

---

# Compressed Sensing in der Computertomographie

---

## Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Master of Science  
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I  
(Fachrichtung Mathematik)  
der Universität des Saarlandes



vorgelegt von

**Nadine Christine Fell**

Saarbrücken, Februar 2015

Betreuer: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. A. K. Louis



## Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift der Verfasserin



## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung meiner Masterarbeit unterstützt und meinen Weg durch das Studium begleitet haben.

An vorderster Stelle zu nennen ist Herr Prof. Louis, dessen Vorlesungen mich für den Bereich der Angewandten Mathematik begeistert haben und der mich bereits bei meiner Bachelorarbeit betreut hat. Besonders bedanken möchte ich mich bei Ihm für die spannende Themenstellung und die hervorragende Betreuung, sowohl bei meiner Bachelor- als auch Masterarbeit.

Großer Dank gebührt meinen Freundinnen und Kommilitoninnen Anna-Lena und Eva, die mich durch das Studium begleitet haben. Außerdem möchte ich Anna-Lena für das Korrekturlesen und die vielen gemeinsamen Überlegungen danken, die sehr hilfreich waren.

Abschließend gebührt natürlich auch meinen Eltern, meiner Schwester und meinem Freund ein riesengroßes Dankeschön für die seelische und moralische Unterstützung während des gesamten Studiums.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Mathematische Grundlagen</b>	<b>9</b>
1.1 Allgemeine mathematische Grundlagen . . . . .	9
1.2 Grundlagen der Optimierung . . . . .	11
1.2.1 Lineare Optimierung . . . . .	12
1.2.2 Unrestringierte nichtlineare Optimierung . . . . .	12
1.3 Sampling Theorie . . . . .	14
1.4 Wavelet-Transformation . . . . .	16
1.4.1 Wavelets und kontinuierliche Wavelet-Transformation . . . . .	16
1.4.2 Diskrete Wavelet-Transformation . . . . .	17
<b>2 Compressed Sensing</b>	<b>23</b>
2.1 Überblick . . . . .	23
2.2 Sparsity und Incoherence . . . . .	24
2.2.1 Sparsity . . . . .	24
2.2.2 Incoherence . . . . .	26
2.2.3 Restricted Isometry Property . . . . .	28
2.3 Sparse Rekonstruktion . . . . .	29
2.3.1 Bedingungen für eine erfolgreiche Rekonstruktion . . . . .	31
2.3.2 Stabile sparse Rekonstruktion . . . . .	32
<b>3 Computertomographie</b>	<b>34</b>
3.1 Mathematische Modellierung . . . . .	34
3.1.1 Physikalischer Hintergrund . . . . .	34
3.1.2 Beschreibung des Messvorgangs . . . . .	35
3.1.3 Mathematisches Modell . . . . .	35
3.2 Sätze und Eigenschaften der Radon -Transformation . . . . .	38
3.3 Rekonstruktionsalgorithmen . . . . .	40
3.3.1 Gefilterte Rückprojektion . . . . .	40
3.3.2 Algebraische Rekonstruktionstechnik . . . . .	41
3.3.3 Simultane Algebraische Rekonstruktionstechnik . . . . .	42
<b>4 Compressed Sensing in der Computertomographie</b>	<b>43</b>
4.1 Diskretisierung des Problems . . . . .	43
4.1.1 Diskretisierung der Daten . . . . .	44
4.1.2 Diskretisierung des Bildes . . . . .	44

4.1.3	Das diskrete Rekonstruktionsproblem . . . . .	45
4.2	Sparsity der CT-Bilder . . . . .	46
4.2.1	TV-Modell . . . . .	46
4.2.2	TV-Wavelet-Modell . . . . .	49
4.3	Lösungsalgorithmus . . . . .	50
4.3.1	Formulierung in Matrixschreibweise . . . . .	50
4.3.2	Berechnung des Gradienten . . . . .	51
4.3.3	Lösungsalgorithmus . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse</b>	<b>54</b>
5.1	Bewertungskriterien . . . . .	54
5.2	Wahl der Versuchsparameter . . . . .	56
5.3	Rekonstruktion aus exakten Daten . . . . .	57
5.4	Rekonstruktion aus fehlerbehafteten Daten . . . . .	63
5.5	Einbindung der Zufälligkeit . . . . .	68
5.6	Fazit und Ausblick . . . . .	69
	<b>Literatur</b>	<b>71</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>74</b>
	<b>Matlab Code</b>	<b>77</b>

# Bezeichnungen

$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta Symbol
$A^\top$	transponierte Matrix von $A$
$A^*$	adjungierte Matrix von $A$
$I$	Identität
$C(\mathbb{R}^N)$	Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^N$
$C^1(\mathbb{R}^N)$	Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^N$
$\mathcal{F}f, \hat{f}$	Fouriertransformierte der Funktion $f$
$L_p(\mathbb{R}^N)$	Lebesgue-Raum
$\mathcal{W}_\Psi f$	Wavelet-Transformierte der Funktion $f$ zum Wavelet $\Psi$
$\text{supp}(f)$	Träger der Funktion $f$
$S^1$	zweidimensionale Einheitssphäre
$\theta$	Einheitsvektor
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$	Schwartz-Raum
$L(\theta, s)$	orientierte Linie
$H(\theta, s)$	Hyperebene
$\mathcal{R}f$	Radon-Transformation
$\mathcal{R}_\theta f$	Radon-Transformation für festes $\theta$
$\mathcal{R}^*$	Rückprojektion der Radon-Transformation
$\Omega$	Einheitskreis
$Z$	zweidimensionaler Zylinder
$\mathcal{I}^\alpha f$	Rieszpotential der Stufe $\alpha$
$\text{sgn}(x)$	Signumfunktion



# Einleitung

In den letzten Jahren hat die Forschungsrichtung Compressed Sensing die Theorie der Datenakquisition und Rekonstruktion in der Signal- und Bildverarbeitung stark beeinflusst. Compressed Sensing ist eine Methode zur Erfassung und Wiederherstellung von dünn besetzten (sparsen) oder komprimierbaren Signalen. Das zugrunde liegende Prinzip beruht auf dem Wissen der Sparsity bzw. Komprimierbarkeit der Signalen, welches in den Rekonstruktionsprozess integriert wird. Dadurch kann die Abtastrate bei der Datenerfassung im Vergleich zu den klassischen Verfahren deutlich gesenkt werden.

Der Ursprung einiger Ansätze, wie beispielsweise die  $l_1$ -Minimierung, liegen bereits rund 40 Jahre zurück. Das eigentliche Forschungsgebiet Compressed Sensing entstand 2004, als Candès, Romberg, Tao und unabhängig davon Donoho mit ihren Arbeiten [3] und [12] den Grundstein für die mathematische Theorie des Compressed Sensing legten. Seitdem hat sich der Anwendungsbereich enorm erweitert und es wird ständig nach neuen Übertragungsmöglichkeiten gesucht. Unter anderem wird Compressed Sensing bereits erfolgreich in der Magnetresonanztomographie eingesetzt, um die Untersuchungsdauer zu verkürzen.

Die vorliegende Arbeit behandelt das Anwendungsgebiet Computertomographie. Die Computertomographie (CT) ist ein bildgebendes Verfahren, bei dem Röntgenaufnahmen von einem Untersuchungsobjekt aus verschiedenen Richtungen gemacht werden und das Objekt anschließend rechnergestützt rekonstruiert wird. Da Röntgenstrahlen langfristig gesundheitsschädlich sein können, ist es sinnvoll zu erforschen, welche Möglichkeiten es gibt, die Strahlendosis bei der medizinischen Untersuchung zu reduzieren, ohne dass die Bildqualität darunter leidet. Ein vielversprechender Ansatz ist die Verringerung der Aufnahmewinkel. In diesem Fall werden jedoch nicht genügend Projektionsdaten erfasst, um mit herkömmlichen Methoden, wie der gefilterten Rückprojektion ein CT-Bild mit vernünftiger Qualität rekonstruieren zu können. An dieser Stelle kommt die Idee des Compressed Sensing ins Spiel.

Die ersten drei Kapitel dieser Arbeit bilden die Grundlage für die Modellentwicklung in Kapitel 4. Zu Beginn werden allgemeine mathematische Grundlagen behandelt. Im zweiten Kapitel wird dann auf das Prinzip des Compressed Sensing eingegangen. Dabei werden grundlegende Begriffe, wie etwa Sparsity und Incoherence, definiert und das zu lösende Problem formuliert. Außerdem werden die Bedingungen für eine erfolgreiche Rekonstruktion vorgestellt und die wichtigsten Ergebnisse aufgezeigt. Kapitel 3 liefert einen Überblick über die mathematischen Aspekte der Computertomographie, wobei die Radon-Transformation eine zentrale Rolle spielt. Außerdem werden die üblicherweise angewendeten CT-Bildrekonstruktionsalgorithmen, die später in den Experimenten als Vergleich dienen, vorgestellt.

In Kapitel 4 wird die Anwendung von Compressed Sensing in der sparse-view Computertomographie hergeleitet. Unter der CT-Bildrekonstruktion, basierend auf Compressed Sensing, wird die Rekonstruktion sparser Bilder durch Lösen eines Minimierungsproblems verstanden. Für das sparse-view Szenario wurden bereits verschiedene Lösungsalgorithmen entwickelt. Beispielsweise sind Methoden, die auf der TV-Minimierung basieren, wie in [28], sehr vielversprechend, da die Gradientenbilder tomographischer Bilder häufig komprimierbar sind. Bei diesen Verfahren wird die Totalvariation des Bildes bezüglich der Bedingung minimiert, dass die Differenz der geschätzten Projektionsdaten und der gemessenen Daten eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreitet. Ein positiver Effekt dieser Vorgehensweise ist, dass hohe räumliche Frequenzanteile, wie beispielsweise Streifenartefakte und Rauschen, im rekonstruierten Bild unterdrückt werden. Ein Nachteil der TV-basierten Compressed Sensing Methoden ist allerdings, dass der Gradient unabhängig von den zugrunde liegenden Bildstrukturen minimiert wird. Dadurch können bei der Rekonstruktion kontrastarme Bereiche verloren gehen. Um dieses Problem zu beheben wird in Kapitel 4 in Anlehnung an die Arbeit [31] ein verbessertes Verfahren vorgeschlagen, bei dem eine Kombination aus TV- und Wavelet-Minimierung zum Einsatz kommt.

Im letzten Kapitel wird der zuvor entwickelte Algorithmus mit Hilfe von Matlab getestet und bewertet. Dazu werden verschiedene Szenarien betrachtet und die neue Methode wird mit bekannten CT-Bildrekonstruktionsverfahren, wie der gefilterten Rückprojektion oder der algebraischen Rekonstruktionstechnik, verglichen. Außerdem werden die theoretischen Erkenntnisse in Hinblick auf ihre praktische Anwendung kritisch hinterfragt.





# Kapitel 1

## Mathematische Grundlagen

Zu Beginn werden einige grundlegende Begriffe eingeführt, die in den folgenden Kapiteln verwendet werden.

### 1.1 Allgemeine mathematische Grundlagen

**Definition 1.1.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine *Norm* auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \|x\|$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0, \quad \forall x \in V \quad (\text{Definitheit})$$

$$(ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Homogenität})$$

$$(iii) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

**Bemerkung.** Eine *Seminorm* ist eine Abbildung, die die Homogenitätseigenschaft und die Dreiecksungleichung erfüllt.

**Bemerkung.** Die Abbildung

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$$

ist für einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^N$  und  $0 < p < \infty$  definiert durch

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- 1) Für  $1 < p < \infty$  ist die obige Abbildung eine Norm, die  $l_p$ -Norm.
- 2) Für  $0 < p < 1$  ist die obige Abbildung nur eine sogenannte *Quasinorm*, da die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist.

**Definition 1.1.2.** Ein *Skalarprodukt* auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften:

---

(i)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0, \quad \forall x \in V$

(ii)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in V$

(iii)  $\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \mu \langle x_2, y \rangle$   
 $\langle x, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \lambda \langle x, y_1 \rangle + \mu \langle x, y_2 \rangle, \quad \forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

**Satz 1.1.3. (Cauchy-Schwarz)** Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ , so gilt:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Es gilt Gleichheit genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

**Bemerkung.** Durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

wird eine Norm auf  $V$  definiert.

**Definition 1.1.4.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

(i) Die Vektoren  $v, w \in V$  sind *orthogonal*, falls  $\langle v, w \rangle = 0$ .

(ii) Ein *Orthonormalsystem* ist eine Familie  $\{u_1, \dots, u_N\}$ ,  $u_i \in V$ , wobei die Basiselemente normiert und paarweise orthogonal sind, das heißt

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \\ 0, & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

**Bemerkung.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit Orthonormalsystem  $\{u_1, \dots, u_N\}$ . Dann ist für  $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^N v_i u_i, \quad \text{mit } v_i = \langle v, u_i \rangle,$$

denn

$$\langle v, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N v_j u_j, u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^N \langle u_j, u_i \rangle v_j = \sum_{j=1}^N \delta_{ij} v_j = v_i.$$

**Definition 1.1.5.** Eine Teilmenge  $M$  eines linearen Raumes  $X$  heißt *konvex*, falls für alle  $x, y \in M$  und für alle  $\lambda \in [0, 1]$  gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in M.$$

**Definition 1.1.6.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  eine konvexe Menge. Eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex*, falls

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall x, y \in M, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

**Definition 1.1.7.** Es seien  $X$  und  $Y$  zwei Vektorräume. Eine Abbildung  $A: X \rightarrow Y$  heißt *linearer Operator*, falls gilt:

- (i)  $A(\lambda f) = \lambda A(f), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- (ii)  $A(f + g) = A(f) + A(g), \quad \forall f, g \in X.$

**Definition 1.1.8.** Es sei  $A: X \rightarrow Y$  ein linearer, stetiger Operator und  $X, Y$  Hilberträume. Gilt

$$\langle Af, g \rangle_Y = \langle f, A^*g \rangle_X, \quad \forall f \in X, \forall g \in Y$$

dann ist  $A^*$  der zu  $A$  *adjungierte Operator*. Für  $X = \mathbb{R}^N, Y = \mathbb{R}^m$  ist  $A^* = A^\top$  und  $(Af)^\top g = f^\top A^\top g$ .

**Definition 1.1.9.** Die Funktion  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  sei in einer Umgebung der Stelle  $x = (x_1, \dots, x_N)$  definiert. Existiert der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h},$$

so wird dieser als *partielle Ableitung der Funktion  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $x$*  bezeichnet.

**Definition 1.1.10.** Der *Gradient* einer nach allen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) partiell differenzierbaren Funktion  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x \in \mathbb{R}^N$  ist definiert als Spaltenvektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla f(x_1, \dots, x_N) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_N), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_N) \right)^\top.$$

**Bemerkung.** Der Gradient einer Funktion  $f$  zeigt in die Richtung des steilsten Abstiegs von  $f$  und  $\|\nabla f(x)\|$  misst die Größe des Abstiegs.

**Bemerkung.** Eine Funktion  $J \in C(\mathbb{R}^N)$  ist *richtungsdifferenzierbar* im Punkt  $x \in \mathbb{R}^N$ , wenn für alle  $\xi \in \mathbb{R}^N$  der Grenzwert

$$J'_{x,\xi}(0) = \frac{d}{dt} J(x + t\xi)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(x + t\xi) - J(x)}{t}$$

existiert. Ist  $J$  partiell differenzierbar in alle Richtungen  $\xi$ , dann gilt

$$\frac{d}{dt} J(x + t\xi)|_{t=0} = (\nabla J(x))^\top \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

## 1.2 Grundlagen der Optimierung

Der folgende Abschnitt ist angelehnt an das Skript zur Vorlesung *Optimierung* von Prof. Dr. A. K. Louis, vgl. [22]. In den folgenden Kapiteln werden Optimierungsprobleme eine wichtige Rolle spielen. Deshalb zunächst eine allgemeine Definition:

**Definition 1.2.1.** Gegeben seien eine Menge  $M \subseteq X$  und eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Die mathematische Formulierung eines allgemeinen Optimierungsproblems lautet:

*Minimiere  $f$  in  $M$ , das heißt gesucht ist ein  $x^* \in M$ , so dass für alle  $x \in M$  gilt:*

$$f(x^*) \leq f(x).$$

Die Funktion  $f$  wird als *Zielfunktion* bezeichnet und  $M$  ist die *Menge der zulässigen Punkte*. Gilt  $M \subset X$ , dann wird von einem *restringierten Problem* gesprochen. Für  $M = X$  liegt ein *unrestringiertes Problem* vor.

---

### 1.2.1 Lineare Optimierung

Es wird von einem linearen Optimierungsproblem gesprochen, wenn sowohl die Zielfunktion als auch alle Nebenbedingungen lineare Funktionen sind. Eine *allgemeine lineare Optimierungsaufgabe* ist also von der Form

$$\min c^\top x \quad \text{in } M,$$

wobei  $M \subset \mathbb{R}^N$  ein Polyeder ist. Üblicherweise wird ein lineares Optimierungsproblem in eine der beiden folgenden Normalformen überführt.

**Definition 1.2.2.** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  eine Matrix mit Rang  $m$ , wobei  $m \leq N$  ist und  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^N$ . Dann ist

(i) die *kanonische Form* einer linearen Optimierungsaufgabe definiert durch

$$\text{Minimiere } f(x) = c^\top x \quad \text{in } M = \{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

(ii) die *Standardform* einer linearen Optimierungsaufgabe definiert durch

$$\text{Minimiere } f(x) = c^\top x \quad \text{in } M = \{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax \geq b, x \geq 0\}.$$

**Bemerkung.** Alle linearen Optimierungsaufgaben lassen sich auf die kanonische Form (und auch auf die Standardform) zurückführen.

Für lineare Optimierungsprobleme gibt es verschiedene Verfahren, die auch große Probleme effizient lösen. Die zwei bekanntesten Methoden zum Lösen linearer Probleme sind zum einen das Simplexverfahren und seine Erweiterungen und zum anderen die Innere-Punkte-Methode.

### 1.2.2 Unrestringierte nichtlineare Optimierung

Ein *unrestringiertes nichtlineares Optimierungsproblem* wird wie folgt formuliert

$$\min f(x) \quad \text{bezüglich } x \in \mathbb{R}^N,$$

wobei  $f$  eine nichtlineare Funktion  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  ist.

#### Gradientenverfahren

Gradientenverfahren sind eine Möglichkeit unrestringierte nichtlineare Optimierungsprobleme zu lösen. Eine spezielle Form davon wird hier erläutert und in Kapitel 4 eingesetzt.

Die Idee des Verfahrens ist, dass iterativ eine Folge von Vektoren

$$x^{k+1} = x^k + \sigma_k d^k$$

konstruiert wird mit dem Ziel, dass

$$f(x^{k+1}) < f(x^k) \quad \text{und} \quad \nabla f(x^k) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Dabei wird zunächst eine Abstiegsrichtung  $d^k$  bestimmt und anschließend die Schrittweite  $\sigma_k$ , die angibt wie weit in diese Richtung gegangen wird.

**Satz 1.2.3.** Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  und  $d \in \mathbb{R}^N$  mit

$$\nabla f(x)^\top d < 0.$$

Dann heißt der Vektor  $d \in \mathbb{R}^N$  *Abstiegsrichtung* für  $f$  in  $x$  und es gibt ein  $\bar{\sigma} > 0$  mit

$$f(x + \sigma d) < f(x) \quad \text{für alle } \sigma \in (0, \bar{\sigma}).$$

**Beweis.** Definiere  $g \in C^1(\mathbb{R})$  durch  $g(\sigma) := f(x + \sigma d)$ . Die Taylorreihenentwicklung von  $g$  lautet

$$g(\sigma) = g(0) + \sigma g'(0) + r(\sigma),$$

wobei  $\frac{r(\sigma)}{\sigma} \rightarrow 0$  für  $\sigma \searrow 0$ . Umformen und die Division durch  $\sigma > 0$  ergibt

$$\begin{aligned} \frac{g(\sigma) - g(0)}{\sigma} &= g'(0) + \frac{r(\sigma)}{\sigma} \\ &= \nabla f(x)^\top d + \frac{r(\sigma)}{\sigma}. \end{aligned}$$

Wegen  $\frac{r(\sigma)}{\sigma} \rightarrow 0$  für  $\sigma \searrow 0$  und  $f(x)^\top d < 0$  existiert ein  $\bar{\sigma}$ , so dass

$$\frac{g(\sigma) - g(0)}{\sigma} < 0 \quad \text{für alle } \sigma \in (0, \bar{\sigma}).$$

Aus  $g(0) = f(x)$  folgt dann die Behauptung. □

**Definition 1.2.4.** Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  und  $d \in \mathbb{R}^N$  Abstiegsrichtung für  $f$  in  $x$ . Die *Schrittweite*  $\sigma$  erfüllt das *Prinzip des hinreichenden Abstiegs* in  $(x, d)$ , falls

$$f(x + \sigma d) \leq f(x) + c_1 \sigma \nabla f(x)^\top d$$

und

$$\sigma \geq -c_2 \frac{\nabla f(x)^\top d}{\|d\|_2^2}$$

gilt, mit  $c_1, c_2 > 0$  unabhängig von  $x$  und  $d$ .

Die erste Bedingung sorgt dafür, dass die Funktionswerte fallen. Die Zweite verhindert zu kleine Schrittweiten.

**Definition 1.2.5.** Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $x^k \in \mathbb{R}^N$  die aktuelle Iterierte und  $d^k \in \mathbb{R}^N$  die Abstiegsrichtung für  $f$  in  $x^k$ . Dann erfüllt die Schrittweite  $\sigma$  die *Armijo-Bedingung*, falls

$$f(x^k + \sigma d^k) \leq f(x^k) + c \sigma \nabla f(x^k)^\top d^k$$

unabhängig von der Konstante  $c \in (0, 1)$ .

Verfahren zur Bestimmung der Schrittweite werden als *line-search* Verfahren bezeichnet. Die Schrittweitenstrategie, die hier verwendet wird, ist die *backtracking line-search* Methode. Dabei wird zuerst von einer beliebigen Schrittweite  $\sigma > 0$  ausgegangen und die Armijo-Bedingung überprüft. Ist die Bedingung nicht erfüllt, wird die Schrittweite mit einem Parameter  $\eta \in (0, 1)$  solange verkleinert

$$\sigma = \eta \sigma,$$

bis ein hinreichender Abstieg erreicht wird.

Beim herkömmlichen Gradientenverfahren wird als Richtung in jeder Iteration  $d^k = -\nabla f(x^k)$  gewählt. Für hochdimensionale Probleme, wie das in Kapitel 4, sind *konjugierte Gradientenverfahren* besser geeignet. Bei diesen Verfahren werden durch einen Korrekturterm zusätzlich Informationen aus dem vorherigen Iterationsschritt mit einbezogen

$$\begin{aligned} d^0 &= -\nabla f(x^0) \\ d^{k+1} &= -\nabla f(x^k) + \beta_k d^k. \end{aligned}$$

Im Laufe der Jahre wurden in der Literatur verschiedene Vorschläge für die Wahl von  $\beta_k$  gemacht. Einen guten Überblick darüber verschafft [16]. In dieser Arbeit wird eine Mischform benutzt, die in [10] vorgeschlagen wird und sich aus  $\beta_k^{HS}$ , vorgeschlagen von Hestenes und Stiefel in [18], und  $\beta_k^{DY}$ , vorgeschlagen von Dai und Yuan in [9], zusammensetzt. Für  $\mu_k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$  ist in diesem Fall

$$\beta_{k+1} = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\nabla f(x^{k+1})^\top \mu_k}{(d^k)^\top \mu_k}, \frac{\|\nabla f(x^{k+1})\|_2^2}{(d^k)^\top \mu_k} \right\} \right\}.$$

Insgesamt liefert das:

**Algorithmus 1:** Konjugiertes Gradientenverfahren mit backtracking line-search

**%Initialisierung**

Wähle einen Startpunkt  $x^0 \in \mathbb{R}^N$ , eine Startschrittweite  $\sigma$ ,  $d^0 = -\nabla f(x^0)$  und setze  $k = 0$ .

**%Iterationen**

1. Berechnung von  $f(x^k)$  und  $\nabla f(x^k)$ . Ist  $\|\nabla f(x^k)\|_2$  klein genug, dann stopp.
2. Schrittweitenbestimmung mittels backtracking line-search.
3. Setze  $x^{k+1} = x^k + \sigma d^k$ .
4. Bestimmung der neuen Abstiegsrichtung.
5. Setze  $k = k + 1$  und wieder zu (1).

### 1.3 Sampling Theorie

Ein Signal ist im mathematischen Sinne eine Funktion einer Variablen. Analog entspricht ein Bild einer Funktion mit zwei Variablen. Dabei wird zwischen kontinuierlichen und diskreten Signalen beziehungsweise Bildern unterschieden. In praktischen Anwendungen können kontinuierliche Signale und Bilder oft nicht vollständig erfasst werden. In diesen Fällen wird die entsprechende diskrete Funktion durch Abtasten der kontinuierlichen Funktion gewonnen. Die anschließende Rekonstruktion der kontinuierlichen Funktion aus dem diskreten Messdatensatz spielt eine wichtige Rolle in vielen wissenschaftlichen und technischen Anwendungen.

