Anwendung der approximativen Inversen zur Herleitung einer Rekonstruktionsformel für ein zweidimensionales inverses Streuproblem

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von

Hellai Abdullah

Saarbrücken
1998

Tag des Kolloquiums:	16. Februar 1999
Dekan:	Univ.-Prof. Dr. Th. Eicher
Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr. A. K. Louis
	Univ.-Prof. Dr. S. Rjasanow

Ich möchte nicht versäumen, Herrn Professor Dr. A.K. Louis meinen herzlichen Dank auszusprechen. Er hat mich im Verlauf des Entstehens dieser Arbeit stets mit fachlichem Rat hilfreich unterstützt und mir die Gelegenheit gegeben, mich weiterzubilden.

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die numerische Bestimmung des Potentials $\mathcal{O}$ in der Helmholtz-Gleichung $(\Delta + k^2)u(x) = -k^2\mathcal{O}(x)u(x)$ aus den gestreuten Wellen mit einer festen Frequenz. Es wird dabei angenommen, daß das Feld außerhalb des Trägers des unbekannten Potentials für beliebig viele Einfallsrichtungen gemessen werden kann. Aufbauend auf der Idee der *approximativen Inversen*, die von Louis (vgl. [Lo 97]) als eine neue Lösungsmethode für lineare und spezielle nichtlineare Probleme vorgeschlagen worden ist, wird eine neue Methode zur Lösung des obigen *inversen Streuproblems* vorgestellt. Ausgehend von der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung reduziert sich das Problem zur Bestimmung des Potentials $\mathcal{O}$ auf eine nichtlineare Integralgleichung erster Art. Durch Einführen der sogenannten *äquivalenten Quellen* $\phi(x) := \mathcal{O}(x)u(x)$ ist es möglich, folgende "implizit-nichtlineare" Operatorgleichung

$$(S\phi)(x) = u_s(x) \quad \text{mit} \quad (\mathrm{S}\phi)(\mathrm{x}) := -\mathrm{k}^2 \int_{\Omega_{\mathrm{sc}}} \mathrm{G}(\mathrm{k}\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|)\phi(\mathrm{y})\mathrm{dy}$$

für gegebene Daten u_s zu beachten, wobei G die *Greensche* Funktion ist. Die Anwendung der approximativen Inversen besteht dann in der Vorberechnung des *Rekonstruktionskernes* ψ_γ als Lösung der Gleichung $S^*\psi_\gamma = e_\gamma$ mit einem geeignet gewählten Mollifier e_γ. Durch die obige Darstellung des Streuoperators S ist es möglich, die Singulärwertzerlegung für diesen Operator zu bestimmen, um damit einen analytischen Ausdruck für den Rekonstruktionskern herleiten zu können. Die äquivalenten Quellen lassen sich dann als Skalarprodukt des Rekonstruktionskernes ψ_γ mit dem gestreuten Feld (für gemessene oder simulierte Daten) angeben. Durch diese Technik wird das gestreute Feld auf eine regularisierte Approximation an das unbekannte Potential $\mathcal{O}$ abgebildet.

Die Approximation an $\mathcal{O}$ kann ohne eine explizite Linearisierung und ohne Lösen des direkten Problems bestimmt werden. Ferner ist der "Lösungsoperator" unabhängig von den gegebenen Daten (*Nah-* oder *Fernfelddaten*) im voraus zu bestimmen. Diese Lösungsmethode ist sowohl für sogenannte schwache als auch für starke Streuer anwendbar. Ferner können einige Invarianzeigenschaften des Streuoperators ausgenutzt werden, um Speicherplatz- beziehungsweise Zeitkomplexität zu reduzieren.

Abstract

The purpose is to compute numerically the potential $\mathcal{O}$ in the Helmholtz equation $(\Delta + k^2)u = -k^2\mathcal{O}u$ from plane wave irradiation at a fixed frequency. It is assumed that the field can be measured outside the support of the unknown potential for finitely many incident waves. Based on the idea of *approximate inverse* for linear and some nonlinear problems introduced by Louis (see [Lo 97]) a new approach for solving the above inverse scattering problem will be presented. Starting with the Lippmann-Schwinger integral equation the problem of determining the potential is to solve a nonlinear integral equation. Introducing the so called *equivalent source* $\phi(x) := \mathcal{O}(x)u(x)$ it is possible to consider the following "implicitly nonlinear" operator equation

$$(S\phi)(x) = u_s(x) \quad \text{with} \quad (\mathrm{S}\phi)(\mathrm{x}) := -\mathrm{k}^2 \int_{\Omega_{\mathrm{sc}}} \mathrm{G}(\mathrm{k}\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|)\phi(\mathrm{y})\mathrm{dy}$$

for given data u_s and known Green's function G. The application of the approximate inverse consists in precomputing the *reconstruction kernel* ψ_γ as solution of the equation $S^*\psi_\gamma = e_\gamma$ for a suitable mollifier e_γ. With the above representation of the scattering operator S one has the possibility to compute the *singular value decomposition* of S in order to determine the reconstruction kernel. The equivalent source is then evaluated as a scalar product of the kernel ψ_γ with the scattered field u_s (for measured or simulated data). Through this technique the scattered field is mapped to a regularized approximation for the unknown potential $\mathcal{O}$ by dividing the equivalent source ϕ by the total field u.

The approximation for the potential $\mathcal{O}$ is achieved without any explicit linearization and solving the direct problem. Furthermore the solution operator can be precomputed independently of the data (near or far-field data). The application of this new approach is not restricted on weakly scattering potentials, it is also valid for strong scatterers. Some invariance properties of the scattering operator can be used to reduce the computational efforts.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Symbole

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \bigcup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	$n-$dimensionaler reeller Vektorraum
$\mathbb{C}^n$	$n-$dimensionaler komplexer Vektorraum
Ω	Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$
Ω_{sc}	Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, das den Träger des Streupotentials enthält
$B_\rho(0)$	Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius ρ
$\partial B_\rho(0)$	Rand des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius ρ
$L_2(\Omega)$	Hilbertraum der auf Ω quadratintegrablen Funktionen
$L_\infty(\Omega)$	Banachraum der wesentlich beschränkten Funktionen auf Ω
$H^s(\Omega)$	Sobolev-Raum der Ordnung $s \in \mathbb{R}$
$\mathcal{C}^m(\Omega)$	Banachraum der $m-$mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω
$\mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega)$	Banachraum der $m-$mal Hölderstetigen Funktionen auf Ω mit dem Hölderexponenten α

u	physikalische Feldgröße (Gesamtfeld)
u_s	gestreutes Feld
u_i	einfallendes Feld
ϕ	äquivalente Quelle
$\mathcal{O}$	Funktion, die das Streupotential beschreibt (Objekt-Funktion)
G	Greensche Funktion
e_γ, E_γ	Mollifierfunktion
ψ_γ	Rekonstruktionskern
δ	Diracsche Delta-Distribution
$\chi(\Omega)$	charakteristische Funktion des Gebietes Ω
$\zeta(\partial\Omega)$	Singularitätenfunktion der Oberfläche $\partial\Omega$
$\delta_{i,j}$	Kronecker-Symbol
O, o	Landausche Symbole
$d\sigma_x$	das Oberflächenelement bezüglich x
pv	Cauchyscher Hauptwert (principal value)

I	Identitätsoperator
Δ	Laplace-Operator
S	der Streuoperator
∇	Nablaoperator
$< .,. >$	Skalarprodukt im $I\!R^n$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\Omega)}$	L_2-Skalarprodukt in Ω
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\partial\Omega)}$	L_2-Skalarprodukt auf $\partial\Omega$
$\|\| \cdot \|\|_{L_2(\Omega)}$	L_2-Norm in Ω
$\|\| \cdot \|\|_{L_2(\partial\Omega)}$	L_2-Norm auf $\partial\Omega$
$\|\| \cdot \|\|$	Euklidische Norm im $I\!R^n$
$\| \cdot \|$	Betrag einer komplexen Zahl
$\mathcal{F}f, \tilde{f}$	räumliche Fourier-Transformation der Funktion f
$\mathcal{H}_m$	Hankel-Transformation der Ordnung m
J_m	Bessel-Funktionen der Ordnung m
N_m	Neumann-Funktionen der Ordnung m
Y_m	Kugelflächen- beziehungsweise Oberflächenfunktionen
$H_m^{(1)}$	Hankel-Funktionen erster Art der Ordnung m
$H_m^{(2)}$	Hankelfunktionen zweiter Art der Ordnung m
${}_2F_1$	Hypergeometrische Funktionen
$\mathcal{S}^{n-1}$	Einheitssphäre im $I\!R^n$
ν	äußere Einheitsnormale auf Rand eines Gebietes
k	komplex- oder reellwertige Wellenzahl
α	Richtung des einfallenden Feldes, $\alpha \in \mathcal{S}^{n-1}$
λ	Wellenlänge
R	Detektorradius
ω	Kreisfrequenz
c_0	Referenzschallgeschwindigkeit
$c(x)$	ortsabhängige Schallgeschwindigkeit
γ	Regularisierungsparameter
Γ	Meßoberfläche oder Meßlinie
$\Re$	Realteil einer komplexen Zahl
$\Im$	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\mathcal{J}$	$\mathcal{J} \subset I\!N$ endliche Indexmenge der Anzahl der Einfallsrichtungen

Einleitung

Die Notwendigkeit, sich mit der *inversen Streutheorie* zu beschäftigen, ergibt sich aus ihren Anwendungen. Diese liegen beispielsweise in den Ultraschallabbildungsverfahren, die besonders für medizinische Diagnostik, beim zerstörungsfreien Prüfverfahren oder in geophysikalischen Explorationen von Interesse sind.

Um einen optisch nicht zugänglichen Bereich eines Objekts oder dessen Eigenschaften zu bestimmen, wird ein Teil oder das ganze zu untersuchende Objekt mit Bündeln von Wellen (je nach Anwendungsgebiet zum Beispiel mit elektromagnetischen, elastischen oder akustischen Wellen) "durchleuchtet". Die vom Sender generierte Strahlung erzeugt nach Wechselwirkung mit dem Objekt eine (gestreute) Strahlung, die im Empfänger detektiert werden kann. Aus den so gewonnenen objektabhängigen Daten berechnet ein bildgebender Algorithmus ein Bild des Objekts. Ziel eines solchen Verfahrens ist die Erzeugung einer objekttreuen exakten Abbildung, die im folgenden als Rekonstruktion bezeichnet wird. Starkes Interesse besteht an praxisrelevanten Verfahren, insbesondere *Real-Time-Abbildungsverfahren*.
Das wohl bekannteste Verfahren zur Rekonstruktion eines optisch nicht zugänglichen Bereiches ist das Röntgenverfahren und das hierdurch motivierte Verfahren der Röntgen-Computer-Tomographie. Sie beruht im wesentlichen auf einer geradlinigen Durchstrahlung mit Röntgenstrahlen und der damit verbundenen Erzeugung von Projektionen der Absorptionsfunktion des zu untersuchenden Objektes (vgl. [Lo2 89] und [Nat 86]).
In Bereichen der Medizintechnik, in denen die Verwendung von elektromagnetischen Wellen vermieden werden soll, oder in Medien, die für elektromagnetische Wellen generell undurchlässig sind, wie zum Beispiel im Erdinneren bei geophysikalischen Explorationen oder in bestimmten metallischen Werkstoffen bei zerstörungsfreien Prüfverfahren, ist man auf elastische beziehungsweise akustische Wellen als Informationsträger angewiesen. Während bei der Röntgen-Computer-Tomographie

Beugungs- und Brechungseffekte aufgrund der Voraussetzung der geradlinigen Ausbreitung der Röntgenstrahlen vernachlässigt werden können, sind diese Effekte bei der Verwendung von Ultraschalldaten maßgeblich.

Die zwei grundlegenden Probleme in der "klassischen" *Streutheorie* sind die Streuung zeitharmonischer akustischer oder elektromagnetischer Wellen durch ein durchdringliches inhomogenes Medium mit kompaktem Träger **(scattering in an inhomogeneous medium)** und die Streuung durch ein beschränktes homogenes undurchdringliches Hindernis **(obstacle scattering)**.

Die Aufgaben, die bei der Untersuchung der beiden obigen Fällen entstehen, sind zum einen die Lösung des *direkten Problems*, das heißt Bestimmung der durch das Objekt verursachte Störung der eingesetzten Wellenarten, und zum anderen die Lösung des *inversen Problems*, das bedeutet, Bestimmung des Streuers aus den gegebenen Daten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Streuung zeitharmonischer akustischer Wellen durch ein durchdringliches, inhomogenes Objekt, eingebettet in einem homogenen, isotropen, frequenzunabhängigen und dämpfungsfreien Hintergrundmedium. In dem inhomogenen Medium liegt eine kontinuierliche oder diskontinuierliche Veränderung einer Materialeigenschaft $c(x)$ - der Schallgeschwindigkeit - vor, die im Hintergrundmedium als konstant vorausgesetzt wird.
Das Ziel dieser Arbeit besteht in der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit und damit des Brechungsindex $n(x)$ des Objekts, das heißt der Geometrie und der Eigenschaften des Streuers aus den Eingangsdaten. Dieses Problem ist in der Literatur als *inverses Mediumproblem* bekannt.

Während das direkte Streuproblem durch eine lineare Aufgabe beschrieben wird, stellt die Bestimmung des Streuers aus den gegebenen Daten eine nichtlineare Inversionsaufgabe dar. Bei der Lösung dieses nichtlinearen Problems ergeben sich zwei starke Einschränkungen, nämlich die Nichteindeutigkeit und die Instabilität. Die Schlechtgestelltheit - nach Hadamard - eines Problems mit den genannten Eigenschaften ist bekannt (vgl. [Lo2 89]).
Auf Grund der Nichtlinearität und der Schlechtgestelltheit liefert die Inversion nur eine Näherungslösung, und es stellt sich die Frage, wie das Problem selbst, zum Beispiel durch eine Umformulierung in eine äquivalente Aufgabe, "stabilisiert" werden kann, und wie man eine stabile Approximation an die Lösung bestimmen kann.

Sowohl die Theorie als auch deren praktische Realisierung bei der Lösung des direkten und des inversen Streuproblems unterliegen einer ständigen Weiterentwicklung. Im Gegensatz zum direkten Problem, welches in der Literatur gründlich untersucht worden ist, stellen die Nichtlinearität und - vom Standpunkt der numerischen Realisierung - die Schlechtgestelltheit des inversen Streuproblems eine große Herausforderung dar, was die Entwicklung mathematisch interessanter Lösungsansätze und numerisch brauchbarer Algorithmen angeht.

Die Bestimmung einer Näherungslösung des linearisierten inversen Problems - mittels *Born-* und *Rytov-Approximation* - wurde von Cheyney gemeinsam mit Rose (vgl. [Ch/Ro 88]) und von Devaney und Langenberg (vgl. [De 86] und [La 87]) untersucht. Neben dieser Vorgehensweise - der Behandlung des linearisierten Problems - existieren im wesentlichen zwei weitere Klassen von Methoden, mit deren Hilfe die nichtlineare Inversionsaufgabe gelöst werden kann. Diese lassen sich in *iterative* Lösungsmethoden (vgl. [Nat/Wu 93], [Nat/Wu 95], [Gu/Kl 94] und [Pi/Jo/Hu 91]) und in nichtlineare, restringierte Optimierungsaufgaben (vgl. [An/Kl 89], [Kl/Be 94], [Co/Kr 92] und [Ra 86]) einteilen. Desweiteren finden Verfahren, wie die Eikonal-Approximation (vgl. [Lo1 89]) und die Dual-Raum-Methode (vgl. [Co/Kr 92]), die ursprünglich zur Lösung des direkten Problems entwickelt worden waren, Interesse. Im zweiten Kapitel wird ein kurzer Überblick über die Grundideen und die wesentlichen Merkmale einiger dieser Methoden geliefert.

In dieser Arbeit wird ein auf der Methode der *approximativen Inversen* basierendes Lösungsverfahren vorgeschlagen und numerisch getestet. Die Methode der approximativen Inversen wurde von Louis (vgl. [Lo 96] und [Lo/Ma 90]) zur Lösung und gleichzeitigen Regularisierung von linearen und nichtlinearen Fredholm-Operatoren erster Art entwickelt.

Im ersten Kapitel wird nach Darlegung des in dieser Arbeit relevanten Streumodells anhand einer schematischen Darstellung das direkte Streuproblem (das Vorwärtsproblem) formuliert und kurz erläutert. Hierbei werden die *Helmholtz-Differentialgleichung* und die zugehörige *Lippmann-Schwinger-Integralgleichung* angegeben, denen in dieser Arbeit eine zentrale Bedeutung zukommt.

Im zweiten Kapitel wird nach Definition des *inversen* Streuproblems und Angabe der Einschränkungen, die durch die Meßgeometrie gegeben sind, auf den Unterschied zwischen *Nah-* und *Fernfelddaten* eingegangen. Ausgehend von der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung läßt sich das inverse Problem als Inversion der nichtlinearen Operatorgleichung

$$S_u\mathcal{O} = u_s$$

für die unbekannten Größen u und $\mathcal{O}$ und den bekannten Daten u_s angeben. Der wesentliche Beitrag des zweiten Abschnitts dieses Kapitels liegt in der Definition der *äquivalenten Quellen*

$$\phi(x) := \mathcal{O}(x)u(x)$$

und damit der Einführung eines implizit-nichtlinearen Integraloperators. Für das inverse Problem bedeutet dies, daß eine Gleichung der Art

$$S\phi = u_s$$

zu lösen ist. Um sowohl qualitativ als auch quantitativ "gute" Approximationen bestimmen zu können, empfiehlt es sich, das volle nichtlineare Problem zu behandeln. Die obige Neuformulierung des Problems erfüllt diese Anforderung in sofern, daß sie die Nichtlinearität implizit beibehält.
Der vierte Abschnitt dieses Kapitels behandelt die Frage der eindeutigen Lösbarkeit des inversen Mediumproblems. Es werden Resultate über die Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung dargelegt. Aufbauend auf der Definition des implizit-nichtlinearen Operators widmet sich der letzte Abschnitt dieses Kapitels der Berechnung des Singulärsystems des Streuoperators S mit der Untersuchung der Eigenschaften der Singulärwerte. Es stellt sich heraus, daß sich die Singulärwerte als stetige Funktionen der Wellenzahl und des Detektorradius bestimmen lassen.

Ferner gestattet die Einführung des implizit-nichtlinearen Integraloperators die Anwendung der Methode der approximativen Inversen. Die Idee dieser Methode wird im dritten Kapitel der vorliegenden Arbeit aufgegriffen und zur Bestimmung der äquivalenten Quellen angewandt. Es wird eine regularisierte Approximation ϕ_γ an die äquivalente Quelle ϕ bestimmt, indem man das L_2-Produkt der Daten u_s mit dem *Rekonstruktionskern* ψ_γ - der Lösung der Gleichung $S^*\psi_\gamma = e_\gamma$ - für eine vorgegebene Funktion e_γ bildet.
Zur Bestimmung der Funktion ψ_γ wird die Singulärwertzerlegung des Operators S hinzugezogen. Diese ist unabhängig von den Daten und kann vorberechnet werden. Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung des Operators und der damit erzielten

analytischen Darstellung der oben erwähnten Größen werden sowohl der Daten- als auch der Regularisierungsfehler untersucht. Im dritten Abschnitt dieses Kapitels wird aus der Approximation an die äquivalente Quelle schließlich das Streuobjekt $\mathcal{O}$ mittels einer *gemittelten* Approximation - und damit der Brechungsindex des inhomogenen Mediums - rekonstruiert.

Kapitel vier dokumentiert die numerische Realisierung dieser Lösungsmethode. Das Verfahren wird für einen kreisförmigen Streuer mit analytisch vorgegebenen Daten und für einen kreisringförmigen Streuer mit simulierten Daten getestet. Ferner werden die bei der praktischen Anwendung wichtigen Punkte wie Auflösung, Zeit- und Speicherplatzkomplexität, Einfluß von Rauschen und Datenfehlern diskutiert.

Eine ausführliche Diskussion des Verfahrens und der damit erzielten Ergebnisse schließt die vorliegende Arbeit ab.

An dieser Stelle danke ich Herrn Professor Dr. S. Rjasanow für seine Bewertung dieser Arbeit und für einige interessante und lehrreiche Diskussionen im Rahmen unseres Oberseminars. Ferner danke ich meinen Freunden und Kollegen Peter Dörr, Roman Müller, Peter Quell, Dr. Marc Conrad und Dr. Gunter Dertnig, deren analytischer Blick mir in mannigfaltigen Situationen geholfen hat. Ich danke Uwe Schmitt, dessen Tips mir bei der Verwendung einiger Programm-Pakete sehr nützlich waren.

Kapitel 1

Mathematische Modellierung

Da der Begriff - *das Streuproblem* - nicht eindeutig definiert ist, besteht das Ziel dieses Kapitels darin, den in dieser Arbeit zu behandelnden Streuvorgang zu beschreiben. Zuerst werden die mathematischen Grundlagen dargelegt. Mit Hilfe der *Greenschen* Funktion wird eine Integralgleichung angegeben, die dem Streumodell äquivalent ist. Und schließlich wird das *direkte Streuproblem* definiert. Da die Behandlung des *inversen Streuproblems* das zentrale Thema dieser Arbeit ist, wird dies im hierauf folgenden Kapitel definiert und ausführlich behandelt.

1.1 Grundlagen

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Streuung zeitharmonischer, akustischer Wellen durch ein durchdringliches, inhomogenes Medium[1] eingebettet in einem homogenen, isotropen[2], frequenzunabhängigen und dämpfungsfreien Hintergrundmedium.

Das zu untersuchende Streuobjekt mit kompaktem Träger wird durch ein beschränktes Gebiet $\Omega_{sc} \subset I\!R^n$ $(n = 2, 3)$ mit glattem Rand (zum Beispiel stückweise $\mathcal{C}^2$) dargestellt. In diesem Gebiet liegt eine kontinuierliche oder diskontinuierliche Veränderung einer Materialeigenschaft $c(x)$, der Schallgeschwindigkeit, vor. Diese Eigenschaft wird im Hintergrundmedium als konstant vorausgesetzt. Mathematisch wird die Ausbreitung zeitharmonischer, akustischer Wellen im inhomogenen Medium

[1] Das heißt: Es kommt zu zusätzlicher Wellenausbreitung im Inneren des Gebietes.

[2] Das bedeutet: Medium, dessen physikalische Eigenschaften, wie Brechungsindex oder Wärmeleitfähigkeit, richtungsunabhängig sind.

durch die Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,t) = 0 \tag{1.1}$$

beschrieben mit $u(x,t)$ die orts- und zeitabhängige physikalische Feldgröße, der Ortsvektor $x \in \mathbb{R}^n, n = 2, 3,$ t die Zeit und $c(x)$ die ortsabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen.
Geht man zu einer zeitunabhängigen Darstellung über, die durch zeitliche Fourier-Transformation

$$u(x,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t}u(x,t)dt$$

gewonnen wird, so resultiert daraus die skalare Schwingungsgleichung

$$\Delta u(x,\omega) + k^2 n^2(x)u(x,\omega) = 0 \text{ in } \Omega_{sc} \subset \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

als Ausgangsgleichung für alle weitere Untersuchungen. Hierbei bezeichnen $k = \omega/c_0$ die fest vorgegebene, positive Wellenzahl mit der Kreisfrequenz ω und

$$n(x) = \frac{c_0}{c(x)}$$

den ebenfalls positiven Brechungsindex der Inhomogenität mit der Referenzschallgeschwindigkeit des Hintergrundmediums c_0. Der Brechungsindex $n^2(x)$ ist hiermit eine stets positive, beschränkte Funktion in Ω_{sc} und für $x \notin \Omega_{sc}$ identisch 1.

Bemerkung 1.1

1. *Da die grundlegende Probleme der Streuung im wesentlichen unabhängig von der betrachteten Dimension (2D oder 3D) der eingesetzten Wellenarten sind, wird in dieser Arbeit das <u>zweidimensionale akustische Problem</u> behandelt*[3].

2. *Im weiteren wird in dieser Arbeit der Fall betrachtet, daß das Medium absorbierend ist, das heißt, daß der Brechungsindex eine komplexwertige Funktion mit einer ebenfalls <u>nicht negativen</u> imaginären Komponente in Abhängigkeit*

[3] An den Stellen, an denen die gewählte Dimension eine wesentliche Rolle spielt, wird auf den Unterschied eingegangen.

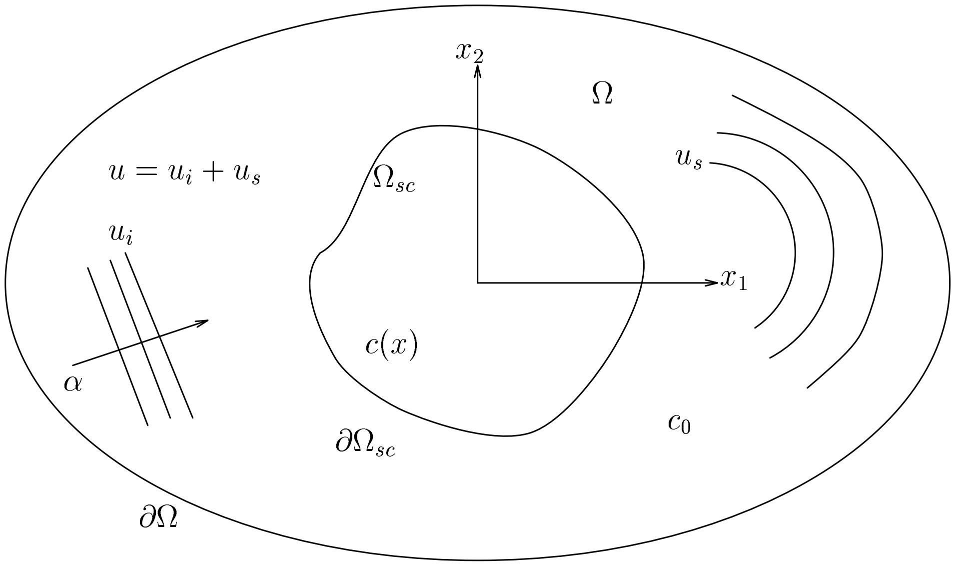

Abbildung 1.1: Streuung an einem durchdringlichen Objekt

der Wellenzahl und damit der Frequenz sein kann. Der Brechungsindex ist dann von der Form

$$n^2(x) = n_1^2(x) + i\frac{n_2^2(x)}{k} \tag{1.3}$$

mit $n_1(x) > 0$ *und* $n_2(x) \geq 0$.

3. *Ferner wird in der vorliegenden Arbeit die Möglichkeit eingeräumt, daß die fest vorgegebene Wellenzahl* k *ebenfalls komplexwertig sein kann, mit* $k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\frac{\omega\tau}{c_o^2}$. *Durch Einführung einer komplexwertigen Wellenzahl erhält man eine in Ausbreitungsrichtung gedämpfte Welle. Somit bezeichnet* τ *den Dämpfungsfaktor.*

4. *Da in dieser Arbeit das* inverse Streuproblem *für eine fest vorgegebene Frequenz* ω *behandelt wird, wird im weiteren statt* $u(x, \omega)$ *nur* $u(x)$ *betrachtet.*

Die experimentelle Situation kann schematisch durch die Geometrie in Abbildung 1.1 dargestellt werden. Das Streuobjekt dargestellt durch Ω_{sc} mit dem Rand $\partial\Omega_{sc}$ sei kompakt in einem Hintergrundmedium Ω eingebettet. Als *einfallendes Feld* werden ebene Wellen[4] $u_i(x) = e^{ik<\alpha,x>}$ angenommen mit $\alpha \in \mathcal{S}^1$ Ausbreitungsrichtung der Welle und $x \in I\!R^2$. Durch die Wechselwirkungseffekte zwischen dem Objekt und dem einfallenden Feld entsteht ein Störfeld (Streufeld) u_s. Nach dem Huygensschen

[4] Die Anregung mittels ebener Wellen ist keine starke Einschränkung, da jedes Wellenfeld aus der Überlagerung ebener Wellen synthetisierbar ist (Spektrum ebener Wellen).

Prinzip führt die Überlagerung des einfallenden Feldes u_i und des gestreuten Feldes u_s zum Gesamtfeld, das heißt:

$$u(x) = u_i(x) + u_s(x). \tag{1.4}$$

Berücksichtigt man die Abhängigkeit des Feldes von der Ausbreitungsrichtung der eingesetzten Wellenarten, so ergibt sich für das Gesamtfeld:

$$u(\alpha, x) = u_i(\alpha, x) + u_s(\alpha, x). \tag{1.5}$$

Für den Brechungsindex genügend glatt, das heißt $n^2 \in \mathcal{C}^2(\Omega_{sc})$ von der allgemeinen Form (vgl. Gleichung (1.3)), führt man die komplexwertige *Objektfunktion*

$$\mathcal{O}(x) := 1 - n^2(x) \tag{1.6}$$

mit kompaktem Träger $supp(\mathcal{O}) = \overline{\{x \in I\!R^2 : \ \mathcal{O}(x) \neq 0\}} = \Omega_{sc}$ und $\mathcal{O}(x) \equiv 0$ für alle $x \notin \Omega_{sc}$ ein.

Bemerkung 1.2 *Die Objektfunktion beschreibt die Diskontinuität, das heißt Änderungen relativ bezüglich des homogenen Hintergrundmediums.*

Je nach Art der Änderungen unterscheidet man zwischen den im folgenden definierten Streuern.

Definition 1.3 *Befindet sich die Variation der Mediumseigenschaft in der Nähe einer beliebig "kleinen" Konstante, so spricht man von einem* **schwachen** *Streuer. Das heißt es existiert eine Konstante $0 < M \ll 1$, so daß $k^2\|\mathcal{O}\| \leq M$ gilt, für eine geeignet gewählte Norm. Sonst wird der Streuer als* **stark** *bezeichnet.*

Nach Einführung der Objektfunktion $\mathcal{O}$ läßt sich die skalare Helmholtz-Gleichung wie folgt schreiben:

$$\Delta u(\alpha, x) + k^2 u(\alpha, x) = k^2 \mathcal{O}(x) u(\alpha, x) \ \text{ in } \ \Omega \subset I\!R^2, \ \Omega \supset \overline{\Omega_{sc}}. \tag{1.7}$$

Die **Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung**

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s \right) = 0, \ r = \|x\|, \ x \in I\!R^2, \tag{1.8}$$

ist die einzige Randbedingung, die das gestreute Feld gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$ erfüllen soll.

Bemerkung 1.4 *Das Verhalten der Lösung der Helmholtz-Gleichung im Unendlichen wird vollständig durch die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung charakterisiert. Sie garantiert, daß die gestreute Welle eine auslaufende Welle ist, und sichert die Eindeutigkeit der Lösung des direkten Streuproblems im Fernfeld (vgl. Lemma von Rellich [Co/Kr 92]).*
Unter Benutzung der Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung ist es möglich, eine analoge Theorie zu entwickeln, um die einlaufende Welle ebenfalls zu charakterisieren (vgl. [Co/Kr 92]).
Im $\mathbb{R}^3$ ist die Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung (1.8) ersetzt durch

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s\right) = 0,\ r = \|x\|,\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Zusammenfaßend erhält man folgende Gleichungen zur Untersuchung des *direkten* und *inversen Problems*.

$$\Delta u(\alpha,x) + k^2 u(\alpha,x) = k^2\mathcal{O}(x)u(\alpha,x) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ \Omega \supset \overline{\Omega_{sc}}, \tag{1.9}$$

$$u(\alpha,x) = u_i(\alpha,x) + u_s(\alpha,x), \tag{1.10}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s\right) = 0,\ r = \|x\|,\ x \in \mathbb{R}^2. \tag{1.11}$$

Handelt es sich um Streuung durch einen undurchdringlichen (homogenen) *idealen* (schallharten oder schallweichen) Streuer D, das heißt Streuung an einem Hindernis, so sieht der einfachste Fall wie folgt aus:

$$\Delta u(\alpha,x) + k^2 u(\alpha,x) = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \tag{1.12}$$

$$u(\alpha,x) = u_i(\alpha,x) + u_s(\alpha,x), \tag{1.13}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s\right) = 0,\ r = \|x\|,\ x \in \mathbb{R}^2. \tag{1.14}$$

Je nach Anwendung in der Praxis, zum Beispiel Feststellung von Hohlräumen oder Rissen in Werkstoffen, können diese Inhomogenitäten mit der Variation der Schallgeschwindigkeit nicht vollständig rekonstruiert werden. In diesem Fall sind zusätzlich zur Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung noch weitere Rand- und Übergangsbedingungen zu berücksichtigen. Handelt es sich bei dem idealen Streuer um einen

schallweichen, das heißt einen perfekt absorbierenden Streuer, so ist eine homogene Dirichlet-Randbedingung $u = 0$ auf ∂D, und für den schallharten Streuer, das heißt ein perfekt reflektierendes Objekt, eine homogene Neumann-Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf ∂D zu berücksichtigen.
Werden Streuer mit anderen Eigenschaften, zum Beispiel durchdringliches homogenes Hindernis oder homogene Objekte mit leitender Oberfläche untersucht, so werden Kombinationen der Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen hinzugenommen.

Bemerkung 1.5 *Wie man aus den obigen Ausführungen entnehmen kann, führt die Untersuchung idealer Streuer auf ein Außenraumproblem mit Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen. Dieses Problem ist von verschiedenen Arbeitsgruppen ausführlich behandelt worden (vgl. [An/Kl 89], [Co/Kr 83], [Kl/Be 94], [La 87], [Ra 86]). Die gängigste Methode, mit der sowohl das direkte als auch das inverse Randwertproblem gelöst wird, ist die Randintegralgleichungsmethode (vgl. [Co/Kr 83]).*

Da das Ziel der vorliegenden Arbeit die Behandlung des Streuvorganges durch ein durchdringliches inhomogenes Medium ist, wird im weiteren auf den Fall der Streuung durch ein Hindernis nicht näher eingegangen.

Mit Hilfe der raumfreien *Greenschen* Funktion G_k als Lösung der Gleichung

$$(\Delta + k^2)G_k(x, y) = -\delta(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

läßt sich das Gesamtfeld u, also die Lösung des Systems (1.9) - (1.11), mittels *Greenschen* Satzes formal als eindeutige Lösung der Integralgleichung

$$u(\alpha, x) = u_i(\alpha, x) - k^2 \int_\Omega G_k(x, y)\mathcal{O}(y)u(\alpha, y)dy, \quad x \in \Omega \tag{1.15}$$

angeben. Die obige - der Helmholtz-Gleichung (1.9) äquivalente - Integralgleichung (1.15) wird als *Lippmann-Schwinger-Integralgleichung* bezeichnet.
Die Greensche Funktion $G_k(x, y)$ ist für die Helmholtz-Gleichung gegeben als:

$$G_k(x, y) = G(k\|x - y\|) = \begin{cases} \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\|x - y\|), & n = 2 \\ & & x \neq y \\ \dfrac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x - y\|}, & n = 3 \end{cases}$$

wobei $H_0^{(1)}(k\|x - y\|)$ die Hankel-Funktion erster Art der Ordnung Null (vgl. [Mo/Fe 53] und Anhang A) bezeichnet.
Bevor das direkte und das inverse Problem genauer untersucht werden, können mit den oben genannten Voraussetzungen folgende Integraloperatordarstellungen betrachtet werden:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{O}}u &: L_2(\mathcal{S}^1 \times \Omega) \to L_2(\mathcal{S}^1 \times \Omega) \\ S_u\mathcal{O} &: L_2(\Omega) \to L_2(\mathcal{S}^1 \times \Gamma) \end{aligned}$$

mit

$$(S_{\mathcal{O}}u)(\alpha, x) := -k^2 \int\limits_{\Omega} G(k\|x - y\|)\mathcal{O}(y)u(\alpha, y)dy, \qquad x \in \Omega,\ \overline{\Omega_{sc}} \subset \Omega, \tag{1.16}$$

$$(S_u\mathcal{O})(\alpha, x') := -k^2 \int\limits_{\Omega} G(k\|x' - y\|)u(\alpha, y)\mathcal{O}(y)dy,\ x' \in \Gamma, \tag{1.17}$$

und

$$u(\alpha, x) = u_i(\alpha, x) + u_s(\alpha, x) \ \text{ für } \ x \in \Omega \ \text{ und } \ \alpha \in \mathcal{S}^1. \tag{1.18}$$

Dabei bezeichnen die Indizes $\mathcal{O}$ und u die zusätzliche Abhängigkeit des jeweiligen Operators von der Objektfunktion $\mathcal{O}$ beziehungsweise von dem Feld u. Mit Γ wird eine Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2$ außerhalb des Trägers des streuenden Objekts bezeichnet. Dieses Gebiet wird im folgenden Kapitel genauer spezifiziert.
Für $\mathcal{O} \in L_\infty(\Omega_{sc})$ ($L_\infty(\Omega_{sc})$ enthält stückweise stetige Funktionen) kann folgender Operator definiert werden:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{O}}u &= u - S_{\mathcal{O}}u \quad \text{und damit} \\ (L_{\mathcal{O}}u)(\alpha, x) &= u_i(\alpha, x); \quad x \in \Omega, \alpha \in \mathcal{S}^1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Bemerkung 1.6 *Die Autoren Kleinman und van den Berg bezeichnen die Operatorgleichung gemäß (1.19) als object equation und die Operatorgleichung (1.17) als data equation.*
Allgemein können die Operatoren $S_{\mathcal{O}}$ und S_u von der Form

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{O}} &: H^s(\mathcal{S}^1 \times \Omega) \to H^t(\mathcal{S}^1 \times \Omega) \\ S_u &: H^s(\Omega) \to L_2(\mathcal{S}^1 \times \Gamma) \end{aligned}$$

für Sobolevräume $H^s(\mathcal{S}^1 \times \Omega)$ und $H^t(\mathcal{S}^1 \times \Omega)$ mit $s, t \in I\!R,\ s \leq t$ sein. Als Bildraum $\mathcal{R}(S_u)$ von S_u wählt man immer $L_2(\mathcal{S}^1 \times \Gamma)$, selbst wenn der Operator noch glatter ist, um mit den gemessenen Daten, die nur quadratintegrabel sein können, konsistent zu sein. Bei den realen Problemen liegen statt $u_s \in L_2(\mathcal{S}^1 \times \Gamma)$ nur endlich viele diskrete Meßpunkte $u_{s,j,M}$ vor, $M \in I\!N$ und $j \in \mathcal{J}$ eine endliche Indexmenge, die die Anzahl der Einfallsrichtungen darlegt. In diesem Fall nehme man die L_2-Interpolation dieser Punkte an.

