$. Zur Berechnung der Fouriertransformation müssen wir einmal über den Winkel φ von $0 \ldots 2\pi$ integrieren. Da die Wahrscheinlichkeit, dass ein weiterer unserer Rekonstruktionsvektoren β innerhalb der Ebene E liegt, gleich Null ist, ist der Aufwand für die Berechnung der Fouriertransformation und der Rücktransformation höher als die direkte Berechnung des Integrals in (3.5). Die Diskretisierung verhindert hier den effizienten Einsatz des Fourierkalküls; daher bestimmen wir die Funktionen ψ_1, ψ_2 und ψ_4 direkt ohne Fouriertransformation.

Die Implementierung der zweiten Variante sieht also wie folgt aus:

0.) Berechne bei der Datenerzeugung für den Fall $s = 0$ die Rekonstruktionsvektoren β und die zugehörigen Werte s_2 und speichere diese mit den Daten.

1.) Berechne die Funktionen $\psi_1(s, \beta), \dots, \psi_4(s, \beta)$ durch Auswerten der zugehörigen Integrale (unter Ausnutzung der bereits berechneten Werte von s_2).

2.) Berechne die Funktionen $\Phi_1(s, \beta)$ und $\Phi_2(s, \beta)$ durch entsprechendes Wichten der Funktionen $\psi_1(s, \beta), \dots, \psi_4(s, \beta)$.

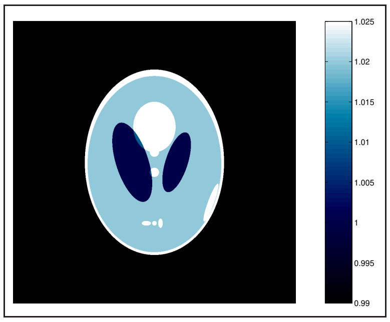
3.) Speichere die Daten der $\Phi_1(s, \beta), \Phi_2(s, \beta)$ und $\psi_1(s, \beta)$. Im Folgenden bezeichnen wir diese gespeicherten Daten als *Metadaten*.

4.) Für einen konkreten Rekonstruktionspunkt x berechne $I_{PI}(x)$ und nähere die Integrale über $s \in I_{PI}(x)$ mittels Trapezregel aus den Metadaten. Für die beiden „Randwerte“ der diskreten Zerlegung des Intervalls $I_{PI}(x)$ addiere den gewichteten Wert von $\psi_1(s, \beta)$ und aktualisiere mit dem gewonnenen Wert die Bildmatrix.

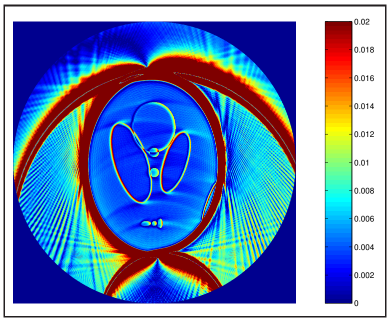
Mit dieser Methode wurde das Shepp-Logan-Phantom in Abbildung 3.5(b) rekonstruiert. Die Daten des Phantoms finden sich in Anhang A.1, die Parameter des simulierten Aufbaus in Tabelle 3.3. Betrachten wir das Differenzbild 3.5(c), so fällt als erstes das kreisrunde Rekonstruktionsgebiet ins Auge; Punkte außerhalb des Rekonstruktionsgebiets wurden vom Programm auf Null gesetzt, daher ist dort natürlich kein Fehler vorhanden. Die größten Fehler mit einem Betrag von fast 2 (in der Skalierung des Bildes nicht erkennbar) ergeben sich an den Rändern des Schädels. Dies ist wenig überraschend, da dort der Verstoß gegen die geforderte Stetigkeit der Objektfunktion f am größten ist. Innerhalb des Schädels sind die Fehler deutlich kleiner. Allerdings wird der Tumor in der rechten unteren Ecke nicht so fein aufgelöst, dass man den geringen Abstand zum Rand noch erkennen könnte. Die beiden Kreisbögen außerhalb des Schädels haben einen Wert von etwa 0.15. Die Form dieses Artefakts deutet auf einen Zusammenhang mit der spiralförmigen Abtastkurve hin. Genaueres kann man zum gegenwärtigen Zeitpunkt hierzu aber noch nicht sagen.