**Definition 1.3.1.** Für eine Funktion  $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$  oder  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  ist die *Fourier-Transformierte*  $\mathcal{F}f$  definiert als

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \exp(-ix^\top \xi) dx.$$

**Satz 1.3.2.** Die Abbildung  $f: \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  ist bijektiv und es ist

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} g(\xi) \exp(ix^\top \xi) d\xi.$$

**Definition 1.3.3.** Seien  $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ ,  $g \in L_2(\mathbb{R}^N)$  oder  $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ ,  $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ . Die *Faltung* von  $f$  und  $g$  ist definiert als

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy.$$

**Satz 1.3.4. (Faltungssatz)** Die Faltung zweier Funktionen kann als Produkt ihrer Fourier-Transformierten ausgedrückt werden

$$(f \star g)^\wedge = (2\pi)^{N/2} \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

**Definition 1.3.5.** Eine Funktion  $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$  heißt *b-bandbeschränkt*, wenn gilt

$$\hat{f}(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \xi \notin [-b, b]^N.$$

Derzeit beruhen viele Abtasttechniken auf dem Shannon'schen Abtasttheorem.

**Satz 1.3.6. (Shannon'sches Abtasttheorem)** Die Funktion  $f$  sei *b-bandbeschränkt* und die Schrittweite  $h \leq \frac{\pi}{b}$ . Dann ist  $f$  eindeutig bestimmt durch die Werte  $f(hl)$ , mit  $l \in \mathbb{Z}^N$ . In  $L_2(\mathbb{R}^N)$  kann  $f$  dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^N} f(hl) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hl)\right).$$

Der Satz besagt, dass das Ursprungssignal exakt wiederhergestellt werden kann, wenn die Abtastrate, das heißt der Abstand zwischen zwei Messpunkten, mindestens doppelt so hoch ist wie die höchste auftretende Frequenz.

**Bemerkung.**

- 1) Die Forderung  $h \leq \frac{\pi}{b}$  wird als *Nyquist-Bedingung* bezeichnet.
- 2) Für  $h > \frac{\pi}{b}$  ist die Abtastfrequenz zu gering (Unterabtastung) und es kommt zur Überschneidung benachbarter Terme. In diesem Fall treten bei der Rekonstruktion Aliasing-Effekte auf.

---

## 1.4 Wavelet-Transformation

Im mathematischen Sinne wird unter einer Transformation ein Basiswechsel verstanden. Dabei wird eine Funktion von Interesse in einer anderen Basis dargestellt, mit der Absicht, dass sich gesuchte Informationen anhand der transformierten Funktion leichter ablesen lassen.

Bei der Wavelet-Transformation werden die Daten (Signal bzw. Bild) in Bezug auf Ort und Frequenz zerlegt. Dazu werden räumlich begrenzte Wavelets (kleine Wellen) verwendet. Wavelets sind ein vielfältiges Werkzeug in der Signal- und Bildverarbeitung. Die für die praktische Anwendung relevante diskrete Wavelet-Transformation wird beispielsweise bei der Bildkompression (JPEG 2000) und Bildanalyse (Rauschreduktion oder Mustererkennung) eingesetzt. Im folgenden Abschnitt werden die grundlegenden Aspekte der Wavelet-Transformation aufgezeigt. Die Einführung der Wavelets und die kontinuierliche Wavelet-Transformation orientiert sich an dem Buch *Wavelets* von Louis et al. [21]. Die diskrete Transformation ist angelehnt an die Vorlesung *Image Processing and Computer Vision* von Prof. Weickert [30].

### 1.4.1 Wavelets und kontinuierliche Wavelet-Transformation

Die Wavelet-Transformation schreibt keine spezielle Basis vor. Ausgehend von einer beinahe beliebig wählbaren Funktion  $\Psi$ , Mutter-Wavelet genannt, wird eine Menge von Basisfunktionen erzeugt. Diese sogenannten Tochter-Wavelets entstehen durch Verschieben und Skalieren der Mutter-Wavelet

$$\Psi_{(a,b)}(t) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b \in \mathbb{R}$$

und werden bei der Transformation eingesetzt.

**Definition 1.4.1.** [21, Def. 1.1.1] Eine Funktion  $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$ , welche die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < c_\Psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

erfüllt, heißt *Wavelet*. Für eine Funktion  $f \in L_2(\mathbb{R})$  ist die *Wavelet-Transformierte* zum Wavelet  $\Psi$  durch den Ausdruck

$$\mathcal{W}_\Psi f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c_\Psi}} |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b \in \mathbb{R},$$

definiert.

**Bemerkung.** [21, Kapitel 1.1]

- 1) Abhängig von der Lokalisierung im Ortsraum durch den Verschiebungsparameter  $b$ , besitzen Wavelets mittels  $a$  eine entsprechende Lokalisierung im Frequenzraum. Dadurch kann die Funktion innerhalb eines örtlich beschränkten Bereichs um  $b$  in ihre Frequenzanteile zerlegt werden. Anschaulich bewegt der Parameter  $b$  das Wavelet so, dass in  $\mathcal{W}_\Psi f(a,b)$  lokale Informationen von  $f$  um  $t = b$  enthalten sind. Dabei gibt der Skalierungsparameter  $a$  die Größe des Einflussbereiches vor.

- 2) Aus der Zulässigkeitsbedingung an  $\Psi$  kann eine notwendige Bedingung an ein Wavelet abgeleitet werden. Nach dem Satz von Riemann-Lebesgue ist die Fourier-Transformierte  $\hat{\Psi}$  eines Wavelets  $\Psi \in L_1(\mathbb{R})$  stetig in  $\mathbb{R}$ . Da  $1/|\omega|$  nicht in  $L_1(\mathbb{R})$  liegt folgt

$$0 = \hat{\Psi}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \Psi(t) dt, \quad (1.2)$$

das heißt der Mittelwert von  $\Psi$  verschwindet.

- 3) Ist  $0 \neq \Psi \in L_2(\mathbb{R})$  eine Funktion mit kompaktem Träger, dann ist  $\Psi$  genau dann ein Wavelet, wenn

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(t) dt = 0.$$

- 4) Wichtig ist, dass eine Transformation wieder rückgängig gemacht werden kann. Der adjungierte Operator  $\mathcal{W}_{\Psi}^*$  invertiert die Wavelet-Transformation und es gilt die Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{c_{\Psi}}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_{\Psi} f(a, b) \Psi(a, b)(t) \frac{dad b}{a^2}.$$

- 5) Die kontinuierliche Wavelet-Transformation ist redundant, da sich die Wavelets überschneiden.

### 1.4.2 Diskrete Wavelet-Transformation

In der praktischen Anwendung wird in der Regel nur mit einer diskreten Auflösungsmenge und einer diskreten Positionenmenge gearbeitet. In diesem Fall wird von der *diskreten Wavelet-Transformation* gesprochen.

**Bemerkung.** Wird eine Funktion durch eine endliche Summe approximiert, dann genügt die Wavelet-Familie allein nicht. Denn wird über eine endliche Summe mit Wavelets integriert, dann ist das Ergebnis wegen (1.2) und da Summe und Integration vertauscht werden können, immer Null. In diesem Fall ist die Einführung einer weiteren Funktion, der Skalierungsfunktion  $\Phi$ , mit nicht verschwindendem Mittelwert notwendig.

**Beispiel 1.4.2.** Das einfachste und älteste bekannte Wavelet ist das Haar Wavelet, benannt nach dem Mathematiker Alfréd Haar (1909). In diesem Fall ist das Mutter-Wavelet die Treppenfunktion

$$\Psi(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Haar Wavelet ist ein Beispiel für ein unstetiges Wavelet mit kompaktem Träger. Die zugehörige Skalierungsfunktion ist hier die Boxfunktion

$$\Phi(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die skalierten und verschobenen Versionen von  $\Psi$  mit  $a = 2^j$  und  $b = k2^j$  sind die Tochter-Wavelets

$$\Psi_{j,k}(t) := \frac{1}{2^{j/2}} \Psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right), \quad k, j \in \mathbb{Z}$$

mit  $\text{supp}(\Psi_{j,k}) = [k2^j, (k+1)2^j]$ . Außerdem ist

$$\Phi_{j,k}(t) := \frac{1}{2^{j/2}} \Phi\left(\frac{t}{2^j} - k\right), \quad k, j \in \mathbb{Z}.$$

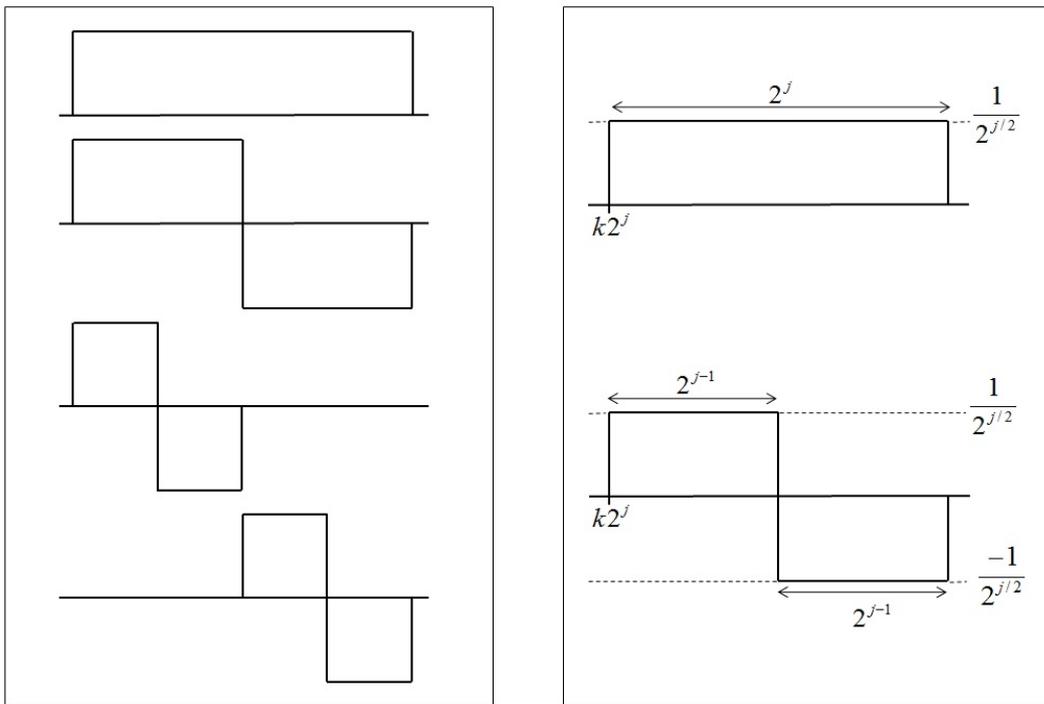


Abb. 1.1. *links*: Skalierungsfunktion und die zugehörige Haar Wavelet-Familie auf dem Intervall  $[0, 2^2]$ . Von oben nach unten:  $\Phi_{2,0}, \Psi_{2,0}, \Psi_{1,0}, \Psi_{1,1}$ .

*rechts*: Die Daten werden mit unterschiedlichen Auflösungen (Skalen) zerlegt. Durch die Skalierung können verschiedene Frequenzen erfasst werden. Durch die Translation wird die Zeit bzw. der Ort der auftretenden Frequenz bestimmt.

### Bemerkung.

- 1) Bei einer Orthogonal-Transformation sind die Informationen redundanzfrei.
- 2)  $\{\Psi_{j,k} | k, j \in \mathbb{Z}\}$  ist ein vollständiges Orthonormalsystem in  $L_2(\mathbb{R})$ .

Im Rahmen dieser Arbeit genügt es, die diskrete Haar Wavelet-Transformation endlicher Datenmengen zu betrachten.

### Eindimensionale Haar Wavelet-Transformation

Für ein diskretes Signal  $f \in \mathbb{R}^N$  der Länge  $N = 2^n$  werden die  $N$  Basisfunktionen

$$\begin{aligned} &\Phi_{n,0}, \\ &\Psi_{n,0}, \\ &\Psi_{n-1,0}, \Psi_{n-1,1}, \\ &\vdots \\ &\Psi_{1,0}, \Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{1,2^{n-1}-1} \end{aligned}$$

auf dem Intervall  $[0, N]$  an den Gitterpunkten  $(1/2, 3/2, \dots, N - 1/2)$  abgetastet. Die Funktionen  $\Phi_{n,0}(t)$  und  $\Psi_{j,k}(t)$  werden mit den Vektoren

$$\begin{aligned} \Phi_{n,0} &= \frac{1}{2^{N/2}}(1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^N \\ \Psi_{j,k} &= \frac{1}{2^{j/2}}(\underbrace{0, \dots, 0}_{k2^j}, \underbrace{1, \dots, 1}_{2^{j-1}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{2^{j-1}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-(k+1)2^j})^\top \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

identifiziert und folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} c_{j,k} &:= f^\top \Phi_{j,k} && \text{Skalierungskoeffizienten (Grobauflösung)} \\ d_{j,k} &:= f^\top \Psi_{j,k} && \text{Wavelet-Koeffizienten (Feinauflösung)} \end{aligned}$$

Die Wavelet-Transformierte von  $f$  ist dann durch den Vektor

$$f_{\mathcal{W},\Psi} = (c_{n,0}, d_{n,0}, d_{n-1,0}, d_{n-1,1}, \dots, d_{1,0}, \dots, d_{1,2^{n-1}-1})^\top$$

gegeben.

**Beispiel 1.4.3.** In der kanonischen Basis hat das Signal  $f = (3, 7, 1, 1)^\top$  die Repräsentation

$$f = 3(1, 0, 0, 0)^\top + 7(0, 1, 0, 0)^\top + 1(0, 0, 1, 0)^\top + 1(0, 0, 0, 1)^\top.$$

Die entsprechende Haar Wavelet-Basis lautet

$$\begin{aligned} \Phi_{2,0} &= \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^\top, & \Psi_{2,0} &= \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^\top, \\ \Psi_{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^\top, & \Psi_{1,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)^\top \end{aligned}$$

und die Wavelet-Transformierte ist gegeben durch

$$f_{\mathcal{W},Haar} = (6, 4, -2\sqrt{2}, 0)^\top.$$

Da die Elemente  $\{\Phi_{2,0}, \Psi_{2,0}, \Psi_{1,0}, \Psi_{1,1}\}$  im  $\mathbb{R}^4$  ein Orthonormalsystem bilden, ist die Entwicklung von  $f$  nach der Wavelet-Basis gegeben durch

$$f = 6\Phi_{2,0} + 4\Psi_{2,0} + -2\sqrt{2}\Psi_{1,0} + 0\Psi_{1,1}.$$

---

**Bemerkung.** In der Matrixschreibweise ist die Transformation eine Matrix-Vektor Multiplikation

$$(\Phi_{2,0} \ \Psi_{2,0} \ \Psi_{1,0} \ \Psi_{1,1})f = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Spalten der Matrix die Haar Wavelet-Basiselemente sind.

### Schnelle Wavelet-Transformation

Die *Schnelle Wavelet-Transformation* ist ein Algorithmus zur Berechnung der diskreten Wavelet-Transformation mit linearer Komplexität. Die Idee, die dahinter steckt ist, dass die Wavelet-Vektoren durch Skalierungsvektoren der nächstgrößeren Auflösung ausgedrückt werden können

$$\begin{aligned} \Phi_{j,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{j-1,2k} + \Phi_{j-1,2k+1}) \quad \text{für } k = 0, \dots, 2^{n-j} - 1 \\ \Psi_{j,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{j-1,2k} - \Phi_{j-1,2k+1}) \quad \text{für } k = 0, \dots, 2^{n-j} - 1. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für die feinste Auflösung

$$f_k = f^\top \Phi_{0,k} \quad \text{für } k = 0, \dots, 2^n - 1.$$

Daraus lässt sich die Berechnungsvorschrift ableiten:

<b>Algorithmus 2:</b> Schnelle Wavelet-Transformation
<pre> <b>Input:</b> Ausgangssignal <math>f</math>  %Initialisierung <b>for</b> <math>k \leftarrow 0</math> <b>to</b> <math>2^n - 1</math> <b>do</b>     <math>c_{0,k} = f_k</math> <b>end</b>  %Iterationen <b>for</b> <math>j \leftarrow 1</math> <b>to</b> <math>n</math> <b>do</b>     <b>for</b> <math>k \leftarrow 0</math> <b>to</b> <math>2^{n-j} - 1</math> <b>do</b>       <math>c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+1})</math>       <math>d_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{j-1,2k} - c_{j-1,2k+1})</math>       <b>end</b>     <b>end</b> <b>end</b>  <b>Result:</b> Wavelet-Transformierte <math>f_{\mathcal{W}}</math> </pre>

Die schnelle Rücktransformation basiert auf derselben Idee und lässt sich nach dem folgendem Schema berechnen:

**Algorithmus 3:** Inverse schnelle Wavelet-Transformation

```

Input: Wavelet-Transformierte  $f_{\mathcal{W}}$ 

%Iterationen
for  $j \leftarrow n - 1$  to 0 do
  | for  $k \leftarrow 0$  to  $2^{n-j-1} - 1$  do
  | |  $c_{j,2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{j+1,k} + d_{j+1,k})$ 
  | |  $c_{j,2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{j+1,k} - d_{j+1,k})$ 
  | end
end

%Das rekonstruierte Signal  $f$  ist gegeben durch
for  $k \leftarrow 0$  to  $2^n - 1$  do
  |  $f_k = c_{0,k}$ 
end

Result: Das ursprüngliche Signal  $f$ 

```

### Zweidimensionale Haar Wavelet-Transformation

Die mehrdimensionale Wavelet-Transformation setzt sich aus der eindimensionalen Transformation zusammen, in dem die Transformation für jede Richtung separat berechnet wird. Mathematisch wird sie als Tensor-Produkt-Wavelet-Transformation formuliert. Die Vorgehensweise bei der zweidimensionalen Wavelet-Transformation ist in Abbildung 1.2 schematisch dargestellt.

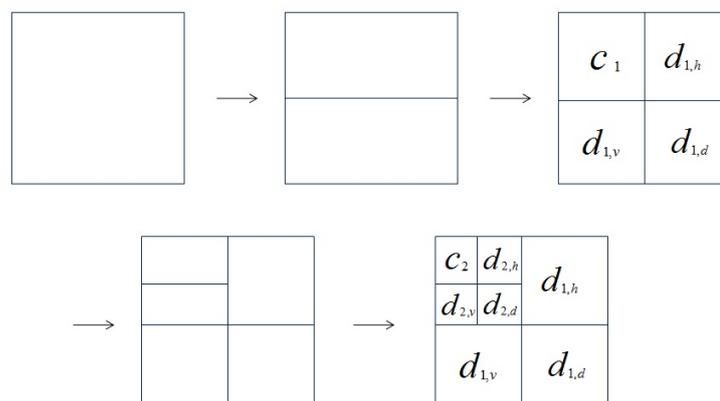


Abb. 1.2. Ablauf der 2D Wavelet-Transformation

Ausgehend von einer  $2^n \times 2^n$  Matrix, die beispielsweise aus den Pixelwerten eines digitalen Grauwertbildes besteht, wird im ersten Schritt die 1D Wavelet-Transformation

---

auf jede Zeile der Matrix angewendet. Das Ergebnis ist ein Teil mit niedrigerer Auflösung und einer mit hoher Auflösung. Anschließend werden die Spalten der resultierenden Matrix transformiert. Dies ergibt vier Quadrante  $c_1$ ,  $d_{1,h}$ ,  $d_{1,v}$  und  $d_{1,d}$  mit verschiedenen Auflösungen. Die weitere Zerlegung wird nur in dem Quadrant  $c_1$  durchgeführt, der die Skalierungskoeffizienten beider Richtungen enthält. Dieser Prozess wird fortgeführt bis nur noch ein einzelner Eintrag übrig ist.



Abb. 1.3. *links*: Originalbild, *rechts*: 2D Wavelet-Zerlegung

Die Rücktransformation basiert auf dem gleichen Prinzip.

## Kapitel 2

# Compressed Sensing

### 2.1 Überblick

Oftmals können Signale, Bilder, Videos und andere Daten nicht vollständig erfasst werden. In diesen Fällen müssen die Ausgangsdaten mit Hilfe von Messungen rekonstruiert werden. *Compressed Sensing* (CS, deutsch: komprimiertes Abtasten), auch bekannt als *Compressive Sensing* oder *Compressive Sampling*, ist eine neue mathematische Theorie der Datenakquisition und Rekonstruktion in der Signal- und Bildverarbeitung.

Das Abtasttheorem von Shannon besagt, dass bandbeschränkte kontinuierliche Daten exakt wiederhergestellt werden können, wenn die Abtastrate mindestens doppelt so hoch ist wie die höchste Frequenz in dem entsprechenden Signal. Aufbauend auf dieser Entdeckung wurde die analoge Signalverarbeitung weitgehend durch die Digitale ersetzt. Die Digitalisierung hat die Erzeugung von Erfassungs- und Verarbeitungssystemen ermöglicht, die robuster, flexibler, kostengünstiger und somit weit häufiger verwendet werden als ihre analogen Gegenstücke. Aufgrund dieses Erfolges ist aber auch die Menge der Daten, erzeugt durch Sensorsysteme, enorm gewachsen und die resultierende Abtastrate ist in vielen Anwendungen extrem hoch. Außerdem ist es teilweise zu aufwändig oder sogar physikalisch unmöglich Geräte zu entwickeln, die dazu in der Lage sind mit der erforderlichen Rate abzutasten. [13]

Bei den klassischen Abtastmethoden wird viel Zeit und Geld dafür aufgewendet möglichst viele Daten zu erfassen. Anschließend werden die Daten komprimiert, das heißt nur die wichtigsten Informationen werden gespeichert. Somit werden viele Daten unnötig erfasst.

*„One can regard the possibility of digital compression as a failure of sensor design. If it is possible to compress measured data, one might argue that too many measurements were taken.“* (David Brady)

Compressed Sensing ist eine neue Methode, die das Problem der Massendatengewinnung und Aufwandsverschwendung unter bestimmten Voraussetzungen löst. Die Grundidee ist, dass nur die wichtigsten Informationen der Daten erfasst werden und die Daten trotzdem exakt wiederhergestellt werden können. Das Prinzip beruht darauf, dass die Anzahl der Messungen bei Signalen und Bildern, die eine sparse oder komprimierbare Darstellung besitzen, erheblich reduziert werden kann. Dabei wird ausgenutzt, dass viele natürliche Signale komprimierbar sind in dem Sinne, dass sie

---

gut durch sparse Signale approximiert werden können, eventuell nach einem geeigneten Basiswechsel.

Die Fachrichtung Compressed Sensing entstand 2004 aus der Arbeit [3] von Candès, Romberg und Tao und parallel von Donoho [12], die zeigten, dass ein endlichdimensionales Signal mit einer sparsen oder komprimierbaren Darstellung aus einer kleinen Menge linearer, nicht-adaptiver Messungen, wiederhergestellt werden kann. Die Gestaltung der Messsysteme und deren Erweiterungen für praktische Datenmodelle und Erfassungssysteme sind die wesentlichen Herausforderungen im Bereich Compressed Sensing. Die Anwendungsbereiche sind unter anderem die medizinische Bildgebung, Elektrotechnik, Informatik oder Radartechnik.

Im Kontext dieser Arbeit genügt es, die Theorie für endlichdimensionale Signale zu betrachten. Das Modell lässt sich aber auch auf kontinuierliche Signale übertragen. Das Kapitel orientiert sich inhaltlich an [8].

## 2.2 Sparsity und Incoherence

Die Vorgehensweise beim CS lässt sich in zwei Schritte unterteilen. Zuerst werden Messdaten mit einem geeigneten Messsystem gewonnen. Anschließend werden die Ausgangsdaten mit Hilfe der Messungen rekonstruiert. Der Erfolg dieses Prozesses beruht auf zwei Voraussetzungen. Das ist zum einen die Sparsity-Bedingung an das gesuchte Signal und zum anderen die Incoherence-Bedingung an die Abtastmatrix.

### 2.2.1 Sparsity

Sparse Signalmodelle basieren auf der Tatsache, dass viele hochdimensionale Signale im Verhältnis zu ihrer Dimensionsgröße relativ wenige Informationen enthalten. Die Sparsity, bzw. in abgeschwächter Form die Komprimierbarkeit, ist eine notwendige Prämisse für die Theorie des CS, die das gesuchte Signal betrifft. Im Folgenden werden die Begrifflichkeiten erklärt.

**Definition 2.2.1.** Ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^N$  heißt *sparse (dünn besetzt)*, wenn möglichst viele seiner Komponenten  $x_i = 0$  sind.