In dieser Arbeit benutzte Normen und Skalarprodukte werden wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(\Omega)} &= \left\{ \int_\Omega |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad \langle u, v\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\ \overline{v(x)}\ dx, \\ \|u\|_{L_2(\Gamma)} &= \left\{ \int_\Gamma |u(x)|^2 d\sigma_x \right\}^{1/2}, \quad \langle u, v\rangle_{L_2(\Gamma)} = \int_\Gamma u(x)\ \overline{v(x)}\ d\sigma_x, \end{aligned} \tag{1.20}$$

wobei mit $d\sigma_x$ das Oberflächenelement im Punkte x bezeichnet wird. Analog definiere man für den Fall, wenn Γ aus einer Menge von *diskreten* Punkten $x_1, \cdots, x_N$ besteht,

$$\|u\|_{L_2(\Gamma)} = \left\{ \sum_{i=1}^N |u(x_i)|^2 \right\}^{1/2}, \quad \langle u, v\rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{i=1}^N u(x_i)\overline{v(x_i)}. \tag{1.21}$$

1.2 Formulierung des direkten Streuproblems

Das direkte Streuproblem läßt sich wie folgt formulieren:

$$\text{(DP)} \begin{cases} \text{gegeben} & : \quad u_i(\alpha, x) \text{ und } \mathcal{O}(x) \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{S}^1, x \in \Omega, \\ \text{gesucht} & : \quad u(\alpha, x) \text{ für alle } x \in \Omega \text{ und } \alpha \in \mathcal{S}^1. \end{cases}$$

Zur Bestimmung des Gesamtfeldes u ist hiermit die Gleichung (1.19) mit bekannter Objektfunktion $\mathcal{O}$ zu lösen.
Für $\mathcal{O} \in L_\infty(\Omega)$ ist der Operator $S_\mathcal{O}$ als ein Integraloperator mit schwach-singulärem Kern (vgl. auch asymptotische Entwicklung der Hankel-Funktion) ein kompakter Operator auf $L_2(\mathcal{S}^1 \times \Omega)$. In diesem Fall kann die Fredholm-Alternative auf die <u>lineare</u> Integralgleichung

$$L_\mathcal{O} u = (I - S_\mathcal{O})\, u = u_i$$

angewandt werden, was sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit der Lösung u liefert, wobei I den Identitätsoperator bezeichnet.
Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung beim direkten Streuproblem sind somit Folgerungen aus der Äquivalenz der Lösung der Helmholtz-Gleichung und der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung (vgl. [Co/Kr 83], [Co/Kr 92] und [Ra 86]).

Kapitel 2

Das inverse Streuproblem

Dieses Kapitel widmet sich der mathematischen Behandlung des *inversen Streuproblems*. Es beinhaltet zunächst die Formulierung der *inversen Aufgabe*. Nachdem die grundlegende Situation dargelegt ist, werden im zweiten Teil die Eigenschaften des <u>nichtlinearen</u> *Streuoperators* beschrieben, und ein *implizit-nichtlinearer* Operator, der den Streuvorgang beschreibt, neu definiert und auf einige Invarianzeigenschaften untersucht. Im dritten Teil dieses Kapitels wird ein kurzer Überblick über die existierenden Lösungsmethoden zur Lösung des inversen Streuproblems gegeben, um einen Vergleich mit der im Rahmen dieser Arbeit vorzustellenden Methode zu ermöglichen. Neben der Qualität (linearer) Abbildungsverfahren, beschäftigt man sich mit fundamentalen Fragen, wie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Dieser Frage widmet sich der vierte Teil dieses Kapitels. Im letzten Teil wird schließlich die Singulärwertzerlegung für den implizit-nichtlinearen Streuoperator, der im Kapitel 2.2 definiert ist, angegeben gefolgt von einer Beschreibung der Singulärwerte des Operators.

2.1 Formulierung des inversen Streuproblems

Das inverse Streuproblem läßt sich wie folgt formulieren:

$$\text{(IP)} \left\{ \begin{array}{lcl} \text{gegeben} & : & u_i(\alpha, x) \text{ und } u_s(\alpha, x') \text{ für alle } x' \in \Gamma, \alpha \in \mathcal{S}^1 \text{ und } x \in I\!R^2; \\ \text{gesucht} & : & \mathcal{O}(x) \text{ für alle } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Die Aufgabe, das inverse Streuproblem zu lösen, besteht nun darin, die Objektfunktion $\mathcal{O}(x)$ - und damit den Brechungsindex der Inhomogenität - aus den gemessenen (oder aus den simulierten) gestreuten Daten zu bestimmen, das heißt, zu lösen ist:

$$(S_u\mathcal{O})(\alpha, x') = u_s(\alpha, x'),\ x' \in \Gamma, \alpha \in \mathcal{S}^1, \tag{2.1}$$

wobei das Feld u der Gleichung

$$(L_{\mathcal{O}}u)(\alpha, x) = u_i(\alpha, x),\ x \in \Omega \quad \text{und} \quad \alpha \in \mathcal{S}^1 \tag{2.2}$$

genügen soll.

Bemerkung 2.1

- *In dieser Arbeit wird nur der Fall der Vorwärtsstreuung behandelt. Mit der in dieser Arbeit entwickelten Rekonstruktionsmethode läßt sich der Fall der Rückstreuung (backscattering)* $u(\alpha, -\alpha)$ *ebenfalls behandeln.*
- *Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in diesem Teil und bei der Entwicklung der Inversionsmethode die Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung* α *außer Betracht gelassen, da der Operator nicht von dieser Größe abhängig ist. Diese Abhängigkeit wird aber bei den Rekonstruktionen im Kapitel 4 über die numerische Anwendung wieder berücksichtigt, denn die Näherungslösungen von der Ausbreitungsrichtung abhängen.*
- *Handelt es sich um das inverse Hindernisproblem, so besteht die Aufgabe der Inversion in der Rekonstruktion von* $\partial\Omega_{sc}$ *also des Randes des streuenden Objekts. Näheres hierzu kann man zum Beispiel aus [Co/Kr 83], [Co/Kr 92], [Ki/Kr 87] und [Ra 86] entnehmen.*

Für den in dieser Arbeit zu behandelnden inversen Streuvorgang wird angenommen, daß für jede einfallende Welle u_i, die gestreute Welle u_s, das heißt deren Amplitude oder Phase, und eventuell $\frac{\partial u_s}{\partial \nu}$ auf einer gewissen Mannigfaltigkeit Γ (oder ein Teil davon) außerhalb des Trägers des Streupotentials bekannt sind. Man kann mit $\Gamma \in \mathbb{R}^{n-1}$ die beliebige Meßoberfläche, deren Dimension um eins niedriger als die des Streuvolumens ist, bezeichnen.
Da eine systematische Untersuchung von Inversionsalgorithmen wesentlich von der Güte vorhandener Eingangsdaten - also dem Streufeld - abhängt, spielt natürlich die meßtechnische Geometrie zur Messung des Streufeldes große Rolle.
Im Anbetracht des - in dieser Arbeit zu behandelnden - 2D-Falles gibt es drei verschiedene Konfigurationen bezüglich der Wahl der Meßoberfläche oder Meßlinie Γ unabhängig der eingesetzten Wellenarten als einfallendes Feld.

1. Linienförmige Anordnung: Die Detektoren sind auf einer Gerade senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der einfallenden Wellen angeordnet. Die Koordinaten dieser Meßlinie sind abhängig vom Winkel des einfallenden Feldes (vgl. Abbildung (2.1)).

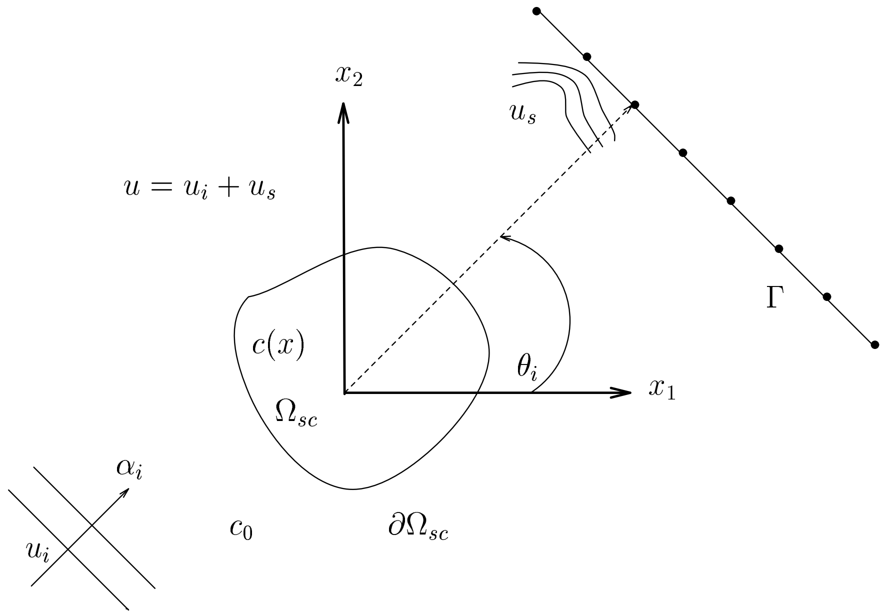

Abbildung 2.1: Planare Messung mit ebenen Wellen

2. Kreisförmige Meßanordnung: Die Messungen unter unterschiedlichen Richtungen erfolgen an Detektoren mit festen Koordinaten auf dem Rand des Kreises (vgl. Abbildung (2.2)). Die Detektoren sind nicht direkt abhängig von der einfallenden Richtung.

3. Anordnung der Detektoren auf Kreisbögen: Hier geschieht die Variation der Sicht durch Wahl eines anderen Kreisbogens um das Objekt (vgl. Abbildung (2.2)), also Auswahl einer Teilmenge von der Menge der Detektoren.

Unabhängig der Meßanordnung hat man die Möglichkeit, zwischen den im folgenden definierten *Nahfelddaten* oder *Fernfelddaten* zu wählen.

Definition 2.2 *Unter der Annahme, daß das Gebiet $\Omega_{sc} = supp(\mathcal{O})$ den Ursprung enthält, versteht man unter* **Nahfeld** *die Konfiguration, bei der die Meßoberfläche oder Meßlinie Γ so positioniert ist, daß*

$$\Gamma \cap \overline{\Omega_{sc}} = \emptyset \text{ und für alle } x \in \overline{\Omega_{sc}},\ y \in \Gamma : \ diam(\Omega_{sc}) < \|x - y\| < c$$

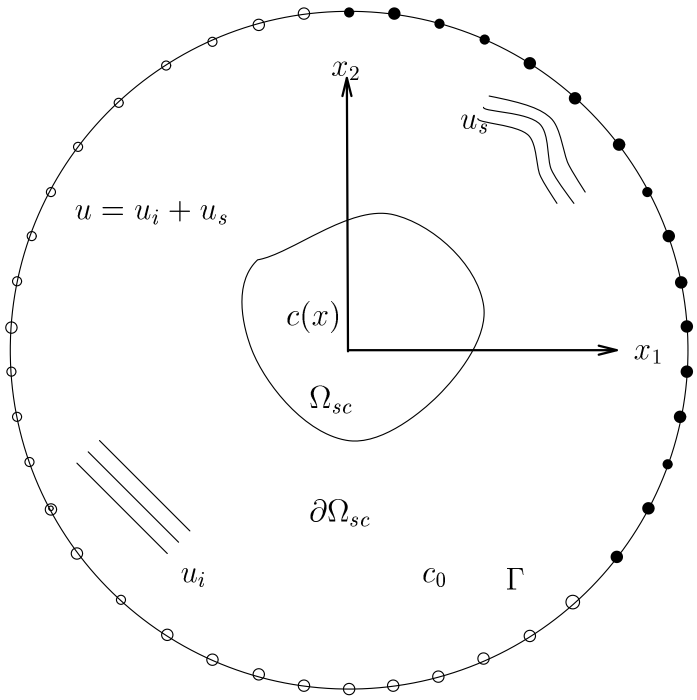

Abbildung 2.2: Kreis-Messung mit ebenen Wellen

mit einer geeignet gewählten Konstante c gilt.

Bemerkung 2.3 *Diese Definition des Nahfeldes ist auch bei den numerischen Anwendungen in dieser Arbeit - mit der Wahl $c = 2diam(\Omega_{sc})$ - berücksichtigt worden. In dieser Arbeit wird in erster Linie Wert auf die Ausnutzung der Nahfelddaten, bezeichnet durch das gestreute Feld u_s, gelegt. Da jedoch alle Berechnungen auch für die Fernfelddaten, bezeichnet durch u_∞, gültig sind, kann die Definition und Felddarstellung im Fernfeld für den zweidimensionalen Fall aus dem Anhang B entnommen werden. Die Darstellung des Fernfeldes und dessen Eigenschaften im $\mathbb{R}^3$ können aus [Co/Kr 92] entnommen werden.*
Für kompakten Streuer ist es bekannt, daß die Streuamplitude (Fernfelddaten) eine ganze Funktion ist, so daß der Operator F mit $\mathcal{O} \stackrel{F}{\longmapsto} u_\infty$, der einen Streuer auf die gestreuten Daten im Fernfeld abbildet, hochgradig glättender Operator ist und daß dessen Inverse instabil sein muß. Die Instabilität der Inverse des Operators F läßt sich in analoger Vorgehensweise wie im Kapitel 2.5 mit Hilfe der Singulärwertzerlegung und Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Singulärwerte zeigen. Es ist also vorzuziehen, mit Nahfelddaten zu arbeiten.

2.2 Eigenschaften des Streuoperators

Das inverse Problem **(IP)** läßt sich formal als Inversion des nichtlinearen Fredholm-Integraloperators erster Art

$$\begin{aligned} S_u \quad &: \quad L_2(\Omega) \to L_2(\Gamma) \\ (S_u\mathcal{O})(x) \quad &:= \quad -k^2 \int\limits_{\Omega} G(k\|x-y\|)u(y)\mathcal{O}(y)dy, \quad x \in \Gamma \\ (S_u\mathcal{O})(x) \quad &\stackrel{!}{=} \quad u_s(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

beschreiben.
Die Nichtlinearität hierbei ist dadurch bedingt, daß sowohl die Objektfunktion $\mathcal{O}$ als auch das Gesamtfeld u in Ω_{sc} unbekannt sind. Die Schlechtgestelltheit - im Sinne von Hadamard - eines solchen Problems ist bekannt (vgl. [Lo2 89]).
Will man das inverse Problem lösen, so wird die nichtlineare Gleichung in der Regel linearisiert. Die wichtigsten problemspezifischen Näherungen sind *Born-, Rytov-* und *physikalische Optik-* (beziehungsweise *Kirchhoff-) Approximationen*, wobei die letztere bei idealen Streuern zur Anwendung kommt. Die Linearisierung des Streuproblems mittels *Born-Approximation* basiert darauf, daß unter Benutzung der Voraussetzung $k^2\|\mathcal{O}\| \ll 1$ das Gesamtfeld in dem das Streuobjekt tragenden Gebiet Ω_{sc} gleich dem bekannten einfallenden Feld gesetzt wird, das heißt $u(x) = u_i(x)$ für $x \in \Omega_{sc}$. Durch den Einsatz der Bornschen Näherung geht dann der nichtlineare Operator S_u in einen linearen Operator über. Die Rytov-Approximation, die sich im Nahfeld von der Born-Näherung unterscheidet, ihr aber im Fernfeld äquivalent ist, bezieht sich nicht auf das Feld direkt, sondern auf dessen komplexe Phase mittels des Ansatzes

$$u(x) = e^{ik(\eta_1(x)+\eta_2(x))}. \tag{2.4}$$

Dabei bezeichnen $\eta_1(x)$ die komplexe Phase des einfallenden Feldes und die noch zu bestimmende Funktion $\eta_2(x)$ die Phasenstörung, die durch die Anwesenheit des Objekts verursacht wird (vgl. [De 86]). Die Frage nach der physikalischen Bedeutung und vor allem, welchen Gültigkeitsbereich diese Näherung besitzt, ist in der Literatur nicht vollständig geklärt (vgl. [De 86]). Diese ist in der Literatur nur für sehr *spezielle* Objekte bekannt. Es kann in der Regel nur ausgesagt werden, daß die Phasenänderung "klein" sein muß.

Eine von den noch weniger angenehmen Eigenschaften des Operators ist die

"Ererbbarkeit" der Schlechtgestelltheit durch eine Linearisierung. Diese Aussage ist der Inhalt des folgenden Satzes (vgl. [Co/Kr 92]).

Satz 2.4 *Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen. Sei $F : U \to Y$ vollstetig und Fréchet-differenzierbar in $u \in U$. Dann ist F'_u ein kompakter Operator auf X.*

Das bedeutet: Vernachläßigt man also die Feldabhängigkeit vom Gesamtfeld, so muß das hiernach entstandene Problem regularisiert werden. Zu den meist angewandten Verfahren zur Regularisierung des linearisierten Problems gehören *Tikhonov-Phillips-Regularisierung* mit einer speziellen Wahl des Regularisierungsparameters, das Verfahren der *abgeschnittenen Singulärwertzerlegung*, die *Landweber-Methode* und das *konjugierte Gradienten* (CG)-Verfahren (vgl. [Lo2 89]). P. Lobel untersuchte im Rahmen seiner Dissertation Anwendungen der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der CG-Methode auf die mit Hilfe des *Newton-Kantorovich-Algorithmus* linearisierte Gleichung. Neben diesen Zusammenhängen stellte er in seiner Dissertation eine Regularisierungsmethode durch *Erhaltung der Unstetigkeiten - Edge-Preserving-Algorithm* - vor. Diese Methode benutzt *a priori* Informationen über das zu rekonstruierende Objekt, das so modelliert ist, daß es aus homogenen Teilstücken besteht, die durch *grenzähnliche* Unstetigkeiten voneinander getrennt sind. Der "neue" Edge-Preserving-Regularisierungsterm, der zu dem Kostenfunktional addiert wird, erlaubt eine Glättung der homogenen Teile, während die Unstetigkeiten in der Objektfunktion erhalten bleiben (vgl. [Lob 96]).
Eine Verallgemeinerung der oben genannten Regularisierungstechniken, nämlich die Methode der *approximativen Inversen* (vgl. [Lo 96]) findet in dieser Arbeit Anwendung.

Aufgrund der Eigenschaften des inversen Problems wäre es zu empfehlen, das volle nichtlineare Problem zu betrachten. Eine Möglichkeit statt einer expliziten Linearisierung besteht darin, die sogenannten *äquivalenten Quellen* (vgl. [La 87]) zu definieren, die die zusätzliche Streuung innerhalb des Streuobjekts beschreiben. Diese Idee behält die Nichtlinearität bei und behandelt sie implizit.

Definition 2.5 *Es seien $\mathcal{O}(x)$ die unbekannte Objektfunktion für $x \in \Omega_{sc}$ und $u(x)$ das Gesamtfeld für $x \in \Omega$. Dann sei die* **äquivalente Quelle** *ϕ definiert als*

$$\phi(x) := \mathcal{O}(x)u(x), \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{2.5}$$

Es ist zu erwähnen, daß die äquivalente Quelle ϕ die Geometrie und die Materialeigenschaften des Streuers enthält, und deshalb bei der - in dieser Arbeit zu entwickelnden - Inversionsmethode vom primären Interesse ist. Da ϕ sowohl vom Gesamtfeld als auch von dem Streuer abhängt, ergeben sich durch die obige Definition die Operatoren $S_{\mathcal{O}}$ und S_u (vgl. Gleichungen (1.16) und (1.17)) zu einem neu definierten Operator S

$$\begin{aligned} S \quad &: \quad L_2(\Omega) \to L_2(\Gamma) \\ (S\phi)(x) \quad &:= \quad -k^2 \int\limits_{\Omega} G(k\|x-y\|)\phi(y)dy \ \text{ für } x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Der implizit-nichtlineare Operator gemäß (2.6) beinhaltet keinerlei Näherungen und ist damit für eine exakte Inversion des Streuproblems in dieser Arbeit von Interesse. Mit Hilfe des obigen Operators S läßt sich dann das inverse Streuproblem wie folgt definieren:

$$\text{finde } \ \phi \in L_2(\Omega), \text{ so daß } \ (S\phi)(x') \ \stackrel{!}{=} \ u_s(x') \ \text{ für } x' \in \Gamma. \tag{2.7}$$

Der Integraloperator S verknüpft die Meßwerte $u_s(x')$ in den Meßpunkten x' auf der Meßfläche Γ mit der äquivalenten Quelle ϕ und mittels (2.5) schließlich mit dem Objekt $\mathcal{O}(x), x \in \Omega$ und kann damit als Ausgangspunkt einer Inversion dienen.
Der Operator S ist mit der Adjungierten

$$\begin{aligned} S^* \quad &: \quad L_2(\Gamma) \to L_2(\Omega) \\ S^*g(y) \quad &= \quad -\overline{k^2} \int\limits_{\Gamma} \overline{G(k\|y-x\|)} g(x) d\sigma_x, \ y \in \Omega \end{aligned} \tag{2.8}$$

und dem - wegen $x \neq y$ - stetigen Kern $G(k\|x-y\|)$ ein kompakter Operator auf $L_2(\Omega)$ und besitzt daher eine <u>nicht beschränkte</u> Inverse.

Bemerkung 2.6 *An dieser Stelle sei erwähnt, daß sich* ideale *Streuer (schallharte und schallweiche) durch geeignete Modifikationen der äquivalenten Quelle erfassen lassen. Handelt es sich bei dem Streuobjekt um einen perfekten Streuer, so kann analog wie im Fall eines durchdringlichen Streuers die äquivalente Quelle definiert werden. Hierbei betrachtet man die* Singularitätenfunktion $\zeta(x)$ *der Oberfläche des Streuobjekts*

$$\zeta(x) = - < \nu, \nabla\chi(x) >, \ \ \textit{für} \ \ x \in \Omega_{sc},$$

die im distributionellen Sinne als Richtungsableitung der charakteristischen Funktion χ des Streuvolumens Ω_{sc} in Richtung der äußeren Normalen ν auf dem Rand $\partial\Omega_{sc}$

des Streuers definiert ist. Für die äquivalente Quelle erhält man dann für den perfekt absorbierenden Streuer mit Dirichlet-Randbedingung

$$\phi^D(x) = -\zeta(x) < \nu, \nabla u(x) > .$$

Entsprechend erhält man für den perfekt reflektierenden Streuer mit Neumann-Randbedingung

$$\phi^N(x) = -u(x) < \nabla\zeta(x), \nu > .$$

Hierbei bezeichnet ∇ *den Nablaoperator.*

Zu den weiteren Eigenschaften des Streuoperators S gehören folgende Invarianzen, die bei den Rekonstruktionsalgorithmen und vor allem bei den numerischen Anwendungen eine große Rolle spielen, denn mit Ausnutzung dieser Invarianzen können Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf wesentlich verringert werden.

Satz 2.7 (Translationseigenschaft) *Sei* T^z *der Translationsoperator auf* $L_2(\mathbb{R}^2)$*, das heißt* $T^z\phi(y) = \phi(y-z)$ *für* $y \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$*. Für den Streuoperator* $S : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ *aus der Gleichung (2.6) gilt:*

$$(ST^z\phi)(x) \quad = \quad T^z\,(S\phi)(x)$$

und

$$(SS^*T^zg)(x) \quad = \quad T^z\,(SS^*g)(x),$$

für $\phi, g \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

Beweis :
Betrachtet man die Operatorgleichung (2.6), so gilt:

$$(ST^z\phi)(x) = -k^2 \int_\Omega G(k\|x-y\|)\phi(y-z)dy.$$

Mit der Substitution $y_1 := y - z$ erhält man:

$$(ST^z\phi)(x) = -k^2 \int_\Omega G(k\|x-z-y_1\|)\phi(y_1)dy_1 = T^z\,(S\phi)(x).$$

Analog erhält man die zweite Behauptung, während man bei dem adjungierten Operator $\|y_2 - y_1\| = \|y_1 - y_2\|$ berücksichtigt.

$$
\begin{aligned}
(SS^*T^z g)(x) &= |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|x-y_1\|)\overline{G(k\|y_1-y_2\|)}T^z g(y_2)d\sigma_{y_2}\, dy_1 \\
(SS^*T^z g)(x) &= |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|x-y_1\|)\overline{G(k\|y_1-y_2\|)}g(y_2-z)d\sigma_{y_2}\, dy_1.
\end{aligned}
$$

Mit der Substitution $y_3 := y_2 - z$ und der Translationsinvarianz des Oberflächenelements erhält man:

$$
(SS^*T^z g)(x) = |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|x-y_1\|)\overline{G(k\|y_1-z-y_3\|)}g(y_3)d\sigma_{y_3}\, dy_1,
$$

und analog mit der Substitution $y_4 := y_1 - z$ gilt

$$
\begin{aligned}
(SS^*T^z g)(x) &= |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|x-y_4-z\|)\overline{G(k\|y_4-y_3\|)}g(y_3)d\sigma_{y_3}\, dy_4 \\
&= T^z (SS^* g)(x).
\end{aligned}
$$

■

Satz 2.8 (Rotationseigenschaft) *Sei $U(\theta)$ die unitäre Rotationsmatrix in $\mathbb{R}^2$ mit $U^{-1}(\theta) = U^*(\theta) = U(-\theta)$. Bezeichnet man mit T_1^θ den zu $U(\theta)$ zugehörigen Rotationsoperator auf $L_2(\Omega)$ und mit T_2^θ den zu $L_2(\Gamma)$ zugehörigen Rotationsoperator, so daß für Funktionen $\phi \in L_2(\Omega)$ und $g \in L_2(\Gamma)$ gilt: $T_1^\theta\phi(y) = \phi(U(\theta)y)$ mit $y \in \Omega$, $U(\theta)y \in \Omega$ und $T_2^\theta g(x) = g(U(\theta)x)$, $x \in \Gamma$, $U(\theta)x \in \Gamma$. Für den Operator S gilt dann:*

$$
\left(ST_1^\theta \phi\right)(x) = T_2^\theta (S\phi)(x)
$$

und

$$
\left(SS^*T_2^\theta g\right)(x) = T_2^\theta (SS^* g)(x).
$$

Beweis :
Analog wie im Beweis des vorhergehenden Satzes gilt:

$$\begin{aligned} \left(ST_1^\theta\phi\right)(x) &= -k^2 \int\limits_\Omega G(k\|x-y\|)T_1^\theta\phi(y)dy \\ &= -k^2 \int\limits_\Omega G(k\|x-y\|)\phi(U(\theta)y)dy. \end{aligned}$$

Setzt man $z := U(\theta)y$ und damit $dy = |U^{-1}(\theta)|dz = dz$, so gelangt man zu

$$\begin{aligned} \left(ST_1^\theta\phi\right)(x) &= -k^2 \int\limits_\Omega G(k\|x-U^{-1}(\theta)z\|)\phi(z)dz \\ &= -k^2 \int\limits_\Omega G(k\|U^{-1}(\theta)[U(\theta)x-z]\|)\phi(z)dz \\ &= T_2^\theta\left(S\phi\right)(x). \end{aligned}$$

Analog gilt diese Invarianzeigenschaft auch für den Operator SS^*, denn

$$\begin{aligned} \left(SS^*T_2^\theta g\right)(x) &= |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|x-y_1\|)\overline{G(k\|y_1-y_2\|)}T_2^\theta g(y_2)d\sigma_{y_2}\, dy_1 \\ &= |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|x-y_1\|)\overline{G(k\|y_1-y_2\|)}g(U(\theta)y_2)d\sigma_{y_2}\, dy_1. \end{aligned}$$

Setzt man $z := U(\theta)y_2$ und damit $d\sigma_{y_2} = |U^{-1}(\theta)|d\sigma_z = d\sigma_z$, so gilt:

$$\begin{aligned} \left(SS^*T_2^\theta g\right)(x) &= |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|x-y_1\|)\overline{G(k\|y_1-U^{-1}(\theta)z\|)}g(z)d\sigma_z\, dy_1 \\ &= |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|x-y_1\|) \\ &\qquad \cdot \overline{G(k\|U^{-1}(\theta)[U(\theta)y_1-z]\|)}g(z)d\sigma_z dy_1. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $y_3 := U(\theta)y_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(SS^*T_2^\theta g\right)(x) &= |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|U^{-1}(\theta)[U(\theta)x - y_3]\|) \\
&\qquad \cdot \overline{G(k\|U^{-1}(\theta)[y_3 - z]\|)} g(z) d\sigma_z \; dy_3 \\
&= |k^2|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Gamma G(k\|U(\theta)x - y_3\|) \overline{G(k\|y_3 - z\|])} g(z) d\sigma_z \; dy_3 \\
&= T_2^\theta \left(SS^*g\right)(x).
\end{aligned}$$

■

Zusammenhang zwischen Streuoperator und Radon-Transformation

Diesen Zusammenhang ersieht man ausgehend von der Helmholtz-Gleichung und der Linearisierung mittels der Rytov-Approximation (vgl. [De 86]). Setzt man die Rytov-Approximation (vgl. Gleichung (2.4)) für das Gesamtfeld in die inhomogene Helmholtz-Gleichung (vgl. 1.9) ein, so erhält man

$$\frac{i}{k}\nabla^2\eta(x) - (\nabla\eta(x))^2 + 1 = \mathcal{O}(x), \quad \eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x).$$

Nach Vernachläßigung der Terme höherer Ordnung in $\nabla\eta_2$ und unter der Annahme, daß die Phase des einfallenden Feldes der obigen Gleichung für $\mathcal{O}(x) = 0$ und der Eikonalen-Gleichung $(\nabla\eta_1(x))^2 = 1$ (vgl. [De 86]) genügt, erhält man

$$-\frac{i}{k}\nabla^2\eta_2(x) - 2 < \nu, \nabla\eta_2(x) >= \mathcal{O}(x)$$

mit dem Einheitsvektor $\nu = \nabla\eta_1(x)$. Betrachtet man nun den Grenzfall $k \to \infty$, so gelangt man zu

$$-2 < \nu, \nabla\eta_2(x) >= \mathcal{O}(x).$$

Das bedeutet, daß die Funktion $\eta_2(x)$ einer Differentialgleichung erster Ordnung genügt und damit die Lösung

$$\eta_2(y) = \int\limits_L \mathcal{O}(x) d\sigma_x$$

besitzt, wobei L die Gerade durch den Meßpunkt y bezeichnet. Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Radon-Transformation der Objektfunktion, die definiert ist als

$$R\mathcal{O}(\alpha, y) = \int_{I\!R} \mathcal{O}(y + t\alpha)dt$$

für einen Meßpunkt y und der Ausbreitungsrichtung α der einfallenden Wellen, so ersieht man, daß der Grenzfall $k \to \infty$ beziehungsweise $\lambda \to 0$ bei dem inversen Streuproblem auf die Inversion der Radon-Transformation, das heiß Rekonstruktion aus der Projektion führt.

2.3 Lösungsmethoden

Dieses Kapitel gibt einen kurzen Überblick über verschiedenen existierenden Methoden - sowohl für den zweidimensionalen als auch für den dreidimensionalen Fall - zur Lösung des in der vorliegenden Arbeit zu behandelnden inversen Streuproblems, die zum Teil von theoretischem aber auch zum Teil von praktischem Interesse sind. Da die genaue Untersuchung aller zu nennenden Methoden den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, können die Einzelheiten über die verschiedenen Methoden aus der zitierten Literatur entnommen werden.
Neben den theoretischen Lösungsansätzen, den sogenannten *exakten* Lösungsansätzen in der Quantenstreuung (vgl. [Ne 82] und [Ch/Sa 89]), die auch auf Streuung durch zeitharmonische akustische Wellen in einem inhomogenen Medium übertragbar sind, sind Lösungsalgorithmen von großer Bedeutung und finden mehr Interesse.
Aufgrund der Schlechtgestelltheit und der Nichtlinearität des Integraloperators liefert eine direkte Inversion der Gleichung (2.3) keine “gute” Rekonstruktion, und außerdem ist die Inversion in der Regel nur nach Durchführung einer Linearisierung möglich. Die Bildgebungsverfahren hierzu stützen sich auf die Inversion nach Anwendung der Born-Approximation (vgl. vorhergehendes Kapitel) oder eine andere Störungsapproximation. Die Lösung besteht in der Berechnung der *Born-Reihe*. Hierfür betrachtet man die Lippmann-Schwinger-Integralgleichung und erhält mittels Born-Ansatzes $u_s \ll u_i$:

$$u_s(x) = -k^2 \int_{\Omega} G(k\|x - y\|)u_i(y)\mathcal{O}(y)dy, \; x \in \Gamma$$

und bestimmt $\mathcal{O}^{(0)}$ als Lösung der Gleichung $u_s = S_{u_i}\mathcal{O}$. Die Born-Reihe für die $l-$ten Iterierten $\mathcal{O}^{(l)}$ ist dann erreicht durch Lösen von

$$u_s(x) = u_i(x) - S_{u^{(l)}}\mathcal{O}^{(l)},$$

wobei $u^{(l)}$ Lösung der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung

$$(I - S_{\mathcal{O}^{(l-1)}})u^{(l)} = u_i$$

für $\mathcal{O} = \mathcal{O}^{(l-1)}$ und für alle Meßpunkte $x \in \Gamma$ ist. Voraussetzungen für die Konvergenz und eine Fehlerabschätzung sind von mehreren Autoren, zum Beispiel (vgl. [Ch/Ro 88]), untersucht worden.
Ein auf Rytov-Approximation basierender Lösungsalgorithmus im Zusammenhang mit der *Diffraction Tomography* wurde von Devaney unter Ausnutzung der Fourier-Transformation untersucht (vgl. [De 86]). Diese Algorithmen sind von der Form der gefilterten Rückausbreitung (filtered Backpropagation), so daß sie eine quasi-real-time und eine schnelle Berechnung und Rekonstruktion ermöglichen. Was allerdings ihre Anwendbarkeit auf starken Streuern (vgl. Definition (2.3)) angeht, so ist mit Schwierigkeiten zu rechnen.

Neben diesen besteht eine weitere Methode darin, das Problem (IP) als ein *nichtlineares restringiertes Optimierungsproblem* zu formulieren. Dieses *Output-Least-Squares-Method* wurde von verschiedenen Arbeitsgruppen (vgl. [Co/Kr 92], [Kl/Be 92], [Kl/Be 93], [Kl/Be 94]) untersucht und für verschiedene Objekte getestet. Ausgehend von der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung in der Operatorschreibweise mit den Operatoren S_u und $S_{\mathcal{O}}$ sei folgendes nichtlineares Funktional

$$\mathcal{I} = \sum_{j\in\mathcal{J}} \left\{ w_{\Omega_j} \|r_j\|^2_{L_2(\Omega)} + w_{\Gamma_j} \|\varrho_j\|^2_{L_2(\Gamma)} \right\}$$

mit geeigneten Gewichten w_{Ω_j} und w_{Γ_j} und Einfallsrichtungen j zu minimieren. Hierbei sind

$$r_j := u_j - u_{i,j} - S_{\mathcal{O}}u_j, \quad \text{und} \quad \varrho_j := u_{s,j} - S_{u_j}\mathcal{O}$$

gegeben. Minimierung erfolgt durch Lösen des Systems

$$u_j^{l+1} = u_j^l + \tau_l v_j^l, \qquad \mathcal{O}^{l+1} = \mathcal{O}^l + \beta_l d^l$$

mit v_j^l und d^l die *Update*-Richtungen. Die Konstanten τ_l und β_l sind so zu bestimmen, daß sie das obige Funktional minimieren.
Die wesentlichen Unterschiede bei den Arbeiten von den obengenannten Autoren liegt in der Wahl der Daten, ob Nah- oder Fernfelddaten verwendet werden, und wie die entstandene Systeme gelöst werden. Gewählt wurden iterative Methoden zur Minimierung des nichtlinearen Kostenfunktionals. Zu diesen iterativen Methoden zählen *verallgemeinerte sukzessive Überrelaxation* oder eine Kombination dieser mit einer *Modifikation des konjugierten Gradienten (CG) Algorithmus* (vgl. [Kl/Be 92] und [Kl/Be 93]). Numerisch sind diese Verfahren für 2D-Objekte (schwache Streuer) für akustische und elektromagnetische Wellen getestet worden.

Desweiteren haben die Autoren van den Berg und Kleinman die Rekonstruktion eines schwachen Streuers mittels der Minimierung eines Konstenfunktionals durch Bildung von Folgen von Feldern u_n, Objektfunktionen $\mathcal{O}_n$ und der äquivalenten Quellen ϕ_n, die die Autoren als *contrast source* bezeichnen, untersucht. Das zu minimierende Funktional wurde wie folgt definiert:

$$F := \frac{\sum_{j\in\mathcal{J}} \|u_{s,j} - S_u\phi_j\|^2_{L_2(\Gamma)}}{\sum_{j\in\mathcal{J}} \|u_{s,j}\|^2_{L_2(\Gamma)}} + \frac{\sum_{j\in\mathcal{J}} \|\mathcal{O}_j u_{i,j} - \phi_j + \mathcal{O}_j S_{\mathcal{O}}\phi_j\|^2_{L_2(\Omega)}}{\sum_{j\in\mathcal{J}} \|\mathcal{O}_j u_{i,j}\|^2_{L_2(\Omega)}}$$

mit den entsprechenden Modifikationen der Operatoren S_u und $S_{\mathcal{O}}$. Die durch die Minimierung entstandenen Gleichungssysteme wurden iterativ mit Hilfe einer modifizierten Gradienten-Verfahren gelöst. Der Algorithmus sieht dann so aus: Ist in jedem Schritt der Iteration eine Funktion $\phi_{j,n}$ bestimmt, so wird hieraus das Gesamtfeld aus der Gleichung

$$u_{j,n} = u_{i,j} + S_{\mathcal{O},j}\phi_{j,n}$$

für alle $x \in \Omega$ und aus diesen Größen die Objektfunktion mittels einer weiteren Optimierungsaufgabe gemäß

$$F' := \sum_{j\in\mathcal{J}} \|\mathcal{O}u_{j,n} - \phi_{j,n}\|^2_{L_2(\Omega)}$$

berechnet (vgl. [Va/Kl 97]).

Ferner wurden Methoden angewandt, mit deren Hilfe zunächst eine Linearisierung erreicht werden kann. Im Zusammenhang hierzu sind die *Newton-Kantorovich* oder *Gauß-Newton-Methode* zu erwähnen. Um die Konvergenz dieser Algorithmen

sichern zu können, ist eine Regularisierung, zum Beispiel mit Tikhonov-Phillips-Verfahren oder CG-Methode, der entstandenen Gleichungssysteme notwendig. Diese Rekonstruktionsmethode wurde von Lobel in seiner Dissertation untersucht (vgl. [Lob 96]).
Bei den Iterationsverfahren ist ebenfalls ein *räumlicher* iterativer Algorithmus zu erwähnen, der von Pichot et al. (vgl. [Pi/Jo/Hu 91]) entwickelt und an Streuung der 2D- und 3D-elektromagnetischen Wellen getestet worden ist. Ausgehend von der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung basiert dieser Algorithmus auf der *Newton-Kantorovich-Methode* zur Rekonstruktion der komplexen *Permitivität* eines inhomogenen dielektrischen Objekts. Der Kontrast im Objekt $\mathcal{O}$ wird bestimmt, indem aus einer nichtlinearen Gleichung iterativ eine Folge linearer Gleichungen erzeugt wird durch Minimieren der Differenz zwischen den gemessenen Daten u_s und den aus einer Näherung $\mathcal{O}^{(k)}$ an das Objekt berechneten gestreuten Daten $u_{s,k}$.