3.2.4 Berechnungszeiten

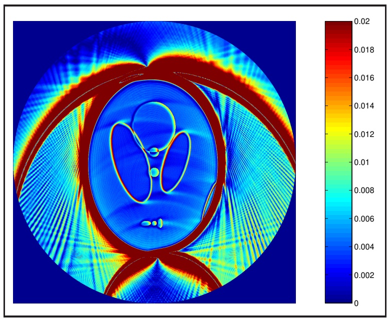
Die Berechnungszeiten für die Rekonstruktion des Shepp-Logan-Phantoms scheinen auf den ersten Blick länger als die Zeiten der ersten Variante; insbesondere, wenn man berücksichtigt, dass die Verteilung der Rechnung auf die verschiedenen Prozessoren hier



(a) Original



(b) Rekonstruktion



(c) Differenz

Abbildung 3.5: Das Shepp-Logan-Phantom – Original, Rekonstruktion und Betrag der Differenz zwischen Rekonstruktion und Original; Schnitt bei $z = 0.381$*. Die Daten der Rekonstruktion finden sich in Tabelle 3.4. Um die Unterschiede beim Differenzbild besser sichtbar zu machen, wurde eine andere Farbpalette gewählt.*

R (Spiralradius)	$3,00$
r (Radius des Rekonstruktionsgebiets)	$1,40$
h (Ganghöhe der Spirale)	$0,50$
Breite des Detektors	$6,34$
Höhe des Detektors	$0,84$
Anzahl der Reihen des Detektorgitters	64
Anzahl der Spalten des Detektorgitters	512

Tabelle 3.3: Parameter der Datenerzeugung beim Shepp-Logan-Phantom

Anzahl der Quellpositionen	8192
N_γ	4096
Auflösung des Bildes	1024×1024
Größe der Metadaten	> 10 GB
Zeit zur Berechnung der Metadaten	5 d (32)
Zeit zur Berechnung des Bildes aus den Metadaten	1/2 d (1)

Tabelle 3.4: Daten zur Rekonstruktion des Shepp-Logan-Phantoms in Abbildung 3.5(b). Die Zahlen in Klammern geben die Anzahl der Prozessoren an, auf denen die jeweilige Rechnung lief.

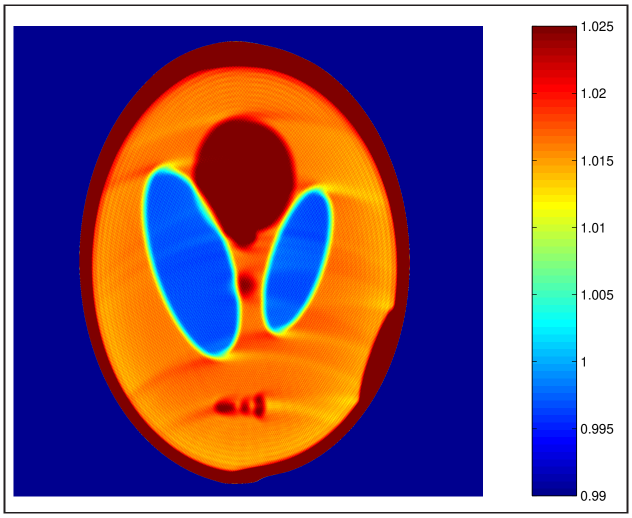


Abbildung 3.6: Rekonstruktion mit 3000×3000 *Punkten*

sehr gleichmäßig war und daher alle Prozessoren in etwa die Berechnungszeit aus Tabelle 3.4 benötigten.

Aus zwei Gründen ist die zweite Variante dennoch schneller als die erste. Zum einen wegen der höheren Auflösung des Rekonstruktionsbildes. Eine Auflösung von 3000×3000 wie in Abbildung 3.6 führt bei Verwendung des ersten Verfahrens zu einer um den Faktor 100 längeren Laufzeit im Vergleich zu der Auflösung 256×256 – eine solche Berechnung ist daher im Rahmen einer Diplomarbeit nicht durchführbar (sie würde deutlich über 100 Tage dauern, siehe Tabelle 3.1). Die Begrenzung der Auflösung auf 3000×3000 bei der Verwendung des zweiten Verfahrens erfolgte auch nicht aus Laufzeitgründen – mehrere Tage sind im Hinblick auf die übrigen Berechnungszeiten absolut akzeptabel – sondern aus Speichermangel: eine Auflösung von 4000×4000 führte auf dem verwendeten Knoten des Clusters zum Abbruch der Rechnung nach Ausschöpfen des insgesamt zur Verfügung stehenden Speichers von 4 GB (zu den technischen Daten des Clusters siehe Tabelle 3.5). Der zweite Grund für den Vorteil der verbesserten Variante liegt in der Behandlung von 3D-Problemen. Im Normalfall wird man mehr als eine Schicht rekonstruieren. Dies dauert bei der verbesserten Variante nur „unwesentlich" länger, da die Metadaten nur einmal berechnet werden müssen. Die Zeit zum Berechnen einer 3000×3000 Schicht liegt bei etwa 33 Stunden (bei 8192 Quellpositionen), davon entfallen etwa 13 Stunden auf die Berechnung der Intervalle $I_{PI}(x)$ für die Rekonstruktionspunkte x.