**Definition 2.2.2.** Ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^N$  ist *k-sparse*, wenn höchstens  $k$  Koeffizienten  $x_i \neq 0$  sind, das heißt

$$\sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(|x_i|) \leq k.$$

Die Menge

$$\Sigma_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(|x_i|) \leq k \right\}$$

bezeichnet die *Menge aller k-sparsen Signalen*.

Viele natürliche Signale und Bilder besitzen zwar keine sparse, jedoch häufig eine nahezu sparse Darstellung nach geeigneter Basiswahl. Das bedeutet, sie können gut durch sparse Daten approximiert werden. In diesem Fall werden die Daten als komprimierbar bezeichnet.

**Bemerkung.** Die *Komprimierbarkeit* eines Signals  $x$  kann quantifiziert werden durch die Berechnung des Fehlers

$$\sigma_k(x) = \min_{\hat{x} \in \Sigma_k} \|x - \hat{x}\|.$$

Ist  $x \in \Sigma_k$ , dann gilt natürlich  $\sigma_k(x) = 0$ . [13]

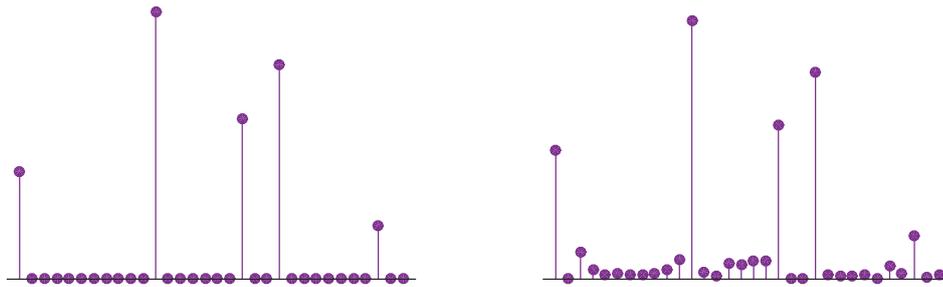


Abb. 2.1. *links*: Ein sparser Vektor, *rechts*: Ein komprimierbarer Vektor

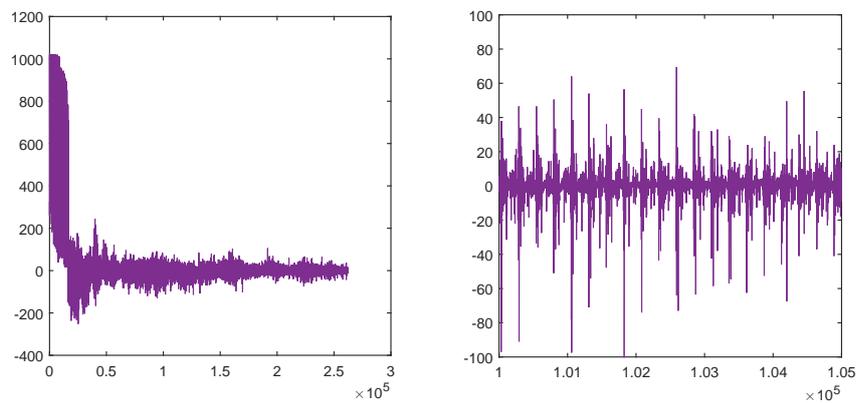


Abb. 2.2. *oben*: Ausgangsbild, *unten links*: Haar Wavelet-Koeffizienten, *unten rechts*: Zoom in die Wavelet-Koeffizienten. Obwohl fast alle Grauwerte im Bild ungleich Null sind, sind die meisten Wavelet Koeffizienten sehr klein. Die wenigen großen Koeffizienten enthalten die meisten Informationen.

---

## Sparsity-Transformation

Sei  $x \in \mathbb{R}^N$  ein beliebiges Ausgangssignal und  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^N$ . Dann existieren reelle Koeffizienten  $\{z_i\}_{i=1}^N$ , so dass

$$x = \sum_{i=1}^N z_i \varphi_i.$$

Äquivalent kann  $x$  in der Matrixschreibweise ausgedrückt werden durch

$$x = \Phi z.$$

Die Spalten der Matrix  $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  sind durch die Basisvektoren  $\varphi_i$  gegeben und  $z \in \mathbb{R}^N$  ist der Vektor mit den Einträgen  $z_i$ .

An dieser Stelle werden zwei Fälle unterschieden. Im einfachsten Fall ist das Rohsignal  $x$  bereits dünn besetzt, dann wird  $\Phi = I$  gesetzt. Ansonsten wird eine geeignete Basis  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  gewählt, so dass viele Komponenten des Koeffizientenvektors  $z$  null sind. Bei Bildern ist beispielsweise die Wavelet-Basis oft eine gute Wahl, vgl. Abbildung 2.2. Im Folgenden wird die Matrix  $\Phi$  als *Sparsity-Transformation* bezeichnet.

### 2.2.2 Incoherence

#### Datenerfassung

Das Ausgangssignal  $x$  wird beim CS nicht komplett erfasst. Es werden nur  $m < N$  Messungen durchgeführt. Sei  $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times N}$  der lineare Operator, der die Abtastung des Signals modelliert. Dann gilt für die Messdaten  $y \in \mathbb{R}^m$

$$y = \Psi x = \Psi \Phi z.$$

Zur Rekonstruktion von  $z$  muss folglich das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\Psi \Phi}_{A:=} z = y$$

gelöst werden. Das ursprüngliche Signal  $x$  wird durch die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$x = \Phi z$$

erhalten. An dieser Stelle gibt es zwei wesentliche Fragen:

1. Was ist eine geeignete Abtastmatrix?
2. Mit welchem Lösungsverfahren kann das Signal aus den Messungen wiederhergestellt werden?

Dieser Abschnitt behandelt die Frage, wie die Abtastmatrix  $\Psi$  aufgebaut sein sollte, damit die wichtigen Informationen beim Messvorgang nicht verloren gehen. Dabei liegt die Schwierigkeit vor allem darin, dass die Positionen der Vektoreinträge, die ungleich null sind, unbekannt sind.

**Beispiel 2.2.3.** Angenommen  $x \in \mathbb{R}^N$  ist bereits in der Einheitsbasisentwicklung dünn besetzt und  $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times N}$  besteht aus einer Auswahl von Zeilen der Einheitsmatrix der Dimension  $N$ . Dann erfasst  $y = \Psi x$  nur eine Auswahl der Einträge von  $x$ . Im ungünstigsten Fall wären das gerade die Nulleinträge von  $x$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 2.2.4.** Wird dagegen im Fourierraum gemessen und  $x$  ist ein Signal mit nur einer Komponente ungleich null, sieht es anders aus.

Die diskrete Fourier Transformation von  $x = (x_0, \dots, x_{N-1})^\top$  hat die Gestalt

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \exp\left(\frac{-2\pi i k m}{N}\right), \quad \text{für } k = 0, \dots, N-1.$$

Für

$$x = (0, 1, 0, 0)^\top$$

ist somit

$$\hat{x} = \left(\frac{1}{4}, \frac{i}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{4}\right)^\top$$

und jede Messung im Fourierraum gibt Auskunft über die Information im Ortsraum.

Beispiel 2.2.4 gibt einen Hinweis darauf, dass Informationen, die in der Sparsity-Transformation eher lokalisiert sind, in dem Messsystem möglichst breit verteilt sein sollten.

Um einen Informationsverlust in Folge der Dimensionsreduktion wie in Beispiel 2.2.3 zu vermeiden, folgen nun ein paar wünschenswerte Eigenschaften der Abtastmatrix. Dabei wird vorausgesetzt, dass  $\tilde{\Psi}$  und  $\Phi$  zwei Orthonormalbasen sind und  $\Psi$  durch zufälliges auswählen von  $m$  Zeilen aus  $\tilde{\Psi}$  entsteht. Diese Einschränkung dient der Vereinfachung und ist nicht notwendig.

**Definition 2.2.5.** [8, Def. 1] Die *Coherence* zwischen dem Abtastsystem  $\tilde{\Psi}$  und der Sparsity-Transformation  $\Phi$  ist definiert durch

$$\mu(\tilde{\Psi}, \Phi) = N \max_{i,j} |\langle \tilde{\psi}_i, \varphi_j \rangle|^2, \quad \text{mit } \|\tilde{\psi}_i\| = 1 \text{ und } \|\varphi_j\| = 1.$$

Aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} 1 &\leq N \max_{i,j} |\langle \tilde{\psi}_i, \varphi_j \rangle|^2 \leq N \max_{i,j} \|\tilde{\psi}_i\|^2 \|\varphi_j\|^2 \\ \iff 1 &\leq \mu(\tilde{\Psi}, \Phi) \leq N. \end{aligned}$$

Hierbei gilt die Gleichheit

$$\mu(\tilde{\Psi}, \Phi) = N$$

genau dann, wenn es linear abhängige Vektoren  $\tilde{\psi}_i$  und  $\varphi_j$  gibt. Aufgrund der Normiertheit ist hier die Coherence genau dann gleich  $N$ , wenn sich die Basen wenigstens ein Element teilen.

Die Coherence ist ein einfach berechenbares, grobes Maß für den Grad der Ähnlichkeit des Sparsity-Systems und des Messsystems. Durch eine möglichst geringe Coherence wird sichergestellt, dass auch wenige Messwerte genügend Informationen zur Rekonstruktion liefern. Das heißt, je kleiner die Coherence, desto weniger Messungen werden für die Rekonstruktion benötigt. Was das konkret für den Erfolg der Rekonstruktion bedeutet, wird in Abschnitt 2.3 behandelt.

Um das Beispiel von oben wieder aufzugreifen, für die Einheitsbasis und Fourierbasis ist  $\mu(\tilde{\Psi}, \Phi) = 1$ , vgl. [8].

### 2.2.3 Restricted Isometry Property

Eine vergleichbare Aussage über die Eignung der Sparsity- und Transformationsmatrizen erlaubt die *Restricted Isometry Property*.

**Definition 2.2.6.** [8, Def. 2] Die *Restricted Isometry Konstante*  $\delta_k$  einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  ist das kleinste  $\delta \geq 0$ , so dass

$$(1 - \delta)\|z\|_2^2 \leq \|Az\|_2^2 \leq (1 + \delta)\|z\|_2^2 \quad (2.1)$$

für alle  $k$ -sparsen Vektoren  $z \in \mathbb{R}^N$ .

Die Matrix  $A$  erfüllt die *Restricted Isometry Property* (RIP, deutsch: eingeschränkte Isometriebedingung) der Ordnung  $k$ , wenn  $\delta_k < 1$ .

Die Eigenschaft 2.1 bedeutet, dass jede Auswahl bestehend aus  $k$  Spalten der Matrix  $A$  näherungsweise eine Orthonormalbasis bildet. Es ist zu beachten, dass die Spalten von  $A$  keine echte Orthonormalbasis sein können, da  $A$  mehr Spalten als Zeilen hat. Eine andere Interpretation der RIP ist die Folgende: Erfüllt die Matrix  $A$  die RIP der Ordnung  $2k$  mit  $\delta_{2k} < 1$ , dann gilt

$$0 < (1 - \delta_{2k})\|z - \hat{z}\|_2^2 \leq \|A(z - \hat{z})\|_2^2 \quad \text{für alle } z \neq \hat{z} \in \Sigma_k$$

und  $A$  bewahrt näherungsweise die euklidische Länge  $2k$ -sparsen Vektoren. Das ist sehr wichtig, da es möglich sein sollte alle dünn besetzten Signale  $z$  aus den Messungen  $Az = y$  wiederherzustellen. Also muss für zwei verschiedene Vektoren  $z, \hat{z} \in \Sigma_k$

$$Az \neq A\hat{z}$$

gelten. Anderenfalls wäre es unmöglich  $z$  und  $\hat{z}$  anhand der Messungen  $y$  zu unterscheiden. Denn für  $Az = A\hat{z}$  gilt

$$A(z - \hat{z}) = 0$$

und  $A$  repräsentiert nur dann alle  $z \in \Sigma_k$ , wenn der Nullraum  $\mathcal{N}(A) = \{w \in \mathbb{R}^N | Aw = 0\}$  keine Vektoren aus  $\Sigma_{2k}$  enthält.

Weitere Methoden, um die Eignung einer Matrix zu charakterisieren, sind die sogenannte *Null Space Property* und der *Spark* von  $A$ . Einen guten Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten und deren Zusammenhang verschafft [13].

## 2.3 Sparse Rekonstruktion

Das endlich dimensionale Standard **Compressed Sensing Problem** lautet:

*Rekonstruktion eines sparsen Signals  $z \in \mathbb{R}^N$  aus den Messungen  $y = Az \in \mathbb{R}^m$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  und  $m < N$ .*

Durch die komprimierte Abtastung ist das Gleichungssystem unterbestimmt und hat somit unendlich viele Lösungen  $\tilde{z}$  mit  $A\tilde{z} = y$ . Das heißt, die Rekonstruktion von  $z$  aus  $Az = y$  ist für  $m < N$  ein schlecht gestelltes Problem. Ohne zusätzliche Informationen kann keine Aussage über die Lösung gemacht werden. Deshalb wird das a priori Wissen, dass das zu rekonstruierende Signal in einer bekannten Basisdarstellung sparse ist, ausgenutzt. Als Hilfsmittel zum Finden sparsen Lösungen werden Vektornormen eingesetzt. Die bekannteste Vektornorm, die euklidische  $l_2$ -Norm, liefert in der Regel keine sparse Lösung. Stattdessen wird die sogenannte  $l_0$ -Norm betrachtet, die die von Null verschiedenen Einträge von  $z$  zählt.

**Definition 2.3.1.** Für einen Vektor  $z \in \mathbb{R}^N$  wird die  $l_0$ -Norm von  $z$  definiert durch

$$\|z\|_0 := \sum_{i=1}^N \text{sgn}(|z_i|).$$

Das entspricht der Anzahl der Komponenten von  $z$ , die ungleich null sind.

**Bemerkung.** Die  $l_0$ -Norm ist keine Norm im Sinne der Definition 1.1.1, denn sie erfüllt die Homogenitätsbedingung nicht. Beispielsweise für  $x = (1, 0)^\top \in \mathbb{R}^2$  ist

$$\left\| \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_0 = 1 \neq |\lambda| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_0 = |\lambda|, \quad \text{für alle } |\lambda| \neq 1.$$

Ist die  $l_0$ -Norm eines Vektors klein, dann sind viele Komponenten null und der Vektor ist dünn besetzt. Um also die Lösung des Ausgangsproblems mit den wenigsten nichttrivialen Einträgen zu finden, bietet es sich an, die  $l_0$ -Norm von  $z$  zu minimieren und das Gleichungssystem als Nebenbedingung hinzuzufügen. Zusammen lässt sich dies als  $l_0$ -Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \|z\|_0 \\ \text{u. d. N.} \quad & Az = y. \end{aligned} \tag{2.2}$$

formulieren. Ein Nachteil ist, dass es sich hierbei nicht um ein konvexes, sondern um ein kombinatorisches Optimierungsproblem handelt. Damit ist es im Allgemeinen schwierig eine Lösung zu finden. Außerdem ist das Problem (2.2) sehr empfindlich in Bezug auf Störungen der Anfangsdaten, da schon eine minimale Wertänderung die  $l_0$ -Norm eines Vektors verhältnismäßig stark ändern kann. Um die Nachteile der  $l_0$ -Norm Minimierung zu umgehen, wird stattdessen die  $l_1$ -Norm in der Zielfunktion betrachtet, also das  $l_1$ -Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \|z\|_1 \\ \text{u. d. N.} \quad & Az = y, \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei  $\|z\|_1 = \sum_{i=1}^N |z_i|$  die  $l_1$ -Norm eines Vektors  $z \in \mathbb{R}^N$  bezeichnet. Im Englischen wird das Problem (2.3) als *Basis Pursuit Problem* bezeichnet. Anders als das  $l_0$ -Optimierungsproblem ist dieses Minimierungsproblem konvex (folgt unmittelbar aus der Dreiecksungleichung) und deshalb meistens besser zu handhaben. Zudem kann es als lineares Optimierungsproblem formuliert werden und mit dem Simplexverfahren oder der Inneren-Punkte-Methode gelöst werden. [14]

Wird die  $l_1$ -Norm eines Vektors minimiert, so werden die einzelnen Komponenten so klein wie möglich oder Null. Das bedeutet, die  $l_0$ -Norm Lösung wird approximiert und das Resultat ist, falls vorhanden, eine sparse Lösung. Erfüllt die Matrix  $A$  bestimmte Bedingungen, so sind die Lösungen der Probleme (2.2) und (2.3) sogar äquivalent. Ein Beispiel dafür gibt der folgende Satz:

**Satz 2.3.2.** [7]

- (i) Erfüllt die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  die RIP der Ordnung  $2k$  mit  $\delta_{2k} < 1$ , dann hat das Problem (2.2) eine eindeutige  $k$ -sparse Lösung.
- (ii) Erfüllt die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  die RIP der Ordnung  $2k$  mit  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ , dann ist  $z^*$  genau dann die Lösung von (2.2), wenn  $z^*$  die Lösung von (2.3) ist.

Die Aussagen des Satzes folgen unmittelbar aus Satz 2.3.4.

**Bemerkung.**

- 1) Unter gewissen Bedingungen ist die Rekonstruktion einer sparsen Lösung auch durch Lösen des Optimierungsproblems

$$\min \|z\|_p^p$$

u. d. N  $Az = y$

für  $0 < p < 1$  möglich.

- 2) Es ist

$$\|z\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \|z\|_p^p = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N |z_i|^p$$

mit  $0^0 := 0$  und  $a^0 := 1$  für  $a \neq 0$ .

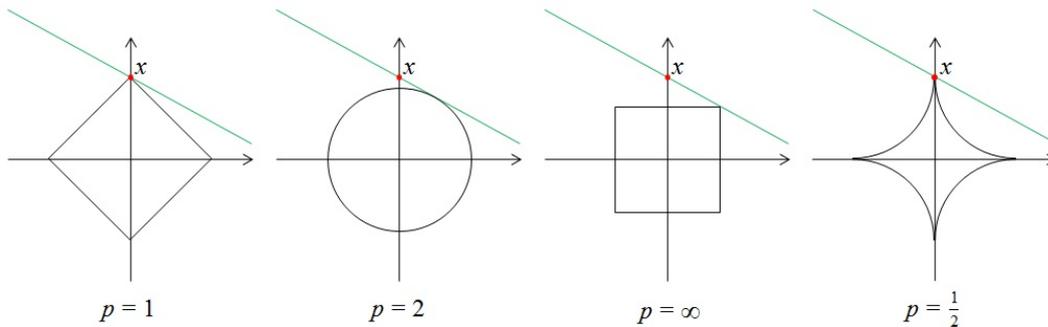


Abb. 2.3. Intuitiver Vergleich der  $l_1$ -,  $l_2$ -,  $l_\infty$ - und  $l_{1/2}$ -Minimierung im  $\mathbb{R}^2$ .  $x = (0, 1)^\top$  liegt auf der grünen Linie. Für  $p = 1$  und  $p = \frac{1}{2}$  ist  $x$  gerade der Punkt auf der Linie mit minimaler  $l_1$ - bzw.  $l_{1/2}$ -Norm.

### 2.3.1 Bedingungen für eine erfolgreiche Rekonstruktion

In den bisherigen Betrachtungen ist offen geblieben, unter welchen Voraussetzungen das Compressed Sensing Problem mittels des Basis Pursuit Problems gelöst werden kann. Im diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen der Eignung der Matrix und dem Problem (2.3) hergestellt. Zu diesem Zweck wird jeweils eine der Kernaussagen in Bezug auf Incoherence und RIP vorgestellt.

#### Incoherence

**Satz 2.3.3.** [5] Sei  $x \in \mathbb{R}^N$  fest und  $z \in \mathbb{R}^N$ , bestehend aus den Koeffizienten von  $x$  in der Basis  $\Phi$ , ist ein  $k$ -sparses Signal. Im Messraum  $\Psi$  werden einheitlich  $m$  zufällige Messungen durchgeführt. Dann ist die Rekonstruktion mittels  $l_1$ -Minimierung (2.3) mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit exakt, wenn die Anzahl der Messungen  $m$  der Ungleichung

$$m \geq C \cdot \mu(\Psi, \Phi) \cdot k \cdot \log(N),$$

genügt, mit  $C \geq 0$ .

Der Satz bestätigt die Behauptung aus Abschnitt 2.2.2, dass für eine erfolgreiche Rekonstruktion weniger Messungen benötigt werden, wenn die Coherence klein ist. In [5] wurde gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit auf Erfolg größer als  $1 - \delta$  ist, wenn  $m \geq C \cdot \mu(\Psi, \Phi) \cdot k \cdot \log(N/\delta)$  ist. Die Einschränkung durch die Wahrscheinlichkeit kommt daher, dass das Ergebnis nicht allgemeingültig für alle Messungen der Größe  $m$  ist. Es gibt spezielle sparse Vektoren, die nahezu komplett im Messraum verschwinden. In [3] wird das am Beispiel des Delta-Kamm's demonstriert.

#### Restricted Isometries

**Satz 2.3.4.** [7] Vorausgesetzt  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  erfüllt die RIP der Ordnung  $2k$  mit  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ . Dann gilt für die Lösung  $z^*$  von (2.3)

$$\|z^* - z\|_2 \leq C_0 \frac{\|z - z_k\|_2}{\sqrt{k}} \quad \text{und} \quad \|z^* - z\|_1 \leq C_0 \|z - z_k\|_1,$$

für eine positive Konstante  $C_0$  und den Vektor  $z_k \in \Sigma_k$ , der aus den  $k$  größten Elementen von  $z$  besteht.

Die Aussage von Satz 2.3.4 ist für beliebige Signale gültig und ist wesentlich stärker als die Aussage von Satz 2.3.3. Ist das ursprüngliche Signal  $z$   $k$ -sparse, dann ist  $z = z_k$  und die Rekonstruktion ist exakt. Ist  $z$  nicht  $k$ -sparse, dann werden durch die  $l_1$ -Minimierung (2.3) die  $k$  größten Einträge des unbekanntens Vektors  $z$  wiederhergestellt.

**Bemerkung.** Satz 2.3.4 gibt keinen Hinweis auf den Zusammenhang zwischen  $k$ , der Anzahl der Komponenten, die ungleich Null sind, und  $m$ , der Anzahl der Messungen.

Eine Klasse von Matrizen, die der Voraussetzung des Satzes mit hoher Wahrscheinlichkeit genügt, wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

---

## Random Sensing

Für die direkte Konstruktion einer Matrix, die die RIP erfüllt, muss die Bedingung (2.1) für alle  $\binom{N}{k}$  möglichen Kombinationen von  $k$ -sparsen Vektoren überprüft werden. Das ist oftmals nicht realisierbar. Allerdings kann sowohl die Incoherence als auch die RIP mit hoher Wahrscheinlichkeit durch die Wahl von  $\Psi$  als Zufallsmatrix erreicht werden. Deshalb beruhen die meisten bekannten Messmatrixkonstruktionen für CS auf Zufälligkeit. Ein Beispiel dafür sind Gauß'sche Zufallsmatrizen, deren Einträge aus unabhängig normalverteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Varianz  $1/m$  bestehen. Oder Bernoulli Zufallsmatrizen, deren Einträge aus symmetrisch unabhängig identisch verteilten Bernoulli Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(\psi_{i,j} = 1/\sqrt{m}) = \mathbb{P}(\psi_{i,j} = -1/\sqrt{m}) = 1/2$  bestehen.

Gauss- und Bernoulli-Zufallsmatrizen erfüllen die RIP mit hoher Wahrscheinlichkeit, wenn mindestens

$$m \geq C \cdot k \cdot \ln(N/k)$$

Messungen durchgeführt werden [4]. Der Messprozess ist unabhängig von der Sparsity-Transformation und muss somit nicht an das gesuchte Signal angepasst werden. Theoretisch ist das Ergebnis sehr stark, aber die Einsatzmöglichkeiten solcher Matrizen in der Praxis ist begrenzt, da viele Anwendungen eine feste Struktur der Matrix vorgeben.

Eine vergleichbare Aussage kann im Falle zweier Orthonormalbasen  $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und  $\tilde{\Psi} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  gemacht werden. Entsteht  $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times N}$  durch zufälliges Auswählen von  $m$  Zeilen aus  $\tilde{\Psi}$ , dann genügt  $\Psi\Phi$  der RIP mit hoher Wahrscheinlichkeit, falls

$$m \geq C \cdot k \cdot (\log N)^4,$$

vgl. [4], [25].

Für Messsysteme, die auf Zufälligkeit beruhen gibt es bereits einige Aussagen dieser Art. Im Gegensatz dazu sind deterministische Messmatrizen ein noch größtenteils offenes Problem. Nach dem aktuellen Stand darf  $m$  nicht viel kleiner als  $k^2$  gewählt werden, vgl. [11] und [2]. Insbesondere für große Dimensionen ist das kein zufriedenstellendes Ergebnis.