Eine weitere, ebenfalls iterative Methode - im 3D Fall - wurde von Natterer vorgeschlagen (vgl. [Nat/Wu 95]). Diese Methode basiert auf der Lösung der Helmholtz-Gleichung und nicht der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung. Sie besteht in *Ausbreitung-Rückausbreitung-Technik* (Propagation-Backpropagation-Method) und kombiniert diese mit Finiten-Differenzen-Verfahren. Lösen der Helmholtz-Gleichung ist dann äquivalent zum Lösen eines elliptischen Systems mit Cauchydaten. Hierbei wird das Problem mit dem Feldansatz $u(x) = u_i(x)\{1+v(x)\}$ gelöst, wobei $v(x)$ die gemessenen oder simulierten Daten bezeichnet. Mit den derart skalierten Daten $u_s(x) = e^{-ik<\alpha,x>}v(x)$ besteht die Lösung in der Inversion eines nichtlinearen Operators $R : L_2(B_\rho(0)) \to L_2(\Gamma^+)$, wobei $B_\rho(0)$ die Kugel um Nullpunkt mit Radius ρ bezeichnet, die den Träger des Objekts enthält, und $\Gamma^+ \subset \Gamma$. Das hierdurch entstandene nichtlineare System wird dann durch eine nichtlineare Version der Kaczmarz-Methode gelöst, die bei der Anwendung in der Röntgen-Tomographie als ART (Algebraic Reconstruction Technique) bekannt ist (vgl. [Nat 86]). Für die numerische Realisierung und eine Analyse des Verfahrens sei auf die Arbeit von Natterer (vgl. [Nat 97]) verwiesen.
Eine andere iterative Idee, ebenfalls direkt die Differentialgleichung zu lösen, ist von Gutman und Klibanov (vgl. [Gu/Kl 94]) untersucht worden. Diese Methode kombiniert eine *Quasi-Newton*-Methode mit einer finiten Fourier-Transformation der Objektfunktion und ist neben *Born-* und *Rytov*-Approximation eine weitere Methode, die im dreidimensionalen Fall numerisch getestet worden ist.

Eine Inversionsmethode, mit Hilfe der Eikonalen-Approximation, wurde von Louis (vgl. [Lo1 89]) vorgeschlagen. Diese nichtlineare Approximationsmethode war ursprünglich zur Bestimmung des Fernfeldes für ein gegebenes Potential (also

Lösung des direkten Problems) entwickelt worden.
Eine weitere Methode, die zu nennen ist, ist die von Colton und Monk (vgl. [Co/Kr 92]) ursprünglich zur Lösung des *inversen Hindernisproblems* entwickelte *Dual-Raum-Methode*. Diese Methode basiert auch im wesentlichen auf der Minimierung eines restringierten, nichtlinearen Kostenfunktionals. Die Anwendung und eine Modifikation dieser Methode kann aus [Co/Kr 92] entnommen werden.

Ferner besteht die Möglichkeit, mittels eines "zweistufigen" Iterationsverfahrens das inverse Streuproblem zu lösen. Der Algorithmus ähnelt der Idee der Newton-SOR-Iteration (vgl. [Or/Rh 70]). Er besteht aus der Komposition einer *äußeren* Iteration zur Bestimmung des Gesamtfeldes und einer *inneren* Iteration, nämlich der Approximation des Objektes, das heißt man betrachtet die Operatorgleichungen (1.16), (1.17) und (1.19) für die Operatoren $S_{\mathcal{O}}$, S_u und $I_{\mathcal{O}}$.
Der Algorithmus besteht aus den folgenden Schritten.

Algorithmus:

i) Wähle Startwerte für $\mathcal{O}^{(0)}$, beispielsweise Born-Approximation $\mathcal{O}^{(0)} = 0$ oder $\mathcal{O}^{(0)} = (S_u\mathcal{O})^* u_s$, und $u^{(0)}$.

ii) Berechne $u^{(m+1)}$ aus der Gleichung (2.2) gemäß

$$U^{(m+1)} = B^{(m)}\, U^{(m)} + U_i,$$

wobei $B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und $U, U_i \in \mathbb{C}^{N}$ gelten, für alle m.

iii) Benutze $u^{(m+1)}$ aus Schritt zwei zur Bestimmung der Objektfunktion $\mathcal{O}^{(m+1)}$ durch Lösen der Gleichung (2.1) gemäß

$$A^{(m+1)}\mathcal{O}^{(m+1)} = U_s.$$

Hierbei gilt: $A \in \mathbb{C}^{M\times N}, U_s \in \mathbb{C}^{M}$ und $\mathcal{O} \in \mathbb{C}^{N}$ für alle m.

iv) Konvergenzkriterium: Ist der Defekt

$$F^{(m)} := \frac{\|\rho_1^{(m)}\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|U_i\|^2_{L_2(\Omega)}} + \frac{\|\rho_2^{(m)}\|^2_{L_2(\Gamma)}}{\|U_s\|^2_{L_2(\Gamma)}}$$

mit

$$\rho_1^{(m)} := U^{(m+1)} - B^{(m)}\, U^{(m)} - U_i \quad \text{und} \quad \rho_2^{(m)} := U_s - A^{(m+1)}\mathcal{O}^{(m+1)}$$

kleiner als eine vorgegebene Toleranzgrenze, das heißt $F^{(m)} \leq \delta$, so liefert die Iteration die beste Approximation - entsprechend der Fehlerschranke - an die gesuchte Lösung $\mathcal{O}$. Im anderen Fall ist wieder mit dem Schritt zwei weiterzurechnen.

Bemerkung 2.9

1. *Der zweite Schritt des obigen Algorithmus ist eine Fixpunktiteration, die genau dann konvergiert, wenn für das Spektrum von B gilt: $\sigma(B) \subset (-1, 1)$. Bei dem obigen Algorithmus jedoch ist die Konvergenz mit der Abschätzung des Residualfehlers kombiniert.*

2. *Dadurch, daß das Gesamtfeld u und die Objektfunktion $\mathcal{O}$ im Gebiet Ω gesucht, und die Daten u_s aber nur auf der Meßfläche bekannt sind, sind die Größen in den Schritten zwei und drei des Algorithmus in unterschiedlichen Punkten auszuwerten und zu berechnen. Die Matrizen A und B ergeben sich durch Diskretisierung der Operatoren S_u und $L_{\mathcal{O}}$ gemäß den Gleichungen (2.1) und (2.2).*

3. *Das System im dritten Schritt ist als eine lineare Integralgleichung erster Art schlecht gestellt. Zur Lösung dieses Systems existieren mehrere Möglichkeiten, zum Beispiel* Kaczmarz *oder eine anderen iterative Methode. Die folgenden numerischen Beispiele wurden mittels einer stabilisierten und vorkonditionierten CG-Methode (vgl. [Lo2 89]) mit einer Fehlertoleranz gleich 10^{-6} gelöst.*

4. *Im Gegensatz zu diesem Algorithmus minimiert die Methode, vorgeschlagen von Kleinman und van den Berg (vgl. [Kl/Be 92]), eine Modifikation des Funktionals $F^{(m)}$ durch geeignete Bestimmung von $\mathcal{O}$ und u.*

5. *Ferner ist es zu bemerken, daß im obigen Algorithmus die Variation der Einfallsrichtung ebenfalls berücksichtigt werden kann.*

6. *Aufgrund der Abhängigkeit der Operatoren von der Objektfunktion sind die entstandenen Matrizen unsymmetrisch, so daß dies die Rechenzeit- und Speicherplatzkomplexität erheblich beeinflußen kann. Desweiteren steigt die Dimension der Matrizen zum Quadrat mit der Anzahl der diskreten Punkten, so daß die Auflösungsgrenze relativ schnell erreicht wird.*

Zur numerischen Realisierung dieses Algorithmus wurde ein komplexwertiges Objekt (vgl. Bild 2.3) betrachtet. Die Auflösung beträgt $N = 16$, dies entspricht $1/4\lambda$, wobei die Wellenlänge $\lambda = 0.9$ gewählt worden ist. Da es sich bei dem Objekt um einen schwachen Streuer handelt, wurde als Startwert die Born-Näherung gewählt. Es wurden insgesamt 11 Iterationen durchgeführt, da bereits ab dieser Iterationsanzahl die Kontur des Objekts zu erkennen war (vgl. Bilder (2.4) und 2.5)), wobei der Defekt $\delta = 10^{-3}$ betrug. Außerdem wurde die Iteration deshalb ab diesem Schritt abgebrochen, da der Fehler sich durch weitere Iterationen sehr langsam verringerte. Zur Verbesserung des Kontrasts wurden diese Störungen durch eine Mittelwertkorrektur, das heißt Multiplikation mit einem Gewichtsfaktor, bei der Überlagerung der Rekonstruktionen aus verschiedenen Richtungen beseitigt. Hierbei waren *a priori* Informationen über das Objekt sehr nützlich. Für dieses Objekt mit dem Absorptionskoeffizienten verschieden von Null gilt:

$$\begin{aligned} diam(supp(\Im(\mathcal{O}))) &= \lambda + \delta_1,\ \delta_1 > 0, \\ diam(supp(\Re(\mathcal{O}))) &= 2\lambda + \delta_2,\ \delta_2 > 0 \end{aligned}$$

mit $0 \in supp(\Re(\mathcal{O}))$ und $0 \in supp(\Im(\mathcal{O}))$. Sowohl für den Realteil als auch für den Imaginärteil wurden die Gewichtsfaktoren $w(\rho_1) = w(\rho_2) = \|\mathcal{O}^{(m)}\|_{L_2(\Omega)},\ m = 11$ gewählt mit $supp(w) \subseteq B_\rho(0),\ 0 < \rho \leq R$, mit R der Detektorradius und k die Wellenzahl und λ die Wellenlänge. Die Mittelwertkorrektur der Rekonstruktion nach der Überlagerung aus den verschiedenen Richtungen sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \Re(\mathcal{O}(x)) &= \frac{1}{2\pi}\, w(\rho_1) \sum_{i=1}^{5} \mathcal{O}_i^{(m)}(x),\ \rho_1 < \lambda \\ \Im(\mathcal{O}(x)) &= \frac{1}{2\pi}\, w(\rho_2) \sum_{i=1}^{5} \mathcal{O}_i^{(m)}(x),\ \rho_2 < \lambda/2. \end{aligned}$$

Ein Vergleich dieser Ergebnisse mit den nach Anwendung der im nächsten Kapitel vorzustellenden Methode erfolgt im Kapitel 4 über numerische Resultate. Die Rekonstruktionszeit für 11 Iterationsschritte und 5 verschiedene Richtungen betrug 20 Minuten.

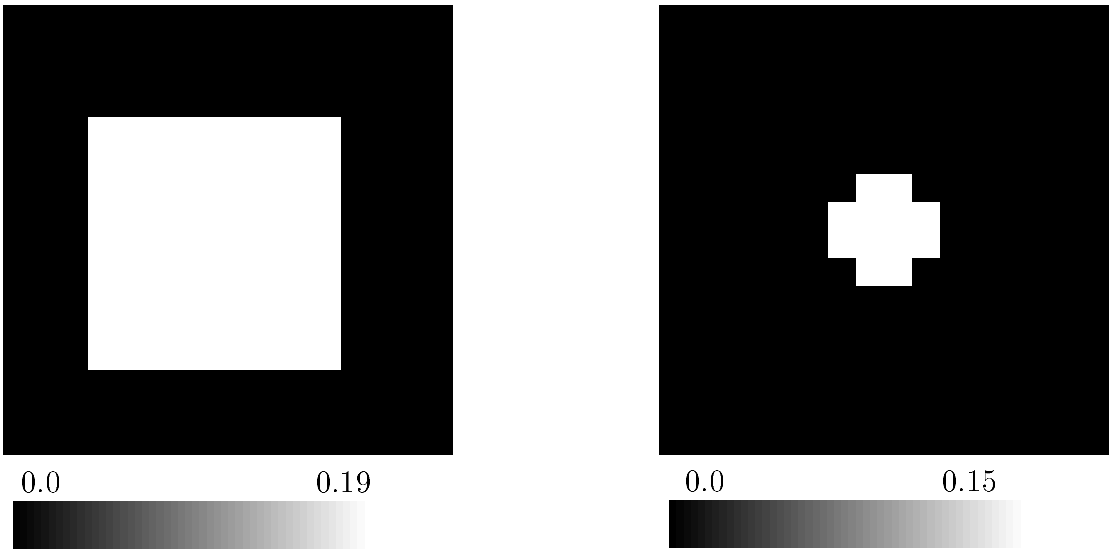

Abbildung 2.3: Real- und Imaginärteil des exakten Objekts

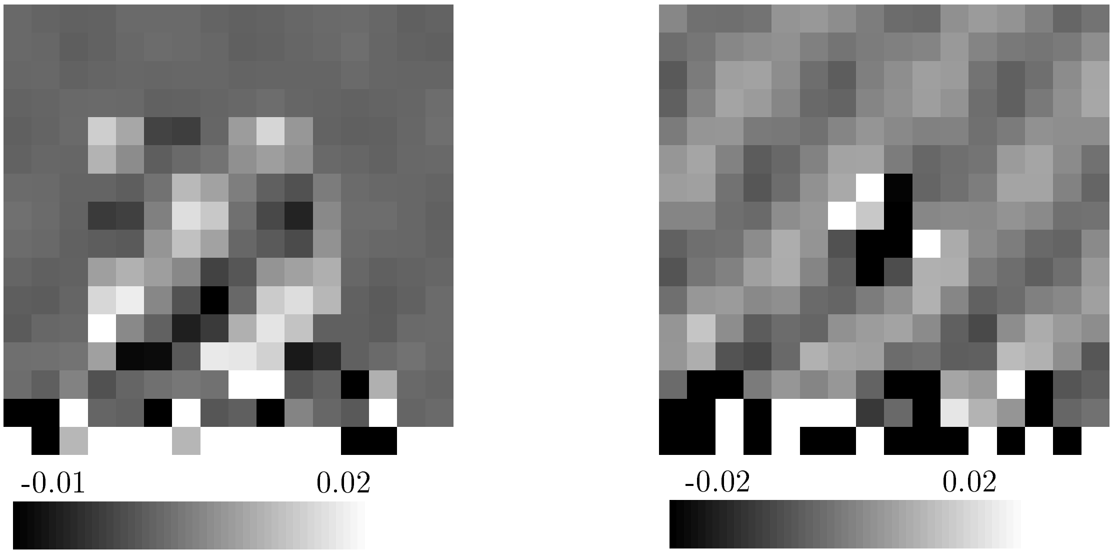

Abbildung 2.4: Ungewichtete Rekonstruktionen nach 11 Iterationen

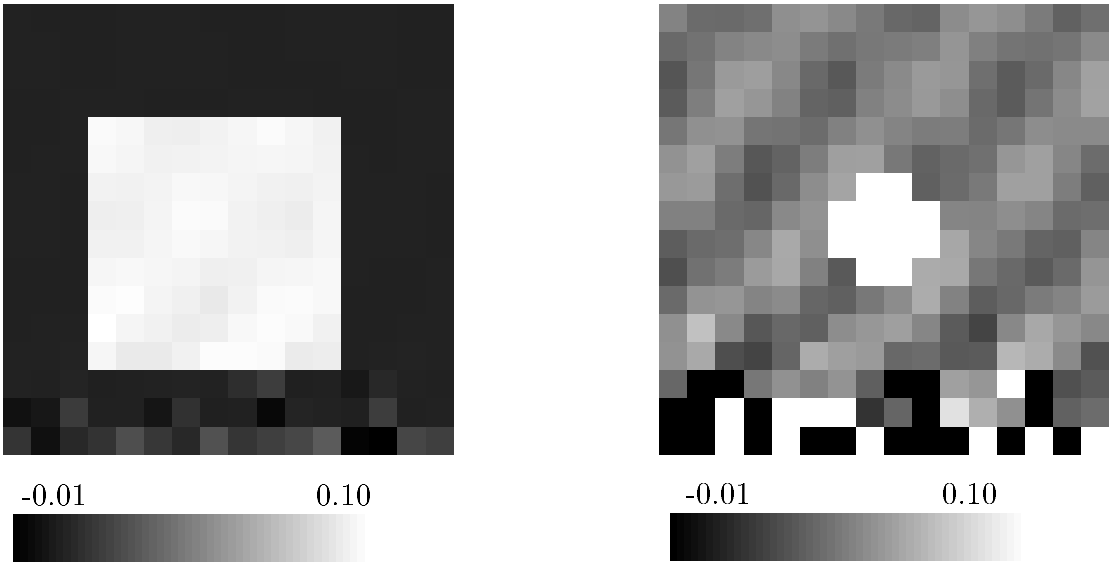

Abbildung 2.5: Gewichtete Rekonstruktionen

Neben den bereits aufgeführten Methoden wurden im Hinblick auf spezielle Anwendungen mehrere andere, manchmal auch heuristisch begründete Verfahren entwickelt. Diese beruhen auf dem *verallgemeinerten holographischen* Feld (vgl. Porter-Bojarski-Theorie in [La 87]). Dazu gehört das *Synthetische Aperturradar* **(SAR)** (vgl. [La 87]) zur wetterunabhängigen Erdoberflächenbeobachtung. Im Bereich der zerstörungsfreien Prüfverfahren, zur Lokalisierung und Abbildung von Materialfehlern, wie Risse in Reaktorbehältern, gelangen Verfahren wie die *Rayleigh-Sommerfeld-Holographie* und das *Synthetic Apertur Focusing Technique* **(SAFT)** (vgl. [La 87]). Diese Verfahren beruhen auf *Time Domain Backpropagation* Methoden, die neben *Diffraction Tomography* zu den Algorithmen zählen, die bei der Lösung des linearisierten inversen Streuproblems Anwendung finden.

Bemerkung 2.10 *Die Anwendung der räumlichen Fourier-Transformation (vgl. Anhang D) auf die Faltungsgleichungen (2.3) und (2.6) läßt sich zwar analytisch angeben, weist aber für $G_k(x-y)$ mit $k \in I\!R$ im Fourier-Raum bei $\|\zeta\| = k$ eine Singularität auf, denn:*

$$\tilde{G}_k(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\|\zeta\|^2 - k^2} & \Im(k) > 0 \\ pv\,\frac{1}{\|\zeta\|^2 - k^2} + i\pi\delta(\|\zeta\|^2 - k^2) & \Im(k) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Zur Begründung und Herleitung sei auf Anhang D verwiesen.
Die räumliche Fourier-Transformation liefert daher Informationen über das Ob-

jekt nur auf der sogenannten Ewald-Kugel, was die Rekonstruktionsmöglichkeiten und Güte der eingesetzten Lösungsalgorithmen einschränkt. Denn die Rekonstruktion kann nur dort geschehen, wo das Spektrum des Integralkerns, also der Greenschen Funktion, von Null verschieden ist. Das bedeutet, daß die Inversion des Integraloperators die Bestimmung des Spektrums der unbekannten Größe nur auf der Ewald-Kugel $|k| = \|\zeta\|$ *zuläßt. Aus diesem Grund wäre auch das Inversionsproblem schlecht gestellt und nicht eindeutig lösbar. Ein Ausweg wäre die Frequenzvariation (vgl. [La 87]). Da aber die äquivalente Quelle vom Feld und damit in unbekannter Weise von der Frequenz abhängt, ist jeder Ewald-Kreis mit einer anderen Quelle verbunden. Hieraus stellt man fest, daß die Frequenz- und damit Wellenzahlvariation, was eine Variation der Ewald-Kreise bedeutet, für eine Rekonstruktion zu aufwendig sein kann.*

Wie man aus diesem hier angegebenen kurzen Überblick entnehmen kann, spielen die Iterationsmethoden und Linearisierungen (problemabhängig) bei den meisten Rekonstruktionsalgorithmen eine Rolle. Das Problem bei den Linearisierungen kann natürlich die Güte der Rekonstruktionsalgorithmen stark einschränken, was den Kontrast in den Inhomogenitäten angeht. Bei den iterativen Verfahren ist natürlich die Wahl eines "guten" Startwertes, um die Konvergenz zu sichern, unumgänglich. Lobel hat in seiner Dissertation (vgl. [Lob 96]) den Einfluß des Startwertes auf die Lösung untersucht.

2.4 Eindeutigkeit der Lösung

Aufgrund der Schlechtgestelltheit des inversen Streuproblems stellt sich bei der Lösung die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung. Fraglich ist auch die Stabilität, da "kleine" Fehler in den Eingangsdaten (zum Beispiel durch Rauschen verfälschte Meßwerte) Fehler in der Lösung (Rekonstruktion) hervorrufen können.

Der Integraloperator S_u sowie der Operator S besitzen nichttrivialen Nullraum. Dies ist zweifach bedingt. Erstens durch die Existenz (nichttrivialer) *nicht-ausstrahlender* Quellen ϕ_{nr} (im kontinuierlichen Fall) mit

$$\int_\Omega G(k\|x-y\|)\phi_{nr}(y)dy = 0, \text{ für } x \in \Gamma \tag{2.10}$$

innerhalb des streuenden Potentials[5] und zweitens durch das Vorhandensein von

[5] Selbst, wenn ϕ_{nr} kein äußeres gestreutes Feld erzeugt, besteht die Möglichkeit, daß diese ein inneres gestreutes Feld erzeugt.

Quellen ϕ_{ew} (im diskreten Fall), also Inhomogenitäten im Objekt, die *verschwindende*, gestreute Wellen aussenden, denen gegenüber der Empfänger nicht sensitiv genug ist. Ein möglicher Ausweg hieraus liefert die Rekonstruktion aus Nahfelddaten. Die nichttrivialen Funktionen ϕ_{null} aus dem Nullraum $\mathcal{N}(S)$ bestehen dann (im diskreten Fall) aus ϕ_{nr} und ϕ_{ew}.

Während die Existenz und vor allem die Eindeutigkeitsfragen bei dem inversen Hindernisproblem mit Hilfe der Resultate, bekannt aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, gezeigt werden können, stellt der Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung des inversen Mediumproblems keine einfache Aufgabe dar.
Im Gegensatz zu den Lösungsalgorithmen, die im wesentlichen unabhängig von der Dimension des betrachteten Raumes sind, spielt bei der Frage nach Eindeutigkeit die Dimension des Raumes die Hauptrolle. Neben der Dimension sind auch zusätzliche Voraussetzungen und Annahmen, wie zum Beispiel der Durchmesser des Objektträgers von großer Bedeutung.
Die Eindeutigkeit der Lösung im 1D-Fall für ein inhomogenes Objekt unter Einsatz der elektromagnetischen Wellen wurde von Päivärinta (vgl. [Pa/So 87]) gezeigt. Von Colton und Kreß (vgl. [Co/Kr 92]) ist dieses Resultat auf den 3D-Fall erweitert worden.
Im dreidimensionalen Fall schlägt Ramm (vgl. [Lob 96] und [Ra 95]) einen "neuen" Beweis vor, der auf der Ausnutzung der Minimierung eines Funktionals basiert. In diesem Fall wird versucht, nicht mehr den Fehler zwischen dem gemessenen und dem berechneten Feld, sondern ein Funktional von zwei Variablen der Form

$$F(\mathcal{O}, \phi) = \|u_s - S\phi\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|\phi - \mathcal{O}S\phi - \mathcal{O}u_i\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{2.11}$$

zu minimieren. Die Eindeutigkeit des Minimums verbindet der Autor mit der Konvergenz des angewandten iterativen Lösers.
Die Frage nach Eindeutigkeit der Lösung des inversen Mediumproblems im $I\!R^3$ aus den gegebenen Fernfelddaten ist auch von Nachman (vgl. [Nac 88] und [Nac 96]) beantwortet worden. Es gibt auch Untersuchungen von Sylvester und Uhlmann (vgl. [Sy/Uh 90]) im Zusammenhang mit elektrischer Impedanz-Tomographie, die ihre Gültigkeit zum Teil auch für das in dieser Arbeit zu behandelnde Problem - mit einigen Modifikationen[6] - behalten (vgl. [Gu/Kl 94]). Ein wichtiges Hilfsmittel

[6]Zunächst wird eine äquivalente Beziehung zwischen Streuung durch ein durchdringliches, inhomogenes Objekt eingebettet in einem homogenen Hintergrundmedium und einem Randwertproblem gezeigt. Nach der Umformulierung des Problems in ein *interior transmission problem* kann keine Aussagen über die eindeutige Rekonstruktion des Brechungsindex gemacht werden, sondern über die Eindeutigkeit der Rekonstruktion des Trägers der Inhomogenitäten.

hierbei ist die *Dirichlet-Neumann-Abbildung* (vgl. [Co/Kr 83], [Co/Kr 92], [Nac 88], [Nac 96] und [Ra 86]).
Im 3D-Fall ist die Eindeutigkeit der Lösung - rekonstruiert aus den Daten (Fern- oder Nahfelddaten) - bekannt. In diesem Fall sind die Daten u_∞ beziehungsweise u_s jeweils Funktionen von 5 Variablen und die unbekannte Größe hängt nur von 3 Variablen ab. Bei fester Kreisfrequenz und damit fester Wellenzahl gibt es Eindeutigkeitsresultate von Colton und Kreß (vgl. [Co/Kr 92]) zu diesem überbestimmten Problem.

Im Gegensatz zu $I\!R^3$ ist der Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung des inversen Streuproblems im $I\!R^2$ für eine fest vorgegebene[7] Kreisfrequenz ω und damit eine fest vorgegebene Wellenzahl $k \in \mathbb{C}$ mit $\Re(k) > 0$ und $\Im(k) \geq 0$ aus den gegebenen Fernfelddaten $u_\infty(\alpha, \hat{x})$ oder Nahfelddaten $u_s(\alpha, x)$ mit $\hat{x} \in \mathcal{S}^1$, $x \in \Gamma$ und der Einfallsrichtung $\alpha \in \mathcal{S}^1$ noch eine offene Frage, denn das Problem liefert im $I\!R^2$ kein überbestimmtes System, da sowohl $\mathcal{O}(x)$ als auch $u_\infty(\alpha, \hat{x})$ und $u_s(\alpha, x)$ jeweils Funktionen von nur 2 Variablen sind. Es wurde jedoch von Sun und Uhlmann (vgl. [Su/Uh 93], [Co 96] und [Co/Kr 92]) gezeigt, daß, wenn $\mathcal{O} \in L_\infty(I\!R^2)$ ist und kompakten Träger besitzt, die Unstetigkeiten von $n(x)$ und damit die von $\mathcal{O}(x)$ aus Nah- oder Fernfelddaten eindeutig bestimmt werden können.

Satz 2.11 *Seien $n_1^2, n_2^2 \in L_\infty(I\!R^2)$ zwei verschiedene Brechungsindizes für das Gebiet Ω_{sc} und $\mathcal{O}_1(x) = 1 - n_1^2(x)$, $\mathcal{O}_2(x) = 1 - n_2^2(x)$ die dazugehörigen Objektfunktionen mit kompakten Trägern. Wenn $u_{\infty,j}(\alpha, \hat{x})$, $j = 1, 2$ die Fernfelddaten entsprechend n_j^2 gegeben sind mit $u_{\infty,1}(\alpha, \hat{x}) = u_{\infty,2}(\alpha, \hat{x})$ für alle $\hat{x}, \alpha \in \mathcal{S}^1$ und einer fest vorgegebenen Wellenzahl $k \in \mathbb{C}$, $\Re(k) > 0, \Im(k) \geq 0$, dann gilt: $n_1^2 - n_2^2 \in \mathcal{C}^{0,\nu}(I\!R^2)$ für jedes ν mit $0 \leq \nu < 1$.*

Beweise : (vgl. [Su/Uh 93]).

Bemerkung 2.12 *Vergleicht man die obigen Bedingungen an den Brechungsindex des Streuers, nämlich $n^2 \in L_\infty(I\!R^2)$ mit der Regularitätsbedingung im Kapitel 1, $n^2 \in \mathcal{C}^2(\Omega_{sc})$, so stellt man fest, daß die Eindeutigkeit der Unstetigkeiten der Objektfunktion unter schwächeren Annahmen an den Brechungsindex n gezeigt werden kann.*
Ferner kann man aus dem Anhang (B.1) - der Beziehung zwischen den Fernfelddaten u_∞ und den im Nahfeld gemessenen gestreuten Daten u_s - entnehmen, daß der

[7]Eine eindeutige Bestimmung für das Objekt für eine fest vorgegebene Wellenzahl k kann nur dann möglich sein, wenn das gestreute Feld für unendlich viele Einfallswinkel und Messungen bekannt ist.

obige Satz mit der Änderung $x \in \Gamma$ oder $x \in R\mathcal{S}^1$, $R > 0$ fest statt $\hat{x} \in \mathcal{S}^1$ seine Gültigkeit behält.

Betrachtet man die Kreisfrequenz ω aus einem Intervall und die dazugehörige Wellenzahl, so kann die Eindeutigkeit des Objekts $\mathcal{O}$ aus den Daten $u_\infty(\alpha, \hat{x})$ oder $u_s(\alpha, x)$ für $\hat{x}, \alpha \in \mathcal{S}^1$ und $x \in \Gamma$ gezeigt werden. Dieser Fall der Berücksichtigung verschiedener Kreisfrequenzen ist dann äquivalent der Frequenzvariation (*Frequency Diversity* (vgl. [La 87])).
Aussage über die Eindeutigkeit der Lösung des inversen Problems für mehrere Wellenzahlen enthält der folgende Satz von Colton und Kreß.

Satz 2.13 (vgl. [Co/Kr 92]) *Für ein Intervall der Wellenzahlen k kann der Brechungsindex n und damit die Objektfunktion $\mathcal{O}$ aus den Fernfelddaten $u_\infty(\alpha, \hat{x})$ für $\hat{x}, \alpha \in \mathcal{S}^1$ eindeutig bestimmt werden.*

Stabilität :

Die Frage nach der Stabilität bezieht sich auf die Sensitivität der Lösung gegenüber Rauschen und Meßfehlern in den Daten. Diese ist im $\mathbb{R}^3$ von Isakov (vgl. [Is 93])) für das inverse Hindernisproblem untersucht worden. Es wird gezeigt, daß der Fehler zwischen den Feldern, die von zwei perfekt leitenden Objekten herrühren, durch eine skalare Größe ϵ beschränkt ist. Und daß damit die Differenz zwischen diesen beiden Objekten ebenfalls durch eine Funktion von ϵ beschränkt ist. Diese Beweise lassen sich nur im $\mathbb{R}^3$, sowohl für Nah- als auch für Fernfelddaten anwenden.
Die Untersuchung der Stabilität der Lösung geht zum größten Teil mit den eingesetzten Lösungsmethoden einher, wie auch in der vorliegenden Arbeit.
Bei der Umformulierung des inversen Streuproblems in eine restringierte Optimierungsaufgabe dienen die Restriktionen zum Beispiel dazu, daß die Lösung von den Daten stetig abhängt.
Da der Operator S als ein implizit-nichtlinearer Operator in $L_2(\Omega)$ kompakt ist, ist das Problem der Invertierung zur Bestimmung von ϕ hinsichtlich der Stabilität gegenüber Fehlern in den Daten u_s schlecht gestellt (vgl. Lemma 2.21). Die Frage nach der Stabilität bei der Rekonstruktion des unbekannten Brechungsindex im $\mathbb{R}^2$ wird in der vorliegenden Arbeit im Zusammenhang mit der Anwendung der Methode der approximativen Inversen beantwortet. In diesem Fall ist zu erwarten, daß die angewandte Lösungsmethode - unter gewissen Bedingungen - die Eindeutigkeit der Lösung gekoppelt mit ihrer Stabilität liefert.

2.5 Singulärwertzerlegung für den Streuoperator

In diesem Paragraphen wird ausgehend von der Operatordarstellung (2.6) die Singulärwertzerlegung für den Streuoperator S hergeleitet. Diese basiert im wesentlichen auf einer Reihendarstellung der Greenschen Funktion, also des bekannten Kerns des Integraloperators S.
Jeder lineare kompakte Operator zwischen Hilberträumen besitzt eine *Singulärwertzerlegung* (vgl. [Co/Kr 92], [Lo2 89] und [Nat 86]). Die Kenntnis der Singulärwertzerlegung eines solchen Operators kann bei der Untersuchung von Eigenschaften und wie in dieser Arbeit zur Herleitung einer Rekonstruktionsformel (vgl. Kapitel 3) vorteilhaft sein. Dies wurde von Louis bei der Untersuchung des Nullraumes der Radon-Transformation und Anwendung der Methode der *approximativen Inverse* auf die Radon-Transformation demonstriert (vgl. [Lo1 84], [Lo2 84] und [Lo/Sc 96]). Louis leitete auch eine Singulärwertzerlegung für den Fall her, daß die Radon-Transformierte nur für einen eingeschränkten Winkelbereich bekannt ist (vgl. [Lo 86]) und daß nur endlich viele Einstrahlrichtungen praktisch realisiert werden können.
Eine Singulärwertzerlegung für die Röntgen-Transformation wurde von Maaß (vgl. [Ma 87]) zur Untersuchung der Auflösungseigenschaften der Röntgen-Transformation benutzt.
Die Singulärwertzerlegung eines linearen kompakten Operators führt zu einer orthogonalen Zerlegung der Elemente seines Definitionsbereiches in Funktionen, die differenziert sind hinsichtlich der Stabilität ihrer Rekonstruktionen aus ihren zugehörigen Daten. Die zu großen Singulärwerten gehörigen Singulärfunktionen lassen sich stabiler rekonstruieren als die zu kleinen Singulärwerten gehörigen.
Um für den hier betrachteten Operator die Singulärwertzerlegung angeben zu können, betrachte man zunächst folgendes Lemma über die Reihenentwicklung der Greenschen Funktion, also des bekannten Kerns des Integraloperators im 2D-Fall.

Lemma 2.14 *Seien $k \in \mathbb{C}$ die Wellenzahl mit $\Re(k) > 0$ und $\Im(k) \geq 0$ und $x,\ y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| > \|y\|$. Für die Hankel-Funktion erster Art und Ordnung Null gilt folgende Reihendarstellung:*

$$H_0^{(1)}(k\|x-y\|) \;=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_m(k\|y\|)H_m^{(1)}(k\|x\|)Y_m(x/\|x\|)\overline{Y_m(y/\|y\|)}, \qquad (2.12)$$

wobei J_m Bessel-Funktionen der Ordnung m und $H_m^{(1)}$ Hankel-Funktionen erster Art der Ordnung m und Y_m die Oberflächenfunktionen (Kugelflächenfunktionen für $n \geq 3$) vom Grad m bezeichnen, das heißt $Y_m(\frac{x}{\|x\|}) = e^{im\theta}$ beziehungsweise $Y_m(\frac{y}{\|y\|}) = e^{im\varphi}$. Und es bezeichnen θ und φ die Winkel zwischen x beziehungsweise y und der x_1-Achse.

Mit Hilfe der obigen Entwicklung der Hankel-Funktion können nun für die Operatoren S und dessen Adjungierte S^* auch Reihendarstellungen angegeben werden. Um nachher auch die Singulärwerte für den genannten Operator bestimmen zu können, betrachtet man statt $L_2(\Omega)$ bei der Transformation in Polarkoordinaten $L_2(B_R(0))$ mit $B_R(0) = \{x \in I\!R^2;\ \|x\| < R\}$ für ein *festes* $R > 0$ das Innere des Kreises mit Radius R um den Nullpunkt. Es wird aber gefordert, daß $B_R(0) \supset \overline{\Omega}$ und $\Gamma = \partial B_R(0) = \{x \in I\!R^2;\ \|x\| = R\} = R\mathcal{S}^1$, das heißt eine auf einen Meßkreis spezialisierte Meßanordnung.

Bemerkung 2.15 *Im Hinblick auf die spätere Anwendung des Singulärsystems des Streuoperators wurde $L_2(B_R(0))$ mit $R > 1$ für den Definitionsbereich des Operators statt $L_2(B_1(0))$ gewählt. Diese "Vergrößerung" des Definitionsbereichs des Operators spiegelt sich bei der Berechnung des Termes $I_\mu^{(1)}(kR)$ (vgl. Gleichung (2.25)) wider. Wird der Definitionsbereich des Operators auf $L_2(B_1(0))$ eingeschränkt, so ist der oben genannte Term unabhängig von R.*

Bemerkung:
Im $I\!R^3$ gilt eine entsprechende Entwicklung für die Greensche Funktion $\frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}$ in Termen der sphärischen Bessel-Funktionen und der Kugelflächenfunktionen (vgl. [Ab/St 72] und [Co/Kr 92]).