Anzahl der Knoten	48
Prozessor je Knoten	1 × 2,2 GHz Xeon
Speicher je Knoten	2 GB RAM
	2 GB Swap
Netzwerkanbindung	100 MBit/s

Tabelle 3.5: Daten des zur Berechnung verwendeten Clusters

3.2.5 Auswirkungen der einzelnen Parameter auf die Rekonstruktion

Die bisherigen Rekonstruktionen wurden mit einer vergleichsweise großen Menge an Messwerten und einer sehr feinen Diskretisierung des Filterintegrals durchgeführt. In diesem Abschnitt analysieren wir die Auswirkungen auf die Güte der Rekonstruktion bei Verwendung von weniger Datensätzen sowie einer gröberen Diskretisierung des Filterintegrals.

Dazu betrachten wir verschiedene Rekonstruktionen und ihre Differenzen zum Original. Die Daten der einzelnen Rekonstruktionen finden sich in Tabelle 3.6. Das Differenzbild ist jeweils der Betrag des Unterschieds zwischen Original und Rekonstruktion, versehen mit einer Skalierung (der maximale Unterschied liegt im Bereich von 2.0; ohne Skalierung wären aus dem Differenzbild daher kaum Informationen zu gewinnen).

Vergleicht man die Rekonstruktionen in den Abbildungen 3.10 und 3.11, so fällt auf, dass die Verdopplung der Meßdaten (von 4096 auf 8192 Quellpositionen) nur noch eine geringe Qualitätsverbesserung bringt; dies erkennt man auch an der Norm der Differenzenmatrizen (siehe Tabelle 3.6).

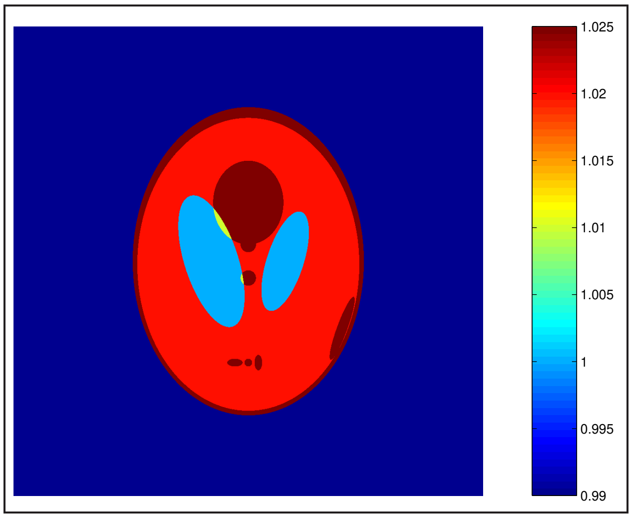
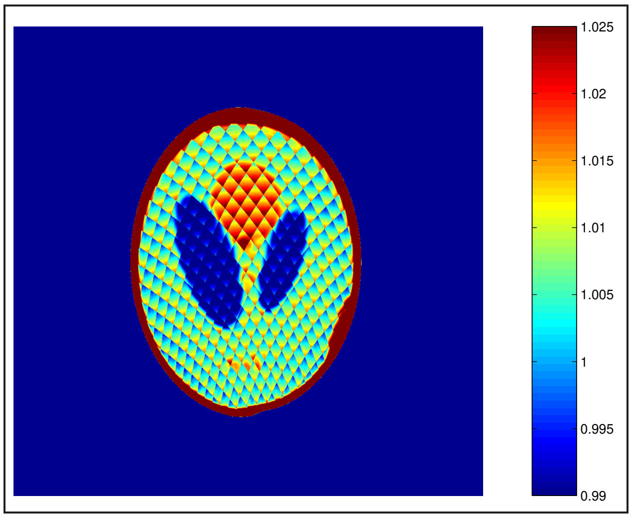