### 2.3.2 Stabile sparse Rekonstruktion

Bei der praktischen Anwendung von CS müssen zwei Faktoren mit berücksichtigt werden. Zum einen kommt es häufig vor, dass ein Signal in der Sparsity-Transformation nicht sparse, sondern nur nahezu sparse ist. Zum anderen können die Messdaten durch Rauschen fehlerbehaftet sein, oder beides. In allen Fällen ist

$$y = Az + w,$$

mit einem unbekanntem Fehlerterm  $w \in \mathbb{R}^m$  und das angepasste Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & \|z\|_1 \\ \text{u. d. N} \quad & \|Az - y\|_2^2 \leq \epsilon \end{aligned} \tag{2.4}$$

wird betrachtet. Der Parameter  $\epsilon \geq 0$  beschreibt die Fehlertoleranz und die Formulierung (2.4) wird als *Basis Pursuit Denoising Problem* bezeichnet. Für dieses

Szenario gilt eine erstaunliche Aussage, die für die praktische Anwendung sehr bedeutsam ist: CS ist nicht nur bei Rekonstruktionen unter idealen Voraussetzungen (sparse Signale, exakte Daten) anwendbar, sondern erlaubt auch die Rekonstruktion komprimierbarer Signale aus nur wenigen, durch Rauschen verfälschte, Messungen.

**Satz 2.3.5.** [6] Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  erfülle die RIP der Ordnung  $2k$  mit  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ . Dann erfüllt die Lösung  $z^*$  von (2.4) die Ungleichung

$$\|z^* - z\|_2 \leq C_0 \frac{\|z - z_k\|_1}{\sqrt{k}} + C_1 \epsilon$$

für kleine Konstanten  $C_0$  und  $C_1$ .

Der Rekonstruktionsfehler ist durch die Summe zweier Terme nach oben beschränkt. Der Term  $C_0 \|z - z_k\|_1 / \sqrt{k}$  liefert eine Abschätzung für komprimierbare Signale und verschwindet im sparsen Fall. Durch den Ausdruck  $C_1 \epsilon$  wird der Fehler im Messraum berücksichtigt. Die Konstanten  $C_0$  und  $C_1$  sind typischerweise klein.

## Kapitel 3

# Computertomographie

Bei dem klassischen Röntgenverfahren wird ein Projektionsbild des Messobjektes erzeugt. Das bedeutet, ein dreidimensionales Objekt wird auf einem Röntgenfilm zweidimensional abgebildet. Diese Vorgehensweise hat den Nachteil, dass es zu Überlagerungen hintereinanderliegender Bereiche kommt. Dadurch geht die räumliche Information verloren.

Die *Computertomographie* (CT, griech. tomos = “Schicht“ und graphin = “schreiben“) ist ein bildgebendes Verfahren, bei dem überlagerungsfreie Bilder erzeugt werden. Statt einer einzelnen Röntgenaufnahme werden hier Aufnahmen aus verschiedenen Richtungen gemacht. Die Informationen aus den verschiedenen Richtungen ermöglichen es, rechnergestützt ein Schichtbild des Messobjektes zu rekonstruieren. Die Zusammensetzung einer Vielzahl solcher Schnitte liefert einen dreidimensionalen Scan des abzubildenden Objektes.

Der erste Computertomograph wurde von Godfrey Hounsfield für Schädeluntersuchungen entwickelt und 1971 zum ersten Mal an einem Menschen eingesetzt. Abgesehen von der medizinischen Diagnostik ist heute beispielsweise die zerstörungsfreie Materialuntersuchung ein wichtiges Anwendungsgebiet der CT. Das Kapitel orientiert sich inhaltlich an [23].

### 3.1 Mathematische Modellierung

Die Mathematik spielt bei der CT eine zentrale Rolle. Im folgenden Abschnitt wird das mathematische Modell eingeführt, auf dem die CT beruht.

#### 3.1.1 Physikalischer Hintergrund

Röntgenstrahlen sind elektromagnetische Wellen, die in einem Wellenlängenbereich von  $10^{-8}\text{m}$  bis  $10^{-13}\text{m}$  liegen. Sie durchdringen Materie und werden dabei materialabhängig abgeschwächt. Zur Vereinfachung wird angenommen:

1. Die Dämpfung der Röntgenstrahlen durch das Messobjekt ist proportional zu der Intensität  $I$ , dem Dämpfungskoeffizienten  $f$  des Objektes im Punkt  $x$  und der zurückgelegten Weglänge  $\Delta t$ .
2. Die Röntgenstrahlen breiten sich gradlinig aus und die Streuung der Strahlung kann vernachlässigt werden.

**Bemerkung.** Elektromagnetische Strahlung besitzt sowohl Welleneigenschaften als auch Teilcheneigenschaften (Welle-Teilchen-Dualismus, Quantentheorie). Ein Röntgenstrahl besteht aus einer großen Anzahl gleicher Photonen und es gilt: Je intensiver der Strahl, desto mehr Photonen sind enthalten.

### 3.1.2 Beschreibung des Messvorgangs

Die Röntgenröhre emittiert einen Röntgenstrahl mit Ausgangsintensität  $I_0$ . Der Strahl durchdringt das Messobjekt und wird dabei abgeschwächt. Gegenüber der Strahlenquelle liegt ein Detektor, der die Intensität der ankommenden Strahlung (Anzahl der ankommenden Photonen) misst.

Sei nun  $I(x)$  die Intensitätsfunktion und  $\Delta I$  die Intensitätsänderung entlang eines sehr kurzen Wegstücks der Länge  $\Delta t$ . Dann gilt für die Intensitätsänderung

$$\begin{aligned} \Delta I &= -I(x)\Delta t f(x) \\ \iff \frac{\Delta I}{\Delta t} &= -I(x)f(x). \end{aligned}$$

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(x) &= -I(x)f(x) \\ \iff \frac{\frac{d}{dt}I(x)}{I(x)} &= -f(x) \\ \iff \frac{d}{dt}\ln(I(x)) &= -f(x). \end{aligned}$$

Die Ausgangsintensität  $I_0$  und Restintensität  $I_L$  im Detektor nach Durchlaufen des Weges  $L$  sind bekannt. Die Differentialgleichung wird mittels Integration über den Weg gelöst

$$\begin{aligned} \ln(I_L) - \ln(I_0) &= - \int_L f(t) dt \\ \iff \ln\left(\frac{I_0}{I_L}\right) &= \int_L f(t) dt. \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung werden Rückschlüsse auf die gesuchte Dichte  $f$  des Messobjektes gezogen.

### 3.1.3 Mathematisches Modell

Diese Arbeit beschränkt sich auf das zweidimensionale Modell der CT. Das heißt, die gesuchte Dichte  $f$  ist eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Die behandelte Abtastgeometrie ist die Parallelstrahlgeometrie, bei der jeder Röntgenstrahl orthogonal auf das gegenüberliegende Detektorelement trifft.

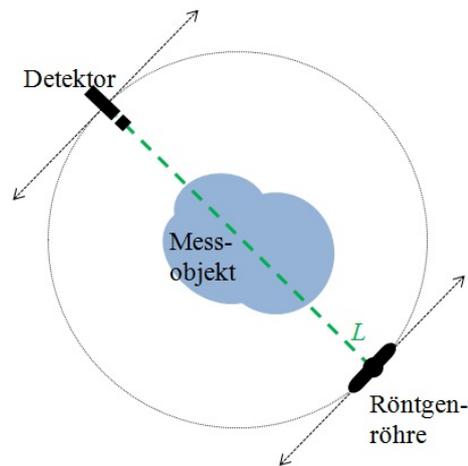


Abb. 3.1. CT-Scan

Die Abbildung 3.1 veranschaulicht vereinfacht den Ablauf eines CT-Scans. Zunächst wird eine Objektschicht mit konstanter Richtung abgetastet. Dabei wird das System, bestehend aus Röntgenröhre und Detektor, entlang der Pfeile senkrecht zum Strahl bewegt. Anschließend wird das System um einen kleinen Winkel gedreht und der Vorgang wiederholt.

Aufgrund der Rotation des Röntgensystems ist es hilfreich die Geraden im  $\mathbb{R}^2$  durch eine Menge orientierter Linien mit Parameter  $(\theta, s) \in S^1 \times [0, \infty)$  zu parametrisieren. Dann ist  $L(\theta, s) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top \theta = s\}$  eine Gerade senkrecht zu  $\theta$  mit Abstand  $s$  zum Koordinatenursprung. In der computertomographischen Bildgebung stellen diese Linien gerade den Weg der Röntgenstrahlen durch das Messobjekt dar, vgl. Abbildung 3.2.

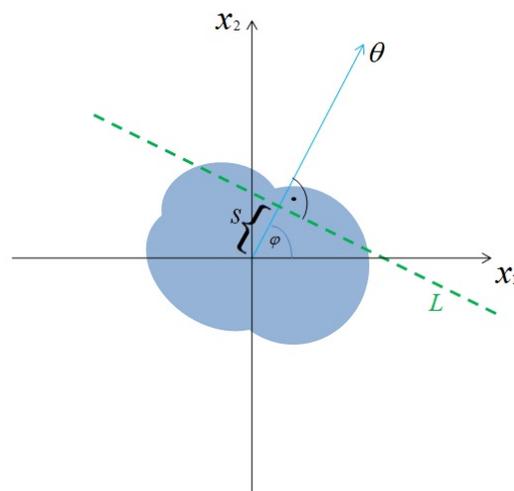


Abb. 3.2. Parametrisierung des Weges des Röntgenstrahls

Das mathematische Modell der CT im zweidimensionalen Raum bei Parallelstrahlgeometrie basiert auf einer 1917 von dem Mathematiker Johann Radon definierten Integraltransformation, der Radon-Transformation.

**Definition 3.1.1.** Für eine Funktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  wird die *Radon-Transformation* definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(\theta, s) &= \int_{L(\theta, s)} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \delta(s - x^\top \theta) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(s\theta + t\theta^\perp) dt,\end{aligned}$$

wobei  $\theta = \theta(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^\top \in S^1$  ist.

In höheren Dimensionen, das heißt für eine Funktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\theta \in S^{N-1}$  und  $H(\theta, s) = \{x \in \mathbb{R}^N | x^\top \theta = s\}$ , Hyperebene im  $\mathbb{R}^N$  senkrecht zu  $\theta$  und Abstand  $s$  zum Ursprung, ist

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(\theta, s) &= \int_{H(\theta, s)} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \delta(s - x^\top \theta) dx\end{aligned}$$

die Radon-Transformierte von  $f$ .

**Bemerkung.**

- 1) Die Radon-Transformation ermöglicht die Beschreibung einer beliebigen integrierbaren Funktion durch alle geraden Linienintegrale über das Definitionsgebiet der Funktion.
- 2) Die Radon-Transformierte für ein festes  $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$  wird *Projektion* genannt. Die übliche Notation dafür ist  $\mathcal{R}_\theta f(s)$ . Abbildung 3.3 zeigt die Projektion einer stückweise definierten Funktion, die in dem grauen Bereich den Wert 1 und ansonsten den Wert 0 annimmt.
- 3) Die graphische Darstellung der Daten einer kompletten Schicht bildet ein *Sinogramm*. Die Abbildung 3.4 zeigt, dass ein Sinogramm im Gegensatz zu den Projektionen nicht direkt interpretierbar ist.
- 4) Das direkte Problem, also die Datenbeschaffung, besteht aus dem Modellieren der aus einem CT-Scan gewonnen Rohdaten durch die Radon-Transformation

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = g(\theta, s). \tag{3.1}$$

Das inverse Problem ist die Rekonstruktion der Funktion  $f$  aus den Sinogramm Daten.

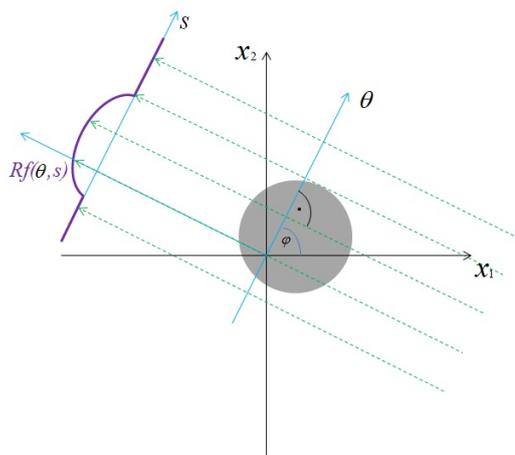


Abb. 3.3. Radon-Transformation für einen festen Winkel

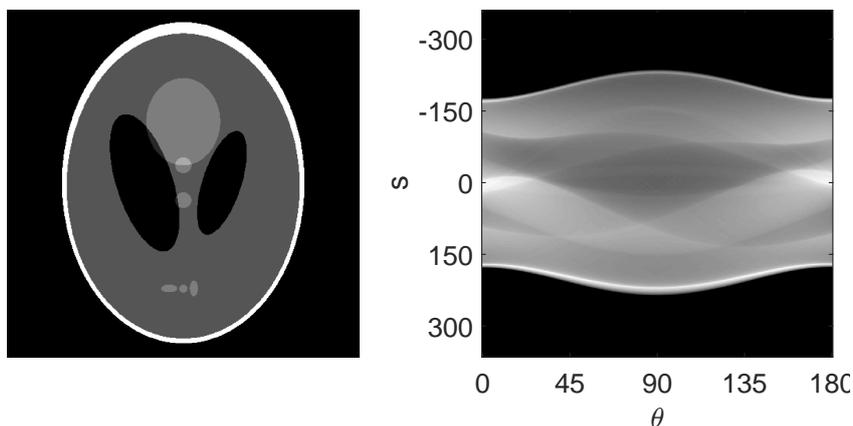


Abb. 3.4.  $512 \times 512$  Shepp-Logan Phantom und das entsprechende Sinogramm

## 3.2 Sätze und Eigenschaften der Radon -Transformation

### Satz 3.2.1.

- (i)  $\mathcal{R}$  ist ein linearer Operator.
- (ii) Es ist  $\mathcal{R}f(-\theta, -s) = \mathcal{R}f(\theta, s)$ .

Einige Linienintegrale sind redundant, vgl. 3.2.1 (ii). Deshalb kann der Aufnahme-winkelbereich auf  $[0, \pi)$  eingeschränkt werden.

Die Radon-Transformation lässt sich stetig auf  $L_2$ -Räume fortsetzen.

**Satz 3.2.2.** [20, Satz 6.1.1] Sei  $\Omega$  der Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$  und  $Z = S^1 \times [-1, 1]$  der Einheitszylinder. Die Radon-Transformation lässt sich stetig fortsetzen als Ab-bildung

$$\mathcal{R}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(Z, w^{-1}), \quad w(s) = \sqrt{1 - s^2}$$

bzw.

$$\mathcal{R}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(Z).$$

Für die praktische Anwendung der Radon-Transformation ist der Projektionssatz sehr wichtig, da er den Zusammenhang zwischen Fourier- und Radon-Transformation herstellt.

**Satz 3.2.3. (Projektionssatz)** [20, Satz 6.1.3] Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  oder  $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$  eine Funktion mit kompaktem Träger. Dann ist

$$\mathcal{F}_1(\mathcal{R}_\theta f)(\sigma) = (2\pi)^{1/2} \mathcal{F}_2 f(\sigma\theta), \quad \theta \text{ fest, } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe des Projektionssatzes, der inversen Fourier-Transformation und Polarkoordinaten lässt sich eine Inversionsformel für die Radon-Transformation herleiten:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} f(x) \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) \exp(ix^\top \xi) d\xi \end{aligned}$$

Der Übergang zu Polarkoordinaten liefert den Ausdruck

$$\begin{aligned} &= (4\pi)^{-1} \int_{S^1} \int_0^\infty \hat{f}(\sigma\theta) \sigma \exp(i\sigma\theta^\top x) d\sigma d\theta \\ &= (4\pi)^{-1} \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\sigma\theta) |\sigma| \exp(i\sigma\theta^\top x) d\sigma d\theta. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird der Projektionssatz angewendet

$$= (4\pi)^{-1} \int_{S^1} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{R}_\theta f)^\wedge(\sigma) |\sigma| \exp(i\sigma\theta^\top x) d\sigma d\theta. \quad (3.2)$$

**Satz 3.2.4.** [20, Satz 6.1.4] Die inverse Radon-Transformation ist gegeben durch

$$\mathcal{R}^{-1} = (4\pi)^{-1} \mathcal{R}^* I^{-1},$$

wobei  $I^\alpha$  das *Riesz-Potential* der Stufe  $\alpha < 2$  ist, das heißt

$$(I^\alpha g)^\wedge(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{g}(\xi).$$

$\mathcal{R}^*$  ist der zu  $\mathcal{R}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(Z)$  adjungierte Operator und wird *Rückprojektion* genannt. Es ist

$$(\mathcal{R}^* g)(x) = \int_{S^1} g(\theta, x^\top \theta) d\theta.$$

---

### 3.3 Rekonstruktionsalgorithmen

Die Rekonstruktion von  $f$  aus

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = g(\theta, s)$$

entspricht dem CT-Bildrekonstruktionsproblem. Zur Lösung dieses Problems sind verschiedene Verfahren entwickelt worden. Dabei werden zwei Klassen von Rekonstruktionsalgorithmen unterschieden.

- 1) *Analytische Algorithmen* basieren auf der Invertierung der Radontransformation. Ein in der CT sehr häufig angewendetes analytisches Verfahren ist die gefilterte Rückprojektion (engl. filtered backprojection, FBP).
- 2) *Iterative Algorithmen* beruhen auf der Linearität der Radontransformation und Methoden der Linearen Algebra.

Die gefilterte Rückprojektion zeichnet sich vor allem durch ihre Schnelligkeit aus. Iterative Verfahren sind im Gegensatz zur gefilterten Rückprojektion sehr rechenaufwendig und langsam, dafür sind sie jedoch vielseitiger einsetzbar. Beispielsweise liefern die iterativen Techniken bei der Rekonstruktion mit rauschbehafteten oder unvollständigen Datensätzen bessere Resultate.

#### 3.3.1 Gefilterte Rückprojektion

Ein Problem der Inversionsformel aus Satz 3.2.4 ist, dass hohe Frequenzen im Fourier-Raum durch den Faktor  $|\sigma|$  verstärkt werden, vgl. Ausdruck (3.2). Da die hohen Frequenzen sehr fehleranfällig sind, führt die Multiplikation mit dem unbeschränkten Faktor zu einer extremen Vergrößerung der Datenfehler. Aus diesem Grund bietet sich eine Filterung der Daten an. Die Filterung wird umgesetzt, indem die Fourier-Transformierte der Daten mit einem Filter  $F_\gamma$  multipliziert wird. Die Grundlage für die gefilterte Rückprojektion ist die Inversionsformel

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{-1}g(x) &= (4\pi)^{-1}\mathcal{R}^*I^{-1}g(x) \\ &\stackrel{(3.2)}{=} (4\pi)^{-1}\int_{S^1}(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\hat{g}(\theta,\sigma)|\sigma|\exp(i\sigma\theta^\top x)d\sigma d\theta. \end{aligned}$$

Die Daten werden im Frequenzraum gefiltert und der Ausdruck

$$(4\pi)^{-1}\int_{S^1}(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\hat{g}(\theta,\sigma)\mathbf{F}_\gamma(\sigma)|\sigma|\exp(i\sigma\theta^\top x)d\sigma d\theta$$

betrachtet. Mit dem Faltungssatz kann der neue Term aufgefasst werden als

$$\frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2}\hat{g}(\theta,\sigma)\mathbf{F}_\gamma(\sigma)|\sigma| = (2\pi)^{-1/2}(g \star h_\gamma)^\wedge(\theta,\sigma),$$

wobei  $\hat{h}_\gamma(\sigma) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2}\mathbf{F}_\gamma(\sigma)|\sigma|$ . Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} &= \int_{S^1}\int_{\mathbb{R}}(2\pi)^{-1/2}(g \star h_\gamma)^\wedge(\theta,\sigma)\exp(i\sigma\theta^\top x)d\sigma d\theta \\ &= \int_{S^1}g_\theta(s) \star h_\gamma(s)ds, \end{aligned}$$

### 3.3 REKONSTRUKTIONSLGORITHMEN

wobei  $h_\gamma(s) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}} F_\gamma(\sigma) |\sigma| \exp(i\sigma s) d\sigma$ . Die Formel der gefilterten Rückprojektion lautet dann

$$= \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} g(s') h_\gamma(s - s') ds d\theta.$$

Es stehen verschiedene Filter zur Verfügung, die nahe bei  $|\sigma|$  bleiben und hohe Frequenzen abschneiden. Die zwei bekanntesten sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt.

	$F_\gamma(\sigma)$	$h_\gamma(s)$
RAM-LAK	$\begin{cases} 1, & \text{für }  \sigma  \leq \gamma, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{\cos(\gamma s) - 1}{s^2} + \frac{\gamma \sin(\gamma s)}{s} \right)$
Shepp-Logan	$\begin{cases} \text{sinc}\left(\frac{\sigma\pi}{2\gamma}\right), & \text{für }  \sigma  \leq \gamma, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{\gamma^2}{2\pi^3} \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma s \cos(\gamma s)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \gamma^2 s^2}$

Der Nyquist-Bedingung folgend, wird oft  $\gamma = \frac{\pi}{r}$  gewählt.

#### Diskrete gefilterte Rückprojektion

Ausgangspunkt der numerischen Inversionsformel sind diskrete Daten

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(\theta_j, s_\ell), \quad s_\ell = r\ell, \quad \ell = -q, \dots, q, \\ \theta_j = \theta(\varphi_j), \quad \varphi_j = (j-1)\frac{\pi}{p}, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

wobei  $r$  dem Detektorabstand entspricht.

Im ersten Schritt werden die Daten diskret gefiltert. Dazu werden für  $j = 1, \dots, p$  die diskreten Faltungen

$$v_{j,k} = r \sum_{\ell=-q}^q h_\gamma(s_k - s_\ell) \mathcal{R}f(\theta_j, s_\ell), \quad k = -q, \dots, q$$

berechnet. Anschließend wird zwischen den Detektorpositionen linear interpoliert und die diskrete Rückprojektion mittels Trapezregel durchgeführt

$$f_\gamma(x) = \frac{2\pi}{p} \sum_{j=0}^{p-1} ((1-\eta)v_{j,k} + \eta v_{j,k+1}).$$

Dabei werden  $k$  und  $\eta$  so bestimmt, dass  $k \leq \frac{s}{r} < k+1$ ,  $\eta = \frac{s}{r} - k$  und  $s = x^\top \theta_j$  gilt.

#### 3.3.2 Algebraische Rekonstruktionstechnik

Bei der Algebraischen Rekonstruktionstechnik (ART) wird das Bildrekonstruktionsproblem in Form eines linearen Gleichungssystems formuliert. Durch eine geeignete Diskretisierung wird das gesuchte Bild in Bildpixel  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_N$  unterteilt. Die Projektionsdaten werden als Vektor aufgefasst, dessen Einträge aus gewichteten Summen

---

der Bildpixel bestehen. Das Messsystem wird als Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  geschrieben, wobei jede Zeile von  $A$  der Röntgenprojektion eines Strahls durch  $f$  entspricht. Die Diskretisierung wird im Abschnitt 4.1 ausführliche erläutert. Das Datenbeschaffungsmodell (3.1) wird also durch das Gleichungssystem

$$A\bar{f} = \bar{g}, \quad \text{mit } \bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_N)^\top \in \mathbb{R}^N, \\ \bar{g} = (g(\theta_1, s_{-q}), \dots, g(\theta_p, s_q))^\top \in \mathbb{R}^{p(2q+1)}.$$

approximiert und die Rekonstruktion ist durch Lösen des Gleichungssystems gegeben. Bei dem ART Verfahren werden die obigen Gleichungen iterativ gelöst. Ausgangspunkt ist ein Schätzbild, das nach jeden Strahl korrigiert wird. Daher besteht jeder Iterationsschritt  $k$  aus  $j = 1, \dots, p(2q+1)$  Teilschritten. Dabei wird jeweils die Differenz von den realen Projektionsdaten und den Projektionsdaten des geschätzten Bildes berechnet, ein Korrekturterm gebildet und damit das aktuelle Schätzbild aktualisiert. Die mathematische Formulierung lautet

$$f^{k,j} = f^{k,j-1} + w \frac{g_j - \langle a_{j\cdot}, f^{k,j-1} \rangle}{\|a_{j\cdot}\|^2} a_{j\cdot}^\top.$$

Dabei entspricht  $a_{j\cdot}$  der  $j$ -ten Zeile von  $A$  und  $w \in \mathbb{R}^+$  ist ein Relaxationsfilter, der die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens beeinflusst. Für  $w = 1$  trägt das Verfahren den Namen *Kaczmarz Methode* [19]. Diese Methode wird in Kapitel 5 im Vergleich mit dem vorgeschlagenen Verfahren verwendet.