Lemma 2.16 *Es seien die Wellenzahl $k \in \mathbb{C}$ mit $\Re(k) > 0$ und $\Im(k) \geq 0$ und $B_R(0)$ mit der obigen Eigenschaft gegeben. Ferner seien $x \in R\mathcal{S}^1$, $y \in B_R(0)$ mit den Polarkoordinaten $x = R\omega(\theta) = R(\cos\theta, \sin\theta)^T$ und $y = r\omega(\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ mit $0 < r < R$ und $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$ gegeben. Dann haben für $\phi \in L_2(B_R(0))$ und $g \in L_2(R\mathcal{S}^1)$ die Operatoren*

$$\begin{aligned} S \quad &: \quad L_2(B_R(0)) \to L_2(R\mathcal{S}^1) \\ (S\phi)(x) \quad &:= \quad -k^2 \int\limits_{B_R(0)} G(k\|x-y\|)\phi(y)dy \ \ \textit{für} \ \ x \in R\mathcal{S}^1 \end{aligned} \tag{2.13}$$

und dessen Adjungierte

$$\begin{aligned} S^* \quad &: \quad L_2(R\mathcal{S}^1) \to L_2(B_R(0)) \\ (S^*g)(y) \quad &:= \quad -\overline{k^2} \int\limits_{R\mathcal{S}^1} \overline{G(k\|y-x\|)}g(x)d\sigma_x \ \ \textit{für} \ \ y \in B_R(0) \end{aligned} \tag{2.14}$$

mit R fest folgende Darstellungen:

$$(S\phi)(R,\theta;k) = -i\frac{k^2\pi}{2}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}} H_m^{(1)}(kR)Y_m(\omega(\theta))\mathcal{H}_m\tilde{\phi}_m(kR) \tag{2.15}$$

$$(S^*g)(r,\varphi,R;k) = i\frac{\overline{k^2}\pi R}{2}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}} \overline{H_m^{(1)}(kR)}\ \overline{J_m(kr)}Y_m(\omega(\varphi))\tilde{g}_m(R), \tag{2.16}$$

wobei $\mathcal{H}_m$ die Hankel-Transformation *der Ordnung m (vgl. Anhang D) bezüglich r der Fourier-Koeffizienten $\tilde{\phi}_m$ von ϕ bezüglich φ und $\tilde{g}_m$ die Fourier-Koeffizienten von g bezüglich θ bezeichnen (vgl. Anhang D).*

Beweis :
Für den Operator S erhält man nach dem Einsetzen der Reihendarstellung der Hankel-Funktion $H_0^{(1)}$ aus dem Lemma 2.14 in die Integralgleichung (2.13)

$$\begin{aligned}(S\phi)(R,\theta;k) &= -i\frac{k^2}{4}\int_0^R\int_0^{2\pi}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}} H_m^{(1)}(kR)J_m(kr)Y_m(\omega(\theta)) \\ &\qquad\cdot\overline{Y_m(\omega(\varphi))}\phi(r,\varphi)r\,d\varphi\,dr.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Nach gleichmäßiger Konvergenz der Reihendarstellung für die Hankel-Funktion und Anwendung des Satzes von *Fubini* ergibt sich:

$$\begin{aligned}(S\phi)(R,\theta;k) &= -i\frac{k^2}{4}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}} H_m^{(1)}(kR)Y_m(\omega(\theta))\int_0^R rJ_m(kr) \\ &\qquad\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\overline{Y_m(\omega(\varphi))}\phi(r,\varphi)d\varphi}_{=:2\pi\tilde{\phi}_m(r)}\,dr\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$= -i\frac{k^2\pi}{2}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}} H_m^{(1)}(kR)Y_m(\omega(\theta))\int_0^R rJ_m(kr)\tilde{\phi}_m(r)dr, \tag{2.19}$$

mit der Hankel-Transformierten der Fourier-Koeffizienten der äquivalenten Quelle

$$\mathcal{H}_m\tilde{\phi}_m(kR) \quad := \quad \int_0^R rJ_m(kr)\tilde{\phi}_m(r)dr.$$

Analog erhält man für den adjungierten Operator, mit R fest:

$$\begin{aligned}
(S^*g)(r,\varphi;k) &= i\frac{\overline{k^2}}{4}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}}\overline{H_m^{(1)}(kR)}\;\overline{J_m(kr)} \\
&\qquad \cdot\overline{Y_m(\omega(\theta))}Y_m(\omega(\varphi))g(R,\theta)Rd\theta \qquad (2.20)\\
&= i\frac{\overline{k^2}R}{4}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}}\overline{H_m^{(1)}(kR)}\overline{J_m(kr)}Y_m(\omega(\varphi)) \\
&\qquad \cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\overline{Y_m(\omega(\theta))}g(R,\theta)d\theta}_{=:2\pi\tilde{g}_m(R)}, \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

$$(S^*g)(r,\varphi,R;k) \quad = \quad i\frac{\overline{k^2}\pi R}{2}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}}\overline{H_m^{(1)}(kR)}\;\overline{J_m(kr)}Y_m(\omega(\varphi))\tilde{g}_m(R). \qquad (2.22)$$

■

Um die Singulärwerte zu bestimmen, kann analog den vorhergehenden Lemmata eine Reihendarstellung für den Operator SS^* hergeleitet werden.

Satz 2.17 *Seien $k\in\mathbb{C}$ mit $\Re(k)>0$, $\Im(k)\geq 0$, $y\in B_R(0)$ und $x,\ z\in R\mathcal{S}^1$, wobei $R>0$ fest gewählt wird, mit den Polarkoordinaten $x=R\omega(\theta)$, $y=r\omega(\varphi)$, und $z=R\omega(\varphi')$ mit $r<R$ und $g\in L_2(R\mathcal{S}^1)$. Der Operator*

$$SS^*: L_2(R\mathcal{S}^1)\to L_2(R\mathcal{S}^1)$$

hat dann folgende Darstellung:

$$(SS^*g)(R,\theta;k) = \frac{|k^2|^2\pi^2R}{4}\sum_{m\in\boldsymbol{Z}}|H_m^{(1)}(kR)|^2Y_m(\omega(\theta))I_m^{(1)}(kR)\tilde{g}_m(R), \qquad (2.23)$$

wobei

$$I_m^{(1)}(kR) := \int_0^R r|J_m(kr)|^2 dr.$$

Beweis :
Ausgehend von dem Integraloperator SS^*

$$(SS^*g)(x) = \frac{|k^2|^2}{16} \int_{B_R(0)} H_0^{(1)}(k\|x-y\|) \int_{RS^1} \overline{H_0^{(1)}(k\|z-y\|)} g(z) d\sigma_z \, dy$$

gelangt man mit Hilfe der Reihendarstellung für die Hankel-Funktion $H_0^{(1)}$ und für deren konjugiertkomplexen unter Ausnutzung der gleichmäßigen Konvergenz und dem Satz von *Fubini* zu

$$(SS^*g)(R,\theta;k) = \frac{|k^2|^2 R}{16} I_{mn}$$

mit

$$I_{mn} := \sum_{m\in\mathbf{Z}} H_m^{(1)}(kR) Y_m(\omega(\theta)) \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{H_n^{(1)}(kR)} I_{mn}^{(1)} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} g(R\omega(\varphi')) \overline{Y_n(\omega(\varphi'))} d\varphi'}_{=2\pi\tilde{g}_n(R)}, \tag{2.24}$$

und

$$I_{mn}^{(1)} := \int_0^R \int_0^{2\pi} r J_m(kr) \overline{J_n(kr)} \; \overline{Y_m(\omega(\varphi))} Y_n(\omega(\varphi)) d\varphi dr.$$

Zur weiteren Vereinfachung betrachtet man das Integral $I_{mn}^{(1)}$ und nutzt die Orthogonalität der Oberflächenfunktionen

$$\int_0^{2\pi} \overline{Y_m(\omega(\varphi))} Y_n(\omega(\varphi)) d\varphi = 2\pi\delta_{m,n}$$

aus, mit $\delta_{m,n}$ das *Kronecker Symbol*. Damit gilt:

$$I^{(1)}_{mn} \;=\; 2\pi\ I^{(1)}_m(kR) = 2\pi \int\limits_0^R r|J_m(kr)|^2 dr. \tag{2.25}$$

Es gilt also

$$I_{mn} = I_m = 4\pi^2 \sum_{m\in \boldsymbol{Z}} |H^{(1)}_m(kR)|^2 Y_m(\omega(\theta)) I^{(1)}_m(kR)\tilde{g}_m(R). \tag{2.26}$$

Für den Operator SS^* erhält man insgesamt

$$(SS^*g)\,(R,\theta;k) = \frac{|k^2|^2\pi^2 R}{4} \sum_{m\in \boldsymbol{Z}} |H^{(1)}_m(kR)|^2 Y_m(\omega(\theta)) I^{(1)}_m(kR)\tilde{g}_m(R).$$

■

Bemerkung 2.18 *Ist $k \in I\!R^+$, so kann das Integral in der Gleichung (2.25) geschlossen angegeben werden (vgl. [Lu 62]).*

$$I^{(1)}_m(kR) = \frac{1}{2} R^2 \{J^2_m(kR) - J_{m-1}(kR)J_{m+1}(kR)\}.$$

Unter der Annahme, daß die Fourier-Koeffizienten der Funktion g symmetrisch bezüglich des Index sind, das heißt $\tilde{g}_m(R) = \tilde{g}_{-m}(R)$, also g eine gerade Funktion, besitzt der Operator SS^* die Darstellung

$$\begin{aligned}(SS^*g)\,(R,\theta;k) \;&=\; \frac{|k^2|^2\pi^2 R}{4} \Big\{ |H^{(1)}_0(kR)|^2 I^{(1)}_0(kR)\tilde{g}_0(R) \\ &+\; 2\sum_{m\in I\!N} |H^{(1)}_m(kR)|^2 I^{(1)}_m(kR)\cos(m\theta)\tilde{g}_m(R) \Big\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Satz 2.19 (Singulärwertzerlegung) *Es sei $S : L_2(B_R(0)) \to L_2(R\mathcal{S}^1)$ der Streuoperator. Dann besitzt S das vollständige Singulärsystem $\{w_\mu, v_\mu; \sigma_\mu\}$ gemäß*

$$\sigma_\mu \;=\; \frac{|k^2|\pi\sqrt{R}}{2} \left|H^{(1)}_\mu(kR)\right| \sqrt{I^{(1)}_\mu(kR)} \tag{2.28}$$

$$w_\mu(R,\theta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} Y_\mu(\omega(\theta)) \tag{2.29}$$

$$v_\mu(r,\varphi) \;=\; i\frac{\overline{k^2}}{|k^2|\sqrt{2\pi}} \frac{\overline{H_\mu^{(1)}(kR)}\;\overline{J_\mu(kr)}}{|H_\mu^{(1)}(kR)|\sqrt{I_\mu^{(1)}(kR)}} Y_\mu(\omega(\varphi)). \tag{2.30}$$

Das Integral $I_\mu^{(1)}(kR)$ ist in der Gleichung (2.25) gegeben.

Beweis :
Zur Bestimmung der Singulärwerte setzt man im Satz 2.17 für $g(R\omega(\varphi'))$ in den Gleichungen (2.23) und (2.24) die Eigenfunktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi R}} Y_\mu(\omega(\varphi'))$ des Operators SS^* ein und nutzt die Definition des Eigenwertes λ_μ des Operators SS^* aus, so erhält man dafür

$$\lambda_\mu = \frac{|k^2|^2\pi^2 R}{4} \left| H_\mu^{(1)}(kR) \right|^2 I_\mu^{(1)}(kR),$$

und damit die Singulärwerte $\sigma_\mu = \sqrt{\lambda_\mu}$. Um die Singulärfunktionen v_μ senkrecht zu $\mathcal{N}(S)$ - dem Nullraum von S - bestimmen zu können, wendet man das Lemma 2.16 an mit $g(R,\theta)$ in den Gleichungen (2.20) und (2.21) ersetzt durch $w_\mu(R,\theta)$. Unter der Voraussetzung, daß $S^* w_\mu = \sigma_\mu v_\mu$ ist, gilt

$$\sigma_\mu v_\mu \;=\; \frac{|k^2|\pi\sqrt{R}}{2} \left| H_\mu^{(1)}(kR) \right| \sqrt{I_\mu^{(1)}(kR)}\; v_\mu$$

und

$$S^* w_\mu \;=\; i\frac{\overline{k^2} R\pi}{2\sqrt{2\pi R}}\; \overline{H_\mu^{(1)}(kR)}\; \overline{J_\mu(kr)}\; Y_\mu(\omega(\varphi)).$$

Hierdurch erhält man

$$v_\mu(r,\varphi) \;=\; i\frac{\overline{k^2}}{|k^2|\sqrt{2\pi}} \frac{\overline{H_\mu^{(1)}(kR)}\;\overline{J_\mu(kr)}}{|H_\mu^{(1)}(kR)|\sqrt{I_\mu^{(1)}(kR)}} Y_\mu(\omega(\varphi)), \tag{2.31}$$

mit $\|v_\mu\|_{L_2(B_R(0))} = 1$. ■

Das nachstehende Korollar ermöglicht, Aussagen über die Eigenschaften der Singulärwerte zu treffen.

Korollar 2.20 *Seien σ_μ die Singulärwerte des Operators S oder S^*, die Wellenzahl $k \in \mathbb{C}$ mit $\Re(k) > 0$ und $\Im(k) \geq 0$ sowie $R > 0$ der Radius des Meßkreises (Detektorradius), so gilt: Die Singulärwerte σ_μ sind stetige, reellwertige Funktionen der Wellenzahl k und dem Detektorradius R, das heißt*

$$\sigma_\mu = \sigma_\mu(k, R). \tag{2.32}$$

Bemerkung: (Zusammenhang zwischen den Singulärwerten und der Wellenlänge)

Mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens der Bessel- und Hankel-Funktionen (vgl. Anhang (A.15)) kann man folgendes Verhalten für die Singulärwerte für kleine Wellenlängen feststellen. Dies entspricht dem Fall $k \in \mathbb{R}^+, k \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\sigma_\mu &= \frac{k^2\pi\sqrt{R}}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\pi k R}}e^{i(kR-1/2\mu\pi-1/4\pi)}\right| \\
&\quad \cdot \left\{\frac{R^2}{2}\,\frac{2}{k\pi R}\Big(\cos^2(kR - 1/2\mu\pi - 1/4\pi)\right. \\
&\quad \left.\left. - \cos(kR - \frac{(\mu-1)\pi}{2} - 1/4\pi)\cos(kR - \frac{(\mu+1)\pi}{2} - 1/4\pi)\Big)\right\}^{1/2}\right|_{k\to\infty}.
\end{aligned}$$

Nach Anwendung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sigma_\mu &= \frac{k^2\pi\sqrt{R}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k R}}\,\sqrt{\frac{R}{\pi k}}\Bigg|_{k\to\infty} \\
&= \frac{1}{2}k\sqrt{2R}\Big|_{k\to\infty}.
\end{aligned}$$

Analoges Verhalten kann ebenfalls für $R \to \infty$ festgestellt werden. Dies bedeutet, daß die Singulärwerte für größer werdender Detektorradius und kleiner werdender Wellenlänge monoton wachsen.

Mit Hilfe des implizit-nichtlinearen Operators S und der Singulärwertzerlegung des Operators kann die Schlechtgestelltheit des inversen Streuproblems klassifiziert werden. Wie man aus (vgl. [Lo2 89]) entnehmen kann, heißt ein linearer, kompakter

Operator A *schlecht gestellt von der Ordnung* $\alpha > 0$, wenn für die Singulärwerte σ_μ von A gilt $\sigma_\mu = O(\mu^{-\alpha})$. Mit Hilfe der Singulärwerte wurde eine Klassifizierung der *Radon-Transformation* von Louis gezeigt (vgl. [Lo2 89]).
Gemäß der Definition der Klassifizierung der Schlechtgestelltheit eines Operators erhält man folgendes Ergebnis für den Streuoperator S.

Lemma 2.21 *Sei die Wellenzahl k aus $\mathbb{R}^+$. Dann ist der Streuoperator S für das 2D akustische Streuproblem schlecht gestellt von der Ordnung* $3/2$.

Beweis:
Zum Beweis dieser Behauptung betrachte man das asymptotische Verhalten der Hankel- und Bessel-Funktionen für "große" Indizes ($\mu \to \infty$) laut Gleichung (A.18) und (A.19) im Anhang A. Desweiteren berücksichtigt man die *Stirling-Formel*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n [1 + O(1)]$$

für das asymptotische Verhalten von $n!$.
Ausgehend von der Darstellung der Singulärwerte

$$\sigma_\mu = \frac{k^2\pi\sqrt{R}}{2}|H_\mu^{(1)}(kR)|\sqrt{I_\mu^{(1)}(kR)}$$

und Anwendung der oben erwähnten asymptotischen Entwicklungen erhält man:

$$|H_\mu^{(1)}(kR)| = \left.\frac{2^{\mu+1/2}}{\pi^{1/2}k^\mu R^\mu}e^{1-\mu}(\mu-1)^{\mu-1/2}\right|_{\mu\to\infty}$$

und

$$I_\mu^{(1)} = \frac{R^2}{2}\left\{J_\mu^2(kR) - J_{\mu-1}(kR)J_{\mu+1}(kR)\right\} = \left.\frac{R^2}{2}\,\frac{(kR)^{2\mu}}{2^{2\mu}\,(\mu!)^2\,(\mu+1)}\right|_{\mu\to\infty}.$$

Hiermit gilt

$$\sqrt{I_\mu^{(1)}(kR)} = \left.\frac{R}{\sqrt{2}}\frac{(kR)^\mu}{2^\mu\,\sqrt{2\pi\mu}\,(\frac{\mu}{e})^\mu\,\sqrt{\mu+1}}\right|_{\mu\to\infty}.$$

Bildet man nun das Produkt der obigen Terme, so gelangt man nach einigen algebraischen Umformungen zu

$$\sigma_\mu = \frac{k^2 R^{3/2}}{2\sqrt{2}} \, \frac{e}{\sqrt{\mu(\mu^2-1)}} \, \underbrace{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}}_{=1/e} \Bigg|_{\mu\to\infty}$$

und damit zu

$$\sigma_\mu = \frac{k^2 R^{3/2}}{2\sqrt{2}\sqrt{\mu^3-\mu}}.$$

Für eine feste Wellenzahl k und festen Detektorradius $R > 0$ erhält man somit

$$\sigma_\mu = O(\mu^{-3/2}).$$

$\blacksquare$

Bemerkung 2.22 *Wie man aus dem obigen Ergebnis ersehen kann, "glättet" der Streuoperator S stärker im Vergleich zu Radon-Transformation, die im $I\!R^2$ von der Ordnung $1/2$ ist (vgl. [Lo2 89]).*

Da die Singulärwerte im nächsten Kapitel zur Bestimmung des *Rekonstruktionskernes* Anwendung finden, ist es notwendig, eine Vorstellung über die Lage der Nullstellen der Bessel- und Neumann-Funktionen in Abhängigkeit des Index $\mu \in Z\!\!Z$ zu haben, und deren Werte näherungsweise berechnen zu können. Wegen der Eigenschaften der Bessel-Funktionen, der Tatsache, daß die Neumann- und Hankel-Funktionen sich als Linearkombinationen der Bessel-Funktionen darstellen lassen, und des Zusammenhanges zwischen den Nullstellen der Zylinderfunktionen (vgl. [Ab/St 72], (A.1),(A.2),(A.10) und (A.11)) genügt es nur die Nullstellen der Bessel-Funktionen zu untersuchen. Wie man aus der *Debyeschen Formel* (vgl. [Ab/St 72] und für spezielle Funktionsargumente vgl. [Lo2 89] und [Nat 86]) entnehmen kann, werden die Bessel-Funktionen sehr "klein", wenn das Argument kleiner als die Ordnung der Funktion ist. Im folgenden wird die Untersuchung nur auf ein Zusammenstellen der für diese Arbeit relevanten Resultate beschränkt.

Lemma 2.23 *Die Funktionen $J_\mu(z)$, $z \in C\!\!\!\!I$, $|arg z| < \pi$ besitzen für ein beliebiges $\mu \in I\!R$ unendlich viele reelle positive Nullstellen $\rho = \rho(\mu, s), s \in I\!N$. Alle Nullstellen sind einfach mit Ausnahme des Punktes $z = 0$, der für $n = 1, 2, \cdots$ als Nullstelle die Vielfachheit n besitzt.*

Eine asymptotische Entwicklung dieser Nullstellen kann man aus [Ab/St 72] entnehmen.
Mit Hilfe einer graphischen Darstellung kann man eine Näherung an die Nullstellen der Singulärwerte für ein festes Argument kR in Abhängigkeit des Index μ angeben. Die folgende Bilder zeigen das Singulärwertspektrum des Streuoperators S. Da das Verhalten der Singulärwerte Aussagen über die Schlechtgestelltheit des Operators macht, kann man aus den Bildern (2.6) - (2.14) und dem Lemma 2.21 entnehmen, daß der Operator schlecht gestellt ist und daß zur Bestimmung von ϕ eine Regularisierung erforderlich ist. Die Bilder (2.6) und (2.9) zeigen das Verhalten von σ_μ für $\mu = 1, \cdots, 45$ für reellwertige Wellenzahl k. Der Abbildung (2.6) entnimmt man für die feste Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda = 0.9LE$ den Einfluß der Variation des Detektorradius auf die Singulärwerte. Da die Singulärwerte bei der Herleitung einer Rekonstruktionsformel Anwendung finden, ersieht man, daß Messungen zu nahe am Träger des Streuobjekts den Einfluß von Fehlern in den Daten, erzeugt zum Beispiel durch Rauschen, verstärken können, was die Stabilität der Lösung erheblich beeinträchtigt. Dies ist unter anderem ein Grund für die Wahl der Meßlinie beziehungsweise des Meßkreises gemäß Bemerkung 2.3.
Für einen festen Detektorradius R und Dämpfungsfaktor $\tau = 0$ (vgl. Bemerkung 2.1) also $k \in \mathbb{R}$ beeinflußt eine Variation der Wellenzahl das Verhalten der Singulärwerte in ähnlicher Weise wie die Variation des Abstands der Meßoberfläche vom Nullpunkt und damit auch vom Objekt. Für "kleinere" Wellenzahlen k, also "größere" Wellenlänge λ ist es ohnehin zu beachten, daß die Wellenlänge nicht größer als der Durchmesser des Trägers des unbekannten Objekts wird. Man kann feststellen, daß für "kleinere" Wellenlängen der relevante Anteil des Singulärwertspektrums größer wird, aber es ist zu beachten, daß für $k \to \infty$ die Inversion aus Streuung in eine Inversion aus Projektion übergeht (vgl. [De 86], [La 87], [Lo2 89] und [Nat 86]). Berücksichtigt man zusätzlich die Dämpfung, das heißt den Fall $k \in \mathbb{C}$, so fallen die Singulärwerte stetig für wachsende μ unter Variationen des Detektorradius R und der Wellenzahl k, wobei sich in diesem Fall auch die Nullstellen der Singulärwerte in Abhängigkeit von positivem μ mit größer werdendem R nach rechts verschieben. Für festes R und Variationen der Wellenzahl sprich kontinuierliche Änderungen der Frequenz oder der Wellenlänge der eingesetzten Wellenarten stellt man fest, daß für $\Re(k) = \Im(k)$, das heißt für Dämpfungsfaktor τ gleich der Frequenz ω das Spektrum sich für größer werdenden $|k|$ auf den Nullpunkt zu bewegt, das heißt, daß die Singulärwerte schneller fallen und ein früheres Abschneiden der Singulärwerte zur Regularisierung erforderlich wird. Wird allerdings der Proportionalitätsfaktor zwischen Frequenz und Dämpfung ungleich 1 gewählt, das heißt $\Re(k) < \Im(k)$ oder $\Re(k) > \Im(k)$, so ist ähnlich wie bei den Änderungen des Detektorradius, eine Verschiebung des Singulärwertspektrums festzustellen, aber in diesem Falle ist auch das Verhältnis zwischen dem größten Singulärwert σ_{max} und dem kleinsten Singulärwert σ_{min} stark beeinträchtigt, wie man dies aus den Werten in den entsprechenden Bil-

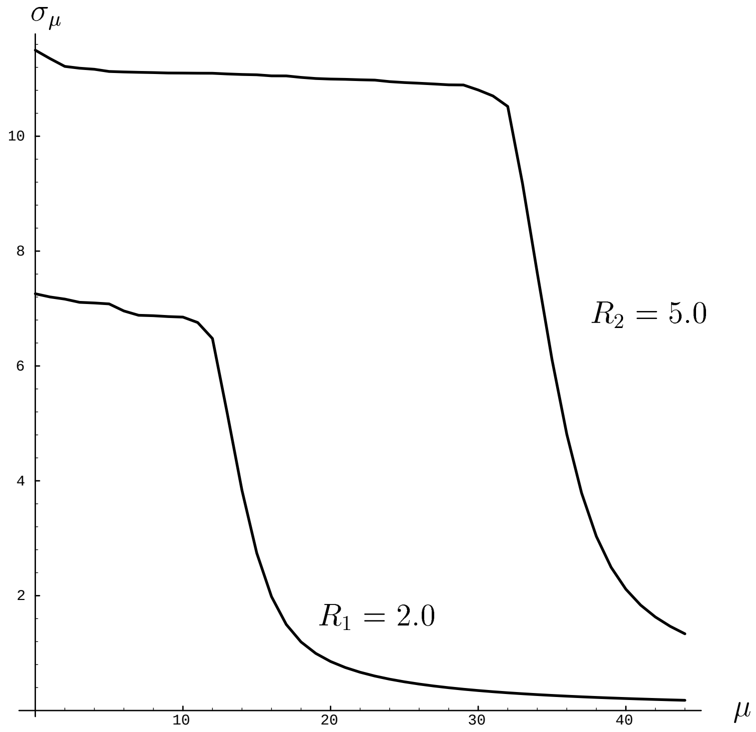

Abbildung 2.6: Singulärwerte $\sigma = \sigma(k_{fest}, R_i)$ für $k_{fest} \in I\!R^+$.

dern entnehmen kann.
Bei den Abweichungen zwischen dem Real- und Imaginärteil der Wellenzahl ist allerdings darauf hinzuweisen, daß die Dämpfung τ linear mit der Frequenz ω wächst.

Bemerkung 2.24 *Betrachtet man das Verhalten der Singulärwerte gemäß den Bildern (2.6) - (2.14), so kann man feststellen, daß die Anwendung des Streuoperators S auf eine Funktion $\phi \in L_2(B_R(0))$ analoge Ergebnisse liefert, wie die im* limited angle Problem *bei der Radon-Transformation und ihrer Anwendung in der Röntgen-Computer-Tomographie (vgl. [Lo 86] und [Nat 86]). Dies bedeutet, daß die Unvollständigkeit der Daten,das heißt die Einschränkung des Bildbereiches des Operators S auf einem Teilbereich der Sphäre $R\mathcal{S}^1$, auch bei dem hier betrachteten inversen Streuproblem dazu führt daß Singulärwerte σ_μ für $\mu \to \infty$ exponentiell fallen (vgl. limited angle Problem), was die Schlechtgestelltheit des Problems bestätigt.*
Außerdem ist es zu beachten, daß das Verhalten der Singulärwerte gemäß den Bildern und das gemäß des Lemmas 2.21 nur für den Fall $\mu \to \infty$ mit einander zu vergleichen sind.

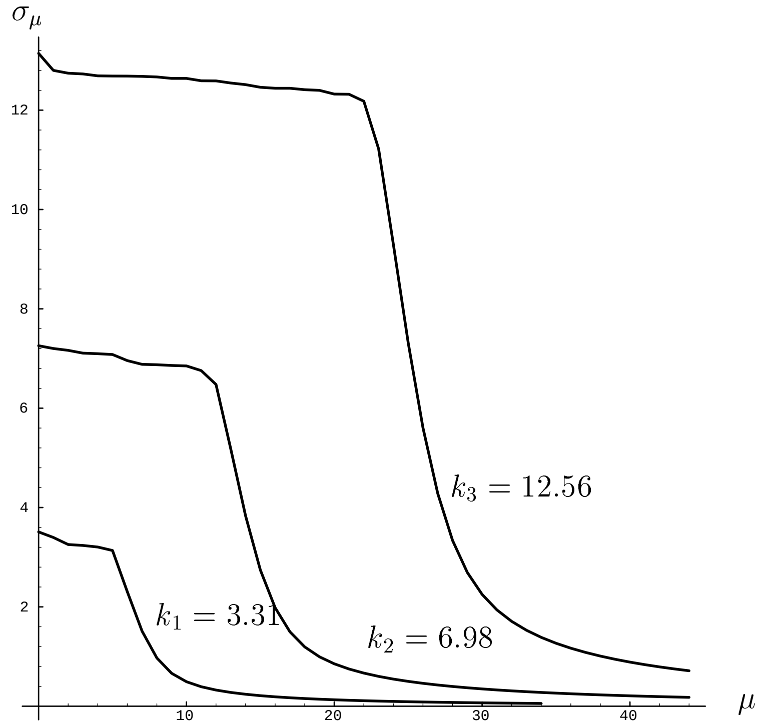

Abbildung 2.7: Singulärwerte $\sigma = \sigma(k_i, R_{fest})$ für $k_i \in \mathbb{R}^+$.

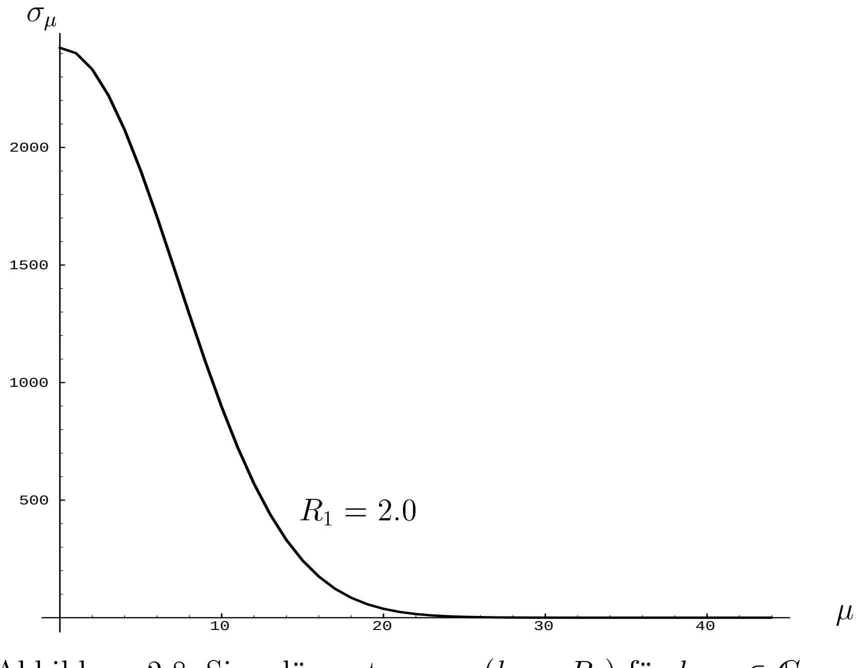

Abbildung 2.8: Singulärwerte $\sigma = \sigma(k_{fest}, R_1)$ für $k_{fest} \in \mathbb{C}$.

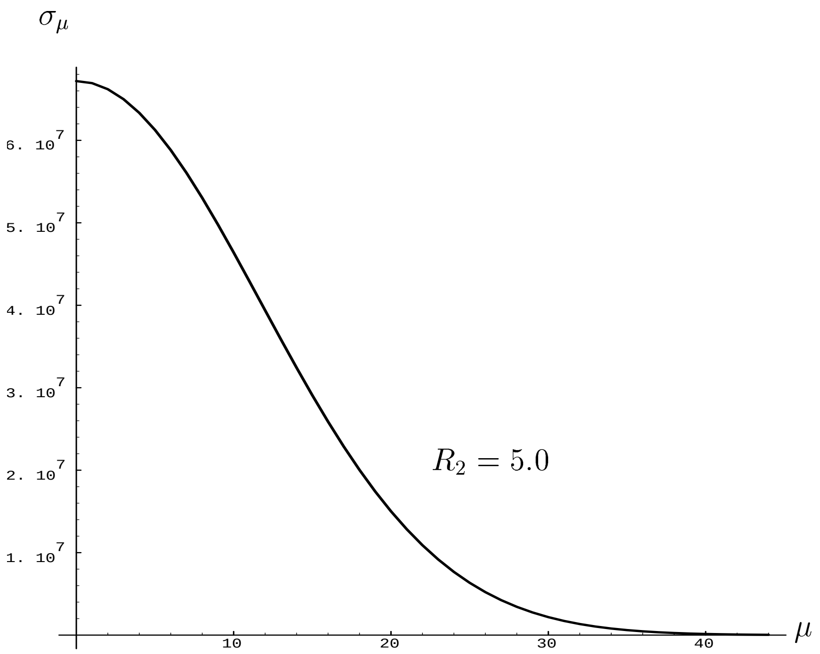

Abbildung 2.9: Singulärwerte $\sigma = \sigma(k_{fest}, R_2)$ für $k_{fest} \in \mathbb{C}$.

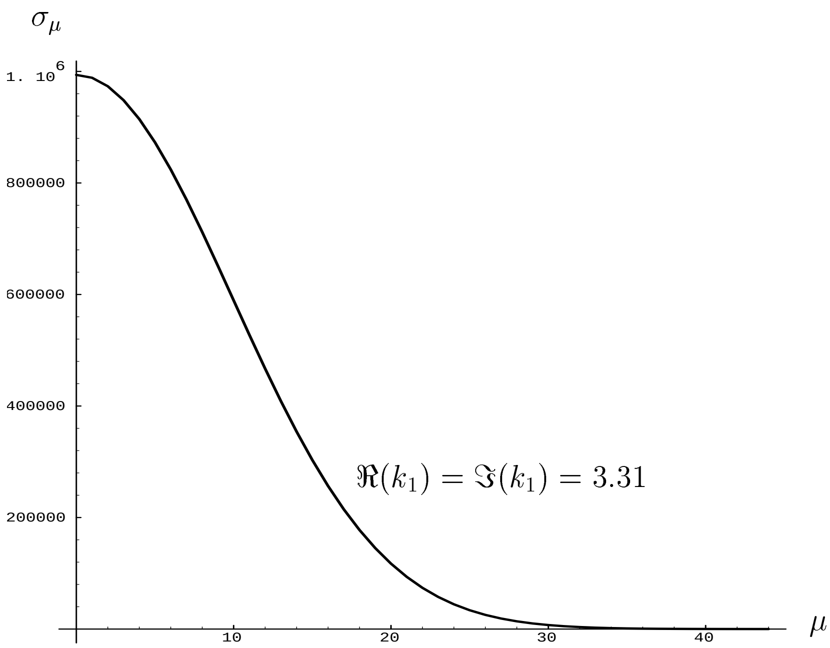

Abbildung 2.10: Singulärwerte $\sigma = \sigma(k_1, R_{fest})$ für $k_1 \in \mathbb{C}$.

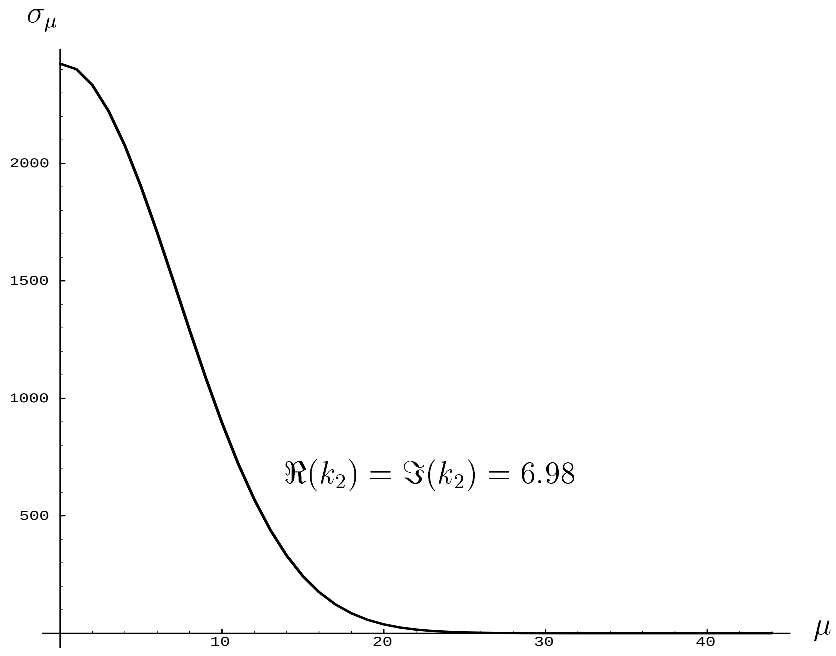

Abbildung 2.11: Singulärwerte $\sigma = \sigma(k_2, R_{fest})$ für $k_2 \in \mathbb{C}$.

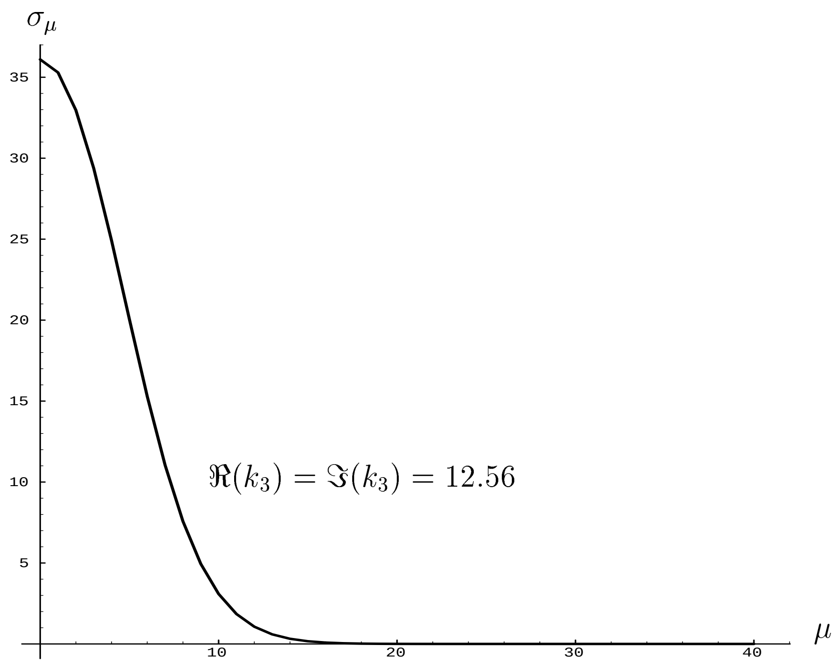

Abbildung 2.12: Singulärwerte $\sigma = \sigma(k_3, R_{fest})$ für $k_3 \in \mathbb{C}$.

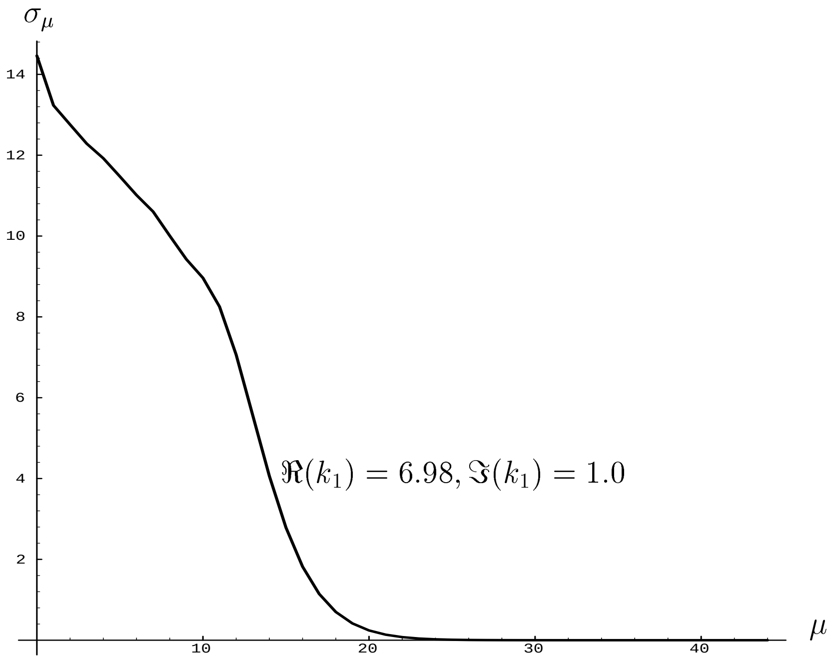

Abbildung 2.13: Singulärwerte $\sigma = \sigma(k_1, R_{fest})$ für $k_1 \in \mathbb{C}$.