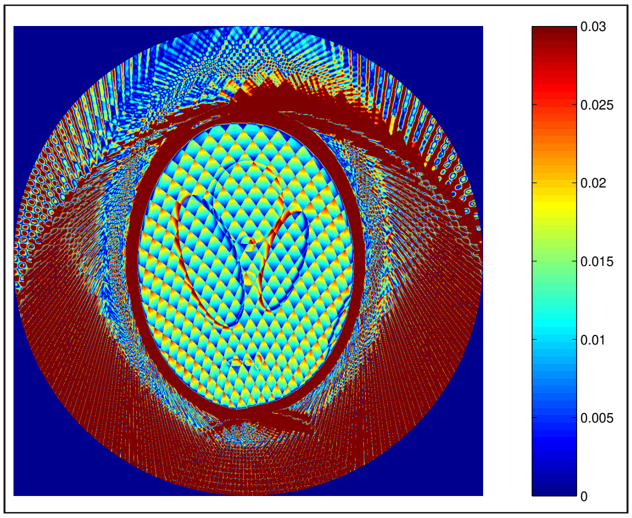
Abbildung 3.7: Shepp-Logan-Phantom, Schnitt bei z=0.381. Das Phantom wird hier nochmals mit einer anderen Farbskala präsentiert, da dadurch der Qualitätsunterschied in den Rekonstruktionen besser hervorsticht bzw. man die weiteren Rekonstruktionen besser mit dem Original vergleichen kann.

	Abb. 3.8	Abb. 3.9	Abb. 3.10	Abb. 3.11
Anzahl Quellpositionen	1024	4096	4096	8192
N_γ	4096	1024	4096	4096
Norm der Differenzenmatrizen	$192,47$	$139,92$	$137,68$	$137,39$

Tabelle 3.6: Daten der verschiedenen Rekonstruktionen. N_γ bezeichnet die Anzahl der Stützstellen zur Näherung des Filterintegrals bei der Berechnung der Metadaten. Die verwendete Matrizennorm ist die Zeilensummennorm ($\|A\|_\infty := \max\left\{\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \,:\, 1 \leq i \leq n\right\}$), die Auflösung (Größe der Bildmatrix) beträgt immer 1024×1024.

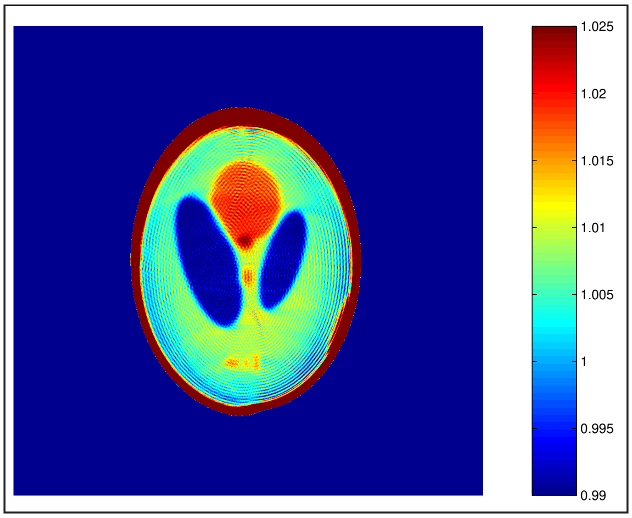


(a) Rekonstruktion

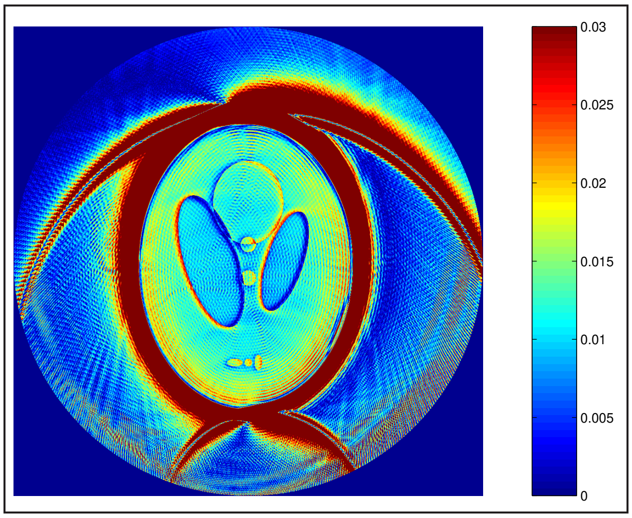


(b) Differenzbild

Abbildung 3.8: Rekonstruktion mit wenigen Datensätzen. Man erkennt eine deutliche Musterung in der Rekonstruktion. Nichtsdestotrotz sind die Hauptbestandteile des Phantoms bereits klar erkennbar.