### 3.3.3 Simultane Algebraische Rekonstruktionstechnik

Bei der ART werden die Korrekturen für jeden Strahl einzeln auf das Bild angewendet. Bei der 1984 von Kak und Anderson [1] entwickelten simultanen ART (SART) werden die Korrekturen für eine komplette Ansicht gesammelt und dann zusammen auf das Bild angewendet. Dieser Prozess wird für jede Projektion durchgeführt. Die Pixelwerte werden also mittels der Vorschrift

$$f_j^k = f_j^k + w \frac{\sum_{g_i \in R_\theta} \left[ \frac{g_i - \langle a_{i\cdot}, f^k \rangle}{\sum_{j=1}^N a_{ij}} a_{ij} \right]}{\sum_{g_i \in R_\theta} a_{ij}}$$

aktualisiert.

## Kapitel 4

# Compressed Sensing in der Computertomographie

Die CT ermöglicht eine nichtinvasive Untersuchung des Körperinneren. Aus diesem Grund ist die medizinische Diagnostik eines der Hauptanwendungsgebiete der CT. CT-Scans werden beispielsweise bei der Diagnose von Skelettschäden, Krebs oder Gefäßerkrankungen eingesetzt. Während der Untersuchung werden die Patienten einer hohen Strahlenmenge ausgesetzt. In seltenen Fällen werden dadurch Zellen beschädigt, was unter anderem ein erhöhtes Krebsrisiko zur Folge haben kann. Daher wird in der Forschung nach Möglichkeiten gesucht, wie die Strahlenbelastung bei der Untersuchung gesenkt werden kann. Eine besondere Anforderung ist dabei, dass die Strahlenbelastung reduziert wird, ohne dass die Aussagekraft der Bilder beeinträchtigt wird.

Ein möglicher Ansatz ist die Strahlenintensität zu reduzieren. Das hat allerdings zur Folge, dass nicht genügend Photonen im Detektor ankommen, was zu einem erhöhtem Rauschlevel im Sinogramm führt. Die rauschbehafteten Sinogramm-Daten verschlechtern die Qualität der rekonstruierten CT-Bilder, wenn ein herkömmlicher Lösungsalgorithmus, wie beispielsweise die gefilterte Rückprojektion, verwendet wird. Die Strahlendosis für den Patienten ist proportional zur Anzahl der Röntgenprojektionen. Daher ist eine andere Möglichkeit die Aufnahmezeit und die Strahlenmenge zu verringern, die Anzahl der Projektionswinkel zu reduzieren. Nur wenige Projektionswinkel erhöhen jedoch den Fehler bei der numerischen Integration in der Rückprojektion. Deshalb treten bei der Bildrekonstruktion mit der gefilterten Rückprojektion Streifenartefakte im rekonstruierten Bild auf. Das Einsetzen von Standardalgorithmen liefert also keine zufriedenstellenden Ergebnisse und ist deshalb auch nicht sinnvoll.

In diesem Kapitel wird eine neue Vorgehensweise vorgestellt, die in [31] vorgeschlagen wird. Ausgangspunkt ist auch hier die Reduktion der Aufnahmewinkel, allerdings wird eine CS basierte Lösungsmethode verwendet.

### 4.1 Diskretisierung des Problems

In der Theorie wird mit dem unendlich dimensional Problem  $\mathcal{R}f(\theta, s) = g(\theta, s)$  gearbeitet. In der Praxis stehen nur endlich viele Daten zur Verfügung. Daher wird das Problem entsprechend angepasst.

---

### 4.1.1 Diskretisierung der Daten

Tatsächlich gegeben sind die diskreten Daten

$$g(\theta_j, s_\ell), \quad s_\ell = h\ell, \quad \ell = -q, \dots, q,$$

$$\theta_j = \theta(\varphi_j), \quad \varphi_j = (j-1)\frac{\pi}{p}, \quad j = 1, \dots, p$$

für  $2q$  verschiedene Detektorpositionen mit Abstand  $h$  und für  $p$  verschiedenen Aufnahmewinkel. Das resultierende Rekonstruktionsproblem,  $f$  aus

$$\mathcal{R}f(\theta_j, s_\ell) = g(\theta_j, s_\ell) \quad (4.1)$$

zu bestimmen, ist semidiskret. Das heißt, das Problem der Rekonstruktion eines kontinuierlichen Grauwertbildes  $f$  aus den diskreten Projektionsdaten ist stark unterbestimmt.

### 4.1.2 Diskretisierung des Bildes

Ein Ausweg ist, das Bild  $f$  auf einen endlich dimensionalen Unterraum zu projizieren. Hier wird das mit Hilfe der Pixel-Darstellung von  $f$  realisiert, bei der die Bilddaten auf einem äquidistanten Gitter gegeben sind. Die Elemente des Gitters werden Pixel genannt. Die klassische Pixel-Darstellung von  $f$  entspricht der Approximation von  $f$  durch die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{f}_i b_i(x). \quad (4.2)$$

In dieser Notation bezeichnet  $N$  die Anzahl der Pixel und  $i$  den Pixelindex. Die Basisfunktion  $b_i$  ist die Indikatorfunktion für den  $i$ -ten Pixel, das heißt

$$b_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \text{Pixel } (i), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist  $\tilde{f}$  in jedem Pixel der Zerlegung konstant und das CT-Bild entsteht durch Umwandlung der Pixelwerte  $\bar{f}_i$  in Grauwerte. In der Praxis sind zur Zeit Auflösungen von  $512 \times 512$  bzw.  $1024 \times 1024$  Pixel üblich.

Die zweidimensionale Bildfunktion wird durch den eindimensionalen Bildvektor  $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_N)^\top$  repräsentiert, der durch spaltenweises Eintragen entsteht. Der Zusammenhang zu der zweidimensionalen Formulierung  $\tilde{f}_{t,s}$  wird mit Hilfe der Indexumformung

$$j = (s-1)n + t, \quad t = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, n$$

hergestellt. Dabei gibt die ganze Zahl  $n$  die Anzahl der Pixel in der Breite beziehungsweise Höhe des Bildes an. Die Gesamtanzahl der Pixel ist dann  $N = n^2$  und es gilt

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_{1,1} \\ \vdots \\ \bar{f}_{n,1} \\ \vdots \\ \bar{f}_{1,n} \\ \vdots \\ \bar{f}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \vdots \\ \bar{f}_n \\ \vdots \\ \bar{f}_{(n-1)n+1} \\ \vdots \\ \bar{f}_N \end{pmatrix}.$$

### 4.1.3 Das diskrete Rekonstruktionsproblem

Im nächsten Schritt wird mittels Einsetzen von (4.2) die linke Seite der semidiskreten Formulierung (4.1) durch den diskreten Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\tilde{f}(\theta_j, s_\ell) &= \mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^N \bar{f}_i b_i\right)(\theta_j, s_\ell) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{f}_i \underbrace{\mathcal{R}b_i(\theta_j, s_\ell)}_{A:=}. \end{aligned}$$

ersetzt. Die resultierende Systemmatrix  $A \in \mathbb{R}^{p(2q+1) \times N}$  ist unabhängig von dem Messobjekt und lässt sich anhand der Pixelunterteilung und Verteilung der Strahlen berechnen. Für einen Matrixeintrag gilt

$$\begin{aligned} a_{(j,\ell),i} &= \mathcal{R}b_i(\theta_j, s_\ell) \\ &= \int_{L(\theta_j, s_\ell)} b_i(x) dx \\ &= \text{Länge}(\text{Pixel}(i) \cap L(\theta_j, s_\ell)). \end{aligned}$$

In Abbildung 4.1 ist die Bestimmung der Matrixelemente bildhaft dargestellt.

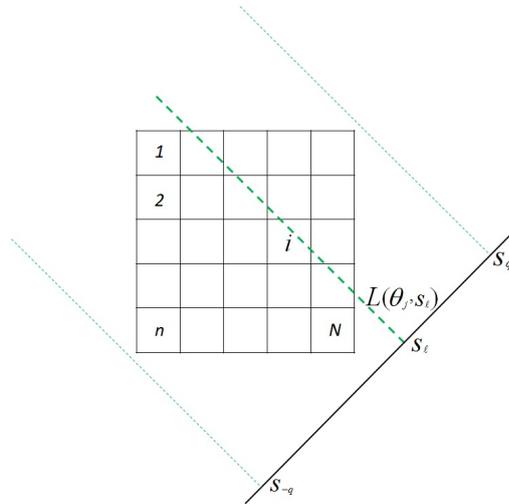


Abb. 4.1. Bestimmung der Systemmatrix

Die Rekonstruktion von  $\bar{f}$  ist folglich durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} A\bar{f} &= \bar{g}, \quad \text{mit } \bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_N)^\top \in \mathbb{R}^N, \\ \bar{g} &= (g(\theta_1, s_{-q}), \dots, g(\theta_p, s_q))^\top \in \mathbb{R}^{p(2q+1)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

gegeben.

---

## 4.2 Sparsity der CT-Bilder

Die Reduktion der Aufnahmewinkel hat zur Folge, dass die Anzahl der zur Verfügung stehenden Daten deutlich geringer ist, als die Anzahl der gesuchten Komponenten von  $\bar{f}$ . Das sparse-view CT-Bildrekonstruktionsproblem (4.3) ist somit ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem. Das bedeutet, die Bedingung  $A\bar{f} = \bar{g}$  liefert normalerweise nicht genügend Informationen, um eine vernünftige Lösung berechnen zu können. Deshalb müssen a priori Informationen in das Rekonstruktionsverfahren eingebunden werden. An dieser Stelle kommt die Idee des Compressed Sensing ins Spiel. Denn wie bereits in Kapitel 2 gezeigt wurde, können unterbestimmte lineare Gleichungssysteme, unter Annahme der Dünnbesetztheit der Lösung und bestimmten Anforderungen an die Messmatrix, eindeutig gelöst werden.

### 4.2.1 TV-Modell

Medizinische Bilder erfüllen in der Regel nicht die Sparsity-Bedingung, die eine notwendige Voraussetzung für eine erfolgreiche Rekonstruktion bei unterabgetasteten Daten ist. Es gibt jedoch eine andere Sparsity-Eigenschaft, die eine große Klasse tomographischer Bilder abdeckt. Oft sind diese Bilder relativ konstant innerhalb ausgedehnter Volumen, zum Beispiel innerhalb eines Organs. Sprunghafte Änderungen der Grauwerte im Bild treten nur an den Begrenzungen der Strukturen auf. Daher ist das Gradientenbild im Gegensatz zu dem eigentlichen Bild sparse, oder zumindest komprimierbar [26].



Abb. 4.2. *links*:  $512 \times 512$  Shepp-Logan Phantom, *rechts*: Gradientenbild vom Shepp-Logan Phantom. Hier sind 257758 von 262144 Einträgen null. Das Gradientenbild ist also 4386-sparse.

Dieses Wissen wird genutzt, indem das Bild  $\bar{f}$  in das zugehörige Gradientenbild transformiert wird.

Der *Gradient* von  $\bar{f}_{t,s}$  ist definiert durch

$$(\nabla \bar{f})_{t,s} = ((\partial_x \bar{f})_{t,s}, (\partial_y \bar{f})_{t,s})^\top,$$

wobei die *Vorwärtsdifferenzenoperatoren* in  $x$ - und  $y$ -Richtung gegeben sind durch

$$\begin{aligned} (\partial_x \bar{f})_{t,s} &= \begin{cases} \bar{f}_{t,s+1} - \bar{f}_{t,s}, & \text{für } s < n, \\ 0, & \text{für } s = n, \end{cases} \\ (\partial_y \bar{f})_{t,s} &= \begin{cases} \bar{f}_{t+1,s} - \bar{f}_{t,s}, & \text{für } t < n, \\ 0, & \text{für } t = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Die  $x$ -Richtung entspricht der horizontalen und  $y$  der vertikalen Richtung im Bild. Zur Berechnung der Ableitungen an den Rändern wird das Bild konstant fortgesetzt. Des Weiteren sei die Norm des Gradienten von  $\bar{f}_{t,s}$  gegeben durch

$$\|\nabla \bar{f}_{t,s}\|_p := (|\partial_x \bar{f}_{t,s}|^p + |\partial_y \bar{f}_{t,s}|^p)^{1/p}, \quad \text{für } p \geq 1.$$

Das Bild, bestehend aus den Komponenten  $\|\nabla \bar{f}_{1,1}\|_p, \dots, \|\nabla \bar{f}_{n,n}\|_p$  wird als *Gradientenbild* bezeichnet. Die  $l_1$ -Norm angewendet auf  $\nabla \bar{f}$  ist auch als Totalvariation des Bildes bekannt.

**Definition 4.2.1.** Die *Totalvariation-Seminorm (TV-Seminorm)* ist eine Abbildung definiert gemäß

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{TV,p}: \mathbb{R}^N &\rightarrow [0, \infty) \\ z &\rightarrow \|z\|_{TV,p} = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \|\nabla z_{t,s}\|_p. \end{aligned}$$

Für  $p = 1$  ist

$$\|z\|_{TV,1} = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \|\nabla z_{t,s}\|_1 = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n (|\partial_x \bar{f}|_{t,s} + |\partial_y \bar{f}|_{t,s}).$$

Die TV-Minimierung wurde erstmals 1992 von Rudin et al. zum Entrauschen von Bildern vorgeschlagen und ist seitdem in der Bildverarbeitung eine häufig eingesetzte Bildentrauschungsmethode. Sie zeichnet sich vor allem durch die Eigenschaft aus, dass Rauschen im Bild geglättet wird und gleichzeitig wichtige Details wie Kanten erhalten bleiben. Die Verwendung hier geht in eine andere Richtung.

Wenn benachbarte Pixel denselben Grauwert besitzen, dann verschwindet der entsprechende Vorwärtsdifferenzenoperator und wird bei der TV-Abbildung nicht berücksichtigt. Das bedeutet, die Minimierung der TV-Seminorm von  $\bar{f}$  führt zu sparsen Lösungen. Diese Eigenschaft wird genutzt, indem das CT-Bild durch Lösen des restringierten Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\bar{f}\|_{TV,1} \\ \text{u. d. N} \quad & A\bar{f} = \bar{g}. \end{aligned}$$

wiederhergestellt wird.

In der praktischen Anwendung kommt es häufig vor, dass die vorliegenden Daten  $\bar{g}$  fehlerbehaftet sind, oder  $\bar{f}$  in der Sparsity-Transformation nicht sparse, sondern nur

komprimierbar ist. Deshalb wird die Gleichungsrestriktion abgeschwächt und das Problem

$$\begin{aligned} & \min \|\bar{f}\|_{TV,1} \\ \text{u. d. N. } & \|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2 \leq \epsilon \end{aligned} \quad (4.4)$$

wird betrachtet. Der Parameter  $\epsilon \geq 0$  bezeichnet die Fehlertoleranz. Das Problem (4.4) ist eng verwandt mit dem unbeschränkten Optimierungsproblem

$$\min \|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2 + \gamma_1 \|\bar{f}\|_{TV,1}. \quad (4.5)$$

Dabei entspricht der Regulierungsparameter  $\gamma_1 \geq 0$  dem Kehrwert des Lagrange-Multiplikators der Nebenbedingung in (4.4). Die Probleme (4.4) und (4.5) sind äquivalent im Sinne des folgenden Satzes.

**Satz 4.2.2.**

- (i) Ist  $\bar{f}^*$  eine Lösung von (4.5) mit  $\gamma_1 > 0$ , dann existiert ein  $\epsilon = \epsilon_{\bar{f}^*} \geq 0$ , so dass  $\bar{f}^*$  eine Lösung von (4.4) ist.
- (ii) Ist  $\bar{f}^*$  eine Lösung von (4.4) mit  $\epsilon \geq 0$ , dann existiert ein  $\gamma_1 = \gamma_{1,\bar{f}^*} > 0$ , so dass  $\bar{f}^*$  eine Lösung von (4.5) ist.

**Beweis.** (i) Setze

$$\epsilon := \|A\bar{f}^* - \bar{g}\|_2^2 \quad (\star)$$

und betrachte  $\bar{f} \in \mathbb{R}^N$  mit

$$\|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2 \leq \epsilon. \quad (\star\star)$$

Da  $\bar{f}^*$  (4.5) minimiert, gilt

$$\|A\bar{f}^* - \bar{g}\|_2^2 + \gamma_1 \|\bar{f}^*\|_{TV,1} \leq \|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2 + \gamma_1 \|\bar{f}\|_{TV,1}.$$

Außerdem ist wegen  $(\star)$  und  $(\star\star)$

$$\|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2 + \gamma_1 \|\bar{f}\|_{TV,1} \leq \|A\bar{f}^* - \bar{g}\|_2^2 + \gamma_1 \|\bar{f}\|_{TV,1}.$$

Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned} & \|A\bar{f}^* - \bar{g}\|_2^2 + \gamma_1 \|\bar{f}^*\|_{TV,1} \leq \|A\bar{f}^* - \bar{g}\|_2^2 + \gamma_1 \|\bar{f}\|_{TV,1} \\ \iff & \|\bar{f}^*\|_{TV,1} \leq \|\bar{f}\|_{TV,1}. \end{aligned}$$

Also löst  $\bar{f}^*$  das Problem (4.4), vgl. Proposition 3.2 in [15].

(ii) Die zweite Behauptung folgt aus der Bemerkung B.29. in [15].  $\square$

**Bemerkung.**

- 1) Im Allgemeinen sind die Parameter, für die die Probleme äquivalent sind, nicht a priori bekannt und müssen durch Lösen der Probleme bestimmt werden.
- 2) Die unrestringierte Formulierung (4.5) wird wegen ihrer engen Verbindung zur konvexen quadratischen Optimierung oft bevorzugt, da für solche Probleme viele Lösungsalgorithmen und Software zur Verfügung stehen.

### 4.2.2 TV-Wavelet-Modell

Bei der Rekonstruktion mit dem TV-Modell (4.5) verschwinden oftmals Struktur-  
begrenzungen mit geringem Kontrast. Das führt zum Verlust von Bereichen mit  
geringen Kontrastinformationen, wie beispielsweise bei sehr kleinen Tumoren. Um  
diesen Nachteil zu überwinden, wird hier eine CS-Methode benutzt, bei der zwei  
Sparsity-Transformationen kombiniert werden. Zusätzlich zu dem TV-Term wird  
ein Wavelet-Term eingeführt. Das ist eine geeignete Wahl für die CS Anwendung,  
da die Wavelet-Koeffizienten komprimierbar sind. [31]

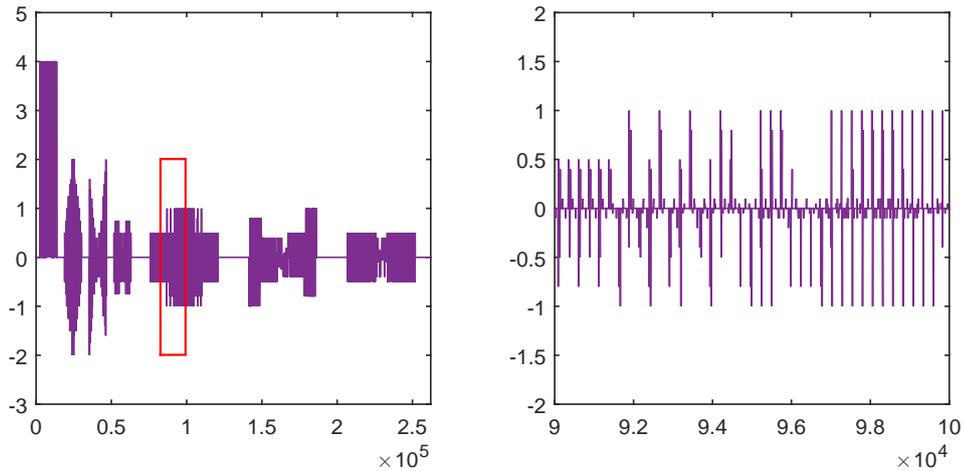


Abb. 4.3. *links*: Wavelet-Koeffizienten vom Shepp-Logan Phantom, *rechts*: Zoom.

Der Wavelet-Ausdruck sorgt dafür, dass Kanten und Bereiche mit geringem Kontrast  
erhalten bleiben. Der TV-Term ist effizient bei der Unterdrückung von Rausch- und  
Streifenartefakten. Auf diese Weise wird eine gute Balance zwischen Artefaktunter-  
drückung und Detailerhaltung erreicht. Das Optimierungsproblem, das im sparse-  
view Fall zur CT-Bildrekonstruktion gelöst werden muss, lautet

$$\arg \min_{\bar{f}} \gamma_1 \|\bar{f}\|_{TV} + \gamma_2 \|\Phi \bar{f}\|_1 + \|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2, \quad (4.6)$$

mit der Wavelet-Transformation  $\Phi$  und  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ . Die Regularisierungsparameter  
 $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  kontrollieren die Stärke der Glättung. Bei großem  $\gamma_1$  und kleinem  $\gamma_2$   
gehen Detailinformationen verloren. Umgekehrt, für kleines  $\gamma_1$  und großes  $\gamma_2$  ist die  
Methode anfällig für Rauschen und Artefakte. [31]

**Bemerkung.** Jede Seminorm  $\|\cdot\|$ , also insbesondere jede Norm ist eine konvexe  
Abbildung, denn aufgrund der Normeigenschaften (2) und (3) (vgl. Kapitel 1.1) gilt  
für alle  $\lambda \in [0, 1]$ :

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\|.$$

Die TV-Seminorm ist konvex, aber nicht streng konvex. Es existiert also ein globales  
Minimum von (4.6), aber dieses muss nicht eindeutig sein.

---

## 4.3 Lösungsalgorithmus

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Lösung des Minimierungsproblems (4.6). Für unrestringierte nichtlineare Optimierungsprobleme stehen verschiedene Algorithmen zur Verfügung. Für hochdimensionale Probleme dieser Art ist das konjugierte Gradientenverfahren gut geeignet.

Zur Bestimmung der Abstiegsrichtung muss der Gradient des Zielfunktional berechnet werden. Damit der Gradient berechnet werden kann, werden verschiedene Umformungen durchgeführt.

### 4.3.1 Formulierung in Matrixschreibweise

Im erste Schritt wird der Ausdruck  $\|\bar{f}\|_{TV}$  in seine Matrix Form überführt. Dazu wird zuerst der eindimensionale Fall betrachtet und daraus dann der zweidimensionale Fall abgeleitet.

#### Der eindimensionale Fall

Gegeben sei ein eindimensionales Signal  $z \in \mathbb{R}^N$ . Wird die Matrix  $\tilde{D}$  definiert durch

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

dann gilt

$$\|z\|_{TV,1} = \|\tilde{D}z\|_1.$$

#### Der zweidimensionale Fall

Gegeben sei ein zweidimensionales Bild  $z$  in der Vektorschreibweise  $z \in \mathbb{R}^N$  mit  $N = n^2$ . Das Pendant zu  $\tilde{D}$  ist im zweidimensionalen Fall die Matrix  $D$ , die mit Hilfe des Kronecker-Produkts ausgedrückt werden kann

$$D = \begin{pmatrix} \tilde{D}_n \otimes I_n \\ I_n \otimes \tilde{D}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n & I_n & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -I_n & I_n & \\ & & & & 0 \cdot -I_n & 0 \cdot I_n \\ \tilde{D}_n & & & & & \\ & \tilde{D}_n & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \tilde{D}_n & & \\ & & & & \tilde{D}_n & \\ & & & & & \tilde{D}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times N}.$$

Im endlichdimensionalen Raum ist das *Kronecker-Produkt* einer  $m \times n$  Matrix  $B$  und einer  $p \times q$  Matrix  $C$  definiert durch

$$B \otimes C = \begin{pmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1n}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}C & \cdots & b_{mn}C \end{pmatrix}.$$

Der TV-Operator kann formuliert werden durch

$$\|z\|_{TV,1} = \|Dz\|_1.$$

### 4.3.2 Berechnung des Gradienten

In der Problemformulierung

$$\arg \min_{\bar{f}} \gamma_1 \|\bar{f}\|_{TV} + \gamma_2 \|\Phi \bar{f}\|_1 + \|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2$$

wird die TV-Norm nun durch die Matrixschreibweise ersetzt. Dann lautet das Optimierungsproblem

$$\arg \min_{\bar{f}} \gamma_1 \|D\bar{f}\|_1 + \gamma_2 \|\Phi \bar{f}\|_1 + \|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2. \quad (4.7)$$

Da die  $l_1$ -Norm an der Stelle Null nicht differenzierbar ist, kann das konjugierte Gradientenverfahren nicht direkt auf das Problem angewendet werden. Deshalb wird der Betrag in der  $l_1$ -Norm durch die differenzierbare Abbildung

$$\mu(t) = \sqrt{t^2 + \lambda^2}$$

approximiert, wobei der Glättungsparameter  $\lambda \geq 0$  sehr klein gewählt wird. Der ursprüngliche TV-Term

$$\|Dz\|_1 = \sum_{i=1}^{2N} |(D\bar{f})_i|$$

wird durch den differenzierbaren Ausdruck

$$P_\lambda(\bar{f}) := \sum_{i=1}^{2N} \mu((D\bar{f})_i)$$

approximiert. Analog wird der Wavelet-Term

$$\|\Phi z\|_1 = \sum_{i=1}^N |(\Phi \bar{f})_i|$$

durch die Approximation

$$Q_\lambda(\bar{f}) := \sum_{i=1}^N \mu((\Phi \bar{f})_i)$$

ersetzt und die differenzierbare Formulierung des Minimierungsproblems lautet

$$\arg \min_{\bar{f}} J_\gamma(\bar{f}), \quad \text{mit } J_\gamma(\bar{f}) = \gamma_1 P_\lambda(\bar{f}) + \gamma_2 Q_\lambda(\bar{f}) + \|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2. \quad (4.8)$$

Im nächsten Schritt werden die drei Summanden einzeln abgeleitet.