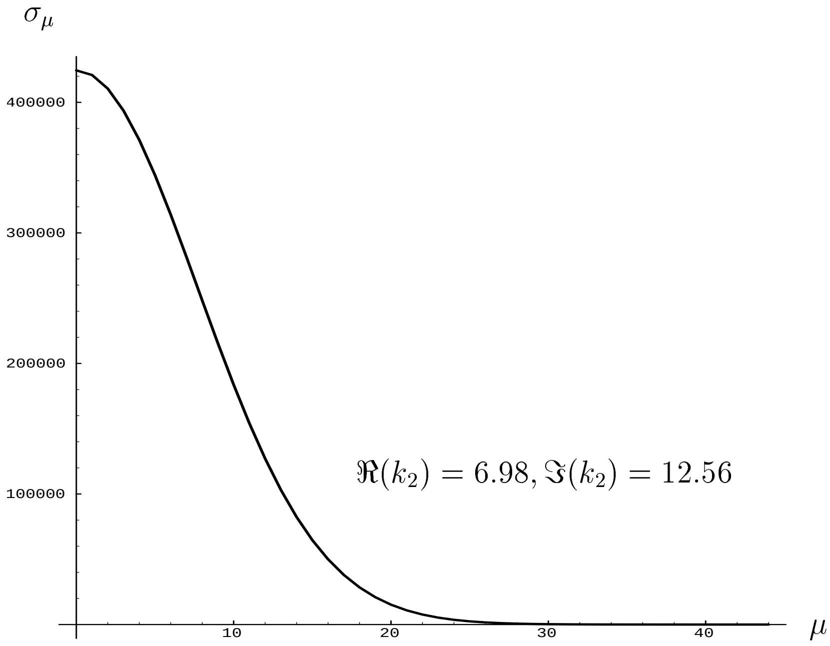

Abbildung 2.14: Singulärwerte $\sigma = \sigma(k_2, R_{fest})$ für $k_2 \in \mathbb{C}$.

Kapitel 3

Die Methode der approximativen Inversen

In diesem Kapitel wird ein konstruktives Verfahren zur Lösung der Integralgleichung (vgl. (2.7)) angegeben. Die Idee besteht darin, das Problem für die äquivalente Quelle zu lösen, und dann das Objekt daraus zu berechnen.
Der erste Teil befaßt sich mit der Motivation der Methode, wobei genaueres über die Methode der *approximativen Inversen* aus [Lo 96] zu entnehmen ist. Diesem folgt eine spezielle Wahl des Mollifiers und des Regularisierungsparameters mit einer Begründung dieser Wahl. Im dritten Teil dieses Kapitels wird dann der *Rekonstruktionskern* mit Hilfe der Singulärwertzerlegung des Streuoperators bestimmt und einige Eigenschaften davon untersucht. Schließlich widmet sich der letzte Teil dieses Kapitels der Bestimmung der Objektfunktion. Hierbei wird sowohl auf Nahfeld- als auch auf Fernfelddaten eingegangen.

Wie bereits im Kapitel 2.2 erwähnt, erfordert die Schlechtgestelltheit eines Problems eine Regularisierung des Problems. Neben den schon bekannten Regularisierungstechniken, wie abgeschnittener Singulärwertzerlegung, Tikhonov-Phillips-, CG- und Landweber-Methode gewinnt die Anwendung *approximativer Inversen* an Bedeutung. Die Anwendung dieser Methode, die für lineare Fredholm-Operatoren erster Art entwickelt wurde (vgl. [Lo/Ma 90] und [Lo/Ma 91]), ist mittlerweile von Louis auch für nichtlineare Inversionsaufgaben erweitert und untersucht worden (vgl. [Lo 96] und [Lo 97]). Diese Methode ist von Louis und Dietz (vgl. [Lo/Di 96]) bei den Algorithmen für die 3D-Computer-Tomographie erfolgreich angewandt worden. Außerdem ist die Methode von Louis und Schuster (vgl. [Lo/Sc 96]) zur Herleitung einer Inversionsformel für die parallele Geometrie in der Röntgen-Computer-Tomographie verwendet und untersucht worden. Desweiteren existiert ebenfalls eine Anwendung dieses Rekonstruktions- und Regularisierungsverfahrens für das linearisierte Problem in der Impedanz-Tomographie (vgl. [De 97]).

Die Grundidee dieser Methode wird in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen und im folgenden anhand des hier zu behandelnden Problems erläutert.

Der wesentliche Beitrag der folgenden Methode, im Gegensatz zu den Verfahren, die auf der linearisierten Gleichung aufbauen, ist es, daß sie die Nichtlinearität implizit beibehält, und wie man aus den folgenden Abschnitten ersehen kann, besteht <u>nicht</u> die Notwendigkeit, das direkte Problem zu lösen. Die Bearbeitung dieser Methode ist in zwei Schritte geteilt: Der erste Schritt behandelt die Schlechtgestelltheit des inversen Streuproblems, und im zweiten Schritt wird dann die Nichtlinearität des ursprünglichen Problems behandelt. Um das Objekt aus Kenntnis der berechneten äquivalenten Quelle zu bekommen, dividiert man diese durch die Summe des einfallenden und des gestreuten Feldes. Dieser Inversionsoperator kann unabhängig von den Daten berechnet werden. Basierend auf dieser Idee macht man für die Approximation ϕ_γ an ϕ folgenden Ansatz (vgl. [Lo 96])

$$\phi_\gamma(\xi) := \langle \phi, e_\gamma(\xi, \cdot) \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \phi(y) \overline{e_\gamma(\xi, y)} dy \quad \text{für} \quad \xi \in \Omega \supset \overline{\Omega_{sc}} \tag{3.1}$$

mit einer geeignet zu wählenden $\mathcal{C}^\infty-$Funktion $e_\gamma(\xi, y)$ (s. nächsten Abschnitt), wobei γ die Rolle des Regularisierungsparameters, der später noch genauer spezifiziert wird, spielt.
Im *ersten* und wesentlichen Schritt wird aus den Daten die äquivalente Quelle berechnet. Weiter wird im *zweiten* Schritt das *innere Streufeld,* das heißt die Streuung innerhalb des Gebietes Ω_{sc}, aus der äquivalenten Quelle bestimmt, um im *dritten* und letzten Schritt aus dem Feld und der äquivalenten Quelle das Objekt abzuleiten. Zur Berechnung von $\phi_\gamma(\xi)$ approximiere man für festes ξ den Mollifier $e_\gamma(\xi, \cdot)$ im $\mathcal{R}(S^*)$ Range des adjungierten Operators S^*, wobei für $(S^* \bullet)(y)$ die Darstellung aus dem Lemma 2.16 eingesetzt wird.
Ist die Gleichung

$$S^* \psi_\gamma(\xi, \cdot) = e_\gamma(\xi, \cdot) \quad \text{für } \xi \in \Omega \tag{3.2}$$

lösbar, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi_\gamma(\xi) &= \langle \phi, e_\gamma(\xi, \cdot) \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \phi, S^* \psi_\gamma(\xi, \cdot) \rangle_{L_2(\Omega)} && (3.3) \\ &= \langle S\phi, \psi_\gamma(\xi, \cdot) \rangle_{L_2(\Gamma)}. && (3.4) \end{aligned}$$

Und damit die *Rekonstruktionsformel*

$$\phi_\gamma(\xi) = \langle u_s, \psi_\gamma(\xi,\cdot)\rangle_{L_2(\Gamma)} \tag{3.5}$$

als L_2-Skalarprodukt auf der Meßoberfläche Γ und in der Praxis auf $\mathbb{C}^n$.
Ist die Gleichung (3.2) nicht lösbar, so minimiert man für hinreichend glattes $e_\gamma(\xi,\cdot)$ den Defekt

$$\|S^*\psi_\gamma(\xi,\cdot) - e_\gamma(\xi,\cdot)\|_{L_2(\Omega)},$$

das heißt, man berechnet die Minimum-Norm-Lösung aus

$$\left(SS^*\psi_\gamma\right)(\xi,\cdot) = Se_\gamma(\xi,\cdot). \tag{3.6}$$

Definition 3.1 *Sei $\xi \in \Omega$ ein Rekonstruktionspunkt. Die Abbildung $T_\gamma : L_2(\Gamma) \to L_2(\Omega)$ mit*

$$T_\gamma u_s(\xi) := \langle u_s, \psi_\gamma(\xi,\cdot)\rangle_{L_2(\Gamma)} \tag{3.7}$$

heißt approximative Inverse *von S. Die Funktion $\psi_\gamma(\xi,\cdot) \in L_2(\Omega\times\Gamma)$ heißt* Rekonstruktionskern *für den Punkt ξ.*

Satz 3.2 *Sei $\xi \in \Omega$, und seien die Daten $u_s \in L_2(\Gamma)$ gegeben. Sei ϕ_M die Minimum-Norm-Lösung der Gleichung*

$$S\phi = u_s.$$

Dann liefert die approximative Inverse die gefilterte Version der Minimum-Norm-Lösung, das heißt

$$T_\gamma u_s(\xi) := \langle \phi_M, e_\gamma(\xi,\cdot)\rangle_{L_2(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Für den Beweis sei auf die Arbeit von Louis (vgl. [Lo 96]) verwiesen.

Bemerkung 3.3 *Wie man aus [Lo 96] entnehmen kann, liefert die approximative Inverse eine gefilterte Version der Minimum-Norm-Lösung ϕ_M. Die Lösung der Gleichung $S\phi = u_s$ ist dann von der Form $\phi = \phi_M + \phi_{null}$ (vgl. Kapitel 2.4). Das bedeutet, daß nach Anwendung dieser Methode eine* eindeutige *Lösung der Gleichung*

$S\phi = u_s$ existiert.
Der Rekonstruktionskern kann für beliebige Stellen ξ unabhängig von den Daten vorberechnet werden, die Auswertung der approximativen Inversen besteht dann nur noch in der Berechnung von Skalarprodukten, was auch parallel implementiert werden kann, wenn man berücksichtigt, daß die Daten für verschiedene Einfallsrichtungen stark variieren können. Dies bedeutet, daß die Methode den numerischen Vorteil hat daß sie für steigende Anzahl der eingesetzten Wellen mit geringem Anstieg der Kosten erweitert werden kann. Bei dieser Vorgehensweise wird die Einführung künstlicher Diskretisierung vermieden. Das Rekonstruktionsverfahren mittels approximativer Inversen dient gleichzeitig als Regularisierungsverfahren (vgl. [Lo 96]) und wurde zur Behandlung linearer Fredholm-Operatoren erster Art entwickelt. Die meisten Regularisierungsverfahren, wie Tikhonov-Phillips-Regularisierung, abgeschnittene Singulärwertzerlegung oder Landweber-Verfahren treten als Spezialfälle dieser Methode auf (vgl. [Lo 96]). Wie schon im vorhergehenden Kapitel 2.4 erwähnt, ist die Stabilität der exakten Lösung mehr als fraglich. Der Einsatz der approximativen Inverse mit gleichzeitiger Regularisierung liefert zumindest eine stabile Näherungslösung.
Ein wesentlicher Vorteil dieser Methode gegenüber Iterationsverfahren besteht darin, daß diese sowohl für starke als auch für schwache Streuer anwendbar ist, während die Konvergenz von Iterationsverfahren bei starken Streuern, die die Wahl des Startwertes mit Born-Ansatz nur bedingt zulassen, in Frage gestellt werden muß. Ferner ist die Methode erweiterbar auf nichtlineare Probleme, wie man der Arbeit von Louis (vgl. [Lo 96]) entnehmen kann.

3.1 Wahl eines Mollifiers und des Regularisierungsparameters

Ähnlich wie bei der Wahl des Filters zur Inversion der Radon-Transformation (vgl. [Lo2 89]) betrachtet man

$$\mathcal{F}E_\gamma(\eta) =: \tilde{E}_\gamma(\|\eta\|) = \frac{1}{2\pi\gamma^2}\begin{cases} 1, & \|\eta\| \le \gamma \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die gewichtete charakteristische Funktion des Kreises mit dem Radius γ, wobei $\gamma \in I\!R$ ein geeignet zu wählender Regularisierungsparameter ist.
Bildet man die *inverse räumliche Fourier-Transformierte* dieser Funktion

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}E_\gamma\right)(y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{I\!R^2} \tilde{E}_\gamma(\|\eta\|)e^{i<\eta,y>}d\eta,$$

so erhält man:

$$E_\gamma(\|y\|) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{J_1(\gamma\|y\|)}{\gamma\|y\|}, \tag{3.9}$$

wobei J_1 die Bessel-Funktion erster Ordnung bezeichnet. Unter der Bedingung, daß die Funktion E_γ eine Approximation an die Delta-Distribution liefern soll und

$$\int\limits_\Omega E_\gamma(y)dy \stackrel{!}{=} 1 \text{ für alle } \gamma,$$

erhält man nach der Normierung der obigen Funktion in der Gleichung (3.9):

$$E_\gamma(\|y\|) = E(\gamma\|y\|) = \frac{\gamma^2}{4\pi^2}\frac{J_1(\gamma\|y\|)}{\gamma\|y\|}, \tag{3.10}$$

die eine Funktion mit der Bandbreite γ ist.
Betrachtet man ferner den Translationsoperator T^ξ auf $\mathcal{C}^\infty-$Funktionen mit $\xi \in \mathbb{R}^2$, so erhält man mittels des Ansatzes

$$e_\gamma(\xi,\cdot) = e(\gamma\|\cdot-\xi\|) = T^\xi E(\gamma\|\cdot\|) \tag{3.11}$$

den Mollifier. Man stellt fest, daß der Mollifier radial symmetrisch ist und daß er als ein Abschneidefilter mit der Abschneidefrequenz $\gamma \geq 0$ agiert, das heißt, daß die höher frequenten Anteile von ϕ, die empfindlich auf Rauschen in den Daten reagieren, reduziert werden. Ferner kann der Mollifier unabhängig vom einfallenden Feld berechnet werden.
Eine eingehende Untersuchung der Eigenschaften der Mollifier kann aus der Arbeit von Louis und Maaß [Lo/Ma 90] entnommen werden.

Zur Wahl des Regularisierungsparameters :

Wie man auch aus Anwendungen anderer Regularisierungsverfahren weiß, stellt die Wahl des Regularisierungsparameters einen Kompromiß zwischen Stabilität und Genauigkeit der Lösung dar. Bei der Anwendung in der vorliegenden Arbeit wird $\gamma = |k|$ oder $\gamma = q|k|$ mit $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gewählt. Die Idee zu diesem Ansatz ist damit zu begründen, daß der Regularisierungsparameter erstens unabhängig von der Schrittweite und Feinheit des Gitters gewählt werden kann, und zum zweiten kann man die Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter insofern ausnutzen,

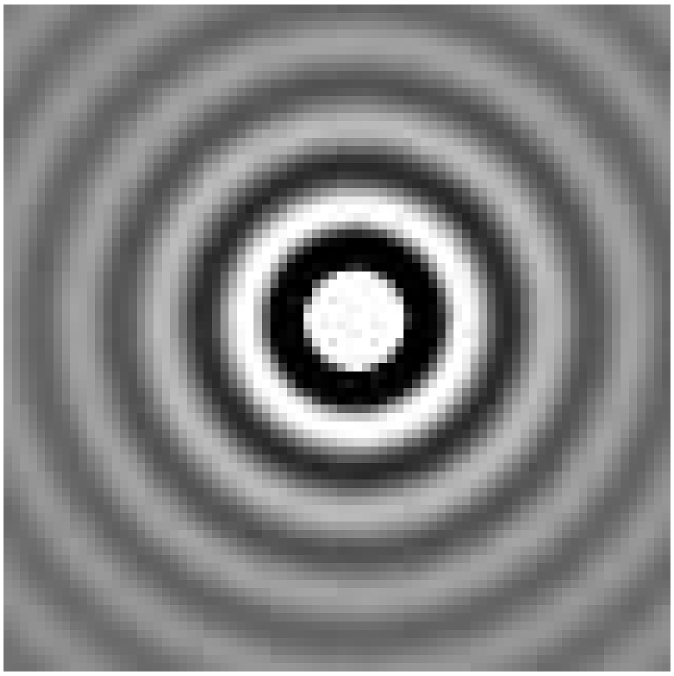

Abbildung 3.1: Dichteverteilung des Mollifiers

daß man je nach Einsatzgebiet Variationen der Wellenzahl und damit die des Regularisierungsparameters weiter verwenden kann. Da die Materialeigenschaften bei der Wahl der Frequenz eine Rolle spielen, kann man diese für verschiedene Frequenzen benutzen, was zusätzliche Informationen über das zu rekonstruierende Objekt liefern kann, denn physikalisch ist die Frequenzänderung wie die Bewegung des Objekts zu interpretieren, was der Methode der *Frequency diversity* (vgl. [La 87]) äquivalent sein kann. Abbildung (3.1) zeigt die Dichteverteilung des Mollifiers für $\gamma = |k|$. In allen genannten Fällen ist $k \in \mathbb{R}^+$ gewählt worden mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $\lambda = 0.9$. Die Abbildung (3.2) demonstriert die Abhängigkeit des Mollifiers vom Regularisierungsparameter γ, wobei $\gamma_1 = 2|k|, \gamma_2 = |k|$ und $\gamma_3 = 0.6|k|$ gewählt worden sind. Hierbei ist wieder zu beachten, daß ein Kompromiß bei der Wahl des Regularisierungsparameter γ einzugehen ist.

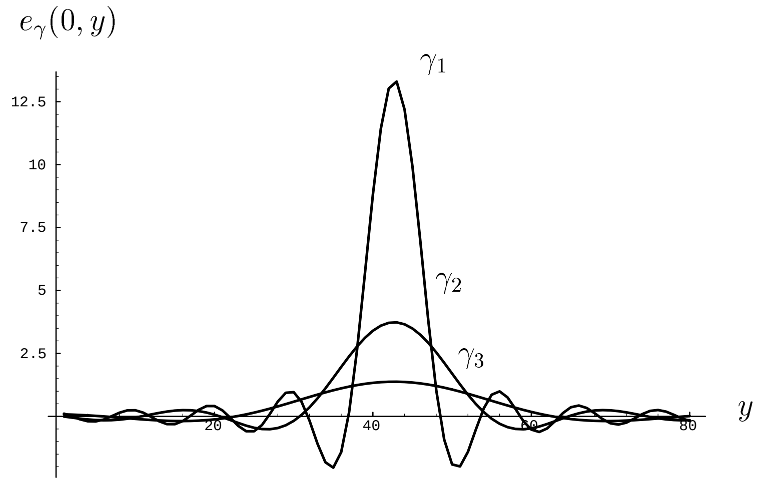

Abbildung 3.2: Der Mollifier für verschiedene Wellenzahlen und festes ξ

3.2 Berechnung des Rekonstruktionskerns

In diesem Abschnitt werden für die Rekonstruktionsformel Gleichung (3.5) für vorgegebenen Mollifier e_γ wie im Kapitel 3.1 die Rekonstruktionskerne ψ_γ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung des Operators S bestimmt und deren Eigenschaften untersucht. Wie im Kapitel 2.5 zur Singulärwertzerlegung des Streuoperators betrachtet man wieder $\Gamma = R\mathcal{S}^1$ und $\Omega = B_R(0)$, das heißt eine wie bei der Bestimmung der Singulärwerte auf einen Meßkreis spezialisierte Meßanordnung. Diese Spezialisierung ermöglicht eine einfache und vor allem eine schnelle Berechnung der auftretenden Größen. Mittels der Singulärwertzerlegung können die Gleichungen (3.2) beziehungsweise (3.6) zur Bestimmung von ψ_γ analytisch gelöst werden. Ein wesentlicher Vorzug dieser Lösung liegt in der Möglichkeit der analytischen Weiterverarbeitung des "gefundenen" Rekonstruktionskernes und dient zur analytischen Verifikation (notwendige Bedingung) der erzielten Ergebnisse.

Bemerkung :
Wegen der speziellen Wahl von γ wird im weiteren statt der Abhängigkeit des Rekonstruktionskerns ψ von γ nur die Abhängigkeit von der Wellenzahl k berücksichtigt.

Der folgende Satz beinhaltet eine Darstellung und Berechnungsvorschrift für den Rekonstruktionskern $\psi_\gamma(\xi,\cdot)$ in Termen der Singulärwerte und Singulärfunktionen des Streuoperators.

Satz 3.4 (Rekonstruktionskern) *Es seien* $\{w_\mu, v_\mu; \sigma_\mu\}$ *das Singulärsystem des Operators* $S : L_2(B_R(0)) \to L_2(R\mathcal{S}^1)$ *und* $k \in \mathbb{C}$ *mit* $\Re(k) > 0$ *und* $\Im(k) \geq 0$ *die Wellenzahl. Ferner sei der Mollifier* $e(\xi,\cdot;k) = e(q|k|\|\cdot - \xi\|) = T^\xi E(q|k|\|\cdot\|)$ *gegeben mit dem Träger* $supp(e) \subset B_R(0)$*. Dann gelten für den Rekonstruktionskern*

$$\psi_\gamma(\xi,x) = \psi(\xi,x;k) = \sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} \sigma_\mu^{-2}\langle Se(\xi,\cdot;k), w_\mu(\cdot)\rangle_{L_2(R\mathcal{S}^1)} w_\mu(x) \tag{3.12}$$

mit dem Rekonstruktionspunkt $\xi \in B_R(0)$ *und dem Meßpunkt* $x \in R\mathcal{S}^1$ *in den Polarkoordinaten* $\xi = R_\xi\omega(\theta_\xi)$ *beziehungsweise* $x = R\omega(\theta)$*, wobei* $0 \leq R_\xi < R$ *und* $R > 0$[8] *die beiden folgenden Fälle.*

1. Fall:
Besitzt die Funktion E *den Träger* $supp(E) \subset B_{\delta_\gamma}(0)$*,* $\gamma = q|k|$ *und* $\delta_\gamma \ll R$ *so, daß* $\Omega_{sc} \subset B_{R-\delta_\gamma}(0)$ *und damit* $\xi \in B_{R-\delta_\gamma}(0)$*, oder* $supp(E) = \{z \in B_R(0) : \|z\| < \|y-\xi\|,\ y \in R\mathcal{S}^1$ *beliebig und* $\xi \in B_R(0)$ *fest*$\}$*, dann besitzt der Rekonstruktionskern folgende Darstellung:*

$$\begin{aligned}
\psi(\xi,x;k) &= \psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta);k) \\
\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta);k) &= -i\frac{2k^2}{|k^2|^2R\pi}\,\mathcal{H}_0E(kR;q|k|) \\
&\quad \cdot \sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} \frac{H_\mu^{(1)}(kR)J_\mu(kR_\xi)}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} Y_\mu(\omega(\theta))\overline{Y_\mu(\omega(\theta_\xi))}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Hierbei bezeichnen $\mathcal{H}_0$ *die Hankel-Transformation der Ordnung Null (vgl. Anhang(D.3)),* Y_μ *die Oberflächenfunktionen, und die Größe* $I_\mu^{(1)}(kR)$ *sei wie folgt definiert.*

$$I_\mu^{(1)}(kR) \ := \ \int_0^R r|J_\mu(kr)|^2 dr.$$

[8] R bezeichnet wieder den Detektorradius und sei so gewählt, daß $R\mathcal{S}^1 = \Gamma$ den Bedingungen in der Definition 2.2 genügt. Da nach der Voraussetzung $0 \in \Omega_{sc}$, $\overline{\Omega_{sc}} \subset B_R(0)$ liegt, muß der Meßpunkt $x \neq 0$ sein.

2. Fall:
Erfüllt die Funktion E nicht die obige Voraussetzung, und besteht deren Träger aus $\{z \in B_R(0): \ \|z\| \geq \|y-\xi\|, \ y \in R\mathcal{S}^1$ beliebig und $\xi \in B_R(0)$ fest$\}$, so gilt für den Rekonstruktionskern die nachstehende Darstellung.

$$\begin{aligned}
\psi(\xi, x; k) &= \psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) \\
\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) &= -i\frac{k^2}{|k^2|^2 R\pi^2}\; I_0^{(2)}(kR; q|k|) \\
&\quad \cdot \sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} \frac{I_\mu^{(3)}(R_\xi\omega(\theta_\xi), R; k)}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} Y_\mu(\omega(\theta)), \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

wobei

$$I_0^{(2)}(kR; q|k|) := \int\limits_0^R r H_0^{(1)}(kr) E(q|k|r) dr$$

und

$$I_\mu^{(3)}(R_\xi\omega(\theta_\xi), R; k) := \int\limits_0^{2\pi} J_0(k\|R\omega(\varphi) - R_\xi\omega(\theta_\xi)\|)\overline{Y_\mu(\omega(\varphi))} d\varphi$$

die Fourier-Koeffizienten der translatierten Bessel-Funktion der Ordnung Null bezeichnen.

Beweis :
Zum Beweis dieses Satzes setze man die Darstellung der Singulärwerte und der Singulärfunktionen aus Satz 2.19 in die Gleichung (3.12) ein. Zur Bestimmung des Skalarproduktes $\langle Se(\xi, \cdot; k), w_\mu(\cdot)\rangle_{L_2(R\mathcal{S}^1)}$ wendet man die Gleichung (2.15) aus Lemma 2.16 an, wenn dabei für ϕ die spezielle Wahl von $e(\xi, z; k) = e(q|k|\|z-\xi\|) = T^\xi E(q|k|\|z\|)$ mit dem Träger $supp(e) \subseteq B_R(0)$ getroffen wird. Das heißt man betrachtet für $y \in R\mathcal{S}^1$

$$\begin{aligned}
(Se)(\xi, y; k) &= -k^2 \int\limits_{B_R(0)} G(k\|y-z\|) e(q|k|\|z-\xi\|) dz \\
&= -k^2 \int\limits_{B_R(0)} G(k\|y-z\|) T^\xi E(q|k|\|z\|) dz. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Nach der Translationseigenschaft des Operators S gilt:

$$(Se)(\xi, y; k) = -k^2 \int\limits_{B_R(0)} G(k\|y - \xi - z\|)E(q|k|\|z\|)dz. \tag{3.16}$$

Setzt man nun die Greensche Funktion ein und benutzt die Reihendarstellung der Hankel-Funktion (vgl. Lemma 2.14), so erhält man unter der Annahme der gleichmäßigen Konvergenz, mit dem Satz von *Fubini* und der Transformation in Polarkoordinaten für $\xi = R_\xi\omega(\theta_\xi)$, $y = R\omega(\varphi)$, $z = r'\omega(\varphi')$, wobei $R_\xi, r' < R$, in Abhängigkeit des Trägers der Funktion E folgende Fälle.

1. Fall:

Erfüllt nun $supp(E)$ die Voraussetzung im ersten Fall des Satzes, so gilt: $\|z\| < \|y - \xi\|$ und damit

$$\begin{aligned}
(Se)(\xi, y; k) &= (Se)(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\varphi); k) \\
(Se)(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\varphi); k) &= -i\frac{k^2}{4}\sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} H_\mu^{(1)}(k\|R\omega(\varphi) - R_\xi\omega(\theta_\xi)\|)Y_\mu(\omega(\varphi)) \\
&\quad \cdot\overline{Y_\mu(\omega(\theta_\xi))}\int\limits_0^R r'J_\mu(kr')E(q|k|r')dr' \underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\overline{Y_\mu(\omega(\varphi'))}d\varphi'}_{=2\pi\delta_{\mu,0}}
\end{aligned}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}
(Se)(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\varphi); k) &= -i\frac{k^2\pi}{2}H_0^{(1)}(k\|R\omega(\varphi) - R_\xi\omega(\theta_\xi)\|) \\
&\quad \cdot \underbrace{\int\limits_0^R r'J_0(kr')E(q|k|r')dr'}_{=\mathcal{H}_0E(kR;q|k|)}.
\end{aligned}$$

Und hiermit

$$(Se)(\xi, y; k) = -i\frac{k^2\pi}{2}H_0^{(1)}(k\|y - \xi\|)\mathcal{H}_0E(kR; q|k|). \tag{3.17}$$

Nun zur Berechnung des Skalarproduktes:

$$\langle Se(\xi, \cdot; k), w_\mu(\cdot)\rangle_{L_2(R\mathcal{S}^1)} = \int\limits_{R\mathcal{S}^1} Se(\xi, y; k)\overline{w_\mu(y)}d\sigma_y \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\langle Se(\xi,\cdot;k), w_\mu(\cdot)\rangle_{L_2(R\mathcal{S}^1)} &= -i\frac{k^2\pi}{2}\int\limits_{R\mathcal{S}^1} H_0^{(1)}(k\|y-\xi\|)\\ &\qquad\cdot \mathcal{H}_0 E(kR;q|k|)\overline{w_\mu(y)}d\sigma_y.\end{aligned}$$

Die obige Gleichung ergibt sich wieder mit der Reihenentwicklung der Hankel-Funktion für $R_\xi < R$ zu

$$\begin{aligned}\langle Se(\xi,\cdot;k), w_\mu(\cdot)\rangle_{L_2(R\mathcal{S}^1)} &= -i\,\frac{k^2R\pi}{2\sqrt{2\pi R}}\mathcal{H}_0 E(kR;q|k|)\sum_{\nu\in\boldsymbol{Z}} H_\nu^{(1)}(kR)\ J_\nu(kR_\xi)\\ &\qquad\cdot \overline{Y_\nu(\omega(\theta_\xi))}\underbrace{\int\limits_0^{2\pi} Y_\nu(\omega(\varphi))\overline{Y_\mu(\omega(\varphi))}d\varphi}_{=2\pi\delta_{\nu,\mu}}\\ &= -ik^2\pi^2\sqrt{\frac{R}{2\pi}}\mathcal{H}_0 E(kR;q|k|)H_\mu^{(1)}(kR)\\ &\qquad\cdot J_\mu(kR_\xi)\overline{Y_\mu(\omega(\theta_\xi))}.\end{aligned}$$

Setzt man nun dies, die Singulärwerte σ_μ und die Singulärfunktionen w_μ in die Gleichung (3.12) ein, so folgt die Behauptung.

2. Fall:

Ist der Träger von E so, daß $\|z\| \geq \|y-\xi\|$ der Fall ist, so gilt:

$$(Se)(\xi,y;k) = (Se)(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\varphi);k)$$

$$\begin{aligned}(Se)(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\varphi);k) &= \frac{-ik^2}{4}\sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} J_\mu(k\|R\omega(\varphi)-R_\xi\omega(\theta_\xi)\|)Y_\mu(\omega(\varphi))\overline{Y_\mu(\omega(\theta_\xi))}\\ &\qquad\cdot\int\limits_0^R r'H_\mu^{(1)}(kr')E(q|k|r')dr'\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\overline{Y_\mu(\omega(\varphi'))}d\varphi'}_{=2\pi\delta_{\mu,0}}.\end{aligned}$$

Diese Darstellung der Anwendung des Operators S auf den Mollifier hat die Gleichung

$$
\begin{aligned}
(Se)(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\varphi); k) &= -i\frac{k^2\pi}{2} J_0(k\|R\omega(\varphi) - R_\xi\omega(\theta_\xi)\|) && (3.19)\\
&\quad \cdot \underbrace{\int_0^R r' H_0^{(1)}(kr')E(q|k|r')dr'}_{=:I_0^{(2)}(kR;q|k|)} && (3.20)
\end{aligned}
$$

zur Folge, wobei die Größe $I_0^{(2)}(kR;q|k|)$ wie im ersten Fall wieder die Hankel-Transformation der Funktion E enthält. Für das Skalarprodukt in der Gleichung (3.18) gilt dann hiermit

$$
\begin{aligned}
\langle Se(\xi,\cdot;k), w_\mu(\cdot)\rangle_{L_2(R\mathcal{S}^1)} &= -i\,\frac{k^2R\pi}{2\sqrt{2\pi R}}\, I_0^{(2)}(kR;q|k|)\\
&\quad \underbrace{\int_0^{2\pi} J_0(k\|R\omega(\varphi) - R_\xi\omega(\theta_\xi)\|)\overline{Y_\mu(\omega(\varphi))}d\varphi}_{=:I_\mu^{(3)}(R_\xi\omega(\theta_\xi),R;k)}. && (3.21)
\end{aligned}
$$

Setzt man analog wie im ersten Fall dieses Skalarprodukt, die Singulärwerte und Singulärfunktionen in die Darstellung (3.12) ein, so gilt die Behauptung. ■

Bemerkung 3.5

1. *Betrachtet man die Anwendung des Operators S auf den Mollifier e gemäß der Gleichung (3.16), so kann man ebenfalls folgendes feststellen, daß $(Se)(\xi,y;k) = T^\xi(S\ E)(y;k)$ gilt. Untersucht man zunächst $(S\ E)(y;k)$, so gilt in Polarkoordinaten nach Entwicklung der Greenschen Funktion und Anwendung des Satzes von Fubini*

$$
\begin{aligned}
(S\ E)(R\omega(\varphi);k) &= -i\frac{k^2}{4}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}} H_\mu^{(1)}(kR)Y_\mu(\omega(\varphi))\\
&\quad \cdot \underbrace{\int_0^R r' J_\mu(kr')E(q|k|r')dr'}_{=\mathcal{H}_\mu E(kR;q|k|)} \underbrace{\int_0^{2\pi} \overline{Y_\mu(\omega(\varphi'))}d\varphi'}_{=2\pi\delta_{\mu,0}}
\end{aligned}
$$

$$(S\ E)(y;k) \;=\; -i\frac{k^2\pi}{2}H_0^{(1)}(k\|y\|)\mathcal{H}_0E(kR;q|k|).$$

Somit gilt für die Translation um den Rekonstruktionspunkt ξ

$$\begin{aligned}(Se)(\xi,y;k) &= T^{\xi}(S\ E)(y;k)\\ &= -i\frac{k^2\pi}{2}H_0^{(1)}(k\|y-\xi\|)\mathcal{H}_0E(kR;q|k|).\end{aligned}$$

Mit diesem Resultat und in Anlehnung an den ersten Fall im vorausgehenden Satz 3.4 kann man für die weiteren Anwendungen der Methode der approximativen Inversen die Darstellung (3.13) des Rekonstruktionskernes verwenden.

2. *Berücksichtigt man die Darstellung (3.10) von* E_γ*, so kann mit Hilfe der Invarianzeigenschaften des Operators der Rekonstruktionskern nur in einem Punkt berechnet und durch Translationen in* x_1- *und* x_2-*Richtungen in den restlichen Rekonstruktionspunkten ausgewertet werden. Somit braucht* ψ *nur einmal berechnet und abgespeichert zu werden.*

3. *Betrachtet man die Gleichung (3.17) und die Greensche Funktion*

$$-\ i\ 4\ G(k\|y-\xi\|) = H_0^{(1)}(k\|y-\xi\|),$$

so stellt man fest, daß die Anwendung des Streuoperators auf den speziell gewählten Mollifier wie folgt interpretiert werden kann: Es existiert eine Konstante $c_0 = c_0(kR;q|k|) = -2k^2\mathcal{H}_0E(kR;q|k|)$*, so daß gilt:*

$$(Se)(\xi,y;k) \;=\; c_0G(k\|y-\xi\|).$$

Hiermit läßt sich dann feststellen:

$$\begin{aligned}\langle Se(\xi,\cdot;k),w_\mu(\cdot)\rangle_{L_2(RS^1)} &= c_0\int\limits_{RS^1}\overline{G^*(k\|y-\xi\|)w_\mu(y)}\ d\sigma_y\\ &= c_0\ \overline{S^*w_\mu}\\ &= c_0\ \sigma_\mu\overline{v_\mu}.\end{aligned}$$

Dies führt dann zu folgender Darstellung des Rekonstruktionskerns

$$\psi_\gamma = \tilde{c}\sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}}\sigma_\mu\overline{v_\mu(\xi)}w_\mu(x).$$

Dieses Ergebnis und eine weitere Eigenschaft des Rekonstruktionskerns sind im Korollar 3.11 zusammenfassend festgehalten.

4. *Für* $\mathcal{H}_\mu E(kR;q|k|)$ *gilt nach Definition und Eigenschaften der Hankel-Transformation*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\mu E(kR;q|k|) &= \int_0^R r' E(q|k|r') J_\mu(kr') dr' \\ &= (q|k|)^{-2} \mathcal{H}_\mu E(kR).\end{aligned}$$

5. *Für die spezielle Wahl von* e_γ *sieht* $\mathcal{H}_0 E(kR;q|k|)$ *wie folgt (vgl. Anhang (A.22)) aus:*

$$\mathcal{H}_0 E(kR;q|k|) = \frac{q|k|}{4\pi^2} \int_0^R J_0(kr) J_1(q|k|r) dr.$$

Ist $k \in I\!R^+$ *und* $q = 1$, *so ergibt sich* $\mathcal{H}_0 E(kR;q|k|)$ *zu*

$$\mathcal{H}_0 E(kR) = \frac{1}{8\pi^2}\{1 - J_0^2(kR)\}.$$

Ist $k \in I\!R^+$ *und* $q \neq 1$, *so erhält man für das Integral über das Produkt der Bessel-Funktionen (vgl. [Lu 62]) und damit für die Hankel-Transformation des Mollifiers*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 E(kR;q|k|) &= \mathcal{H}_0 E(kR;qk) \\ &= \frac{q^2k^2R^2}{8\pi^2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa (\frac{1}{2}kR)^{2\kappa}\ {}_2F_1(-\kappa,-\kappa;2;q^2)}{(\kappa!)^2(2+2\kappa)},\end{aligned}$$

wobei ${}_2F_1(-\kappa,-\kappa;2;q^2)$ *die hypergeometrische Funktion (vgl. (A. 24)) bezeichnet.*

6. *Im Hinblick auf die spätere Anwendung der Methode der approximativen Inversen und der Gesamtfehleruntersuchung ist es interessant und wichtig, daß auch der Fall untersucht wird, wenn der Regularisierungsparameter* $\gamma = q|k|$, *also der Faktor* q *gegen Null strebt. Bei der speziellen Wahl des Mollifiers gilt nach Eigenschaften der Bessel-Funktionen (vgl. Anhang (A.14)) und der Normierung (Mittelwert gleich 1):*

$$E_\gamma(r) = \frac{1}{2\pi R}\,\frac{1}{r}\ \text{für}\ r = \|y\|,\ \gamma \to 0.$$

Die Hankel-Transformation des Mollifiers ergibt sich dann zu:

$$\mathcal{H}_0 E(kr; q|k|) = \mathcal{H}_0 E(kR) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_0^R J_0(kr) dr.$$

7. *Zur Bestimmung der Integrale* $I_0^{(2)}$, $I_\mu^{(3)}$ *und der Hankel-Transformation des Mollifiers für den Fall* $\Im(k) \neq 0$ *sind Gauß-Quadraturformeln anzuwenden.*

Korollar 3.6 *Ist die Funktion* $E_\gamma(\cdot)$ *so gewählt, daß der Mollifier* $e_\gamma(\xi, \cdot)$ *rotationsinvariant ist, und ferner sei die Meßanordnung auf einen Meßkreis beschränkt, so ist der Rekonstruktionskern* $\psi_\gamma(\xi, \cdot)$ *unabhängig vom Einfallswinkel* θ_{in} *der Einfallsrichtung* α *der eingesetzten Welle* u_i.