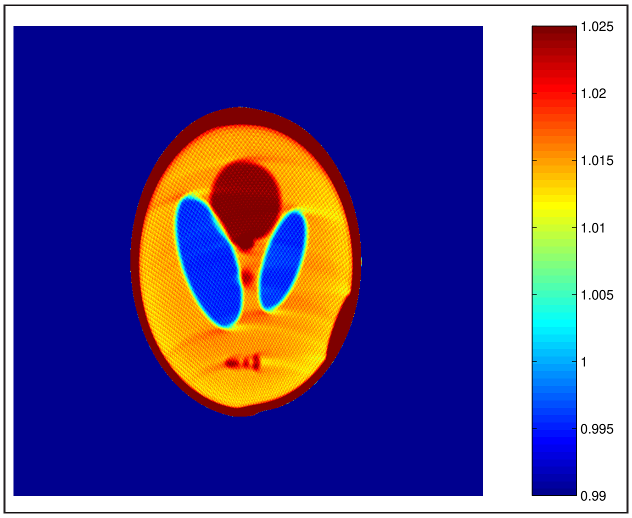


(a) Rekonstruktion

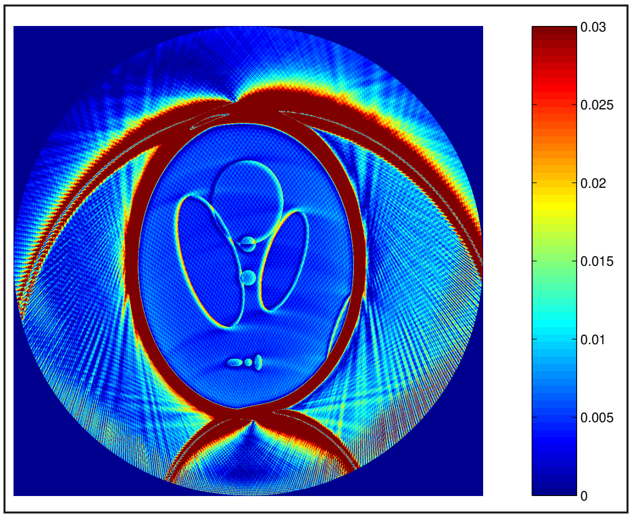


(b) Differenzbild

Abbildung 3.9: Rekonstruktion mit einer mittleren Anzahl Datensätze und einer groben Diskretisierung des Filterintegrals. Die Rekonstruktion ist deutlich besser, man erkennt die drei Tumore auf sechs Uhr. Die Artefakte erzeugen allerdings ein störendes Muster, ähnlich einem Fingerabdruck. Dieses Muster wiederholt sich im Differenzbild, die Fehler sind noch verhältnismäßig hoch.