---

(i) Der Restriktionsterm lässt sich darstellen durch

$$\|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2 = (A\bar{f} - \bar{g})^\top (A\bar{f} - \bar{g}).$$

Das heißt, die Ableitung ist gegeben durch

$$\nabla \|A\bar{f} - \bar{g}\|_2^2 = 2A^\top (A\bar{f} - \bar{g}).$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_\lambda(\bar{f} + t\xi) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{2N} \mu((D\bar{f})_i + t(D\xi)_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2N} \mu'((D\bar{f})_i + t(D\xi)_i) (D\xi)_i \end{aligned}$$

und somit für  $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_\lambda(\bar{f} + t\xi)|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{2N} \mu'((D\bar{f})_i) (D\xi)_i \\ &= \sum_{i=1}^{2N} \frac{(D\bar{f})_i}{\sqrt{(D\bar{f})_i^2 + \lambda^2}} (D\xi)_i. \end{aligned}$$

Sei nun  $W_1$  eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen  $w_i = 1/\sqrt{(D\bar{f})_i^2 + \lambda^2}$ . Zusammen mit der Beziehung (1.1) folgt dann

$$\nabla P_\lambda(\bar{f}) = D^\top W_1 D\bar{f}.$$

(iii) Analog lässt sich  $\nabla Q_\lambda(\bar{f})$  schreiben als

$$\nabla Q_\lambda(\bar{f}) = \Phi^\top W_2 \Phi \bar{f},$$

wobei  $W_2$  eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen  $w_i = 1/\sqrt{(\Phi \bar{f})_i^2 + \lambda^2}$  ist.

Zusammenführen der Ableitungen liefert den Gradienten des Funktionals

$$\nabla J_\gamma(\bar{f}) = \gamma_1 D^\top W_1 D\bar{f} + \gamma_2 \Phi^\top W_2 \Phi \bar{f} + 2A^\top (A\bar{f} - \bar{g}). \quad (4.9)$$

### 4.3.3 Lösungsalgorithmus

Nach der Vorarbeit in den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 kann nun das Konjugierte Gradientenverfahren eingesetzt werden um eine numerische Lösung von (4.6) zu

bestimmen. Dazu wird der folgende Algorithmus durchgeführt:

**Algorithmus 4:** Konjugierte Gradientenverfahren

**Input:**

$\bar{g}$  - unterabgetastete Projektionsdaten  
 $A$  - Messmatrix  
 $\Phi$  - Wavelet-Transformationsoperator  
 $D$  - TV-Transformationsoperator  
 $W_1, W_2$  - Diagonalmatrizen  
 $\lambda$  - Glättungsparameter  $10^{-6}$   
 $\gamma_1, \gamma_2$  - Regularisierungsparameter  
 $TolGrad$  - Abbruchkriterium für Gradientenbetrag  $10^{-3}$   
 $MaxIter$  - Abbruchkriterium nach 200 Iterationen  
 $\delta, \eta$  - line-search Parameter

**%Initialisierung**

$k = 0, \bar{f}^0 = 0, g_0 = \nabla J_\gamma(\bar{f}^0), d^0 = -g_0$

**%Iterationen**

**while**  $\|g_0\|_2 > TolGrad$  or  $k < MaxIter$  **do**  
   $\sigma = 1$   
  **while**  $J_\gamma(\bar{f}^k + \sigma d^k) > J_\gamma(\bar{f}^k) + \delta \sigma g_0 d^k$  **do**  
     $\sigma = \eta \sigma$   
  **end**  
   $\bar{f}^{k+1} = \bar{f}^k + \sigma d^k$   
   $g_1 = \nabla J_\gamma(\bar{f}^{k+1})$   
   $\mu^k = g_1 - g_0$   
   $\beta_k = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\nabla J_\gamma(\bar{f}^{k+1})^\top \mu^k}{(d^k)^\top \mu^k}, \frac{\|\nabla J_\gamma(\bar{f}^k)\|_2^2}{(d^k)^\top \mu^k} \right\} \right\}$   
   $d^{k+1} = -g_1 + \beta_{k+1} d^k$   
   $g_0 = g_1$   
   $k = k + 1$

**end**

**Result:**  $\bar{f}$  - Approximation der Lösung von (4.8)

# Kapitel 5

## Experimentelle Ergebnisse

In diesem Kapitel wird die CT-Bildrekonstruktion mit Hilfe von Matlab simuliert und der vorgeschlagene Algorithmus 4 getestet. Dazu wird das  $512 \times 512$  Shepp-Logan Phantom verwendet. Das bekannte Modellphantom des menschlichen Kopfes besteht aus Ellipsen verschiedener Größen, Ausrichtungen und Dichten, die in Tabelle 5.1 aufgeführt sind.

Mittelpunkt Koordinate	große Halbachse	kleine Halbachse	Rotations- winkel	Dichte
(0,0)	0.92	0.69	90	2.0
(0,-0.0184)	0.874	0.6624	90	-0.8
(0.22,0)	0.31	0.11	72	-0.2
(-0.22,0)	0.41	0.16	108	-0.2
(0,0.35)	0.25	0.21	90	0.1
(0,0.1)	0.046	0.046	0	0.1
(0,-0.1)	0.046	0.046	0	0.1
(-0.08,-0.605)	0.046	0.023	0	0.1
(0,-0.605)	0.023	0.023	0	0.1
(0.06,-0.605)	0.046	0.023	90	0.1

Tabelle 5.1. Phantom Parameter

In jedem Versuch besteht ein Projektionsdatensatz aus jeweils 725 Messwerten. Die Aufnahmewinkel sind gleichmäßig über  $180^\circ$  verteilt, wobei die Anzahl der Winkel variiert. Zum Vergleich wird das Bild zusätzlich mit der gefilterten Rückprojektion (Shepp-Logan Filter), ART, SART und dem TV-Verfahren rekonstruiert.

### 5.1 Bewertungskriterien

Neben der visuellen Beurteilung der Rekonstruktionen wird die Qualität mit Hilfe von drei Kriterien bewertet.

**Relative mittlere quadratische Fehler**

Der relative mittlere quadratische Fehler (engl. relative root mean squared error, RRMSE) ist ein bewährtes Maß für die Rekonstruktionsgenauigkeit. Für ein Bild  $f$  und das entsprechende Referenzbild  $f_{ref}$  ist er definiert als

$$\text{RRMSE} = \frac{\|f - f_{ref}\|_2}{\|f_{ref}\|_2}.$$

Der RRMSE nimmt den Wert Null an, wenn die Rekonstruktion und das Referenzbild identisch sind. Außerdem gilt, je größer der RRMSE, desto schlechter ist die Rekonstruktion.

**Streifenartefakt Indikator**

Da häufig Streifenartefakte in den sparse-view CT-Rekonstruktionsbildern auftreten, wird das Streifen-Level durch den Streifenartefakt Indikator

$$\text{SI} = \text{TV}(f - f_{ref})$$

quantifiziert. Allerdings ist zu beachten, dass nicht unbedingt gilt: Je niedriger der Wert SI, desto weniger Streifenartefakte sind in dem rekonstruierten Bild vorhanden. Der Wert des SI steigt auch, wenn die räumlichen Auflösungen nicht übereinstimmen. Deshalb ist es sinnvoll nicht den Absolutwert, sondern die relative Änderung des Wertes zu betrachten, vgl. [27].

**Strukturelle Ähnlichkeit**

Ein weiteres Qualitätsmaß ist die strukturelle Ähnlichkeit (engl. structural similarity, SSIM), die in [29] von Wang et al. eingeführt wurde. Der lokale SSIM Index besteht aus drei Komponenten: der Ähnlichkeit der Leuchtdichten  $l(p, t)$ , der Kontrastähnlichkeit  $c(p, t)$  und der Strukturähnlichkeit  $s(p, t)$ . Dabei sind  $p$  und  $t$  hier lokale  $11 \times 11$  Bildfenster, die sich jeweils an den gleichen Stellen zweier Bilder befinden. Die lokale SSIM wird definiert als

$$\begin{aligned} S(p, t) &= l(p, t)^\alpha \cdot c(p, t)^\beta \cdot s(p, t)^\gamma \\ &= \left( \frac{2\mu_p\mu_t + C_1}{\mu_p^2 + \mu_t^2 + C_1} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{2\sigma_p\sigma_t + C_2}{\sigma_p^2 + \sigma_t^2 + C_2} \right)^\beta \cdot \left( \frac{2\sigma_{pt} + C_3}{\sigma_p\sigma_t + C_3} \right)^\gamma. \end{aligned}$$

Durch die Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  wird die Relevanz der Komponenten gewichtet. Hier wird  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  gesetzt.  $\mu_p$  und  $\mu_t$  bezeichnen die lokalen Mittelwerte,  $\sigma_p$  und  $\sigma_t$  die lokalen Standardabweichungen und  $\sigma_{pt}$  die Kreuzkorrelation. Die Konstanten  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  sichern die Stabilität der Terme, wenn die Nenner klein sind. In Anlehnung an [29] sind hier

$$C_1 = (K_1L)^2, \quad C_2 = (K_2L)^2 \quad \text{und} \quad C_3 = \frac{C_2}{2},$$

wobei  $L$  den Intensitätswertebereich angibt (bei 8 Bit können 256 verschiedene Werte angenommen werden) und  $K_1 = K_2 = 0.001$ . Der SSIM Wert des gesamten Bildes wird durch Zusammenfassung der lokalen SSIM Werte, in diesem Fall durch Mittelung, berechnet. Höhere SSIM Werte kennzeichnen ein qualitativ besseres Bild.

---

## 5.2 Wahl der Versuchsp Parameter

Um bei den Iterationsverfahren die optimale Anzahl der Durchläufe zu finden, werden verschiedene Versuche durchgeführt. Dabei werden der RRMSE, SI und SSIM Index in jeder Iteration bestimmt. Es werden Variationen mit verschiedenen Aufnahmewinkelanzahlen mit und ohne Rauschen berücksichtigt. Die Ergebnisse sind auszugsweise in Abbildung 5.1 dargestellt.

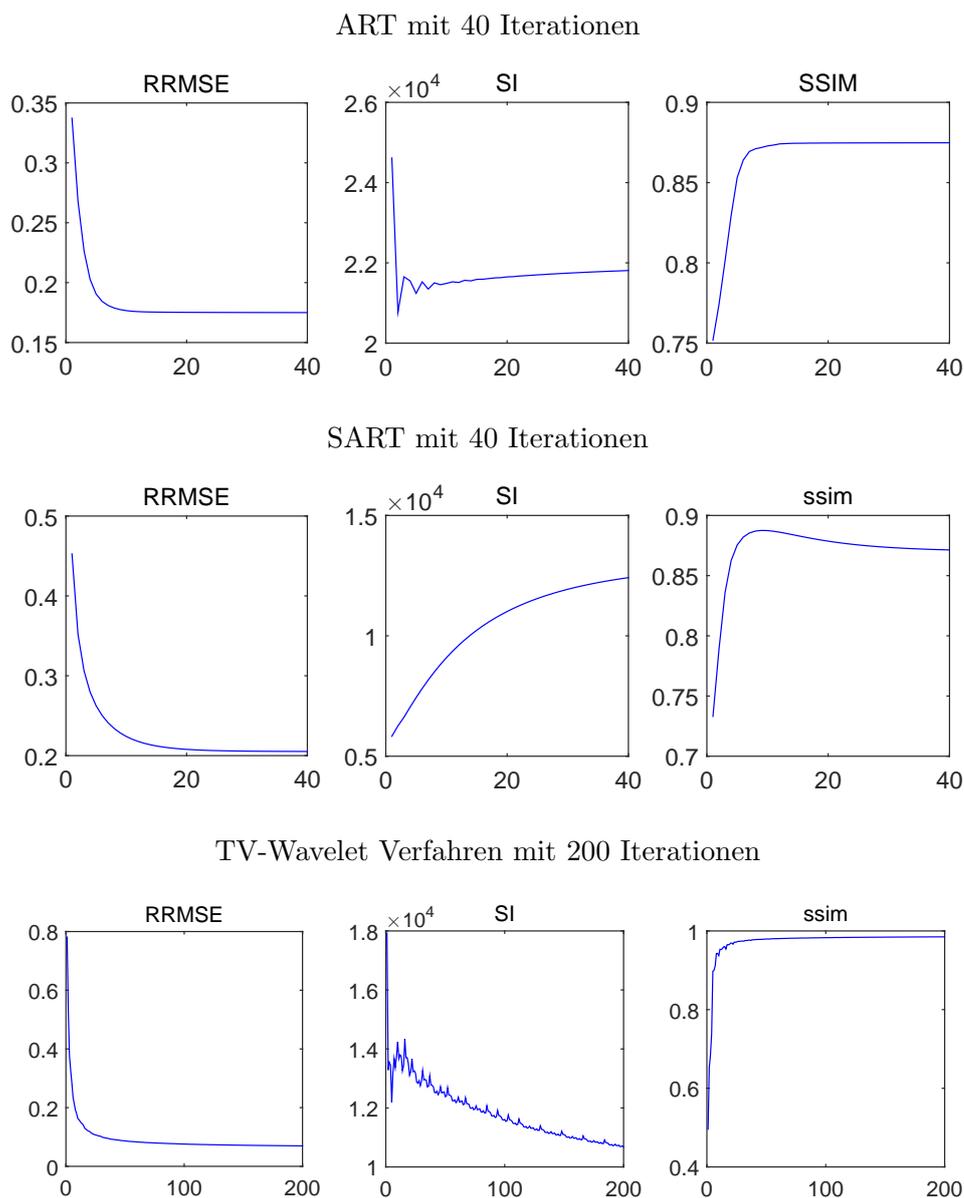


Abb. 5.1. Bewertungskriterien für 30 Aufnahmewinkel ohne Rauschen

Beim ART-Verfahren bleiben alle drei Bewertungsgrößen nach 30 Iterationen nahezu unverändert. Daher wird in allen Experimenten die ART mit 30 Iterationen durchgeführt. Die optimale Anzahl der Durchläufe der SART liegt bei 20. Für die TV-Methode und die TV-Wavelet-Methode werden im folgenden jeweils 150 Itera-

tionen betrachtet.

Sowohl bei der TV-Methode als auch dem TV-Wavelet Verfahren müssen zusätzlich noch die Regularisierungsparameter festgelegt werden.

$\gamma_1$	SI	SSIM	RRMSE
0.04	$1.1032 \cdot 10^4$	0.9817	0.0813
0.05	$1.0968 \cdot 10^4$	0.9818	0.0814
0.06	$1.0874 \cdot 10^4$	0.9819	0.0813
0.07	$1.0832 \cdot 10^4$	0.9821	0.0807
0.08	$1.0879 \cdot 10^4$	0.9819	0.0813
0.09	$1.0863 \cdot 10^4$	0.9822	0.0810
0.1	$1.0866 \cdot 10^4$	0.9821	0.0809
0.2	$1.1553 \cdot 10^4$	0.9812	0.0819

Tabelle 5.2. Parameterwahl für TV-Methode

$\gamma_1$	$\gamma_2$	SI	SSIM	RRMSE
0.06	0.01	$1.0790 \cdot 10^4$	0.9821	0.0808
0.06	0.02	$1.0927 \cdot 10^4$	0.9819	0.0813
0.06	0.03	$1.1796 \cdot 10^4$	0.9823	0.0804
0.06	0.04	$1.0832 \cdot 10^4$	0.9822	0.0805
0.06	0.05	$1.1796 \cdot 10^4$	0.9821	0.0808
0.05	0.03	$1.0866 \cdot 10^4$	0.9821	0.0807
0.07	0.03	$1.0824 \cdot 10^4$	0.9821	0.0809

Tabelle 5.3. Parameterwahl für TV-Wavelet-Methode

Anhand der Bewertungsgrößen für die verschiedenen Parameter, die auszugsweise in den obigen Tabellen aufgelistet sind, wurde  $\gamma_1 = 0.07$  als Parameter für das TV-Verfahren ausgesucht. Bei die TV-Wavelet-Methode werden  $\gamma_1 = 0.06$  und  $\gamma_2 = 0.03$  gewählt. Insgesamt fällt jedoch auf, dass die Resultate für die verschiedenen Parameter sehr ähnlich sind, so lange die Parameter nicht zu groß sind.

### 5.3 Rekonstruktion aus exakten Daten

Die Ergebnisse der verschiedenen Rekonstruktionen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. In der ersten Abbildung sind die Rekonstruktionsergebnisse für 20 Durchstrahlungswinkel dargestellt. In den Abbildungen 5.3, 5.4 und 5.5 sind die entsprechenden Resultate für 30, 45 bzw. 60 Aufnahmewinkel abgebildet.