Schnelle numerische Auswertung des Rekonstruktionskerns :

Die numerische Auswertung des Rekonstruktionskernes ψ aus der Gleichung (3.13) stellt eine Reihenentwicklung bezüglich der Oberflächenfunktionen $Y_\mu(\omega(\theta - \theta_\xi)) = e^{i\mu(\theta-\theta_\xi)}$ dar. Diese ist als eine Fourier-Reihe interpretierbar und könnte sich mittels *Fast-Fourier-Transform* (**FFT**) effektiv auswerten lassen.
Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften der Bessel- und Hankel-Funktionen bezüglich des Index (vgl. Anhang (A.3) - (A.5)) ersieht man, daß die Darstellung des Rekonstruktionskerns gemäß der Gleichung (3.13) mit einer "zweiseitigen" Summe in eine schneller auswertbare "einseitige" Summe

$$\begin{aligned}\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) \;=\; & -i\frac{2k^2}{|k^2|^2 R\pi}\, \mathcal{H}_0 E(kR; q|k|) \Bigg\{ \frac{H_0^{(1)}(kR) J_0(kR_\xi)}{|H_0^{(1)}(kR)|^2 I_0^{(1)}(kR)} \\ & + 2 \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \frac{H_\mu^{(1)}(kR) J_\mu(kR_\xi)}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} \cos(\mu(\theta - \theta_\xi)) \Bigg\} \qquad (3.22)\end{aligned}$$

überführt werden kann.

Konvergenz :

Da es nicht trivial ist, den Konvergenzradius der Reihendarstellung des Rekonstruktionskerns unter Ausnutzung der asymptotischen Entwicklung der Bessel- und

Hankel-Funktionen anzugeben, kann Konvergenz mit Hilfe einer Konvergenzadaption mit hinreichender Genauigkeit numerisch berechnet werden.
Hierzu betrachtet man die Partialsummen

$$\psi_N := \sum_{n=1}^{N} \psi_n, \quad \text{für} \quad N = 1, 2, \cdots \bar{N},$$

wobei ψ_n die Summation bis n in der Gleichung (3.22) bezeichnet. Nach Vorgabe eines Fehlermaßes $\bar{\delta}$ bestimme man

$$\delta_N = \frac{1}{N_\delta} \sum_{\kappa=1}^{N_\delta} \left\{ \frac{\psi_N - \psi_{N-\kappa}}{\psi_N} \right\}.$$

Die Summation ist bis $N = \bar{N} \in I\!N$ durchzuführen, an der sich $\delta_N = \delta_{\bar{N}} < \bar{\delta}$ einstellt. Ist δ_N für wachsendes N monotonfallend, so stellt δ_N ein Maß für den *unbekannten* relativen Fehler dar.

Bemerkung 3.7 *Aus der Debyeschen Formel (vgl. [Lo2 89] und [Nat 86]) und Lemma 2.23 wird ersichtlich, daß die Bessel-Funktionen und die Hankel-Funktionen und damit der Term $|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)$ sehr klein werden, wenn das Argument $z = kR$ kleiner als die Ordnung μ ist. Basierend auf diesem Ergebnis und unter Zuhilfenahme der graphischen Darstellung der Singulärwerte aus dem vorangegangenen Kapitel wird bei der Anwendung - analog dem Verfahren der abgeschnittenen Singulärwertzerlegung - die Reihe ab einem Index μ abgeschnitten, sobald ein $\tilde{\mu}$ erreicht ist mit $\mu < \tilde{\mu}$ und für alle $\epsilon > 0$ gilt, $1 - \frac{\tilde{\mu}}{kR} > \epsilon$ und $J_{\tilde{\mu}}(kR) \to 0$. Ferner wird hiermit die Konvergenz der Reihe in der Gleichung (3.13) und (3.22) erzwungen, denn*

$$\begin{aligned} \psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) &= -i\frac{2k^2}{|k^2|^2 R\pi}\, \mathcal{H}_0 E(kR; q|k|) \left\{ \frac{H_0^{(1)}(kR) J_0(kR_\xi)}{|H_0^{(1)}(kR)|^2 I_0^{(1)}(kR)} \right. \\ &\quad \left. +2 \sum_{1\le\mu\le\tilde{\mu}} \frac{H_\mu^{(1)}(kR) J_\mu(kR_\xi)}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} \cos(\mu(\theta - \theta_\xi)) \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Abschneiden der Summe ab einem bestimmten Index erinnert neben der abgeschnittenen Singulärwertzerlegung auch an die Rekonstruktion aus unvollständigen Daten bei der Computer-Tomographie (Radon-Transformation) (vgl. [Lo 86] und [Nat 86]). Dies bedeutet, daß die Anwendung dieser Reihe auf die Daten (vgl. Gleichung (3.5) und Gleichung (3.30) im Satz 3.13) und damit die Auswertung nur *auf einem Teilbereich von $R\mathcal{S}^1$, zu denen die Singulärwerte gehören, erfolgen. Das Abschneiden ist dann mit einer Teilinversion zu vergleichen. Man kann davon ausgehen, daß im Gebiet $|k|R < \tilde{R},\ |\mu| < N$, wobei $\tilde{R}$ und N beliebig große feste Zahlen sind, die Konvergenz gleichmäßig bezüglich jeder Veränderlichen ist.*

Für $\gamma = k$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und der Wahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}, \lambda = 0.9$ und für den Operator $S : L_2(B_R(0)) \to L_2(R\mathcal{S}^1),\ R = 2.0LE$ hat sich bei der Frage nach Stabilität und Genauigkeit des Rekonstruktionskerns ψ_γ ein oberer Index $\tilde{\mu} = 12$ ergeben. Dies ist unabhängig von den Daten.
Würde man den Operator S als eine Abbildung von $L_2(B_1(0)) \to L_2(R\mathcal{S}^1)$ statt der in dieser Arbeit gewählten Darstellung betrachten, so wird aufgrund der Eigenschaften der Bessel-Funktionen (Lemma 2.23) und damit der Größe $I_\mu^{(1)}(kR)$ die kritischen Werte der Singulärwerte schon bei $\tilde{\mu} = 6$ bei einem festen R und k wie oben erreicht, denn für $\tilde{I}_\mu^{(1)}(k) := \int_0^1 r|J_\mu(kr)|^2 dr$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\tilde{I}_\mu^{(1)}(k) < I_\mu^{(1)}(kR)$. Hierdurch werden die Singulärwerte kleiner, so daß die Störungen bei den Bessel- und Hankel-Funktionen mehr ins Gewicht fallen. Dies führt auf ein früheres Abschneiden, das heißt kleinere $\tilde{\mu}$. Für $k = 6.98$ ergibt sich somit für $\tilde{I}_\mu^{(1)}(k)$ einen Wert $\tilde{\mu} = 6$ und für $I_\mu^{(1)}(kR)$ den Wert $\tilde{\mu} = 12$.
Betrachtet man den Rekonstruktionskern für den Meßpunkt $x \in R\mathcal{S}^1$ und den Rekonstruktionspunkt $\xi \in B_R(0)$, für $\theta = \theta_\xi$, $\|x\| = R$ fest und $R_\xi = \|\xi\|,\ 0 \le R_\xi < R$ im diskreten Fall $\xi_{mn} = R_{\xi,m}\omega(\theta_{\xi,n}),\ m,n = 1,\cdots N$ und $x_l = R\omega(\theta_l),\ l = 1,\cdots N$, so sind die Dichteverteilungen des Real- und Imaginärteils des Rekonstruktionskerns für $\gamma = k,\ k \in \mathbb{R}^+$ Inhalt der Abbildungen (3.3) und (3.4), für $\tilde{\mu} = 12$ und $R = 2.0LE$. Dabei weist die Abszisse die Abhängigkeit des Rekonstruktionskerns vom Winkel θ_ξ und die Ordinate die Abhängigkeit vom Radius R_ξ. Die Größe $\tilde{\mu} = 12$ ergibt sich in Abhängigkeit der Wellenlänge λ und damit der Wellenzahl k und des Detektorradius R aus dem Verhalten der Singulärwerte des Streuoperators S. Für einen festen Radius R_ξ demonstrieren die Abbildungen (3.5) bis (3.8) die Abhängigkeit des Rekonstruktionskerns vom Regularisierungsparameter γ mit $\gamma_1 = k,\ \gamma_2 = 2k,\ \gamma_3 = 0.6k,\ \gamma_4 = 0.16k$, wobei für $\gamma = k$ die Hankel-Transformation des Mollifiers gemäß (A.22) berechnet worden ist. Diesen Bildern entnimmt man auch die Symmetrie des Rekonstruktionskerns bezüglich des Nullpunkts, wobei für die logarithmische Singularität der Neumann-Funktionen im Nullpunkt die asymptotische Abschätzung gemäß (A.17) gewählt worden ist. Ferner stellt man fest, daß Variationen des Regularisierungsparameters γ die Lage der Nullstellen von ψ nicht beeinflußen, sondern nur dessen Amplitude.

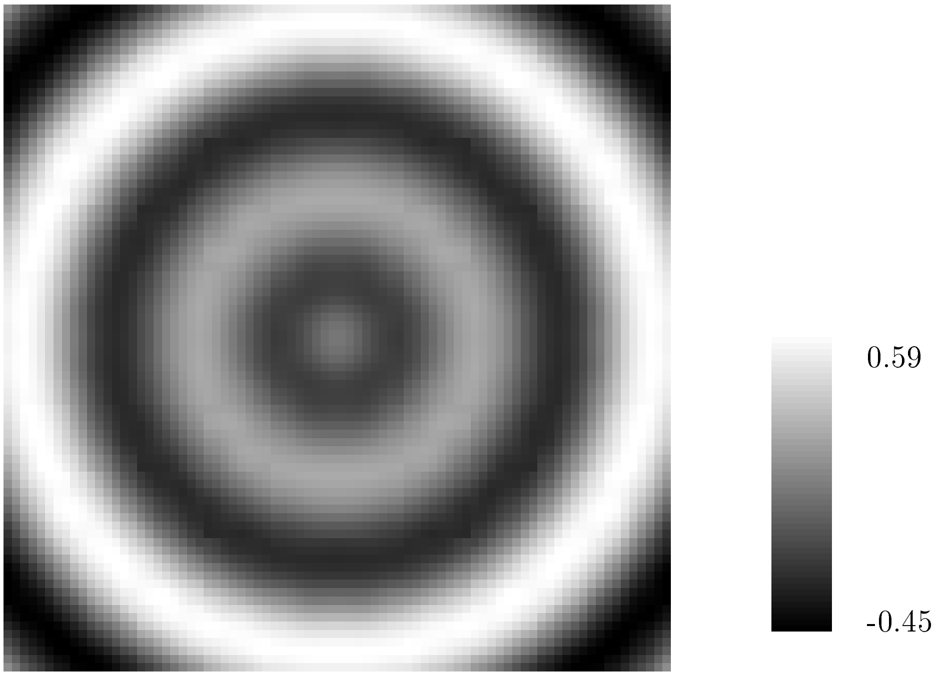

Abbildung 3.3: Dichteverteilung des Realteils des Rekonstruktionskerns

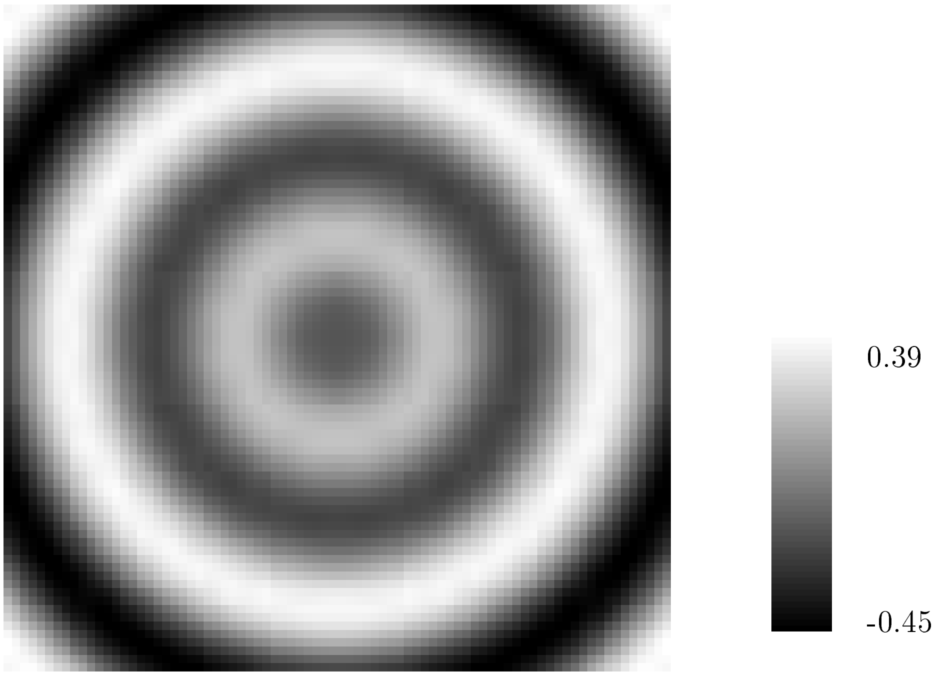

Abbildung 3.4: Dichteverteilung des Imaginärteils des Rekonstruktionskerns

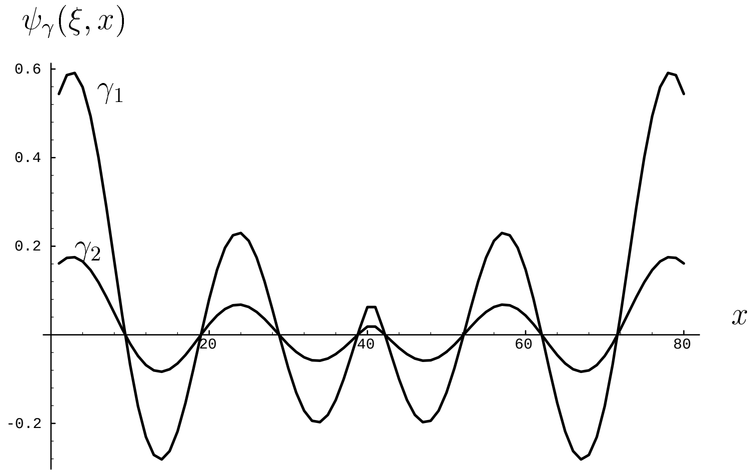

Abbildung 3.5: Realteil von ψ für verschiedenen γ_i

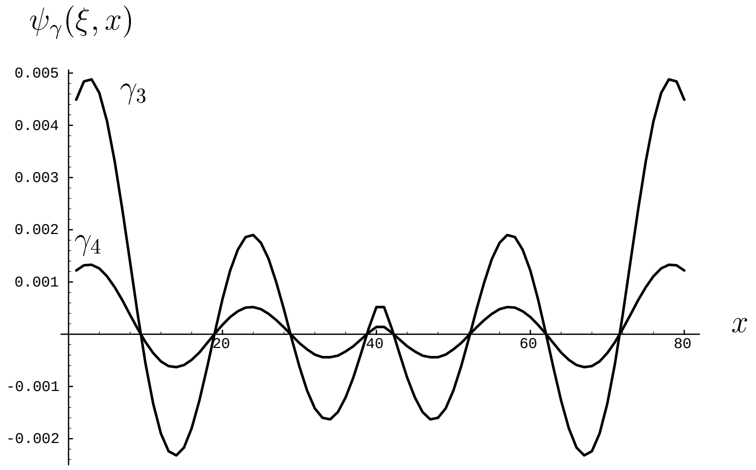

Abbildung 3.6: Realteil von ψ für verschiedenen γ_i

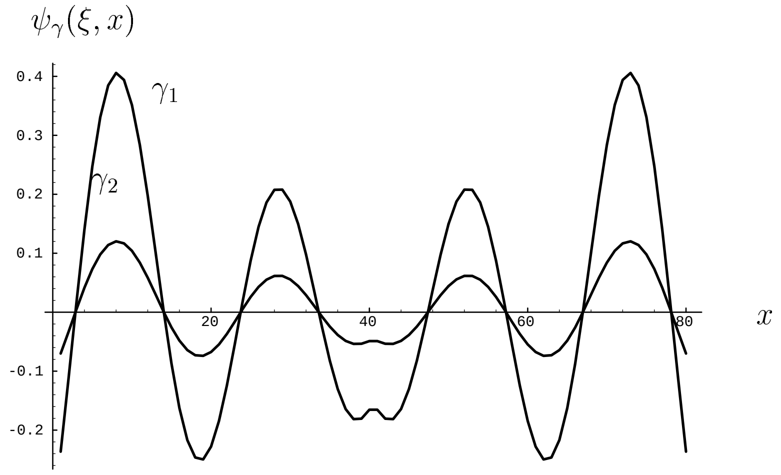

Abbildung 3.7: Imaginärteil von ψ für verschiedenen γ_i

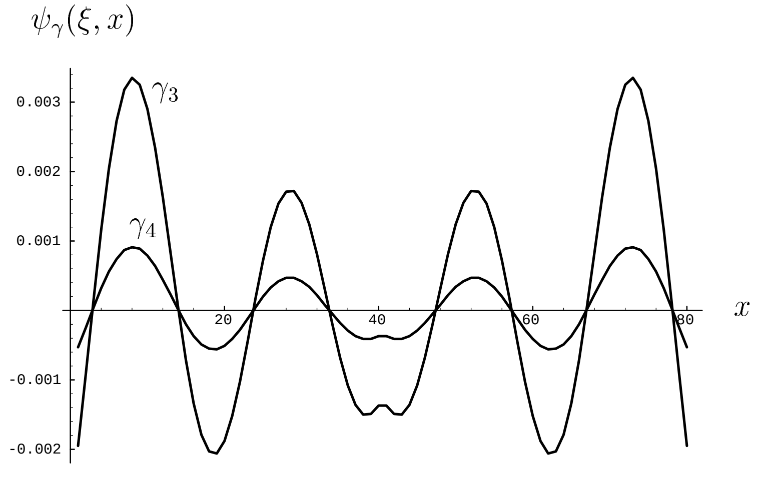

Abbildung 3.8: Imaginärteil von ψ für verschiedenen γ_i

Folgende Sätze ermöglichen, Aussagen über das Verhalten des Rekonstruktionskerns in den Extremfällen $R \to \infty$, $R_\xi \to 0$ und $k \to \infty$ zu treffen, wobei der letztere für reellwertige Wellenzahlen betrachtet wird.

Satz 3.8 *Seien $R > 0$ - der Detektorradius - $k \in \mathbb{C}$ die Wellenzahl mit $\Re(k) > 0$ und $\Im(k) \geq 0$ gegeben. Ferner seien der Mollifier $e(q|k|\|\cdot - \xi\|)$ und der Rekonstruktionskern $\psi(\xi, x; k)$ wie in den vorangegangenen Sätzen gegeben mit $\xi \in B_R(0)$ der Rekonstruktionspunkt und $x \in R\mathcal{S}^1$ der Meßpunkt. Dann besitzt der Rekonstruktionskern ψ folgende Eigenschaften:*

$$i)\ |\psi(\xi, x; k)| \quad \to \quad 0, \quad \textit{für} \ \ R \to \infty, \ \textit{für alle}\ \xi \ \textit{und für}\ \Im(k) = 0. \tag{3.24}$$

$$ii)\ \ \psi(\xi, x; k) = -i\ \frac{2k^2}{|k^2|^2 R\pi} \frac{\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|) H_0^{(1)}(kR)}{|H_0^{(1)}(kR)|^2 I_0^{(1)}(kR)} \ \ \textit{für} \ \ R_\xi \to 0. \tag{3.25}$$

Beweis :

i)

Bei der Untersuchung des Rekonstruktionskerns für den Detektorradius $R \to \infty$ wird der in dieser Arbeit gewählte Mollifier

$$e(q|k|\|\cdot - \xi\|) = \frac{q|k|}{4\pi^2} \frac{J_1(q|k|\|\cdot - \xi\|)}{\|\cdot - \xi\|}$$

berücksichtigt. Für $R \to \infty$ und unter der Bedingung $k \in \mathbb{R}^+$ gilt dann nach Transformation in Polarkoordinaten

$$\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|) = \mathcal{H}_0 E(qk) = \frac{qk}{4\pi^2} \int\limits_0^\infty J_0(kr) J_1(qkr) dr.$$

In Abhängigkeit des Koeffizienten q des Regularisierungsparameters müssen bei der asymptotischen Abschätzung des obigen *Weber-Schafheitlin*-Integrals folgende drei Fälle berücksichtigt werden.

- Ist $q = 1$, so gilt

$$\mathcal{H}_0 E(k) = \frac{k}{4\pi^2} \int\limits_0^\infty J_0(kr) J_1(kr) dr = \frac{1}{8\pi^2}$$

(vgl. Anhang (A.23) und [Ab/St 72]). Mit diesem Ergebnis und unter der Annahme der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in der Gleichung (3.13) erhält man unter Ausnutzung der asymptotischen Entwicklung der Hankel- und der Bessel-Funktionen (vgl. Anhang (A.15)) - bei der Bestimmung der Größe $I_\mu^{(1)}$ - nach einigen algebraischen Umformungen und Ausnutzung der Additionstheoreme für die trigonometrische Funktionen und $\xi \in B_R(0)$ beliebig aber fest:

$$\begin{aligned}
|\psi(R_\xi \omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k)|_{R\to\infty} &= \left| -i \, \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \, \frac{1}{R\sqrt{R}} e^{-i\pi/4} e^{ikR} \right| \\
&\quad \cdot \left. \left| \sum_{\mu \in \boldsymbol{Z}} \underbrace{e^{-i\mu/2\pi}}_{(-i)^\mu} J_\mu(kR_\xi) Y_\mu(\omega(\theta - \theta_\xi)) \right| \right|_{R\to\infty} \\
&= \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \, \frac{1}{R\sqrt{R}} \\
&\quad \cdot \left. \left| \sum_{\mu \in \boldsymbol{Z}} (-i)^\mu J_\mu(kR_\xi) Y_\mu(\omega(\theta - \theta_\xi)) \right| \right|_{R\to\infty} .
\end{aligned}$$

Nach Anwendung der Dreiecksungleichung auf die obige Gleichung gilt:

$$|\psi(R_\xi \omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k)|_{R\to\infty} \leq \left. \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \frac{1}{R\sqrt{R}} \sum_{\mu \in \boldsymbol{Z}} |J_\mu(kR_\xi)| \right|_{R\to\infty} .$$

Da die Reihe über Bessel-Funktionen mit festem Argument absolut konvergent ist (vgl. [Ab/St 72]), konvergiert die Amplitude des Rekonstruktionskerns $|\psi| \to 0$ für $R \to \infty$.

- Sei nun $q \neq 1, \; q < 1$. Dann gilt (vgl. [Ab/St 72])

$$\mathcal{H}_0 E(qk) = \frac{qk}{4\pi^2} \int\limits_0^\infty J_0(kr) J_1(qkr) dr = \frac{q^2}{4\pi^2} \, {}_2F_1(1, 1; 2; q^2),$$

wobei ${}_2F_1(1,1;2;q^2)$ die hypergeometrische Funktion (vgl. Anhang (A. 24) und [Ab/St 72]) bezeichnet. Da $q < 1$ und damit $q^2 < 1$ gelten, ist die Konvergenz der hypergeometrischen Reihe gesichert. Setzt man die Definition dieser Reihe ein, so kann man nach einigen algebraischen Umformungen feststellen, daß dies gerade die Taylor-Reihenentwicklung für den Logarithmus liefert, das heißt

$$\mathcal{H}_0 E(qk) = -\frac{\ln(1-q^2)}{4\pi^2}.$$

Hiermit ergibt sich für den Rekonstruktionskern analog der obigen Vorgehensweise

$$|\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k)|_{R\to\infty} \quad \leq \quad \frac{|\ln(1-q^2)|}{4\pi R\sqrt{R}}\sqrt{\frac{2}{k\pi}}\sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}}|J_\mu(kR_\xi)|\Bigg|_{R\to\infty}.$$

Und heraus $|\psi| \to 0$ für $R \to \infty$.

- Für den Fall $q > 1$, so gelangt man (vgl. [Ab/St 72]) zu

$$\mathcal{H}_0 E(qk) = \frac{qk}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty J_0(kr)J_1(qkr)dr = \frac{1}{4\pi^2}\ {}_2F_1(1,0;1;\frac{1}{q^2}).$$

Hierbei ist die Konvergenz der hypergeometrische Reihe ebenfalls gesichert. Mit Hilfe der Eigenschaften der hypergeometrischen Funktionen, daß diese sich auf Polynome (beziehungsweise *orthogonale Polynome*) reduzieren lassen (vgl. [Ab/St 72]), stellt man fest, daß

$${}_2F_1(1,0;1;\frac{1}{q^2}) = 1$$

gilt. Die Abschätzung für den Rekonstruktionskern läßt sich dann wie folgt angeben.

$$|\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k)|_{R\to\infty} \quad \leq \quad \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{k\pi}}\frac{1}{R\sqrt{R}}\sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}}|J_\mu(kR_\xi)|\Bigg|_{R\to\infty},$$

was ebenfalls die Konvergenz der Amplitude des Rekonstruktionskerns für $R \to \infty$ gegen Null aufweist.

ii)
Hierbei ist es von Vorteil, die Reihendarstellung aus der Gleichung (3.22) für den Rekonstruktionskern zu betrachten. Berücksichtigt man das asymptotische Verhalten der Bessel-Funktionen für kleine Argumente $R_\xi \to 0$, und damit $J_\mu(kR_\xi) \to 0$ für alle $\mu \geq 1$ und $J_0(kR_\xi) \to 1$ für alle $k \in \mathbb{C}$, so gilt für den Rekonstruktionskern

$$\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) \quad = \quad -i\frac{2k^2}{|k^2|^2 R\pi}\, \mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)\frac{H_0^{(1)}(kR)}{|H_0^{(1)}(kR)|^2 I_0^{(1)}(kR)}.$$

■

Der nächste Satz untersucht die Abhängigkeit des Rekonstruktionskerns von der Wellenlänge beziehungsweise von der Frequenz und damit die von der Wellenzahl.

Satz 3.9 *Sei die Wellenzahl $k \in \mathbb{R}^+$. Ferner seien x, ξ sowie der Mollifier e wie im vorangegangenen Satz und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $q = 1$ gegeben, womit sich $\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)$ reduzieren läßt auf $\mathcal{H}_0 E(kR)$. Betrachtet man die Darstellung von*

$$\begin{aligned}\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) \quad &= \quad -i\frac{2}{k^2 R\pi}\mathcal{H}_0 E(kR) \sum_{\mu\in[-\tilde{\mu},\tilde{\mu}]} \frac{H_\mu^{(1)}(kR) J_\mu(kR_\xi)}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} \\ &\qquad \cdot Y_\mu(\omega(\theta))\overline{Y_\mu(\omega(\theta_\xi))}\end{aligned}$$

mit $\tilde{\mu}$ entsprechend der Bemerkung 3.7, so konvergiert

$$|\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k)| \quad \to \quad 0 \;\; \textit{für} \;\; k \to \infty, \;\textit{und für alle}\; 0 < R_\xi < R. \qquad (3.26)$$

Beweis :
Zur Bestimmung der Hankel-Transformation des speziell gewählten Mollifiers kann man aufgrund der Eigenschaften der Hankel-Transformierte die asymptotische Entwicklung der Bessel-Funktionen der Ordnung Null und der Ordnung eins einsetzen. Es ergibt sich

$$\mathcal{H}_0 E(kR)|_{k\to\infty} = \frac{1}{8\pi^2}\left\{1 - \frac{2}{k\pi R}\cos^2(kR - \pi/4)\right\}\Big|_{k\to\infty}.$$

Desweiteren ergibt sich unter Ausnutzung der asymptotischen Entwicklung für Hankel- und Bessel-Funktionen für große Argumente (vgl. Anhang (A.15)) und Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Summe für $|\psi|$

$$\begin{aligned} |\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k)|_{k\to\infty} &\leq \frac{1}{4k^2\pi^3 R}\left|1 - \frac{2}{k\pi R}\cos^2(kR - \pi/4)\right| \\ &\quad \left. \cdot \sum_{\mu\in[-\tilde{\mu},\tilde{\mu}]} \sqrt{\frac{R}{R_\xi}}\frac{k\pi}{R} \underbrace{\left|cos(kR_\xi - \frac{1}{2}\mu\pi - \pi/4)\right|}_{\leq 1} \right|_{k\to\infty} . \end{aligned}$$

Nach wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung gelangt man schließlich zu

$$|\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k)|_{k\to\infty} \leq (2\tilde{\mu}+1)\frac{1}{4\pi^2 R^2}\sqrt{\frac{R}{R_\xi}}\left.\left\{\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2\pi R}\right\}\right|_{k\to\infty} .$$

Hiermit folgt die Behauptung. ■

Der Rekonstruktionskern ψ wurde als Minimum-Norm-Lösung der Gleichung $S^*\psi_\gamma = e_\gamma$ mit $S^* : L_2(R\mathcal{S}^1) \to L_2(B_R(0))$ bestimmt. Dies bedeutet, daß ψ eine in $L_2(R\mathcal{S}^1)$ beschränkte Funktion ist. In Anlehnung an die Definition 3.1 wird der Nachweis, daß der Rekonstruktionskern eine ebenfalls in $L_2(B_R(0) \times R\mathcal{S}^1)$ beschränkte Funktion ist, im folgenden Satz erbracht.

Satz 3.10 *Seien der Rekonstruktionskern ψ und der Mollifier e wie in den Gleichungen (3.11) und (3.13) gegeben. Ferner seien der Rekonstruktionspunkt $\xi \in B_R(0)$, die Wellenzahl $k \in \mathbb{C}$, $\Re(k) > 0$, $\Im(k) \geq 0$ und der Meßpunkt $x \in R\mathcal{S}^1$ gegeben. Dann existiert eine Konstante $c = c(R, k, \tilde{\mu}) < \infty$ mit $\tilde{\mu} \in \mathbb{Z}$, so daß ψ folgende Bedingung erfüllt*

$$\|\psi\|^2_{L_2(B_R(0)\times R\mathcal{S}^1)} \leq c(R, k, \tilde{\mu}). \tag{3.27}$$

Beweis :
Die L_2-Norm auf $L_2(B_R(0) \times R\mathcal{S}^1)$ kann sich analog der Norm auf $R\mathcal{S}^1$ bestimmen lassen. Somit gilt:

$$\|\psi\|^2_{L_2(B_R(0)\times R\mathcal{S}^1)} = \int\limits_{B_R(0)} \int\limits_{R\mathcal{S}^1} |\psi(\xi, x; k)|^2 d\sigma_x \, d\xi,$$

$$\|\psi\|^2_{L_2(B_R(0)\times R\mathcal{S}^1)} = R\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k)|^2 R_\xi d\theta\ d\theta_\xi\ dR_\xi .$$

Nun beachtet man die Abhängigkeit der Neumann- und damit der Hankel-Funktionen von den Bessel-Funktionen entsprechender Ordnung. Aus der *Debyeschen Formel* (vgl. [Ab/St 72]) und dem Lemma 2.23 gilt: Es existiert ein $\tilde{\mu} \in \mathbb{Z}$, so daß $\lceil kR \rceil \leq \tilde{\mu}$ gilt und $J_{\tilde{\mu}+1}(kR) \to 0$.
Setzt man die Reihendarstellung des Rekonstruktionskerns ein, so liefern die Dreiecksungleichung und Anwendung des Satzes von *Fubini* folgende Abschätzung für ψ

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2_{L_2(B_R(0)\times R\mathcal{S}^1)} \leq\ & \frac{4}{|k^2|^2 R\pi^2}\,|\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)|^2 \sum_{\mu\in[-\tilde{\mu},\tilde{\mu}]} \left| \frac{H^{(1)}_\mu(kR)}{|H^{(1)}_\mu(kR)|^2 I^{(1)}_\mu(kR)} \right|^2 \\ & \cdot \int_0^R R_\xi |J_\mu(kR_\xi)|^2 dR_\xi \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |Y_\mu(\omega(\theta))\ \overline{Y_\mu(\omega(\theta_\xi))}|^2 d\theta\ d\theta_\xi .\end{aligned}$$

Wertet man die Integrale bezüglich des Winkels aus, so gilt:

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2_{L_2(B_R(0)\times R\mathcal{S}^1)} \leq\ & \frac{16}{|k^2|^2 R}\,|\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)|^2 \sum_{\mu\in[-\tilde{\mu},\tilde{\mu}]} \frac{1}{|H^{(1)}_\mu(kR)|^2 \left[I^{(1)}_\mu(kR)\right]^2} \\ & \cdot \underbrace{\int_0^R R_\xi |J_\mu(kR_\xi)|^2 dR_\xi}_{=I^{(1)}_\mu(kR)} .\end{aligned}$$

Ferner gilt für alle $\mu \in (-\tilde{\mu}, \tilde{\mu})$

$$\frac{1}{|H^{(1)}_\mu(kR)|^2 I^{(1)}_\mu(kR)} \leq \frac{1}{|H^{(1)}_{\tilde{\mu}}(kR)|^2 I^{(1)}_{\tilde{\mu}}(kR)} .$$

Hieraus erhält man für ψ

$$\|\psi\|^2_{L_2(B_R(0)\times R\mathcal{S}^1)} \leq \frac{16}{|k^2|^2 R}\,\frac{|\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)|^2}{|H^{(1)}_{\tilde{\mu}}(kR)|^2 I^{(1)}_{\tilde{\mu}}(kR)}\,(2\tilde{\mu}+1).$$

Somit existiert eine Konstante $c = c(R, k, \tilde{\mu}),\ 0 < c < \infty$, so daß

$$\|\psi\|^2_{B_R(0)\times L_2(R\mathcal{S}^1)} \leq c(R, k, \tilde{\mu}),$$

da die Hankel-Transformation des Mollifiers - unabhängig einer bestimmten Wahl dieser - ebenfalls eine Funktion von k und R liefert. ■

Korollar 3.11 *Sei $\{w_\mu, v_\mu; \sigma_\mu\}$ das Singulärsystem für den Streuoperator S. Sei ψ der Rekonstruktionskern gegeben laut Gleichungen (3.12) und (3.13). Dann gilt:*
i)

$$\psi(\xi, x; k) \quad = \quad 2\pi\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|) \sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} \sigma_\mu^{-1}\overline{v_\mu(\xi)} w_\mu(x). \tag{3.28}$$

ii) Der Rekonstruktionskern ψ als Lösung der Gleichung $S^*\psi_\gamma = e_\gamma$ läßt sich mittels einer gewichteten abgeschnittenen Singulärwertzerlegung (vgl. [Lo2 89]) des Streuoperators angeben.

Beweis:
Die erste Behauptung erhält man, wenn man die Terme in der Darstellung von ψ in der Gleichung (3.13) zusammenfaßt.
Den zweiten Teil des Satzes ersieht man aus der Darstellung des Rekonstruktionskerns in der Gleichung (3.23) in Bemerkung 3.7. ■

Betrachtet man die obigen Darstellungen von ψ, so stellt sich die Frage: Wie sieht der Rekonstruktionskern ψ_γ nach Anwendung der Pseudoinversen auf die Gleichung $S^*\psi_\gamma = e_\gamma$ aus? Die Antwort auf diese Frage liefert der nachstehende Satz.

Satz 3.12 *Es seien die Voraussetzung des Satzes 3.4 erfüllt. Wendet man zur Bestimmung von ψ_γ auf die Gleichung $(S^*\psi_\gamma)(\xi,\cdot) = e_\gamma(\xi,\cdot)$ die Pseudoinverse für einen beliebigen Mollifier e an, das heißt bestimmt man die Pseudolösung $\psi_\gamma^\dagger = {S^*}^\dagger e_\gamma$ mittels der Darstellung*

$$\begin{aligned}({S^*}^\dagger e_\gamma)(\xi, x) \quad &= \quad ({S^*}^\dagger e)(\xi, x; k) \\ &= \quad \sum_{\substack{\mu\in\boldsymbol{Z}\\ \sigma_\mu>0}} \sigma_\mu^{-1}\langle e(\xi,\cdot;k), v_\mu\rangle_{L_2(B_R(0))}\ w_\mu(x),\end{aligned}$$

so gilt für den Rekonstruktionspunkt $\xi = R_\xi \omega(\theta_\xi)$ und den Meßpunkt $x = R\omega(\theta)$

$$
\begin{aligned}
(S^{*^\dagger} e)(R_\xi \omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) &= -i \frac{2k^2}{|k^2|^2 \pi R} \sum_{\mu \in \boldsymbol{Z}} \frac{H_\mu^{(1)}(kR)}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} \\
&\quad \cdot \mathcal{H}_\mu \tilde{e}(R_\xi \omega(\theta_\xi), R; q|k|).
\end{aligned}
$$

Beweis:
Setzt man in die Darstellung der Pseudolösung das Singulärsystem und den Mollifier ein, so gilt mit dem Satz von *Fubini* und Berücksichtigung der Bedingung $\sigma_\mu > 0$, so daß die Summen tatsächlich nur bis zum Index $\tilde{\mu}$ (vgl. Bemerkung 3.7) zu bilden sind:

$$
\begin{aligned}
(S^{*^\dagger} e)(R_\xi \omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) &= \frac{-i\ k^2}{|k^2|^2 \pi^2 R} \sum_{\mu \in \boldsymbol{Z}} \frac{H_\mu^{(1)}(kR) Y_\mu(\omega(\theta))}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} \int_0^R r J_\mu(kr) \\
&\quad \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} e(R_\xi \omega(\theta_\xi), r\omega(\varphi); q|k|) \overline{Y_\mu(\omega(\varphi))} d\varphi\, dr}_{2\pi \tilde{e}_\mu(R_\xi \omega(\theta_\xi), r; q|k|)} \\
&= -i\ \frac{2k^2}{|k^2|^2 \pi R} \sum_{\mu \in \boldsymbol{Z}} \frac{H_\mu^{(1)}(kR)}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} \\
&\quad \cdot \mathcal{H}_\mu \tilde{e}_\mu(R_\xi \omega(\theta_\xi), R; q|k|).
\end{aligned}
$$

Dies bedeutet: Bestimmt man den Rekonstruktionskern als die verallgemeinerte Lösung der Gleichung $(S^* \psi)(\xi, x; k) = e(\xi, x; k)$, so stellt man fest, daß dies gerade die Minimum-Norm-Lösung ψ_γ aus den Gleichungen (3.12) und (3.13) ausgewertet für die Hankel-Transformation der Ordnung μ der Fourier-Koeffizienten des Mollifiers ist.
Berücksichtigt man die Wahl des Mollifiers als eine vom Winkel unabhängige Funktion, so gelangt man zu folgender Darstellung für den Rekonstruktionskern:

$$
(S^{*^\dagger} e)(R_\xi \omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) = \frac{-i2k^2}{|k^2|^2 \pi R} \frac{H_0^{(1)}(kR)}{|H_0^{(1)}(kR)|^2 I_0^{(1)}(kR)} \mathcal{H}_0(T^\xi E)(kR; q|k|).
$$

In diesem Fall gleicht der Rekonstruktionskern der Minimum-Norm-Lösung ausgewertet in dem Rekonstruktionspunkt $\xi = 0$ und multipliziert mit der Hankel-Transformation des translatierten Mollifiers um den Rekonstruktionspunkt ξ für alle $\xi \in B_R(0)$ als eine Gewichtsfunktion. ■

Bemerkung:
Wie man aus dem vorstehenden Satz ersehen kann, bringt die Bestimmung des Rekonstruktionskerns als Minimum-Norm-Lösung erhebliche Vorteile, was die numerische Realisierung und Bestimmung der äquivalenten Quellen und des Objekts angeht.
Weiterhin ist es interessant zu sehen, wie sich der Rekonstruktionskern bestimmen läßt, wenn man für den Mollifier $e_\gamma(x,y)$ die Delta-Distribution $\delta_x(y) = \delta_{k,x}(y) = \frac{2\pi}{q|k|}\delta(|k|(x-y))$ einsetzt. Durch analoge Vorgehensweise wie oben kann man feststellen, daß sich bei der Bestimmung von $\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)$ der Hankel-Transformation von E ein Filterfaktor der Form $\frac{1}{q|k|^2}$ herausstellen läßt. Der Rekonstruktionskern gemäß der Gleichung (3.12) besitzt folglich die Darstellung

$$\begin{aligned}
\psi(\xi, x; k) &= \psi(R_\xi\omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k) \\
&= -i\frac{k^2}{|k^2|^2 R\pi}\,\frac{1}{q|k|^2} \\
&\quad \cdot \sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} \frac{H_\mu^{(1)}(kR)J_\mu(kR_\xi)}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} Y_\mu(\omega(\theta))\overline{Y_\mu(\omega(\theta_\xi))}.
\end{aligned}$$

3.3 Bestimmung der Objektfunktion

Mit den bereitgestellten Ergebnissen kann man nun mit der Bestimmung der äquivalenten Quellen und damit mit der der Objektfunktion beginnen.
In diesem Abschnitt wird zunächst der Rekonstruktion von ϕ und damit der von $\mathcal{O}$ eine Einzelmessung (eine Messung in einer Richtung) zugrundegelegt und anschließend auf die Variation der Einfallsrichtung eingegangen.
Ist ein Rekonstruktionskern bestimmt worden, so kann die äquivalente Quelle und damit die Objektfunktion aus der Rekonstruktionsformel gemäß der Gleichung (3.5) bestimmt werden, das heißt es ergibt sich

$$\phi_\gamma(\xi) := \phi(\xi; k) = \langle u_s, \psi(\xi, \cdot; k)\rangle_{L_2(R\mathcal{S}^1)}. \tag{3.29}$$

Mit Hilfe des im vorhergehenden Kapitel berechneten Rekonstruktionskerns gilt folgender Satz für die Rekonstruktion der äquivalenten Quelle.