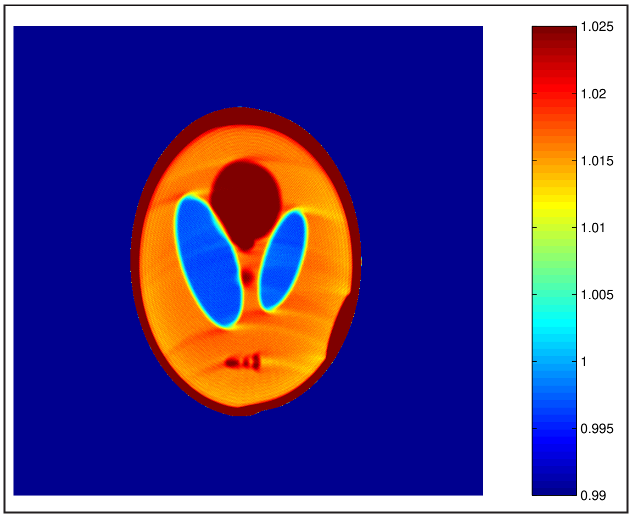


(a) Rekonstruktion

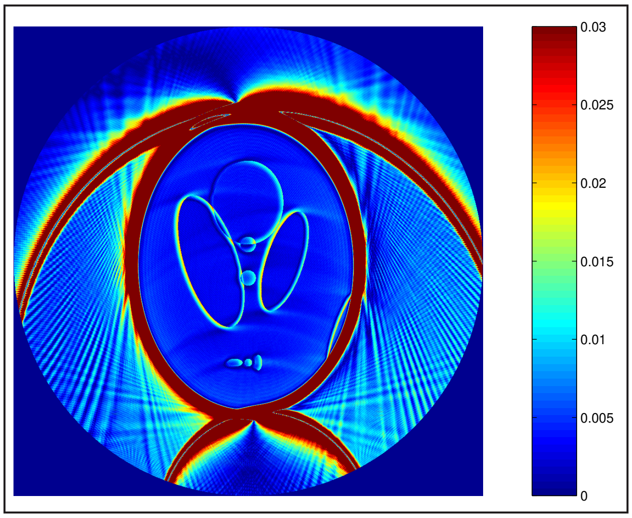


(b) Differenzbild

Abbildung 3.10: Rekonstruktion mit einer mittleren Anzahl Datensätze und einer feinen Diskretisierung des Filterintegrals. Das Fingerabdruckmuster ist fast vollständig verschwunden und der absolute Wert der einzelnen Regionen nähert sich dem Original schon deutlich besser an.



(a) Rekonstruktion



(b) Differenzbild

Abbildung 3.11: Rekonstruktion mit einer hohen Anzahl Datensätze und einer feinen Diskretisierung des Filterintegrals. Die Verbesserung im Verhältnis zur Rekonstruktion mit einer mittleren Anzahl an Datensätzen ist sichtbar, aber nicht sehr stark. Die drei Tumore auf sechs Uhr erscheinen getrennt und ihre Orientierung ist erkennbar. Größere Fehler innerhalb des Kopfes treten nur noch an den Unstetigkeitsstellen auf.

4 Fazit und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit die Inversionsformel von Katsevich kennengelernt und zwei verschiedene Varianten der Implementierung getestet. Aufgrund der Laufzeitunterschiede ist die zweite Variante der ersten klar überlegen.

Allerdings ist auch die zweite Variante unter praktischen Gesichtspunkten deutlich zu langsam. Testläufe auf einem zweiten Cluster legen zwar die Vermutung nahe, dass ein Grund für die Langsamkeit in der Anbindung der einzelnen Knoten über Netzwerkverbindungen zu suchen ist. Dies ist aber nur ein Grund unter vielen. Die hohe Anzahl an Quellpositionen, die für eine gute Rekonstruktion notwendig ist, führen zwangsläufig auch zu sehr großen Datenmengen, die verarbeitet werden müssen (vgl. Tabelle 3.4). In früheren Arbeiten von Katsevich (siehe [1]) wird ebenfalls mit vielen Quellpositionen rekonstruiert. Dies legt die Vermutung nahe, dass die Rekonstruktionsformel in ihrer jetzigen Form eine große Menge an Meßdaten benötigt.

Eine weitere Möglichkeit der Beschleunigung wäre eine Implementierung in einer compilierbaren Sprache. Inwieweit dies die Rechenzeit beeinflussen würde, ist aber schwer abzuschätzen, da der Hauptanteil der numerischen Berechnungen durch Aufruf optimierter Bibliotheksfunktionen geschieht. Eine Implementierung in compiliertem Code dürfte hier nicht sehr viel ausmachen.

Qualitativ liefert die Inversionsformel bei exakten Daten gute Rekonstruktionen. Die Artefakte außerhalb des Schädels beim Shepp-Logan-Phantom bedürfen noch einer weiteren Untersuchung, die innerhalb dieser Arbeit nicht geleistet werden kann.

Einige Möglichkeiten, die Implementierung der Formel zu verbessern, wurden in der Arbeit aufgezeigt. An erster Stelle steht hier die Minimierung des Integrationsbereichs des Filterintegrals; nur Strahlen, die tatsächlich den Detektor treffen, sollten berücksichtigt werden. Auch die hier benutzte Form des Detektors (Rechteck) könnte man auf die optimale Form entlang $\Gamma_{top,bot}$ reduzieren – dies würde sich unmittelbar auf die Berechnungsdauer der Metadaten auswirken.