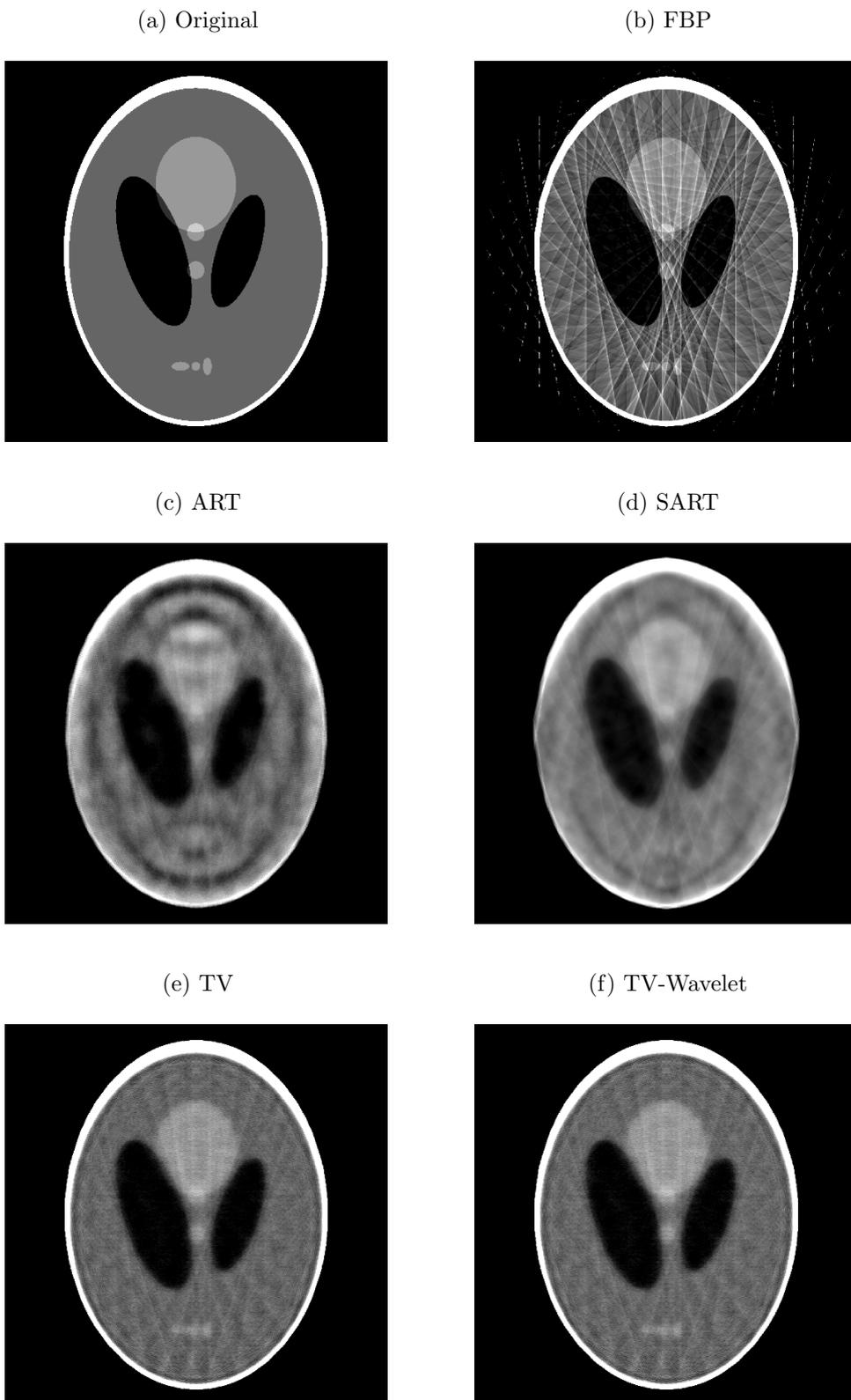


Abb. 5.2. Rekonstruktionsergebnisse bei 20 Projektionen

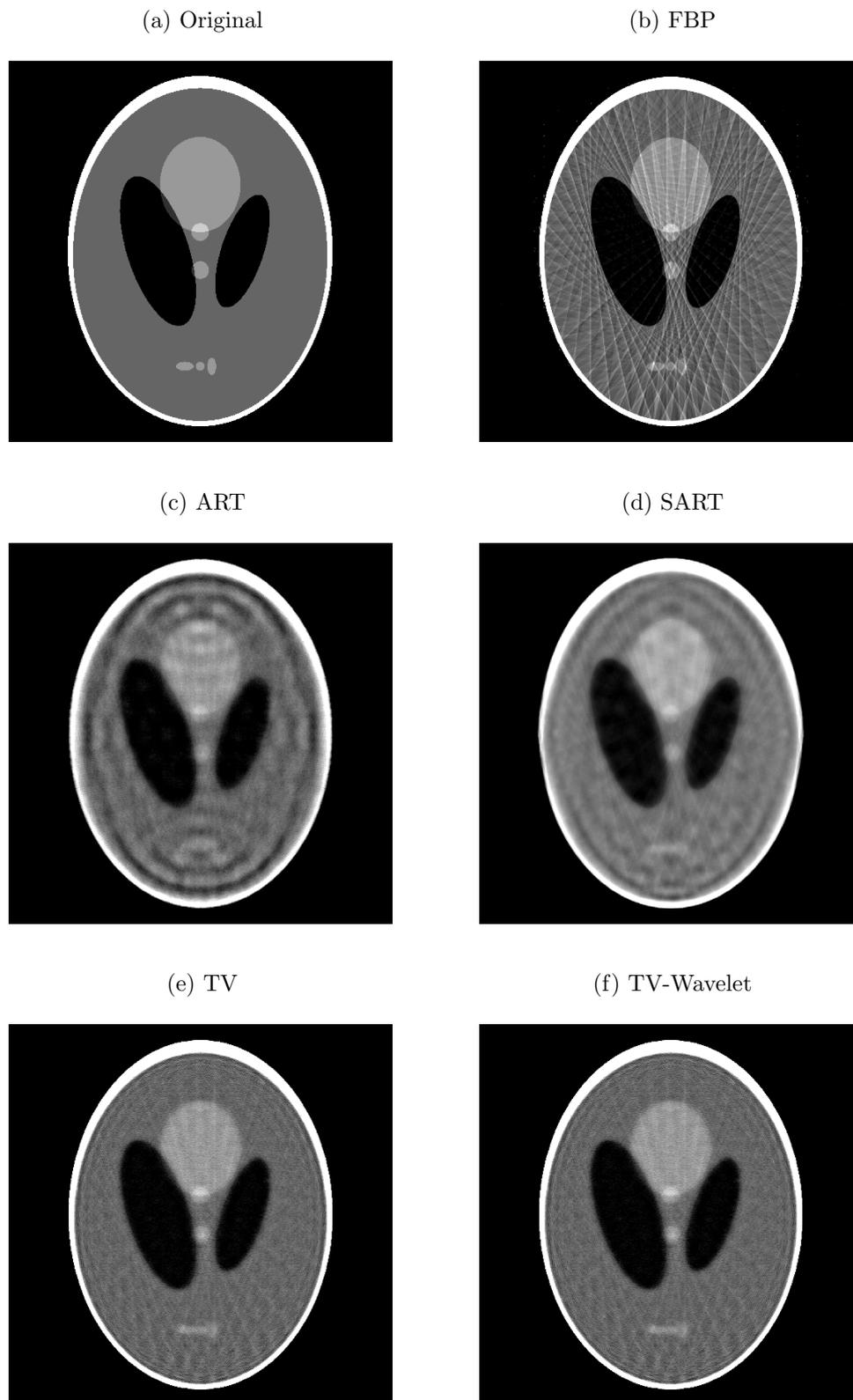


Abb. 5.3. Rekonstruktionsergebnisse bei 30 Projektionen

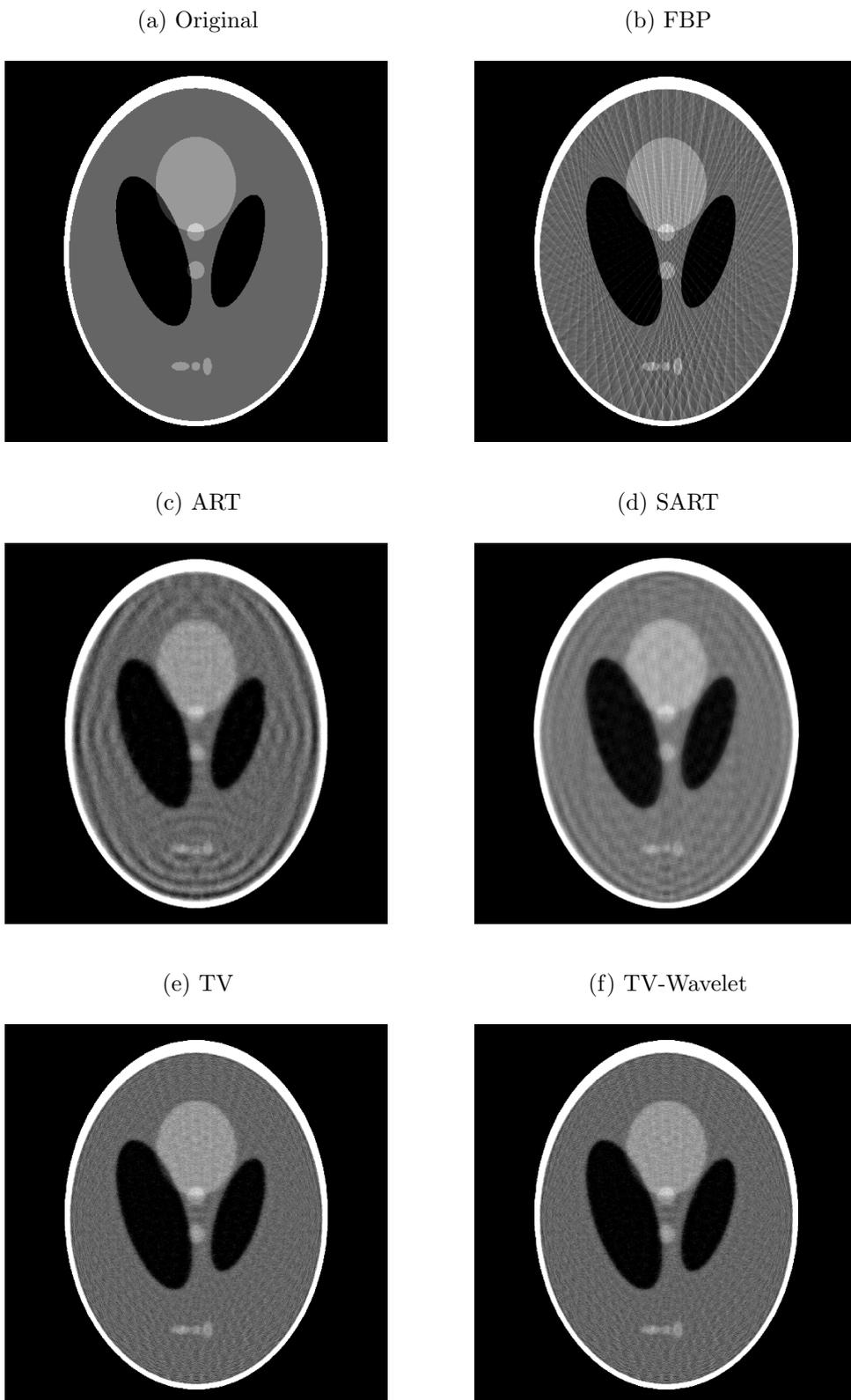


Abb. 5.4. Rekonstruktionsergebnisse bei 45 Projektionen

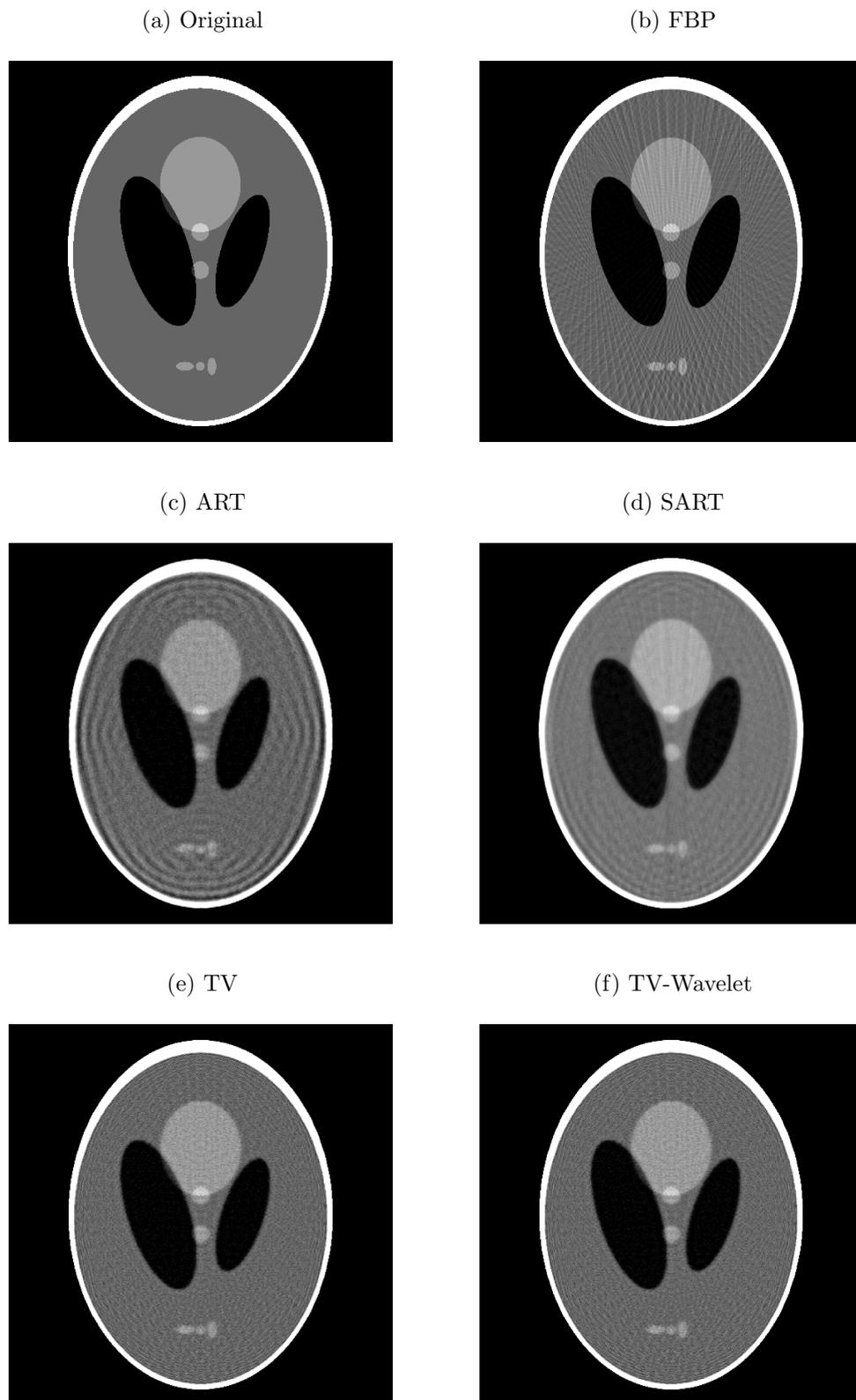


Abb. 5.5. Rekonstruktionsergebnisse bei 60 Projektionen

Die Abbildungen zeigen, dass die TV- und TV-Wavelet Rekonstruktionen in allen vier Fällen eine wesentlich bessere Auflösung haben als die ART und SART Rekonstruktionen. Außerdem weisen die TV- und TV-Wavelet Bilder im Vergleich zur gefilterten Rückprojektion wesentlich weniger Streifenartefakte auf. In Abbildung 5.2 werden die drei kleinen Ellipsen in (e) und (f) bereits erfasst, aber in (c) und (d) noch nicht. Allerdings sind die Strukturbegrenzungen der TV-Wavelet Bilder mit nur 20 Durchstrahlungswinkeln verschwommen. Obwohl die Rekonstruktion mit der TV-Wavelet-Methode auch bei 60 Winkeln noch leicht unscharf ist, sind die drei kleinen Ellipsen deutlich zu erkennen.

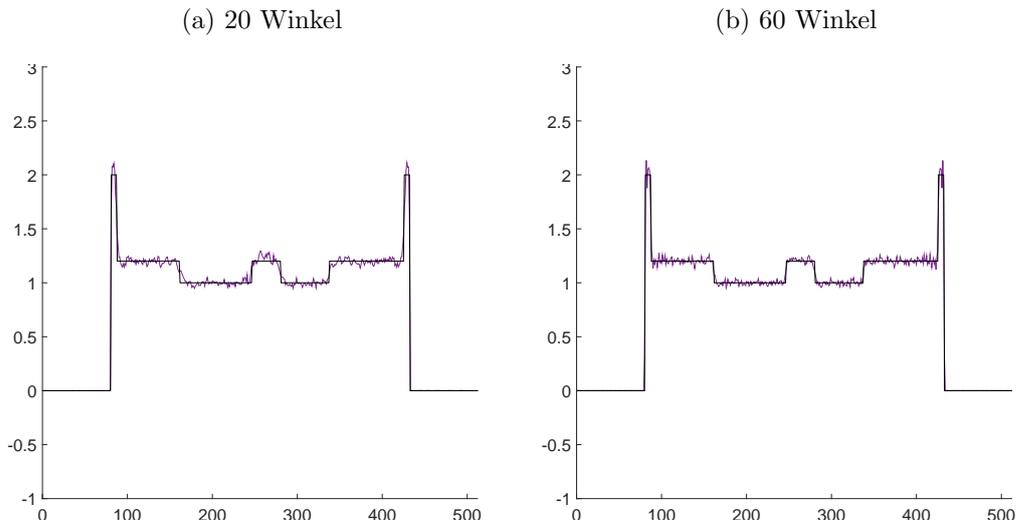


Abb. 5.6. TV-Wavelet Rekonstruktionsprofil

Der optische Eindruck wird durch die Profilbilder in Abbildung 5.6 und durch die Werte in Tabelle 5.4 bestätigt. Der relative Fehler ist bei den TV-Wavelet Rekonstruktionen immer am niedrigsten und der strukturelle Ähnlichkeitsindex immer am nächsten bei eins. Allerdings fällt auf, dass bei den Rekonstruktionen mit dem Shepp-Logan Modellphantom nahezu kein Unterschied zwischen dem TV-Verfahren und dem TV-Wavelet-Verfahren zu erkennen ist. Das kann an der Beschaffenheit des Modellphantoms liegen, welches nur aus stückweise konstanten Flächen mit runden Strukturbegrenzungen besteht. In [31] sind die Tests mit anderen Daten, insbesondere auch mit realen Daten, durchgeführt worden. Dort ist zu sehen, dass die Strukturbegrenzungen bei der TV-Wavelet-Methode wesentlich schärfer sind im Vergleich zur TV-Methode.

Projektionen	Methode	SI	SSIM	RRMSE
20	FBP	$4.2079 \cdot 10^4$	0.7637	0.3833
	ART	$2.0162 \cdot 10^4$	0.8495	0.2101
	SART	$1.1011 \cdot 10^4$	0.8786	0.2078
	TV	$1.0819 \cdot 10^4$	0.9821	0.0807
	TV-Wavelet	$1.0737 \cdot 10^4$	0.9824	0.0802

Projektionen	Methode	SI	SSIM	RRMSE
30	FBP	$3.9353 \cdot 10^4$	0.7845	0.2987
	ART	$2.1744 \cdot 10^4$	0.8748	0.1751
	SART	$1.2207 \cdot 10^4$	0.9056	0.1684
	TV	$1.1110 \cdot 10^4$	0.9842	0.0718
	TV-Wavelet	$1.1110 \cdot 10^4$	0.9842	0.0718
45	FBP	$3.2415 \cdot 10^4$	0.8276	0.2148
	ART	$2.1587 \cdot 10^4$	0.9060	0.1424
	SART	$1.3927 \cdot 10^4$	0.9326	0.1379
	TV	$1.0496 \cdot 10^4$	0.9873	0.0642
	TV-Wavelet	$1.0492 \cdot 10^4$	0.9873	0.0642
60	FBP	$2.8812 \cdot 10^4$	0.8632	0.1786
	ART	$2.1151 \cdot 10^4$	0.9296	0.1211
	SART	$1.3875 \cdot 10^4$	0.9486	0.1215
	TV	$9.8888 \cdot 10^3$	0.9889	0.0601
	TV-Wavelet	$9.8450 \cdot 10^3$	0.9890	0.0594

Tabelle 5.4. Qualitätsmerkmale der Rekonstruktionsergebnisse

## 5.4 Rekonstruktion aus fehlerbehafteten Daten

Mit dem Zweck die Versuche etwas realistischer zu gestalten und den Algorithmus auf seine Stabilität hin zu überprüfen wird den Sinogrammdaten nun additives weißes gaußsches Rauschen  $w$  mit

$$\frac{\|w\|_2}{\|g_{\text{exakt}}\|_2} = 0.005$$

hinzugefügt und die in Abschnitt 5.3 gemachten Versuche wiederholt.