Satz 3.13 *Es seien die Wellenzahl $k \in \mathbb{C}$ mit $\Re(k) > 0$, $\Im(k) \geq 0$ und die gestreuten Daten - Nahfelddaten - auf einem Meßkreis gegeben. Ferner seien der Mollifier $e(q|k| \, \| \cdot - \xi\|)$ gemäß der Gleichung (3.11) und der Rekonstruktionskern $\psi(R_\xi \omega(\theta_\xi), R\omega(\theta); k)$ laut Gleichung (3.13) gegeben. Dann ergibt sich die äquivalente Quelle ϕ für den Rekonstruktionspunkt $\xi \in B_R(0)$ mit der Parametrisierung $\xi = R_\xi \omega(\theta_\xi)$, $0 \leq R_\xi < R$ als ein gewichtetes Mittel der Fourier-Koeffizienten der Daten, das heißt es gilt:*

$$
\begin{aligned}
\phi_\gamma(\xi) &:= \phi(R_\xi \omega(\theta_\xi), R; q|k|) \\
&= i \, \frac{4\overline{k^2}}{|k^2|^2} \, \overline{\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)} \sum_{\mu \in \boldsymbol{Z}} \frac{\overline{\overline{H_\mu^{(1)}(kR)} J_\mu(kR_\xi)}}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} \\
&\quad \cdot Y_\mu(\omega(\theta_\xi)) \tilde{u}_{s,\mu}(R). \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Beweis:
Setzt man die Darstellung des Rekonstruktionskerns in die Gleichung (3.29) ein, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\phi(R_\xi \omega(\theta_\xi), R; k) &= i \, \frac{2\overline{k^2}}{|k^2|^2 \pi} \, \overline{\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)} \sum_{\mu \in \boldsymbol{Z}} \frac{\overline{\overline{H_\mu^{(1)}(kR)} J_\mu(kR_\xi)}}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} \\
&\quad \cdot Y_\mu(\omega(\theta_\xi)) \underbrace{\int_0^{2\pi} \overline{Y_\mu(\omega(\theta))} u_s(R\omega(\theta)) d\theta}_{2\pi \tilde{u}_{s,\mu}(R)}
\end{aligned}
$$

und damit die Behauptung. ■

Bemerkung: Die Frage nach der Konvergenz der Reihendarstellung der Approximation an die äquivalente Quelle läßt sich mit der endlichen Anzahl der gegebenen Daten u_s und damit derer Fourier-Koeffizienten beantworten.
Analog wie bei der Bestimmung des Rekonstruktionskerns kann man auch hierbei die Frage stellen, wie die äquivalente Quelle aussieht, wenn man sie als verallgemeinerte Lösung der Gleichung $S\phi = u_s$ angeben möchte. Die ist der Inhalt des nächsten Satzes.

Satz 3.14 *Gegeben seien das Singulärsystem für den Operator S und die Daten u_s auf $R\mathcal{S}^1$. Dann besitzt ϕ als verallgemeinerte Lösung der Gleichung $S\phi = u_s$ im*

Punkt $r\omega(\varphi) = y \in B_R(0),\ 0 \leq r < R$ folgende Darstellung

$$\phi^\dagger(r\omega(\varphi), R; k) \quad = \quad i\ \frac{2\overline{k^2}}{|k^2|^2\pi} \sum_{\mu \in \mathbf{Z}} \frac{\overline{H_\mu^{(1)}(kR)}\ \overline{J_\mu(kr)}}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} Y_\mu(\omega(\varphi))\tilde{u}_{s,\mu}(R).$$

Hierbei ist die Summe aufgrund der Bedingung $\sigma_\mu > 0$ bis $\tilde{\mu}$ zu bilden.

Beweis:
Setzt man in die Darstellung

$$\phi^\dagger(y) \quad = \quad \sum_{\substack{\mu \in \mathbf{Z} \\ \sigma_\mu > 0}} \sigma_\mu^{-1} \langle u_s, w_\mu \rangle_{L_2(R\mathcal{S}^1)}\ v_\mu(y), \quad y \in B_R(0)$$

der verallgemeinerten Lösung das Singulärsystem ein, und berechnet das Skalarprodukt auf $R\mathcal{S}^1$, so folgt die Behauptung. ∎

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem aus dem vorhergehenden Satz, so unterscheiden sich die beiden Darstellungen um einen *Filterfaktor*, der den wesentlichen Beitrag bei der Bestimmung der äquivalenten Quellen, nämlich die Eindeutigkeit und vor allen die Stabilität, liefert.
Desweiteren läßt sich folgendes Ergebnis

$$\phi_\gamma(\xi) = 2\pi\overline{\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)}\phi^\dagger(\xi) \quad \text{für} \quad \xi \in B_R(0)$$

feststellen, wobei $\gamma = q|k|$ gewählt worden ist.
Würde man statt des Ansatzes in der Gleichung (3.1)

$$\phi_\gamma(\xi) := \langle e_\gamma(\xi, \cdot), \phi \rangle_{L_2(\Omega)}$$

betrachten, so erhält man analog

$$\phi_\gamma(\xi) = 2\pi\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)\overline{\phi^\dagger(\xi)} \quad \text{für} \quad \xi \in B_R(0).$$

Sind die Daten für einen kreisförmigen Streuer analytisch - gemäß den Gleichungen (C.2) und (C.6) - gegeben, so läßt sich die obige Identität sowohl für Nah- als auch für Fernfelddaten bestätigen.

Bemerkung 3.15 *Im dreidimensionalen Raum erhält man die Fourier-Koeffizienten der auf einer Meßoberfläche gegebenen Daten mit Hilfe des Funk-Hecke-Theorems (vgl. [Nat 86]).*

Sind die Daten - wie in allen praktischen Problemen - mit Fehlern behaftet gegeben, so liefert der nächste Satz eine Aussagen über die Fehlerschranke bei der Rekonstruktion der äquivalenten Quellen.

Satz 3.16 *Seien ϕ_γ^ϵ die regularisierte Lösung bestimmt mit den fehlerbehafteten Daten u_s^ϵ gemäß der Gleichung (3.30) und $\phi^\dagger$ die verallgemeinerte Lösung der Gleichung $S\phi = u_s$ mit dem Regularisierungsparameter $\gamma = q|k|$. Dann läßt sich der Gesamtfehler zur Bestimmung der äquivalenten Quelle angeben als*

$$\begin{aligned} \|\phi_\gamma^\epsilon - \phi^\dagger\|^2_{L_2(B_R(0))} &\leq \frac{32\pi}{|k^2|^2}\left[\|\overline{\mathcal{H}_0 E}\|^2_{L_2((0,\infty);sds)}\epsilon^2 + \left(\|\overline{\mathcal{H}_0 E}\|^2_{L_2((0,\infty);sds)} + \frac{1}{\pi^2}\right)c\right] \\ &\quad \cdot \sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} \frac{1}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

mit $\|u_s^\epsilon - u_s\|_{L_2(R\mathcal{S}^1)} \leq \epsilon$ und $\|u_s\|_{L_2(R\mathcal{S}^1)} \leq c$.
Ferner gilt:

$$\|\tilde{\phi}_\gamma^\epsilon - \phi^\dagger\|_{L_2(B_R(0))} \to 0 \ \ \textit{für} \ \ \gamma,\ \epsilon \to 0,$$

wobei $\tilde{\phi}_\gamma^\epsilon = \frac{1}{\mathcal{I}_0}\phi_\gamma^\epsilon$ ist mit $\mathcal{I}_0 = (2\pi R)^{-1}\int\limits_0^R J_0(kr)dr$.

Beweis:
Berücksichtigt man, daß sich der Gesamtfehler als Summe des Datenfehlers und des Regularisierungsfehlers angeben läßt, das heißt

$$\|\phi_\gamma^\epsilon - \phi^\dagger\|^2_{L_2(B_R(0))} \leq \|\phi_\gamma^\epsilon - \phi_\gamma\|^2_{L_2(B_R(0))} + \|\phi_\gamma - \phi^\dagger\|^2_{L_2(B_R(0))},$$

so erreicht man mit den Ergebnissen der Sätze 3.13 und 3.14

$$\|\phi_\gamma^\epsilon - \phi_\gamma\|^2_{L_2(B_R(0))} \leq \frac{32\pi}{|k^2|^2}\left|\overline{\mathcal{H}_0 E(kR;q|k|)}\right|^2 \sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} \frac{|\tilde{u}^\epsilon_{s,\mu}(R) - \tilde{u}_{s,\mu}(R)|^2}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)}$$

für den Datenfehler und

$$\|\phi_\gamma - \phi^\dagger\|^2_{L_2(B_R(0))} \leq \frac{32\pi}{|k^2|^2}\left(\left|\overline{\mathcal{H}_0 E(kR;q|k|)}\right|^2 + \frac{1}{\pi^2}\right) \sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} \frac{|\tilde{u}_{s,\mu}(R)|^2}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)}$$

für den Regularisierungsfehler.
Insgesamt erhält man die Behauptung nach Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und unter der Annahme, daß der Fehler in den Fourier-Koeffizienten der Daten durch $\epsilon > 0$ beschränkt ist und daß die Daten quadratintegrabel - also in $L_2(R\mathcal{S}^1)$ - sind, und $|\overline{\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)}|^2 \leq \|\overline{\mathcal{H}_0 E}\|^2_{L_2((0,\infty);sds)}$ (vgl. Anhang D.1) gilt. Erfüllen die Daten nicht diese Forderung, so ist man auf eine L_2-Interpolation der Daten auf $R\mathcal{S}^1$ angewiesen.
Um das Verhalten des Gesamtfehlers für $\gamma,\ \epsilon \to 0$ zeigen zu können, ist es hilfreich, die Methode als eine Glättung der Pseudoinversen aufzufassen (vgl. [Lo 98]). Hierbei seien die stetigen linearen Abbildungen $M_\gamma : H^{-1}(B_R(0)) \to L_2(B_R(0))$ und die Pseudoinversenerweiterung $\tilde{S}^\dagger : L_2(R\mathcal{S}^1) \to H^{-1}(B_R(0))$ gegeben. Mit Hilfe dieser Abbildungen läßt sich dann der Operator T_γ (vgl. Definition 3.1) angeben als $T_\gamma = M_\gamma \tilde{S}^\dagger$. Betrachtet man die Darstellung der Approximation an die äquivalenten Quellen, also $\tilde{\phi}_\gamma = M_\gamma \tilde{S}^\dagger u_s$, so ergibt sich notwendigerweise für den Operator $M_\gamma : f \mapsto \frac{1}{\mathcal{I}_0}\overline{\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)} f$, wobei $\mathcal{I}_0 := \frac{1}{2\pi R}\int\limits_0^R J_0(kr)dr$. Nach dieser Darstellung des Operators M_γ und nach Eigenschaften der Hankel-Transformation (vgl. Anhang D.1) gilt:

$$\|M_\gamma f\|_{L_2(B_R(0))} \leq c_\gamma \|f\|_{H^{-1}(B_R(0))} \ \text{ für alle } \ f \in \mathcal{N}(S)^\perp$$

und

$$\lim_{\gamma\to 0} \|M_\gamma f - f\| \to 0 \ \text{ für alle } \ f \in \mathcal{N}(S)^\perp.$$

Hiermit sind die Voraussetzungen des Theorems 4 in [Lo 98] erfüllt, und es gilt:

$$\|\tilde{\phi}^\epsilon_\gamma - \phi^\dagger\|^2_{L_2(B_R(0))} \quad \leq \quad 4\pi^2 c^2_{\mathcal{I}_0} \|\overline{\mathcal{H}_0 E}\|^2_{L_2((0,\infty);sds)} \epsilon^2 + \|(M_\gamma - I)\phi^\dagger\|^2_{L_2(B_R(0))},$$

und damit die Behauptung. ■

Verwendet man bei der Bestimmung der äquivalenten Quellen statt Nahfelddaten die in das Fernfeld transformierten Daten (vgl. Anhang B), so ist das Ergebnis der Inhalt des nachstehenden Korollars.

Korollar 3.17 *Mit den Voraussetzungen des vorangehenden Satzes 3.13 ergibt sich für die approximative Inverse der äquivalenten Quelle unter Verwendung der Fernfelddaten folgende Darstellung:*

$$\begin{aligned}\phi(R_\xi \omega(\theta_\xi), R; k) \quad = \quad & \frac{4\overline{k^2}}{|k^2|^2}\sqrt{\frac{8\pi}{k}}\; e^{-i\pi/4}\; \overline{\mathcal{H}_0 E(kR; q|k|)} \\ & \cdot \sum_{\mu \in \boldsymbol{Z}} (-1)^\mu i^{\mu+1} \frac{\{\overline{H_\mu^{(1)}(kR)}\}^2 \overline{J_\mu(kR_\xi)}}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^3 I_\mu^{(1)}(kR)} Y_\mu(\omega(\theta_\xi))\; \tilde{u}_{s,\mu}(R).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Beweis:
Die Behauptung folgt unter Ausnutzung der Beziehung zwischen den Daten gemessen im Nahfeld und den Fernfelddaten und damit deren Fourier-Transformierten gemäß der Gleichung (B.5). ■

Erinnert man sich an die Definition der *äquivalenten Quellen* (vgl. Definition 2.5), so ersieht man, daß sich zur Bestimmung des Objekts folgendes ergibt:

$$\mathcal{O}(\xi) = \frac{\phi(\xi)}{u(\xi)} \;\text{ für }\; \xi \in B_R(0),$$

wobei das Feld im Gesamtgebiet $B_R(0)$ zu berücksichtigen ist, das heißt auch in dem streuobjektdarstellenden Gebiet Ω_{sc} mit $\overline{\Omega_{sc}} \subset B_R(0)$.
Für eine *quantitative* oder *exakte* nichtlineare Inversion ist es von wesentlicher Bedeutung, daß das *innere Streufeld* ebenfalls berechnet wird. Mit dem berechneten $\phi^{approx}(\xi) := \phi(\xi, R; k)$, $\xi \in B_R(0)$, das das Gesamtfeld enthält, kann also $u_s^{approx}(\xi) := u_s^{approx}(\xi, R; k)$ eine Approximation an die Daten u_s berechnet werden, durch Lösen des Vorwärtsproblems mittels

$$u_s^{approx}(\xi) = -k^2 \int\limits_{B_R(0)} G(k\|\xi - y\|)\phi^{approx}(y)dy, \quad \xi \in B_R(0). \tag{3.33}$$

An dieser Stelle sei der Unterschied zwischen den Daten $u_s(x')$, $x' \in \Gamma = R\mathcal{S}^1$ und $u_s^{approx}(\xi, R; k)$, $\xi \in B_R(0)$, $R > 0$ zu beachten.
Bevor auf die analytische Bestimmung der Objektfunktion näher eingegangen wird, wird an dieser Stelle ein Verfahren zur Bestimmung von u_s^{approx} dargelegt.
Entwicklung der Hankel-Funktion nach Lemma 2.14 liefert eine analytische Darstellung für das innere Streufeld. Man stellt fest, daß sich dieses wiederum als eine Reihe über die Fourier-Koeffizienten der äquivalenten Quellen bestimmen lassen. Da aber die Konvergenz dieser Reihe sehr langsam sein kann, empfiehlt es sich, zur

Bestimmung dieses Integrals die Projektionsmethode zu verwenden. Die Projektionsmethode führt schließlich auf eine Matrix-Vektor-Multiplikation bei der praktischen Anwendung. Da bei der Bestimmung des inneren Streufeldes der Meßpunkt nicht auf Γ beziehungsweise auf $R\mathcal{S}^1$ liegt, sondern im Innern des Kreises $B_R(0)$, weist die Greensche Funktion eine logarithmische Singularität bei $\xi = y$ auf. Hierzu zerlege man das *schwachsinguläre* Integral in ein reguläres Integral über das Gebiet $B_R(0) \setminus B_\epsilon(y)$ und ein singuläres Integral über den Kreis $B_\epsilon(y)$ mit Radius ϵ und dem Mittelpunkt y, wobei $\|\xi - y\| =: r_\epsilon < \epsilon$.

$$
\begin{aligned}
u_s^{approx}(\xi) \quad = \quad & - k^2 \underbrace{\int\limits_{B_R(0)\setminus B_\epsilon(y)} G(k\|\xi - y\|)\phi^{approx}(y)dy}_{I_1} \\
& - k^2 \underbrace{\int\limits_{B_\epsilon(y)} G(k\|\xi - y\|)\phi^{approx}(y)dy}_{I_2}, \ \xi \in B_R(0).
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Eigenschaften der Hankel-Funktion der Ordnung Null für kleine Argumente (vgl. Anhang (A.16)) kann das singuläre Integral analytisch abgeschätzt werden. Um die relativ aufwendige numerische Integration bei der Bestimmung der Matrixelemente zu vermeiden, werden stückweise konstante Basisfunktionen und Testfunktionen festgelegt. Ferner kann bei hinreichend feiner Diskretisierung der Integrand im Integral I_1 innerhalb eines Segments ebenfalls als konstant angesehen werden. Die Segmente und Basisfunktionen werden derart gewählt, daß deren Zentren mit den Stützstellen zusammen fallen. Hierbei bewährte sich Einsatz "versetzter" Basisfunktion[9]. Das Integral I_2 erhält man nach Einsetzen der asymptotischen Entwicklung der Hankel-Funktion und Integration unter der Annahme, daß die äquivalente Quelle auf beliebig kleinen Teilsegmenten konstant ist.
Insgesamt erhält man eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\cdots,M}$ gemäß

$$
a_{i,j} \quad = \quad \begin{cases} -k^2 h_{y_1} h_{y_2} G(k\|\xi_j - y_i\|), & i \neq j \\ \\ -k^2\pi\epsilon^2 + i\{2k^2\epsilon^2\gamma + 4k^4\epsilon^2 ln(\frac{k\epsilon}{2}) - k^4\epsilon^2\}, & i = j \end{cases}
$$

Hierbei bezeichnet γ die Eulerzahl, und ϵ sei so gewählt, daß $k\epsilon \ll 1$ gilt. Diese Matrix angewandt auf den Vektor $f_i = \phi^{approx}(y_{1i}, y_{2i})$ liefert das innere Streufeld

[9]Der Einsatz "versetzter" Basisfunktionen geschieht analog der Wahl der *Skalierungsfunktionen* bei der Darstellung der *Wavelets* (vgl. [Lo/Ma/Ri 94]).

$g_j = u_s^{approx}(\xi_{1j}, \xi_{2j})$ als $g = Af$.
Bei der Verfeinerung der Diskretisierung ist zu beachten, daß die Singularität nicht überwiegen darf, so daß dadurch die Näherung schlechter werden kann. Ferner kann bei der numerischen Auswertung die Symmetrie der Matrix ausgenutzt werden, um Speicherplatz und Zeit zu ersparen.

Mit diesem Wert kann die Objektfunktion wie folgt berechnet werden

$$\mathcal{O}(\xi) = \frac{\phi^{approx}(\xi)}{u_i(\xi) + u_s^{approx}(\xi)} \quad \text{für} \quad \xi \in B_R(0). \tag{3.34}$$

Bei den obigen Berechnungen entstehen *zwei* Probleme. Erstens ist die Division instabil, und es können Probleme durch die Nullstellen der Funktion u entstehen. Zweitens haben die Erfahrungen - nicht nur im Zusammenhang mit der inversen Streutheorie - gezeigt, daß es nicht genügt, für eine "gute" Rekonstruktion eine einzige Richtung zu berücksichtigen.
Diese werden im folgenden zusammen betrachtet. Da die Rekonstruktion für eine Richtung aufgrund der Unvollständigkeit der Eigenfunktion-Entwicklung (durch Abschneiden) nur mäßigen Erfolg hat, ist es günstiger, diese Unvollständigkeit durch die Integration über die Einfallsrichtung und damit über den Einfallswinkel zu beseitigen. Genau dies kann als Ausweg von den beiden oben genannten Punkten betrachtet werden.
Erinnert man sich, daß sowohl das einfallende Feld als auch das Gesamtfeld von der Einfallsrichtung $\alpha \in \mathcal{S}^1$ abhängig sind, so kann eine kontinuierliche Variation des Einfallwinkels auf einer Seite zu zusätzlichen Informationen über das zu rekonstruierende Objekt und auf der anderen Seite zur weitgehenden Vermeidung der Instabilität numerischer Probleme durch die Nullstellen von u führen.
Es gilt:

$$S : L_2(\mathcal{S}^1 \times B_R(0)) \to L_2(\mathcal{S}^1 \times R\mathcal{S}^1) \tag{3.35}$$

und in den praktischen Fällen

$$S : L_2(\mathcal{S}^1 \times B_R(0)) \to \underbrace{\mathbb{C}^2 \times \cdots \times \mathbb{C}^2}_{J-\text{mal}} \tag{3.36}$$

mit der Indexmenge $\mathcal{J} = \{1, \cdots, J\}$ Anzahl der einfallenden und gemessenen Richtungen. Und damit

$$\phi^{approx}(\xi) = \phi^{approx}(\alpha, \xi, R; k) \tag{3.37}$$

und

$$u^{approx}(\xi) = u^{approx}(\alpha, \xi, R; k) = u_i(\alpha, \xi) + u_s^{approx}(\alpha, \xi, R; k), \tag{3.38}$$

wobei mit der Betonung der Wellenzahl k die Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter γ mit der speziellen Wahl $\gamma = q|k|,\ q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ verdeutlicht wird.
Da die Objektfunktion von dem Parameter - α - unabhängig ist, ergibt sich bei der Variation

$$\mathcal{O}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{S}^1} \frac{\phi^{approx}(\alpha, \xi, R; k)}{u^{approx}(\alpha, \xi, R; k)}\, d\sigma_\alpha \quad \text{für } \xi \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^2. \tag{3.39}$$

Hier ist allerdings nun die Bestimmung des "approximierten" Feldes u^{approx} für alle Einfallsrichtungen notwendig, was jedoch keinen zusätzlichen Aufwand fordert, wenn man das Huygenssche Prinzip verwendet, wobei für u_i sowohl die analytische Darstellung als auch die *Jacobi-Anger-Entwicklung* eingesetzt werden können. Gilt $u = 0$, so empfiehlt es sich, statt des Mittelwertes des Quotienten in dem Punkt ξ den Quotienten aus den Mittelwerten zu berücksichtigen.
Beachtet man nach den obigen Ausführungen die Gleichung (3.37) mit der Wahl des Regularisierungsparameters $\gamma = q|k|$, so stellt man fest, daß Änderungen des Regularisierungsparameters und damit Variationen der Kreisfrequenz ebenfalls zur weiterer Informationsbeschaffung dienen können. Denn je nach Anwendungsgebiet hat man aus der Praxis Erfahrungswerte für die Wellenzahl k. Das heißt für k und damit gewähltem Regularisierungsparameter $\gamma \in I \subset \mathbb{R}$ könnte man analog oder sogar zusätzlich zur Gleichung (3.39) folgende Gleichung

$$\mathcal{O}(\xi) = \frac{1}{|I|}\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_I \int\limits_{\mathcal{S}^1} \frac{\phi^{approx}(\alpha, \xi, R; \gamma)}{u^{approx}(\alpha, \xi, R; \gamma)} d\sigma_\alpha\, d\gamma \tag{3.40}$$

erhalten (vgl. *angular und frequency diversity* [La 87]). Es ist zu bemerken, daß die Variation der Wellenzahl für das ursprüngliche Problem nur für ein paar Werte der Wellenzahl von Vorteil und effizient sein kann, denn die Integration kann für ein beliebig großes Intervall der Wellenzahlen sehr aufwendig sein. Der Grund hierfür ist, daß für das inverse Streuproblem in mehr als einer Dimension eine Aufspaltung der Terme in ein Produkt von rein zeitlichen und rein ortsabhängigen Funktionen <u>nicht</u> möglich ist, da die räumliche Verteilung der äquivalenten Quellen ϕ und damit die der Objektfunktion $\mathcal{O}$ im allgemeinen von der Wellenlänge des einfallenden Feldes abhängt.

Ferner ist es interessant zu untersuchen, wie sich das Objekt bestimmen läßt, wenn es der Bedingung der Born-Approximation genügt.
Mit der Born-Approximation gilt für die äquivalente Quelle folgender Ansatz:

$$\phi(\alpha,\xi) \quad = \quad \mathcal{O}(\xi)\; e^{ik<\alpha,\xi>}.$$

Integriert man die obige Gleichung bezüglich α auf $\mathcal{S}^1$, so gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{S}^1} \phi(\alpha,\xi) d\sigma_\alpha &= \mathcal{O}(\xi) \int\limits_{\mathcal{S}^1} e^{ik<\alpha,\xi>} d\sigma_\alpha \\ &= \mathcal{O}(\xi) \int\limits_0^{2\pi} e^{ikR_\xi \cos\beta} d\beta,\end{aligned}$$

wobei $R_\xi = \|\xi\|^2$ und β der Winkel zwischen α und ξ bezeichnen. Mit der *Hansenschen* Darstellung der Bessel-Funktionen der Ordnung Null gilt:

$$\int\limits_{\mathcal{S}^1} \phi(\alpha,\xi) d\sigma_\alpha \quad = \quad \mathcal{O}(\xi)\; 2\pi\; J_0(kR_\xi).$$

Die Objektfunktion ergibt sich hiermit zu

$$\mathcal{O}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{J_0(kR_\xi)} \int\limits_{\mathcal{S}^1} \phi(\alpha,\xi) d\sigma_\alpha.$$

Setzt man nun die Darstellung der äquivalenten Quelle aus der Gleichung (3.30) unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Daten von der Einfallsrichtung α ein, so gilt für die Objektfunktion

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\xi) &= i\frac{2\overline{k^2}}{|k^2|^2\pi}\frac{1}{J_0(kR_\xi)}\overline{\mathcal{H}_0 E(kR;q|k|)} \sum_{\mu\in\boldsymbol{Z}} \frac{\overline{H_\mu^{(1)}(kR)}\,\overline{J_\mu(kR_\xi)}}{|H_\mu^{(1)}(kR)|^2 I_\mu^{(1)}(kR)} \\ &\quad \cdot Y_\mu(\omega(\theta_\xi)) \int\limits_{\mathcal{S}^1} \tilde{u}_{s,\mu}(\alpha,R) d\sigma_\alpha. \qquad (3.41)\end{aligned}$$

Sind die Daten gegeben, so ersieht man, daß tatsächlich der Mittelwert der Fourier-Koeffizienten der Daten zur Rekonstruktion des Objekts hinzugezogen werden. Diese Resultate werden nun zur praktischen Realisierung der Methode im nächsten Kapitel angewandt.

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden einige Ergebnisse der numerischen Anwendung der in dieser Arbeit vorgestellten Lösungsmethode dargelegt und diskutiert. Der Algorithmus wird sowohl an analytisch vorgegebenen, als auch an simulierten Daten getestet. Es werden verschiedene Objekte betrachtet, sowohl homogene, als auch inhomogene Objekte mit schwacher und starker Streuung.

Zu Beginn des Kapitels wird der Algorithmus zur Rekonstruktion eines Objekts aus den gestreuten Daten angegeben, unabhängig davon, ob es sich dabei um Fern- oder Nahfelddaten, simulierten oder experimentell gemessenen Daten handelt. Dann werden einige Punkte, die allgemein bei der numerischen Realisierung der in dieser Arbeit vorgestellten Methode zur Lösung des inversen Mediumproblems zu berücksichtigen sind, erwähnt. Hierauf folgen einige Rekonstruktionsbeispiele.

Zur Rekonstruktion eines homogenen oder inhomogenen Streuers $\mathcal{O}$ aus den gegebenen Daten u_s kann die Anwendung der approximativen Inversen schematisch wie folgt angegeben werden:

Algorithmus:

1. Wahl des Regularisierungsparameters γ und eines Mollifiers E_γ.
2. Berechnung der Hankel-Transformation der Ordnung Null $\mathcal{H}_0 E_\gamma$ des Mollifiers.
3. Bestimmung des Abschneide-Index $\tilde{\mu}$ in Abhängigkeit der Wellenzahl des einfallenden Feldes und eines vorgegebenen Detektorradius $0 < R \ll \infty$.

4. Berechnung des Rekonstruktionkerns ψ_γ.

5. Bestimmung der äquivalenten Quelle ϕ_γ.

6. Bestimmung des inneren Streufeldes u_s^{approx}.

7. Berechnung der Objektfunktion $\mathcal{O}$.

Bemerkung 4.1 *Die Punkte 1) bis 4) können zu einem "früheren" Zeitpunkt als die Rekonstruktion des Objekts ausgeführt werden, das heißt außer Kenntnis der Wellenzahl k und des Detektorradius R werden sonst keine anderen Informationen über die Daten benötigt.*
Desweiteren kann die Bestimmung der äquivalenten Quellen für gegebene Daten aus verschiedenen Richtungen parallel erfolgen.

Probleme, die bei den praxisrelevanten Anwendungen auftreten, sind Abweichungen zwischen Theorie und Experiment bei der Verwendung experimenteller Daten, denn:

- Das Gesamtfeld $u = u(\alpha, x, \omega)$ und das einfallende Feld $u_i = u_i(\alpha, x, \omega)$ sind bei der Messung zwei unabhängige Größen und weisen daher sowohl zeitliche als auch räumliche Verschiebungen auf. Dies bedeutet, daß die Differenz $u - u_i \neq u_s$ sein kann.

- Bei der Verwendung von Ultraschall-Daten zum Beispiel gilt, daß das Experiment auf Schalldruck p basiert, während die Theorie (mathematische Behandlung) des Streuproblems auf der orts- und zeitabhängigen Größe u basiert.

- Bei den experimentellen Durchführungen können ungleichmäßige Verteilungen der Meßwinkel vorliegen.

- Bei den theoretischen Untersuchungen ist meistens aus Gründen der Einfachheit die Dämpfung außer Betracht gelassen. Desweiteren basiert die Theorie auf Anregung mit ebenen Wellen.

- Der "Vorwärtslöser" ist bei der Anwendung der in dieser Arbeit vorgestellten Lösungsmethode völlig entkoppelt von dem "inversen Löser".

- **Kalibrierung:**
  Handelt es sich um experimentelle Untersuchungen, so ist eine Eichung des Meßsystems unbedingt erforderlich, um systembedingte Fehler möglichst klein zu halten, da diese die Abbildungsresultate beeinflußen können (vgl. [Lob 96]).

Einfluß von Rauschen:

Aufgrund der oben genannten Punkten erhält man statt $u_{s,n}$ im diskreten Fall ein zusätzlich gestörtes Feld $u^{\epsilon}_{s,n}$. Diese gestörten Daten verursachen eine gestörte Abbildung $\mathcal{O}^{\epsilon}_{n}$. Die wichtigste Frage lautet dann, wie empfindlich $\mathcal{O}^{\epsilon}_{n}$ auf Variationen des Signal-Rausch-Verhältnisses (SNR) reagiert? Denn $u^{\epsilon}_{s,n} := u_{s,n} + \epsilon$, wobei ϵ von der Richtung des einfallenden Feldes und von der Feinheit der Diskretisierung abhängen kann. Der Einfluß des Datenfehlers auf die äquivalenten Quellen kann aus Satz 3.16 entnommen werden. Für schwache Streuer sind die Abbildungsverfahren empfindlicher, da für derartige Streuer das Streufeld per Definition sehr viel kleiner als das Gesamtfeld ist, welches in die Berechnung des Signal-Rausch-Verhältnisses eingeht.
Ferner ist bei einer Messung die Abhängigkeit des Feldes von der Frequenz zu berücksichtigen. Systembedingt kann es hierbei zu einer Einschränkung des Frequenz-Intervalls kommen. Ähnlich kann es auch aufgrund der Meßgeometrie (vgl. Kapitel 2.1) zu einer Ortsbegrenzung kommen. Dies hat zur Folge, daß der Sender und der Detektor nicht unter gleichen Winkeln arbeiten können. Desweiteren kann dichtere Anzahl der Messungen auf einer begrenzten Messoberfläche zu linearen Abhängigkeiten der Meßpunkte führen.

Desweiteren hängt ja die Qualität eines bildgebenden Verfahrens von der Auflösungsgrenze ab. Hierauf wird auch in den nachstehenden numerischen Beispielen eingegangen. Der Kontrast zwischen zwei Punkten hängt von der Wellenzahl und der Wellenlänge der eingesetzten Wellenarten ab.

In den folgenden numerischen Beispielen wurde eine diskrete Version des obigen Algorithmus benutzt. Es wurde bei allen Beispielen angenommen, daß der Träger des unbekannten Streuers vollständig innerhalb eines Testquadrats mit bekannter Dimension und Eigenschaften eingebettet ist. Die Position des tatsächlichen Streuers ist bestimmt als der von Null verschiedenen Träger des rekonstruierten Kontrastes. Die Berechnungen wurden auf einem *Silicon Graphics Challenge* Rechner durchgeführt.

Komplexität des Algorithmus:

Bezeichnet man wieder mit J die Anzahl der einfallenden Wellen und mit N die Feinheit der Gitterdiskretisierung von Ω in x_1- beziehungsweise x_2-Richtung, so benötigt der Algorithmus zur Bestimmung einer Lösung $\mathcal{O}$, also Bestimmung der äquivalenten Quellen, des inneren Streufeldes und der Division gemäß (3.34),

$O(\tilde{N}^2)$ Operationen für $\tilde{N} = N \times N$. Für verschiedene Richtungen erhält man dann insgesamt eine Komplexität von $O(J\tilde{N}^2)$ Operationen. Vergleicht man diese Methode mit Verfahren, bei denen man auf Lösung von Gleichungssystemen - mit der Komplexität $O(\tilde{N}^3)$ Operationen - zur Bestimmung des Objekts angewiesen ist, so ersieht man, daß dieser Algorithmus mit wesentlich geringerem Aufwand durchgeführt werden kann.

In dieser Arbeit wurden Rekonstruktionsbeispiele anhand analytisch vorgegebener Daten gemäß Anhang C und simulierten Daten berechnet. Die simulierten Daten sind durch Lösen des direkten Problems mit Hilfe der stabilisierten CG-Methode (vgl. [Lo2 89]) nach Diskretisierung der Lippmann-Schwinger-Integralgleichung bestimmt worden, da die Konvergenz der CG-Methode in einer endlichen Anzahl von Iterationsschritten sichergestellt ist. Ferner wurde eine Erhöhung der Konvergenz-Geschwindigkeit durch geeignete Vorkonditionierung erreicht. Dieser Vorwärtslöser ist mit einem Residualfehler der Größe $\epsilon = 10^{-6}$ berechnet worden.

Zur Verbesserung des Kontrasts bei der Abbildung bewährt sich die Gewichtung der Objektfunktion mit einer Gewichtsfunktion bei der Überlagerung, das heißt Rekonstruktion aus verschiedenen Richtungen, gemäß folgender Gleichung:

$$\mathcal{O}(\xi) = \mathcal{O}(\xi)\ w(\rho, R) \ \text{ für } \ \rho \to 0,\ \xi \in B_R(0), \tag{4.1}$$

unter der Voraussetzung, daß der Streuer den Nullpunkt enthält. Dies bedeutet, daß das Verschwommensein des Objekts sich durch Ausnutzung der *a priori* Information, $\mathcal{O}(x) \equiv 0$ für alle $x \notin \Omega_{sc}$ mit $0 \in \Omega_{sc}$ beheben läßt, indem eine Mittelwertkorrektur durch eine Wichtung durchgeführt wird. Betrachtet man die Wahl des Mollifiers und die Bestimmung des Rekonstruktionskerns mit Hilfe der Singulärwertzerlegung des Streuoperators, so stellt man fest, daß der Mollifier einer "Mittelwert-Bedingung" $\int\limits_{\Omega} E_\gamma(y)dy \stackrel{!}{=} 1$ genügen soll, während es an den Rekonstruktionskern keine derartige Bedingungen gestellt sind (vgl. [Lo 98]). Eine Normierungsbedingung an den Rekonstruktionskern wurde bei der Wahl der Gewichte $w(\rho, R)$ als sehr hilfreich festgestellt. In Abhängigkeit der Auflösung bei dem jeweiligen Beispiel wurde das Gewicht $w(\rho, R) = \|\psi\|_{L_2(B_R(0))}$ gewählt.

Es wurden folgende Parameter gewählt:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \lambda = 0.9 \tag{4.2}$$

$$\gamma = q\ k,\ \ q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \tag{4.3}$$

$$R \;=\; 2\lambda \tag{4.4}$$

Bemerkung: Für die nachstehenden Beispiele wurden die Rekonstruktionskerne entsprechend den gegebenen Daten berechnet, das heißt die Anzahl der Daten, also die Dimension des Datenraumes und Anzahl der Richtungen können jedem Beispiel entnommen werden.