Von weiterem Interesse ist das Verhalten des Verfahrens bei der Verwendung gestörter Daten. In [9] wurde gezeigt, dass die von Louis in [11] vorgestellte *Approximative Inverse* sich sowohl im Fall von ungestörten oder nur leicht verrauschten Daten als auch im Fall von stark gestörten Daten als Regularisierungsverfahren eignet und hervorragende Ergebnisse liefert. Eine Frage der weiteren Forschung wird sein, inwieweit sich die Inversionsformel von Katsevich mit diesem Verfahren verbinden lässt – theoretisch müsste man dafür nur einen entsprechenden Rekonstruktionskern finden. Praktisch ist dies bis jetzt noch nicht gelungen und bleibt somit Gegenstand der weiteren Forschung.

Anhang A

Phantomdaten

A.1 Shepp-Logan-Phantom

Das Phantom besteht aus 19 Ellipsoiden und wurde virtuell nach folgenden Daten erzeugt:

1. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 2,0
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0;\, 0;\, 0)^T$
Halbachsen: $0{,}7233 \cdot (1;\, 0;\, 0)^T$
$0{,}9644 \cdot (0;\, 1;\, 0)^T$
$1{,}27 \cdot (0;\, 0;\, 1)^T$

2. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: -0,98
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0;\, -0,0184;\, -0,0185)^T$
Halbachsen: $0{,}7008 \cdot (1;\, 0;\, 0)^T$
$0{,}9246 \cdot (0;\, 1;\, 0)^T$
$1{,}2241 \cdot (0;\, 0;\, 1)^T$

3. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: -1,0
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0,2583;\, 0,7534;\, 0)^T$
Halbachsen: $0{,}127 \cdot (1;\, 0;\, 0)^T$
$0{,}127 \cdot (0;\, 1;\, 0)^T$
$0{,}127 \cdot (0;\, 0;\, 1)^T$

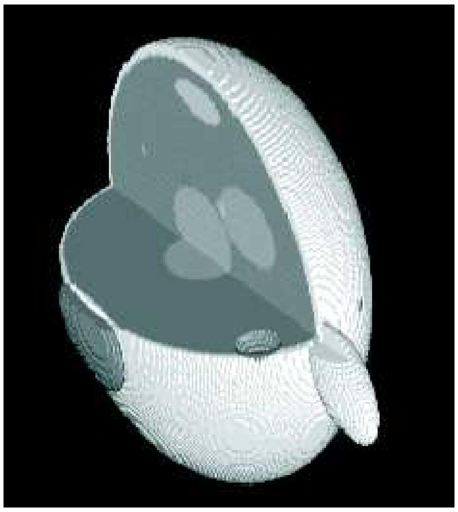


Abbildung A.1: Schnitt durch das Shepp-Logan-Phantom (Quelle: [9])

4. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: -1,0
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(-0,2583;\ 0,7534;\ 0)^T$
Halbachsen: $0{,}127 \cdot (1;\ 0;\ 0)^T$
$0{,}127 \cdot (0;\ 1;\ 0)^T$
$0{,}127 \cdot (0;\ 0;\ 1)^T$

5. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 1,5
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0;\ 1,1398;\ -0,1957)^T$
Halbachsen: $0{,}127 \cdot (1;\ 0;\ 0)^T$
$0{,}34 \cdot (0;\ 0,5446;\ -0,8387)^T$
$0{,}17 \cdot (0;\ 0,8387;\ 0,5446)^T$

6. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: -1,0
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0;\ 0;\ -0,862)^T$
Halbachsen: $0{,}4575 \cdot (1;\ 0;\ 0)^T$
$0{,}6099 \cdot (0;\ 1;\ 0)^T$
$0{,}318 \cdot (0;\ 0;\ 1)^T$

7. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 1,0
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0,7076;\ -0,1378;\ -0,1905)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}0635 \cdot (0,9903;\ -0,1085;\ -0,0865)^{\mathrm{T}}$
$0{,}3175 \cdot (0,1089;\ 0,9941;\ 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}3175 \cdot (0,086;\ -0,0094;\ 0,9963)^{\mathrm{T}}$

8. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 1,0
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(-0,7076;\ -0,1378;\ -0,1905)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}0635 \cdot (-0,9903;\ -0,1085;\ -0,0865)^{\mathrm{T}}$
$0{,}3175 \cdot (-0,1089;\ 0,9941;\ 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}3175 \cdot (-0,086;\ -0,0094;\ 0,9963)^{\mathrm{T}}$

9. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 0,01
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(-0,08;\ -0,605;\ 0,381)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}046 \cdot (1;\ 0;\ 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}023 \cdot (0;\ 1;\ 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}023 \cdot (0;\ 0;\ 1)^{\mathrm{T}}$

10. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 0,01
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0;\ -0,605;\ 0,381)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}023 \cdot (1;\ 0;\ 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}023 \cdot (0;\ 1;\ 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}046 \cdot (0;\ 0;\ 1)^{\mathrm{T}}$

11. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 0,01
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0,06;\ -0,605;\ 0,381)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}023 \cdot (1;\ 0;\ 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}046 \cdot (0;\ 1;\ 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}023 \cdot (0;\ 0;\ 1)^{\mathrm{T}}$

12. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 0,01
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0;\, 0,1;\, 0,381)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}046 \cdot (1;\, 0;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}046 \cdot (0;\, 1;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}046 \cdot (0;\, 0;\, 1)^{\mathrm{T}}$

13. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 0,01
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0;\, -0,1;\, 0,127)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}2581 \cdot (1;\, 0;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}2581 \cdot (0;\, 1;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}2581 \cdot (0;\, 0;\, 1)^{\mathrm{T}}$

14. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 0,01
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0;\, 0,35;\, 0,381)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}21 \cdot (1;\, 0;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}25 \cdot (0;\, 1;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}23 \cdot (0;\, 0;\, 1)^{\mathrm{T}}$

15. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: -0,02
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0,22;\, 0;\, 0,381)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}11 \cdot (0,9511;\, -0,309;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}31 \cdot (0,309;\, 0,9511;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}254 \cdot (0;\, 0;\, 1)^{\mathrm{T}}$

16. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: -0,02
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(-0,22;\, 0;\, 0,381)^{\mathrm{T}}$
Halbachsen: $0{,}16 \cdot (-0,9511;\, -0,309;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}41 \cdot (-0,309;\, 0,9511;\, 0)^{\mathrm{T}}$
$0{,}381 \cdot (0;\, 0;\, 1)^{\mathrm{T}}$

17. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 0,03
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0,56; -0,4; 0,381)^T$
Halbachsen: $0{,}3 \cdot (0,9192; -0,3381; 0,202)^T$
$0{,}2 \cdot (0,3452; 0,9385; 0)^T$
$0{,}2 \cdot (0,1896; -0,0697; -0,9794)^T$

18. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 0,02
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0; 0; 1)^T$
Halbachsen: $0{,}3 \cdot (1; 0; 0)^T$
$0{,}2 \cdot (0; 1; 0)^T$
$0{,}1 \cdot (0; 0; 1)^T$

19. Ellipsoid:

Gewicht des Ellipsoids: 0,03
Mittelpunkt des Ellipsoids: $(0,27; 0,5; 0,8)^T$
Halbachsen: $0{,}08 \cdot (1; 0; 0)^T$
$0{,}26 \cdot (0; 0,5446; -0,8387)^T$
$0{,}08 \cdot (0; 0,8387; 0,5446)^T$

A.2 Hohlkugel

Die Hohlkugel besteht aus 2 Kugeln und wurde virtuell nach folgenden Daten erzeugt:

1. Kugel

   Gewicht: 1,0
   Mittelpunkt: $(0; 0; 0)^T$
   Radius: 1,0

2. Kugel

   Gewicht: -1,0
   Mittelpunkt: $(0; 0; 0)^T$
   Radius: 0,3

Literaturverzeichnis

[1] Katsevich A.: *Improved exact FBP algorithm for spiral CT*, erscheint bei Advances in Applied Mathematics

[2] Katsevich A.: *Theoretically exact FBP-type inversion algorithm for spiral CT*, SIAM Journal on Applied Mathematics 62 (2002), 2012-2026

[3] Katsevich A.: *Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone-beam CT*, Physics in Medicine and Biology 47 (2002), 2583-2597

[4] Katsevich A.: *A general scheme for constructing inversion algorithms for cone-beam CT*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 21 (2003), 1305-1321

[5] Defrise M., Noo F., Kudo H.: *A solution to the long-object problem in helical cone-beam tomography*, Physics in Medicine and Biology 45 (2000), 623-643

[6] Natterer F., Wübbeling F.: *Mathematical Methods in Image Reconstruction*, SIAM 2001

[7] Heuser H.: *Lehrbuch der Analysis – Teil 2*, 8. Auflage, Teubner 1993

[8] Abramowitz M., Stegun I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York

[9] Mohr J.: *Rekonstruktionsfilter in der 3D-Computertomographie*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2002

[10] GNU Octave: http://www.octave.org

[11] Louis A K.: *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Problems 12 (1996), 175-190

Hiermit erkläre ich an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Saarbrücken, im April 2004

Thomas Weber