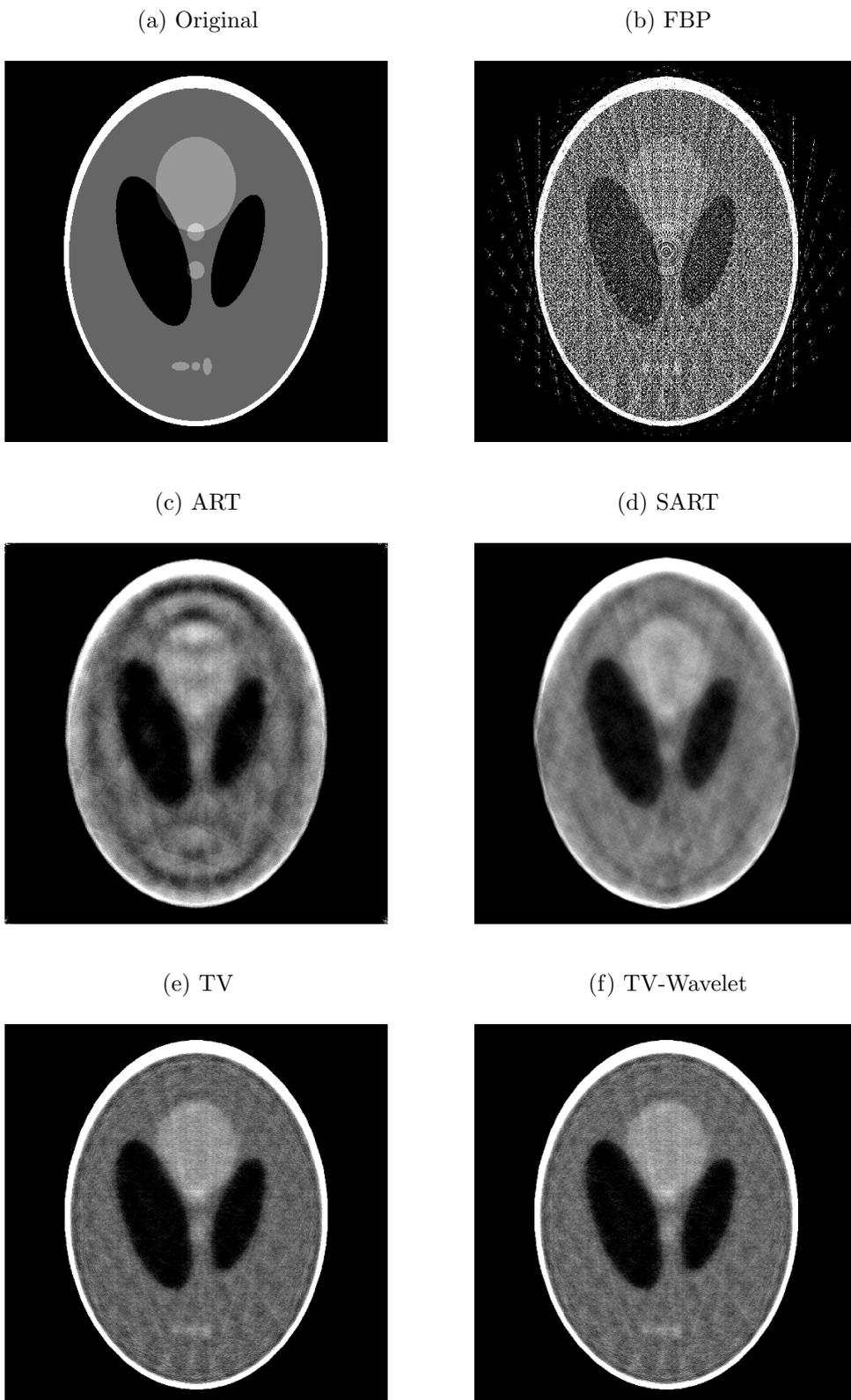


Abb. 5.7. Rekonstruktionsergebnisse bei 20 Projektionen

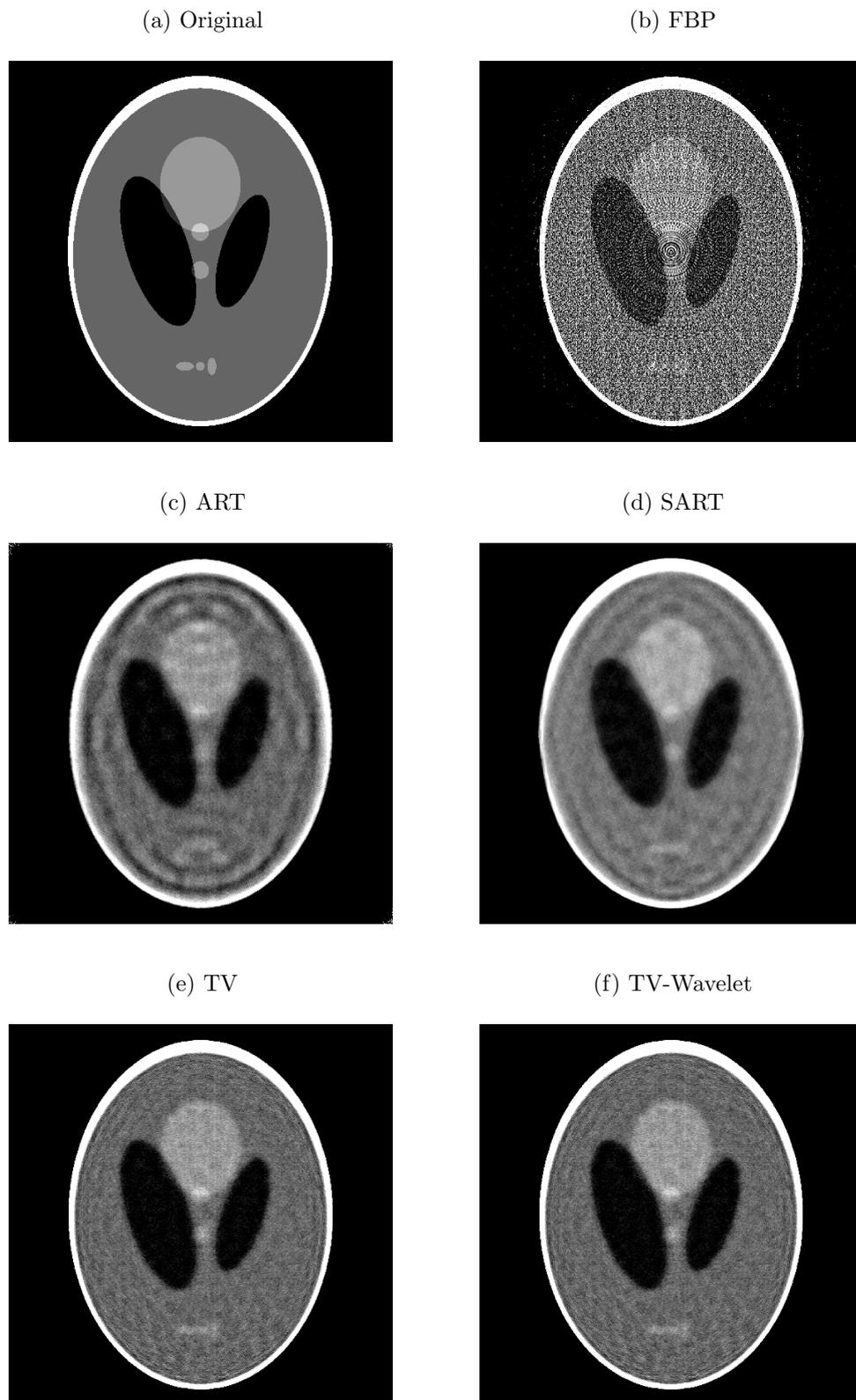


Abb. 5.8. Rekonstruktionsergebnisse bei 30 Projektionen

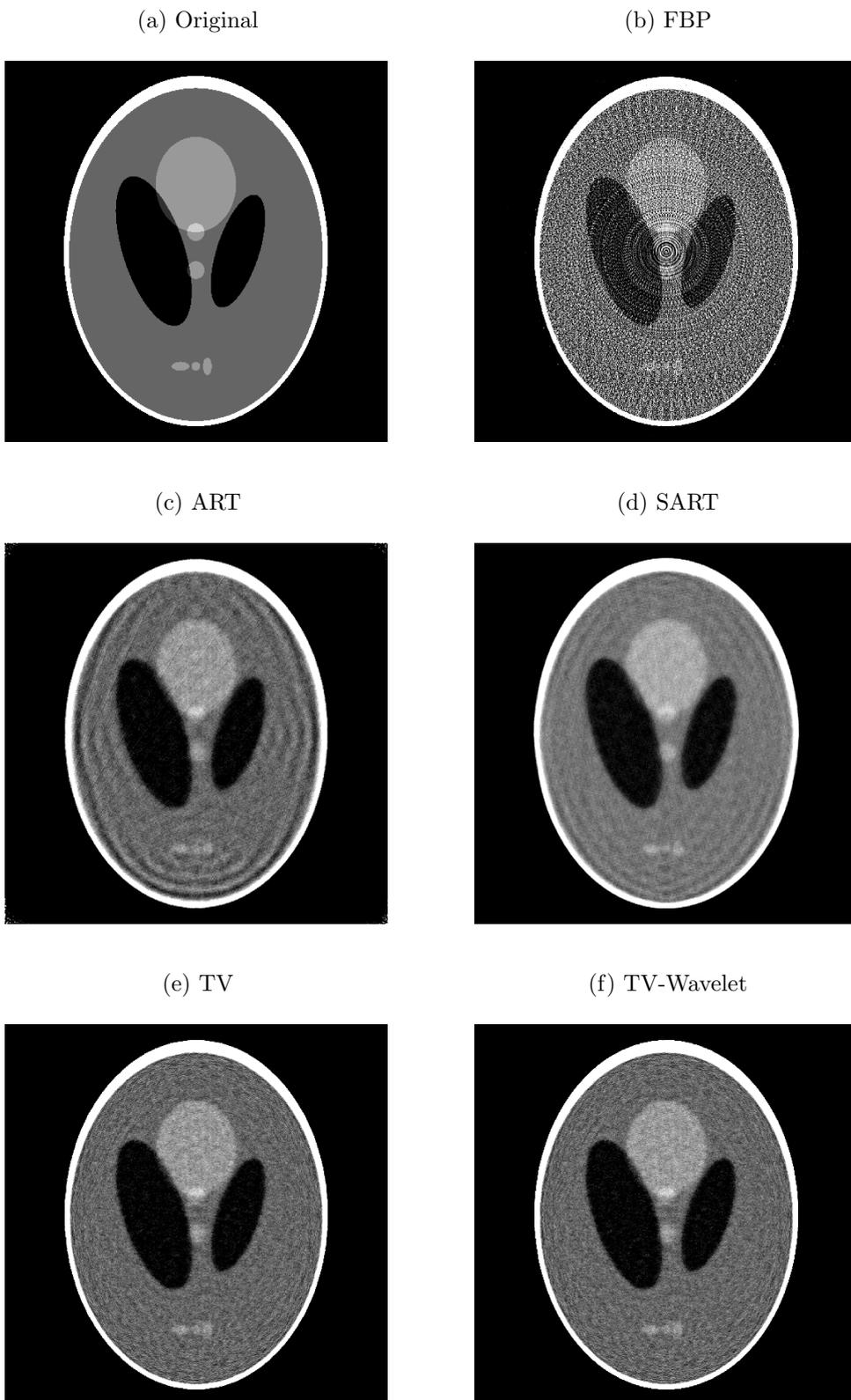


Abb. 5.9. Rekonstruktionsergebnisse bei 45 Projektionen

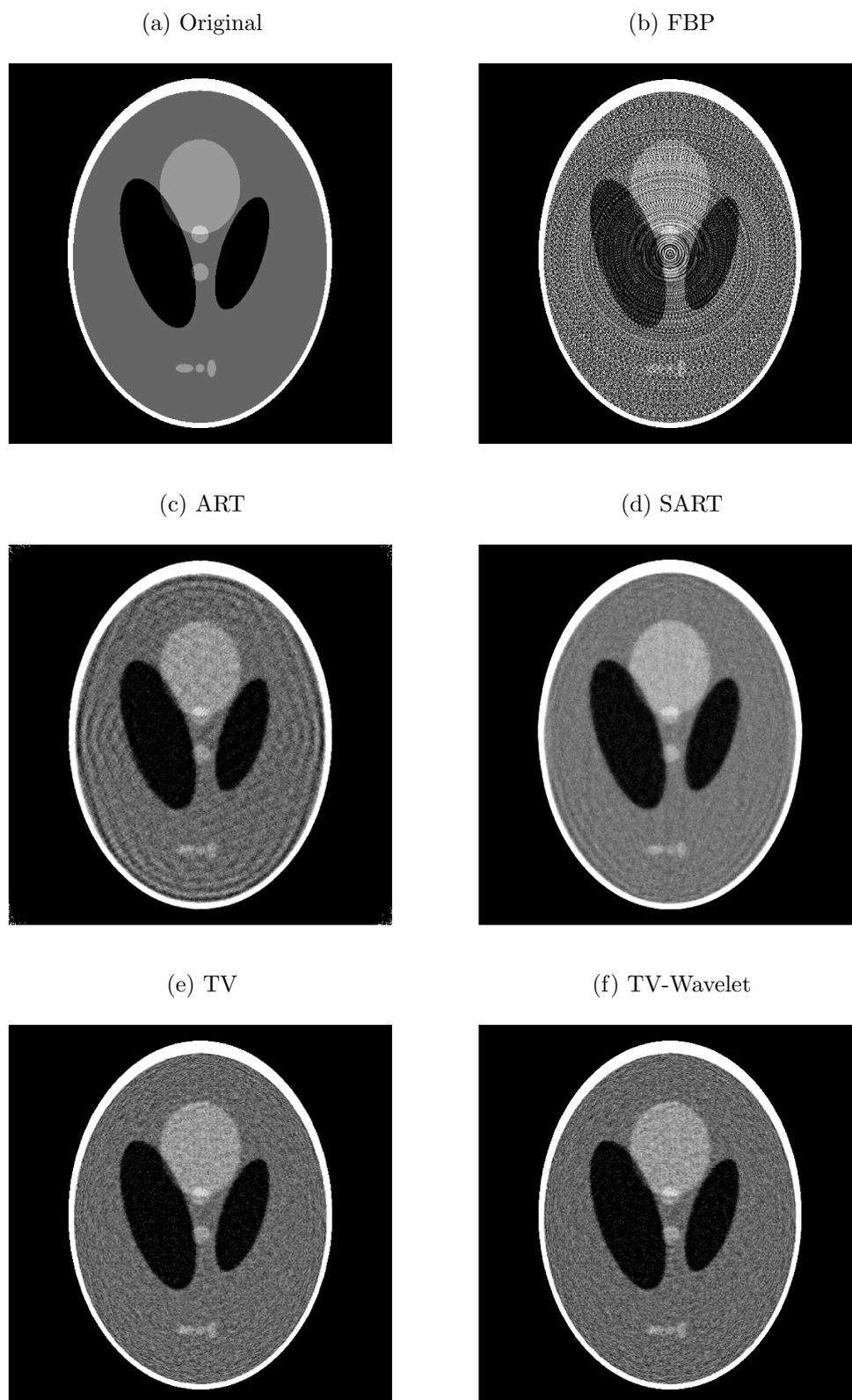


Abb. 5.10. Rekonstruktionsergebnisse bei 60 Projektionen

Insgesamt ist zu sehen, dass die iterativen Verfahren wesentlich robuster in Bezug auf Störungen der Projektionsdaten sind. Im Gegensatz dazu weisen die Rekonstruktionen mit der gefilterten Rückprojektion so starke Artefakte auf, dass die drei kleinen Ellipsen in keinem der FBP-Bilder zu erkennen sind. Durch die Glättung bei der ART und SART geht die Bildschärfe verloren. Im Vergleich dazu sind die Auflösungen in den TV- und TV-Wavelet-Bildern wesentlich besser. Bei 60 Projektionen können sowohl die TV- als auch die TV-Wavelet-Methode die drei kleinen Ellipsen klar voneinander abgrenzen.

Projektionen	Methode	SI	SSIM	RRMSE
20	FBP	$1.1962 \cdot 10^5$	0.4902	0.4726
	ART	$2.4440 \cdot 10^4$	0.8417	0.2235
	SART	$1.3684 \cdot 10^4$	0.8760	0.2087
	TV	$1.2943 \cdot 10^4$	0.779	0.0842
	TV-Wavelet	$1.2996 \cdot 10^4$	0.9775	0.0841
30	FBP	$1.0105 \cdot 10^5$	0.5569	0.3765
	ART	$2.8545 \cdot 10^4$	0.8611	0.1920
	SART	$1.5386 \cdot 10^4$	0.9016	0.1698
	TV	$1.3462 \cdot 10^4$	0.9786	0.0767
	TV-Wavelet	$1.3462 \cdot 10^4$	0.9786	0.0767
45	FBP	$8.1385 \cdot 10^4$	0.6406	0.2837
	ART	$3.2540 \cdot 10^4$	0.8810	0.1733
	SART	$1.7046 \cdot 10^4$	0.9272	0.1400
	TV	$1.3507 \cdot 10^4$	0.9799	0.0704
	TV-Wavelet	$1.3472 \cdot 10^4$	0.9798	0.0678
60	FBP	$7.0588 \cdot 10^4$	0.7013	0.2392
	ART	$3.5605 \cdot 10^4$	0.8932	0.1616
	SART	$1.8031 \cdot 10^4$	0.9413	0.1246
	TV	$1.3832 \cdot 10^4$	0.9873	0.0685
	TV-Wavelet	$1.3558 \cdot 10^4$	0.9795	0.0661

Tabelle 5.5. Qualitätsmerkmale der Rekonstruktionsergebnisse

## 5.5 Einbindung der Zufälligkeit

Da beim CS die besten Rekonstruktionsergebnisse erzielt werden, wenn im Messvorgang Zufälligkeit mit im Spiel ist, wird noch ein weiterer Versuch durchgeführt. Dazu werden 30 Projektionswinkel betrachtet, die in diesem Fall aber nicht gleichmäßig über  $180^\circ$  verteilt sind, sondern zufällig aus  $180$  gleichmäßig über  $180^\circ$  verteilten Winkeln ausgewählt werden. Zu jedem Winkel werden auch hier jeweils 725 Projektionsdaten gewonnen. Die Rekonstruktionsergebnisse mit und ohne Rauschen sind in Abbildung 5.11 dargestellt.

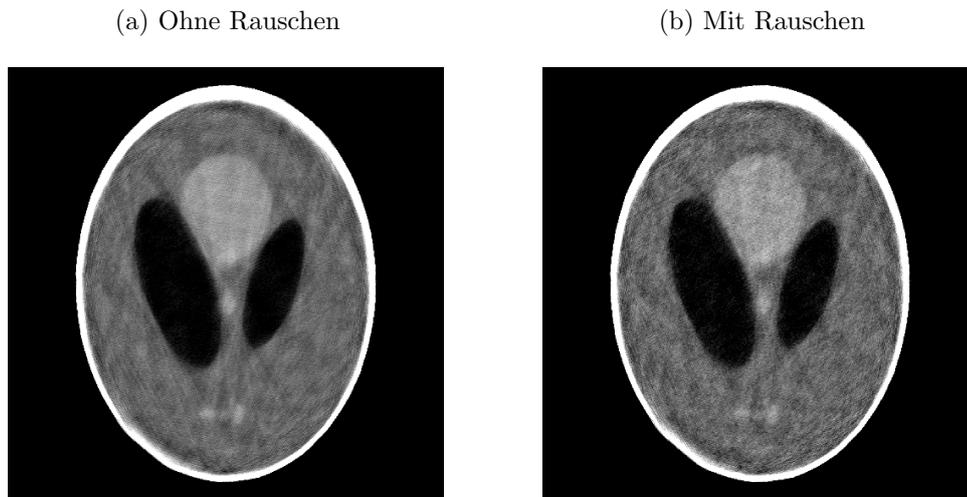


Abb. 5.11. Rekonstruktionsergebnisse bei zufälliger Winkelwahl

Die resultierenden Bilder sind wesentlich schlechter als die entsprechenden Bilder 5.3 (f) und 5.7 (f) bei gleichmäßig verteilten Winkeln. Durch das Einbeziehen der Zufälligkeit können ähnliche Situationen entstehen wie im Fall von begrenzten Aufnahmewinkeln. Das heißt die Aufnahmewinkel sind auf einen festen Winkelbereich eingeschränkt. Dieses Szenario bringt wieder neue Anforderungen mit sich. Besonders bei verrauschten Daten ist die begrenzte Winkelrekonstruktion sehr instabil. Diese Vorgehensweise ist bei einer so geringen Projektionswinkelanzahl keine empfehlenswerte Alternative.

## 5.6 Fazit und Ausblick

Die Versuche haben gezeigt, dass die Rekonstruktionen mit der TV-Methode bei nur wenigen Aufnahmewinkeln bereits gute Ergebnisse liefern. Das Hinzufügen der Wavelet-Minimierung verbessert die Qualität der rekonstruierten Bilder weiter, da die Strukturbegrenzungen besser dargestellt werden. Im Vergleich mit den altbekannten Verfahren schneidet die TV-Wavelet-Methode bei nur wenigen Blickwinkeln und insbesondere auch bei fehlerbehafteten Daten am besten ab. Dennoch sind auch diese Rekonstruktionen keineswegs exakt. Wie bereits in Kapitel 2 erläutert, beruht die erfolgreiche Anwendung von CS auf zwei Prämissen. Das ist zum einen die Sparsity-Bedingung an das gesuchte Signal und zum anderen die Incoherence-Bedingung an die Abtastmatrix. Die Sparsity-Eigenschaft der tomographischen Bilder wurde in Abschnitt 4.2.1 dargelegt. Bei den bisherigen Betrachtungen wurde allerdings die Eignung der Matrix außen vor gelassen. Beim komprimierten Abtasten kommt es vor allem darauf an, dass bei jeder Messung möglichst viele Informationen über das gesuchte Objekt erfasst werden. Der Abtastmechanismus beim CT ist fest vorgegeben. Bei einem Bild der Größe  $512 \times 512$  Pixel besteht jede Zeile der Messmatrix  $A$  aus 262144 Einträgen. Da aber jeder Strahl höchstens  $2 \cdot 512 - 1 = 1023$  Pixel trifft, enthält jede der Zeilen maximal 1023 von Null verschiedene Einträge und ist somit sparse. Solche Matrizen sind für die komprimierte Abtastung eher ungeeignet, da viele Informationen verloren gehen. Das heißt, die Voraussetzungen für

---

eine optimale Rekonstruktion mit CS sind in der CT nicht gegeben. In Anbetracht dessen sind auch keine exakten Rekonstruktionen zu erwarten. Unter den beschriebenen Umständen sind die Rekonstruktionsergebnisse erstaunlich gut.

Bei der klinischen Anwendung darf außerdem der Zeitfaktor nicht außer Acht gelassen werden. Ähnlich wie die ART und SART ist die iterative TV-Wavelet-Methode zeit- und rechenaufwändig. Möglicherweise kann die Laufzeit durch die Optimierung des Quellcodes noch verbessert werden. Des Weiteren waren die bisherigen Betrachtungen auf die CT mit Parallelstrahlgeometrie beschränkt. Computertomographen, die auf der Parallelstrahlgeometrie basieren, werden in der Medizin nicht mehr eingesetzt. Sie sind unpraktikabel, da für jeden Strahl eine neue Quellposition benötigt wird und somit die Messzeit zu lang ist. Deshalb ist man in der medizinischen Anwendung zur Fächer- oder Kegelstrahlgeometrie übergegangen. Bei der Fächerstrahlgeometrie wird ein Fächer von Röntgenstrahlen aus der Quelle gesendet und bei der Kegelstrahlgeometrie wird anstatt einem Fächer von Strahlen ein ganzer Kegel von Strahlen ausgesendet. Das hier entwickelte Optimierungsproblem (4.6) lässt sich auch problemlos auf andere Geometrien übertragen.

# Literaturverzeichnis

- [1] A. H. ANDERSEN AND A. C. KAK, *Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): A superior implementation of the ART algorithm*. *Ultrasonic Imaging* 6 (1984), pp. 18-94.
- [2] J. BOURGAIN, S. DILWORTH, K. FORD, S. KONYAGIN, AND D. KUTZAROVA, *Explicit constructions of RIP matrices and related problems*. *Duke Math. Journal* 159 (2011), pp. 145-185.
- [3] E. CANDÈS, J. ROMBERG AND T. TAO, *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*, *IEEE Trans. Inform. Theory*, Volume 52, Issue 2 (2006), pp. 489-509.
- [4] E. CANDÈS AND T. TAO: *Near Optimal Signal Recovery From Random Projections: Universal Encoding Strategies?* *IEEE Trans. Inform. Theory*, Volume 52, Number 12 (2006), pp. 5406-55425.
- [5] E. CANDÈS AND J. ROMBERG, *Sparsity and Incoherence in Compressive Sampling*. *Inverse Problems*, Volume 23 (2007), Number 3, pp. 969-985.
- [6] E. CANDÈS, J. ROMBERG AND T. TAO, *Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements*. *Inverse Problems*, Volume 23 (2007), Number 3, pp. 969-985.
- [7] E. CANDÈS: *The restricted isometry property and its implications for compressed sensing*. *C. R. Acad. Sci. I*, Volume 346, Issues 9–10 (2008), pp. 589-592.
- [8] E. CANDÈS AND M. WAKIN: *An Introduction To Compressive Sampling*. *IEEE Signal Processing Magazine*, Volume 25, Issue 2 (2008), pp. 21-30.
- [9] Y. H. DAI AND Y. YUAN, *A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property*. *SIAM J. Optim.*, 10 (1999), pp. 177-182.
- [10] Y. H. DAI AND Y. YUAN, *An efficient hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization*. *Ann. Oper. Res.*, 103 (2001), pp. 33-47.
- [11] R. A. DEVORE, *Deterministic constructions of compressed sensing matrices*. *Journal of Complexity*, Volume 23 (2007), pp. 918–925.
- [12] D. DONOHO, *Compressed sensing*. *IEEE Trans. Inform. Theory*, Volume 52, Issue 4 (2006), pp. 1289–1306.

- 
- [13] Y. C. ELДАР AND G. KUTYNIOK: *Compressed Sensing: Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2012.
- [14] N. FELL, *Dualitätstheorie für lineare Optimierungsprobleme mit sparsen Lösungen und Sensitivitätsanalyse*. Bachelorarbeit, März 2013.
- [15] S. FOUCART AND H. RAUHUT, *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. Birkhäuser, 2013.
- [16] W. W. HAGER AND H. ZHANG, *A survey of nonlinear conjugate gradient methods*. Pacific J. Optim., 2 (2006), pp. 35–58.
- [17] P. C. HANSEN AND M. SAXILD-HANSEN, *AIR Tools - A MATLAB Package of Algebraic Iterative Reconstruction Methods*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 236 (2012), pp. 2167-2178.
- [18] M. R. HESTENES AND E. L. STIEFEL, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, 49 (1952), pp. 409-436.
- [19] S. KACZMARZ, *Angenäherte Auflösung von systemen linearer Gleichungen*. Bull. Internat. Acad. Polon. Sci. Lett. A, 35 (1937), pp. 355–357.
- [20] A. K. LOUIS, *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner Studienbücher, 1989.
- [21] LOUIS, MAASS UND RIEDER: *Wavelets*. Teubner Verlag, Stuttgart 1998.
- [22] A. K. LOUIS, *Optimierung*. Universität des Saarlandes, SS 2012.
- [23] A. K. LOUIS, *Mathematische Methoden der Bildrekonstruktion*. Universität des Saarlandes, WS 2013/14.
- [24] M. LUSTIG, *SparseMRI V0.2*. <http://www.eecs.berkeley.edu/~mlustig/Software.html>.
- [25] M. RUDELSON AND R. VERSHYNIN: *Sparse reconstruction by convex relaxation: Fourier and Gaussian measurements*. CISS 2006.
- [26] E. Y. SIDKY, C. KAO AND X. PAN, *Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT*. Journal of X-Ray Science and Technology, Volume 14 (2006), pp. 119-139.
- [27] J. TANG, B. NETT, G. H. CHEN, *Performance comparison between total variation (TV)-based compressed sensing and statistical iterative reconstruction algorithms*. Physics in Medicine and Biology, Volume 54 (19), 2009, pp. 5781-804.
- [28] ZHEN TIAN, XUN JIA, KEHONG YUAN, TINSU PAN, AND STEVE B. JIANG, *Low Dose CT Reconstruction via Edge-preserving Total Variation Regularization*. Physics in Medicine and Biology, Volume 56, Issue 18 (2011), pp. 5949–5967.

- [29] Z. WANG, A. C. BOVIK, H. R. SHEIKH, E. P. SIMONCELLI, *Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity*. IEEE Transactions on Image Processing, Volume 13 (2004), Number 4, pp. 600-612, <https://ece.uwaterloo.ca/~z70wang/research/ssim>.
- [30] J. WEICKERT: *Image Processing and Computer Vision*. Universität des Saarlandes, WS 2010/11.
- [31] ZANGEN ZHU, KHAN WAHID, PAUL BABYN, DAVID COOPER, ISAAC PRATT, AND YASMIN CARTER, *Improved Compressed Sensing-Based Algorithm for Sparse-View CT Image Reconstruction*. Computational and Mathematical Methods in Medicine, Volume 2013, Article ID 185750.



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Haar Wavelet-Familie . . . . .	18
1.2	2D Wavelet-Transformation . . . . .	21
1.3	2D Wavelet-Zerlegung . . . . .	22
2.1	Beispiel für einen sparsen und einen komprimierbaren Vektor . . . . .	25
2.3	Vergleich der $l_1$ -, $l_2$ -, $l_\infty$ - und $l_{1/2}$ -Minimierung . . . . .	30
3.1	CT-Scan . . . . .	36
3.2	Parametrisierung des Weges des Röntgenstrahls . . . . .	36
3.3	Radon-Transformation für einen festen Winkel . . . . .	38
3.4	Sinogramm vom Shepp-Logan Phantom . . . . .	38
4.1	Bestimmung der Systemmatrix . . . . .	45
4.2	Gradientenbild vom Shepp-Logan Phantom . . . . .	46
4.3	Wavelet-Koeffizienten vom Shepp-Logan Phantom . . . . .	49
5.1	Bewertungskriterien für verschiedene Iterationen . . . . .	56
5.2	Rekonstruktionsergebnisse bei 20 Projektionen . . . . .	58
5.3	Rekonstruktionsergebnisse bei 30 Projektionen . . . . .	59
5.4	Rekonstruktionsergebnisse bei 45 Projektionen . . . . .	60
5.5	Rekonstruktionsergebnisse bei 60 Projektionen . . . . .	61
5.6	TV-Wavelet Rekonstruktionsprofil . . . . .	62
5.7	Rekonstruktionsergebnisse bei 20 Projektionen und verrauschten Daten	64
5.8	Rekonstruktionsergebnisse bei 30 Projektionen und verrauschten Daten	65
5.9	Rekonstruktionsergebnisse bei 45 Projektionen und verrauschten Daten	66
5.10	Rekonstruktionsergebnisse bei 60 Projektionen und verrauschten Daten	67
5.11	Rekonstruktionsergebnisse bei zufälliger Winkelwahl . . . . .	69



# Matlab Code

```
n = 512;
m = n;
N = n*m;

% Abbruchkriterien
TolGrad = 10(-3);
MaxIter = 150;

si_fehler = zeros(MaxIter,1);
ssim_fehler = zeros(MaxIter,1);
rrmse_fehler = zeros(MaxIter,1);

% line-search Parameter
delta = 0.05;
eta = 0.6;

% Regularisierungsparameter
gammaTV = 0.07;
gammaW = 0.03;

% Sparsity-Transformation und TV-Transformation, vgl. [24]
phiW = Wavelet();
phiTV = TVOP();

% Erzeuge lineares Gleichungssystem, vgl. [17]
theta = 0:6:179;
% theta = sort(randsample(180,30));
p = round(sqrt(2)*n);
d = round(sqrt(2)*n)-1;
[A,g_ex,f,~,~,~] = paralleltomo(n, theta, p, d);

f_bild = reshape(f,m,n);

% Rausch Level + Addiere Rauschen zu Daten
a = 0.005*norm(g_ex);
randn('state',0);
w = randn(size(g_ex));
w = a*w/norm(w);
g = g_ex + w;

% Initialisierung
k = 0;
```

```

approx = zeros(N,1);
g0 = gradient1(approx, A, g) + gammaTV * gradientTV(approx, phiTV, m, n) +
    gammaW * gradientWavelet(approx, phiW, m, n);
abstieg = - g0;

% Iterationen
while ( norm(g0,2) > TolGrad && k < MaxIter)
    sigma = 1;
    hilfswert1 = zielfktTVWavelet(approx, A, g, gammaTV, gammaW, phiTV, phiW
        , m, n);
    hilfswert2 = g0'*abstieg;

    while (zielfktTVWavelet(approx + sigma*abstieg, A, g, gammaTV, gammaW,
        phiTV, phiW, m, n) > hilfswert1 + delta * sigma * hilfswert2)
        sigma = eta * sigma;
    end

    approx = betrag(approx + sigma* abstieg);
    g1 = gradient1(approx, A, g) + gammaTV * gradientTV(approx, phiTV, m, n)
        + gammaW * gradientWavelet(approx, phiW, m, n);
    mu = g1 - g0;
    gamma = max(0, min(((g1'*mu)/(abstieg'*mu)),((g1'*g1)/(abstieg'*mu))));
    abstieg = - g1 + gamma * abstieg;
    g0 = g1;
    k = k + 1

    imagesc(reshape(approx,m,n));
    title(sprintf('Iteration %d', k)), axis square;
    drawnow
    si_fehler(k) = SI( approx, f, n, m );
    K = [0.001 0.001];
    [mssim ~] = ssim_index(reshape(approx,n,m), reshape(f,n,m), K); % vgl.
    [29]
    ssim_fehler(k) = mssim;
    rrmse_fehler(k) = RRMSE( approx, f);
end

```

```

function [ y ] = zielfktTVWavelet (f, A, daten, gammaTV, gammaW, phiTV,
    phiW, m, n )

% Aufstellung der Zielfunktion %

% Glaettungsparameter
lambda = 10^(-6);

% TV-Term
hilf = phiTV*reshape(f, n, m);
hilf1 = (hilf(:,:, 1).^2 + lambda).^(1/2) + (hilf(:,:, 2).^2 + lambda)
    .^(1/2);

% Wavelet-Term
hilf2 = phiW*reshape(f, n, m);

```

```

% Zielfunktion
y = (A*f - daten)' * (A*f - daten) + gammaTV * norm(hilf1(:), 1) + gammaW *
    norm(hilf2(:), 1);

end

```

```

function [ y ] = gradient1( f, A, daten )

% Ableitung von (Af-g)'(Af-g) %

y = 2 * A' * (A * f - daten);

end

```

```

function [ gradient ] = gradientTV( f, phi, m, n )

% Ableitung des TV-Terms %

% Glaettungsparameter
mu = 10^(-6);

bild = reshape(f, m, n);

% D'WDf
Df = phi*bild;
G = Df.*(Df.*conj(Df) + mu).^(-1/2);
grad = (phi'*G).';
gradient = grad(:);

end

```

```

function [ gradient ] = gradientWavelet( f, phi, m, n )

% Ableitung des Wavelet-Terms %

% Glaettungsparameter
mu = 10^(-6);

bild = reshape(f, m, n);

% Phi'WPhif
Phif = phi*bild;
G = Phif.*(Phif.*conj(Phif) + mu).^(-1/2);
grad = (phi'*G).';
gradient = grad(:);

end

```