Rekonstruktion aus analytisch vorgegebenen Daten:

Das zu betrachtende Objekt ist eine Kreisscheibe mit Radius $a = 1\lambda$ (vgl. Abbildungen (C.1) und (C.2)) und

$$\mathcal{O}(r) = \begin{cases} 1.73 & \text{für} \quad r \leq a \\ 0 & \text{für} \quad r > a \end{cases} .$$

Zur Bestimmung dieses Objekts anhand analytisch vorgegebenen Daten, sowohl für Nah- als auch für Fernfelddaten, wurden Gleichungen (C.2) und (C.6) verwendet. Die Reihen in diesen Gleichungen sind bis zu einem Index $n = 12$ berechnet worden. Bei den Nahfelddaten beträgt der Detektorradius $R = 2\lambda$. Die Rekonstruktion erfolgte für eine Auflösung $N = 40$, welche einer diskreten Feinheit von $\frac{1}{10}\lambda$ entspricht, bei einer kreisförmigen Meßanordnung für 45 Richtungen. Aufgrund der *a priori* Informationen (in diesem Fall, bekannten Eigenschaften) über das zu rekonstruierenden Objekt wurde das Gewicht $w(\rho, R) = 5\lambda = \|\psi\|_{L_2(B_R(0))}$ gewählt für $0 < \rho \leq 1.3\lambda < R$. Die Bilder 4.1 und 4.2 zeigen die Rekonstruktionen des obigen Objekts aus den Fern- beziehungsweise Nahfelddaten. Die Rekonstruktionszeit betrug 8 Sekunden für eine Richtung und damit 6 Minuten für insgesamt 45 Richtungen.
Bei den Beispielen in den Bildern 4.3 - 4.5 wurde versucht, das gleiche Objekt mit einer Auflösung $1/12\lambda$, das heißt $N = 50$ und der Anzahl der Richtungen $J = 30$ zu rekonstruieren. Bei diesen Parametern hat sich die Wahl beziehungsweise die Variation des Regularisierungsparameters γ bei der Rekonstruktion bewährt. Alle drei Rekonstruktionen erfolgten aus den Nahfelddaten. Es wurde ein Gewicht $w(\rho, R) = 10\lambda = 2\|\psi\|_{L_2(B_R(0))}$ gewählt. Für die Auflösung $N = 50$ wurde für die Rekonstruktion 90 Sekunden pro Richtung benötigt. Und damit dauerte die Rechnung für 30 verschiedene Richtungen 45 Minuten.

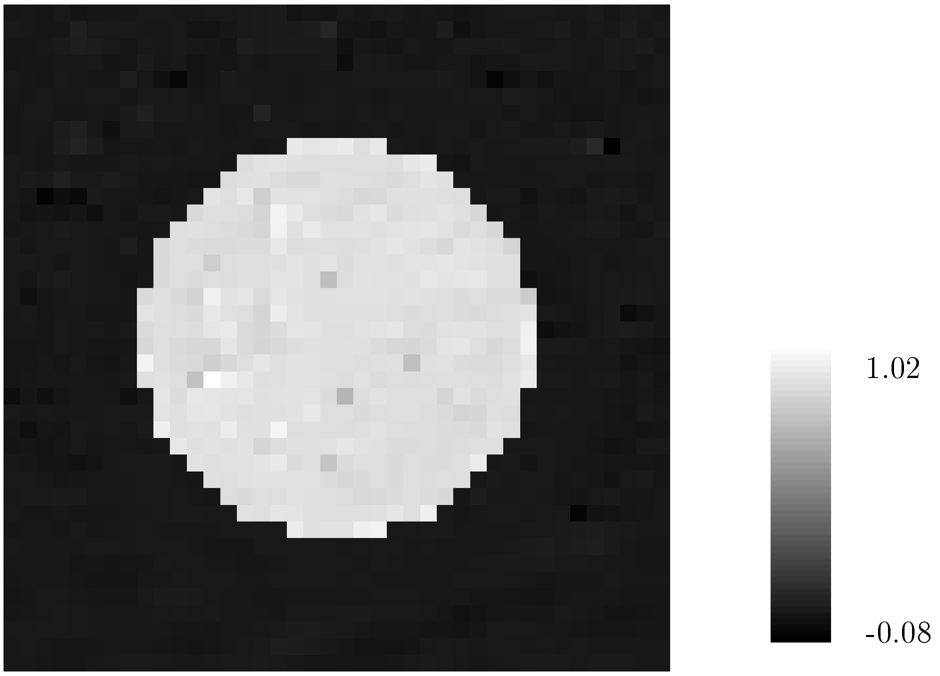

Abbildung 4.1: Rekonstruktion aus den Fernfelddaten

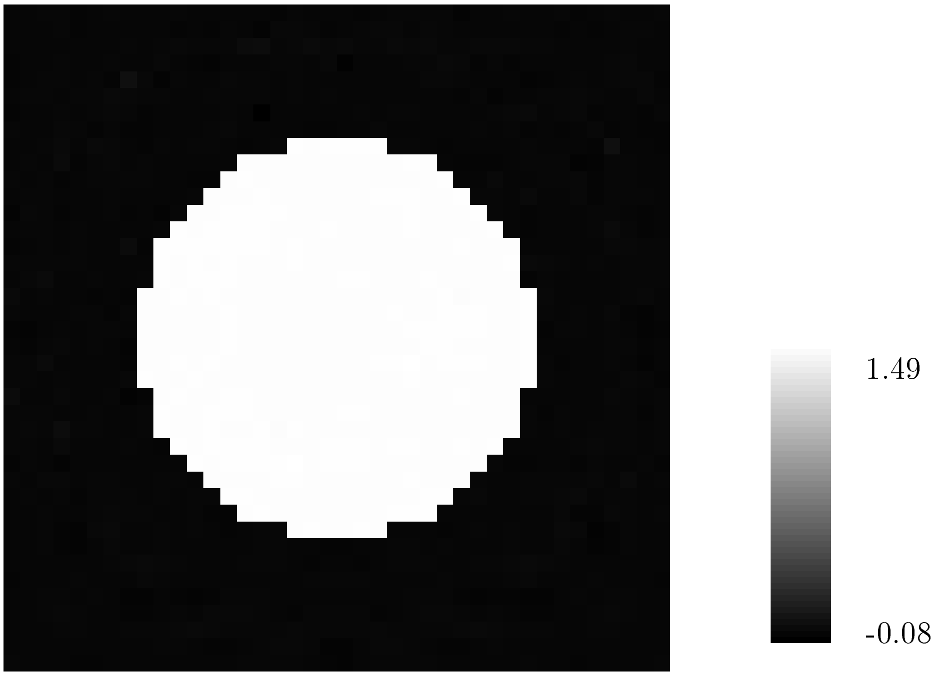

Abbildung 4.2: Rekonstruktion aus den Nahfelddaten

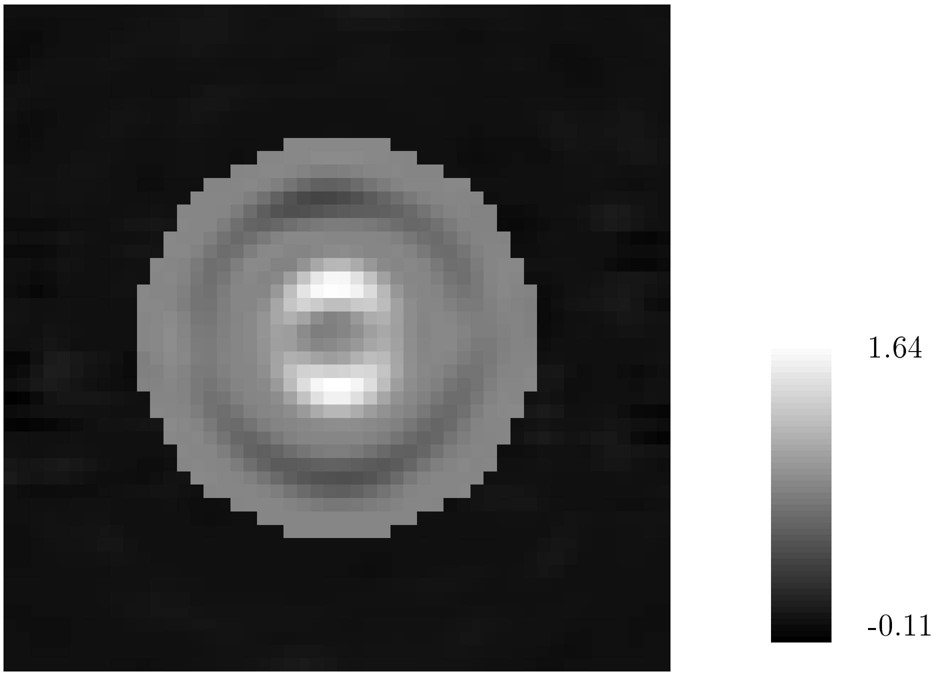

Abbildung 4.3: Rekonstruktion aus den Nahfelddaten, $\gamma = k$

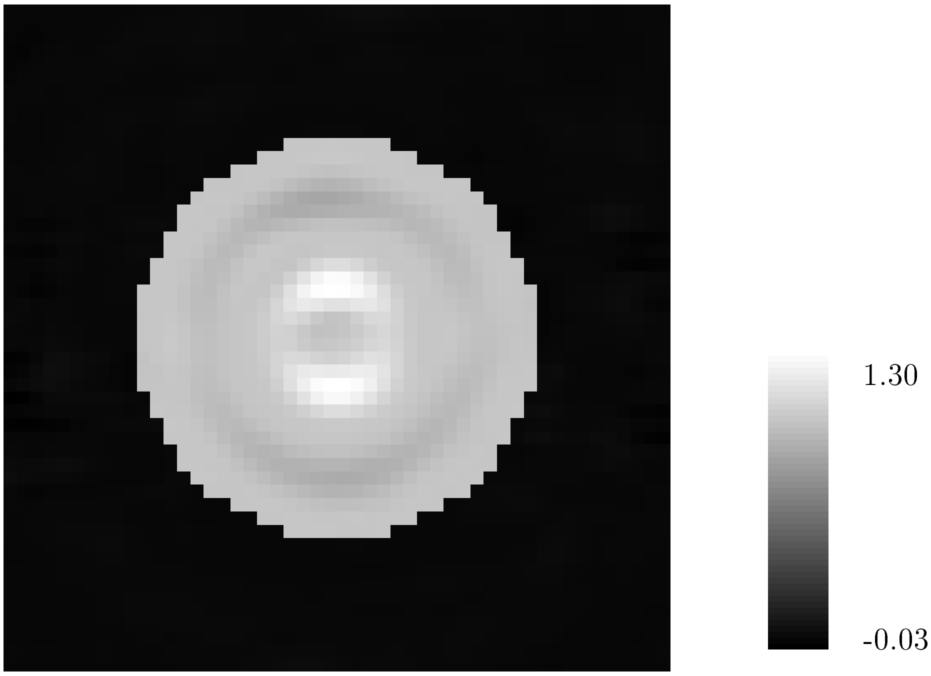

Abbildung 4.4: Rekonstruktion aus den Nahfelddaten, $\gamma = 2k$.

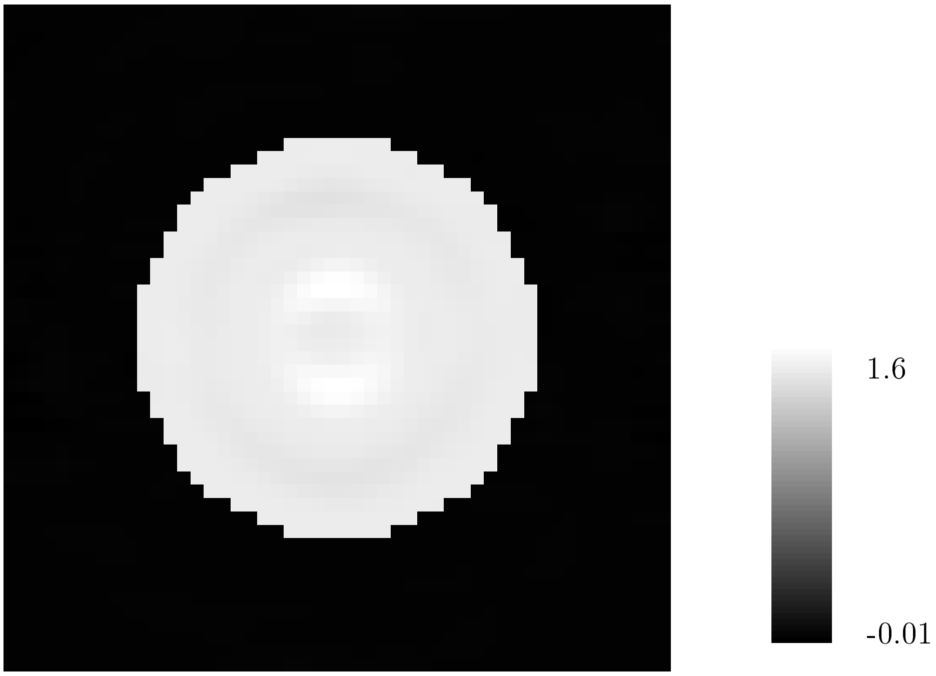

Abbildung 4.5: Rekonstruktion aus den Nahfelddaten, $\gamma = 0.6k$.

Rekonstruktion aus simulierten Daten:

Bei den folgenden Beispielen wurden simulierte Daten zur Rekonstruktion hinzugezogen.

Beispiel 1 :

Das Bild 4.6 zeigt das Originalobjekt (vgl. [Nat/Wu 95]), ein kreisringförmiger reeller **starker** Streuer

$$\mathcal{O}(x) = \Re(\mathcal{O}(x)) = \begin{cases} 1.9 & , \quad \|x - \bar{x}\| \leq 0.09, \ \bar{x} = 1/3 \\ 1.5 & , \quad \|x - \bar{x}\| > 0.4 \text{ und } \|x\| < 1, \ \bar{x} = 1/3 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

mit einer Auflösung $N = 32$, das heißt einer Gitter-Feinheit gleich $1/8\lambda$. Die Rekonstruktion im Bild 4.7 erfolgte aus den simulierten Daten für $J = 40$ verschiedenen Richtungen mit der Wahl des Regularisierungsparameter $\gamma = 2k$ und des Gewichtes $w(\rho, R) = 10\lambda = 2\|\psi\|_{L_2(B_R(0))}$ für $\rho \leq 1.3\lambda$. Bei der Rekonstruktion entstand ein relativer Fehler $\frac{\|\mathcal{O}^{approx} - \mathcal{O}^{exakt}\|_{L_2(B_R(0))}}{\|\mathcal{O}^{exakt}\|_{L_2(B_R(0))}} = 0.51$. Die erforderliche Rechenzeit für eine Richtung betrug 22 Sekunden. Die Rekonstruktion endete nach 14 Minuten für 40 verschiedene Einfallsrichtungen.

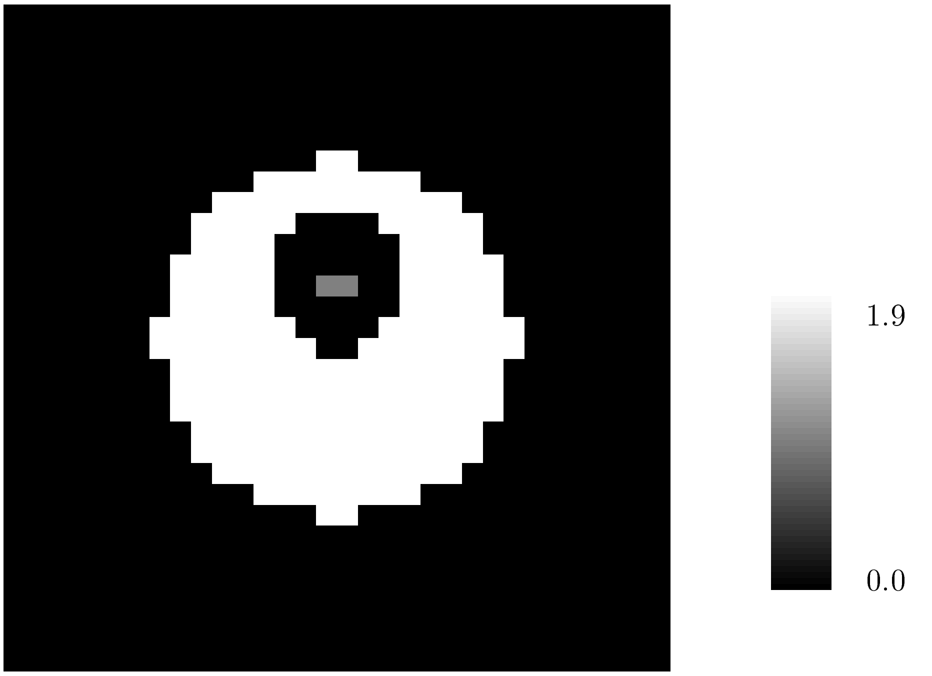

Abbildung 4.6: Das Originalobjekt

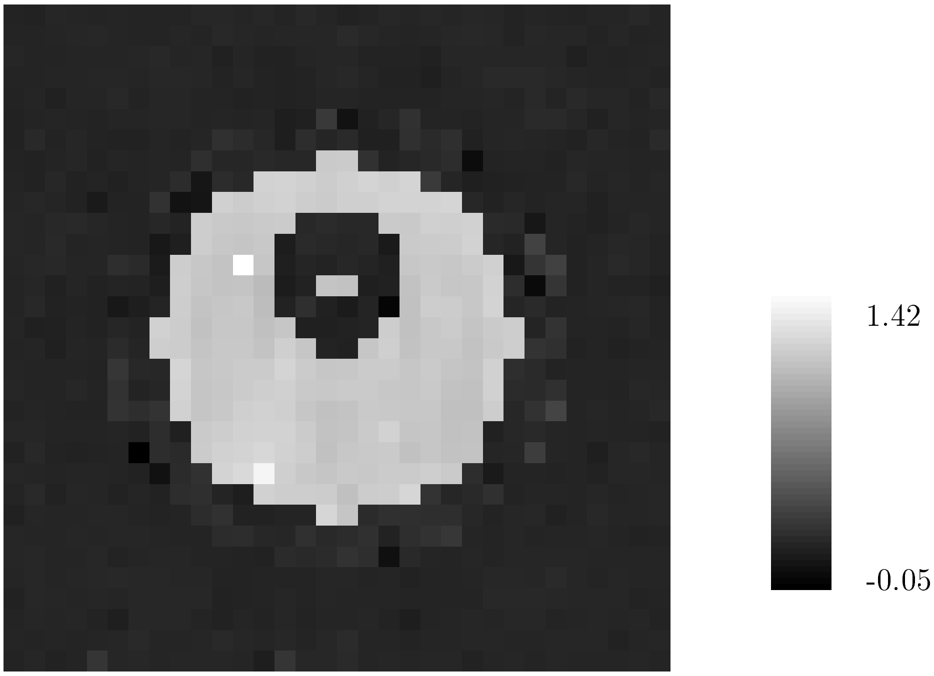

Abbildung 4.7: Rekonstruktion aus den simulierten Nahfelddaten

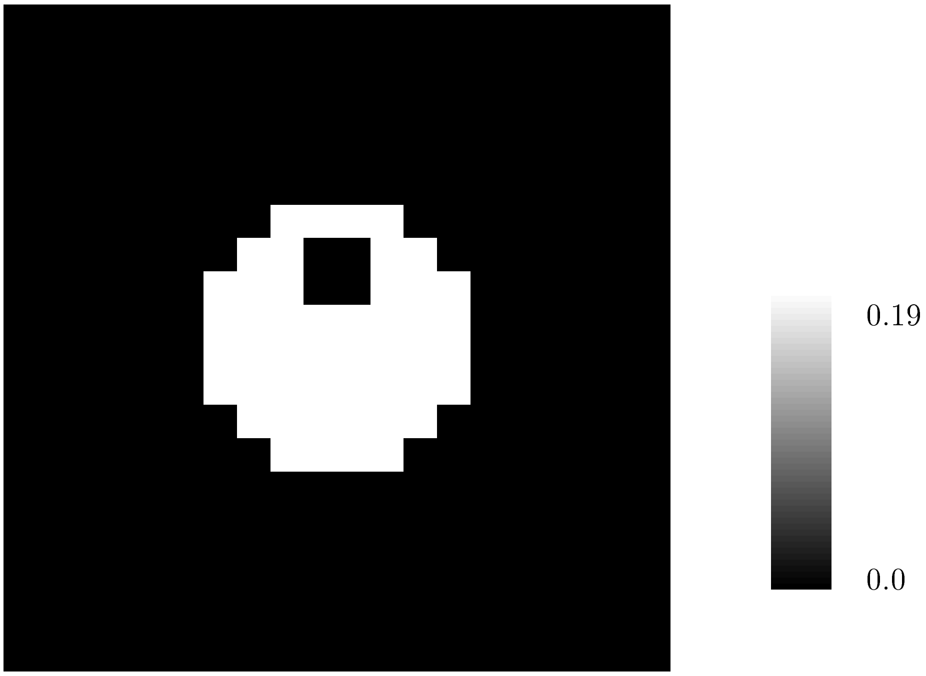

Abbildung 4.8: Das Originalobjekt (Realteil)

Beispiel 2 :

Dieses Beispiel zeigt die Rekonstruktion eines komplexwertigen **schwachen** Streuers

$$\Re(\mathcal{O}(x)) = \begin{cases} 0.19 & , \quad \|x - \bar{x}\| < 0.06 \text{ und } \|x\| < 1,\ \bar{x} = 1/3 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Im(\mathcal{O}(x)) = \begin{cases} 0.1 & , \quad \|x\| \leq 0.5 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Bilder 4.8 und 4.9 zeigen Real- beziehungsweise Imaginärteil des exakten Objekts. Die Rekonstruktion dieses Objekts (Bilder 4.10 und 4.11), aus den simulierten Nahfelddaten, erfolgte für eine Auflösung $N = 20$, also $1/5\lambda$, mit den Daten detektiert an 40 unterschiedlichen Richtungen. Während die Kontur des Objekts relativ gut approximiert wird, entsteht bei der Rekonstruktion eine Lücke, was die Inhomogenität im Innern des Objekts angeht. Vergleicht man dieses Beispiel mit dem vorhergehenden, so ist dieser Mangel auf die geringe Auflösung des Problems zurückzuführen. Bei der Rekonstruktion dieses Objekts entstand ein relativer Fehler $\frac{\|\mathcal{O}^{approx} - \mathcal{O}^{exakt}\|_{L_2(B_R(0))}}{\|\mathcal{O}^{exakt}\|_{L_2(B_R(0))}} = 0.78$. Es wurden das Gewicht $w(\rho, R) = 10\lambda = 2\|\psi\|_{L_2(B_R(0))}$ für $\rho \leq 1.3\lambda$ und der Regularisierungsparameter $\gamma = k$ gewählt. Für diese Auflösung dauerte die Rekonstruktion aus einer Richtung 4 Sekunden und damit 3 Minuten für alle Einfallsrichtungen.

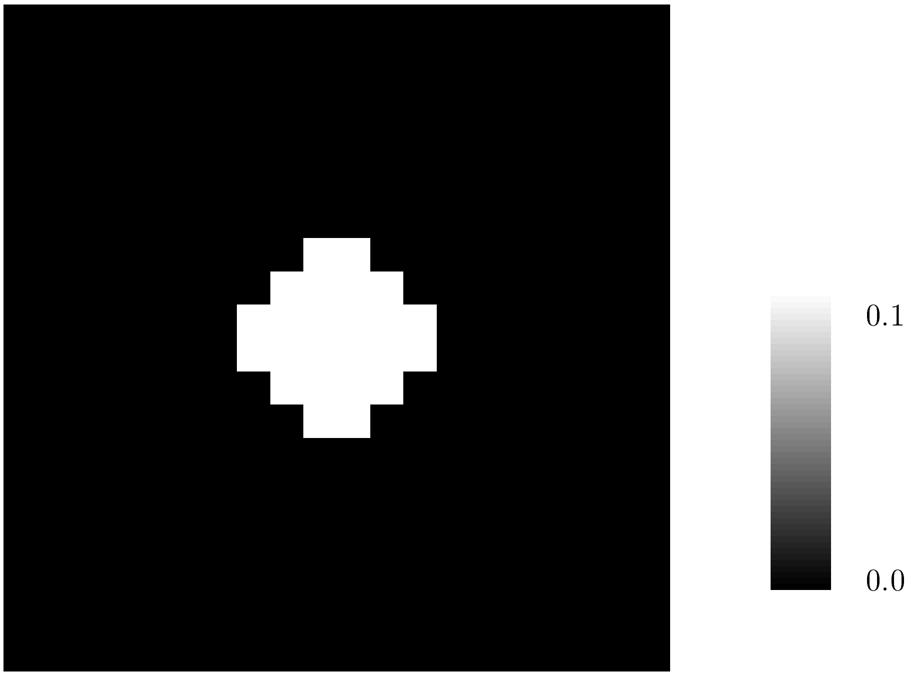

Abbildung 4.9: Das Originalobjekt (Imaginärteil)

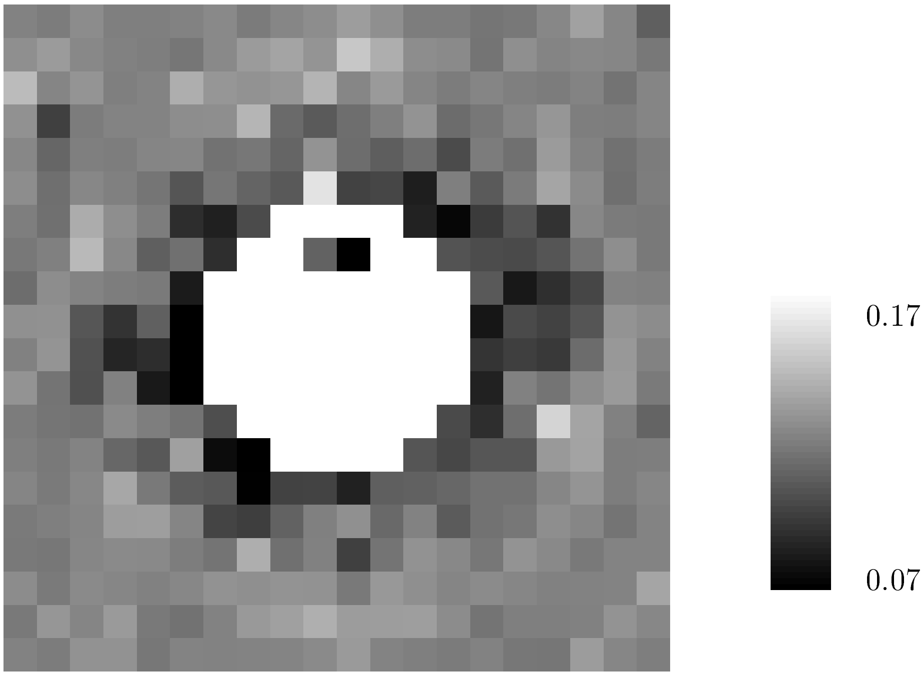

Abbildung 4.10: Rekonstruktion des Realteils

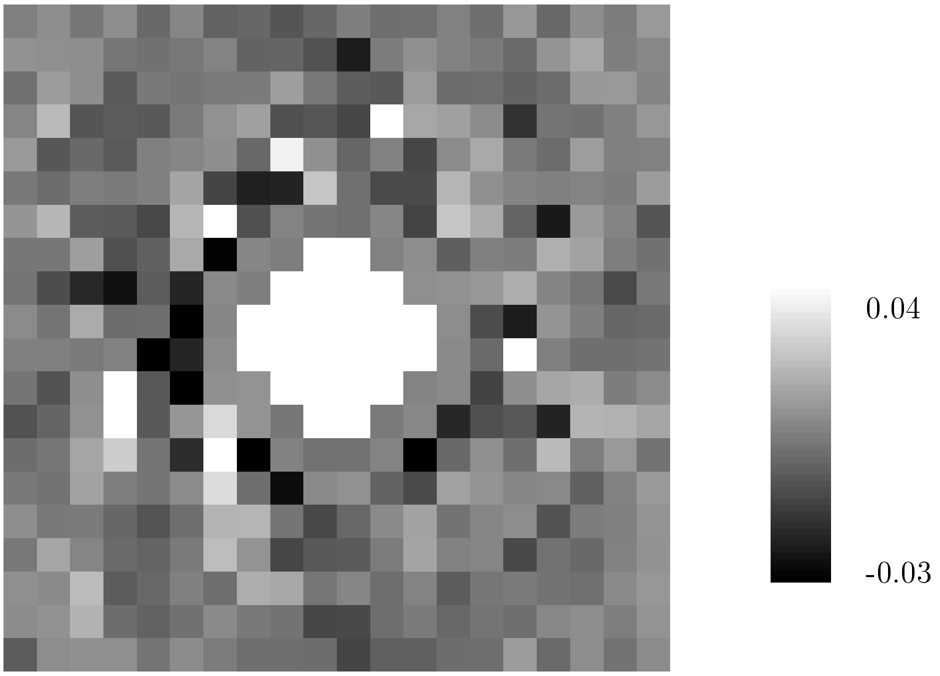

Abbildung 4.11: Rekonstruktion des Imaginärteils

Beispiel 3 :

In diesem Beispiel wird die Rekonstruktion eines schwachen Streuers demonstriert, dessen Realteil aus zwei rechteckigen Objekten (vgl. Bild 4.12) und dessen Imaginärteil aus einer Kreisscheibe (vgl. Bild 4.13) bestehen. Aufgrund der *a priori* Informationen, daß der Realteil des zu rekonstruierenden Objekts den Nullpunkt nicht enthält, kann das Gewicht $w(\rho, R)$ nicht so wie bei den obigen Beispielen gewählt werden. Der Real- und Imaginärteil werden mit zwei Funktionen $w_1 = \|\psi\|_{L_2(B_R(0))}$ und $w_2 = \|\psi\|_{L_2(B_R(0))}$ - in Abhängigkeit der Radien ρ und R - gewichtet. Die Funktion w_2 kann für den Radius ρ wie in den vorangegangenen Beispielen gewählt werden. Die Funktion w_1 wird derart gewählt, daß die rekonstruierten Werte in einem Kreisring, also außerhalb eines Kreises um den Nullpunkt und innerhalb eines Kreises mit dem Radius kleiner als der Detektorradius gewichtet werden. Die Auflösung bei diesem Beispiel beträgt $1/8\lambda$, das heißt $N = 32$ mit $J = 40$ verschiedenen Richtungen. Die Rekonstruktion dauerte 22 Sekunden pro Richtung und damit insgesamt 15 Minuten für alle Richtungen. Die Bilder 4.14 und 4.15 zeigen die Rekonstruktionen.

Abbildung 4.12: Das exakte Objekt (Realteil)

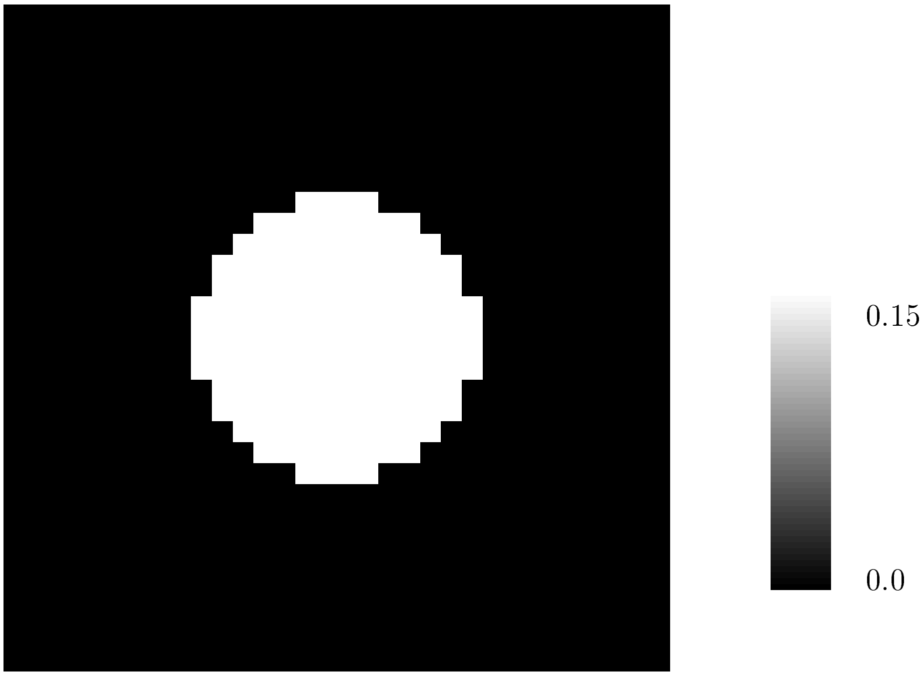

Abbildung 4.13: Das exakte Objekt (Imaginärteil)

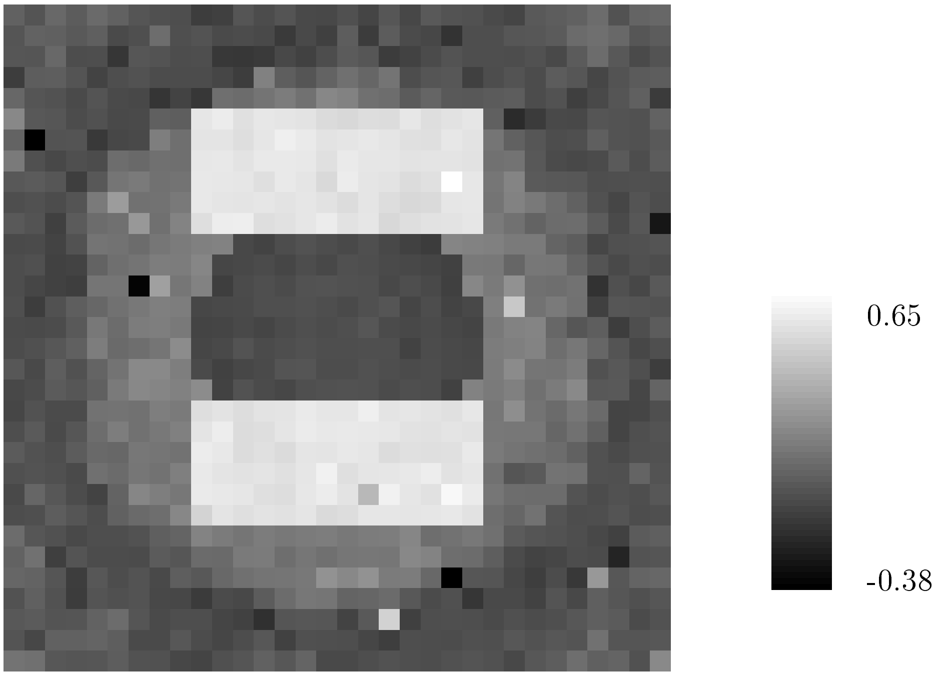

Abbildung 4.14: Rekonstruktion des Realteils

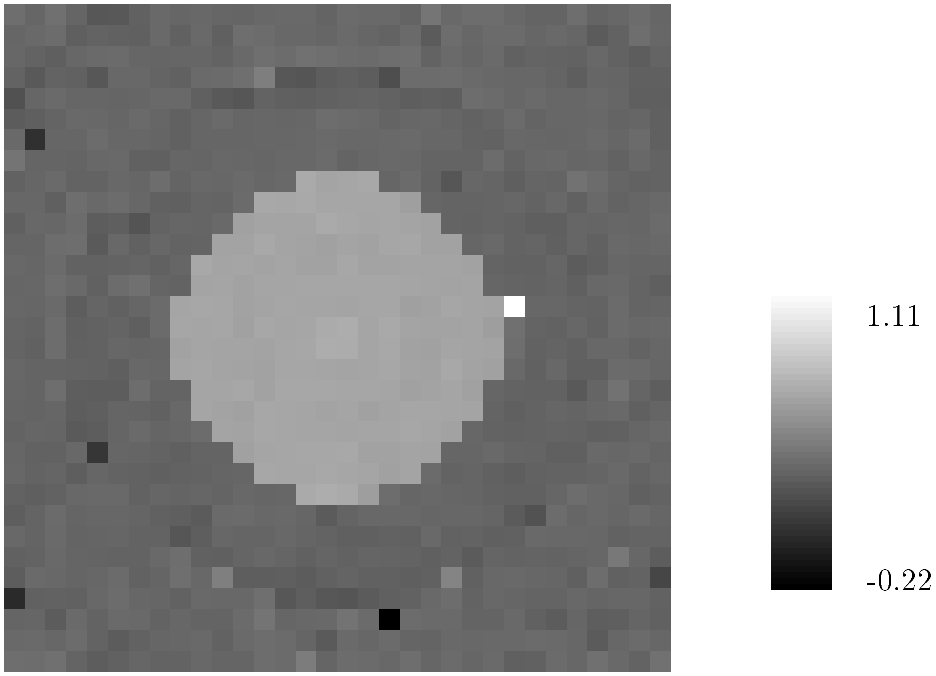

Abbildung 4.15: Rekonstruktion des Imaginärteils

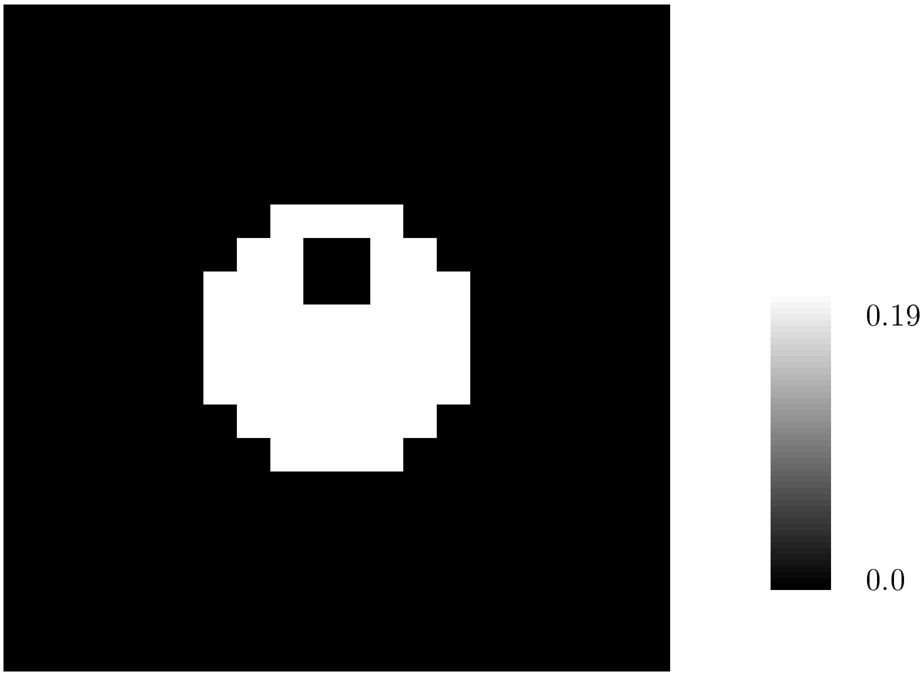

Abbildung 4.16: Das exakte Objekt (Realteil)

Beispiel 4:
Dieses Beispiel versucht ebenfalls einen schwachen Streuer zu rekonstruieren, wobei sowohl der Real- als auch der Imaginärteil des Objekts den Nullpunkt enthalten. Bei diesem Beispiel enthält der Imaginärteil zusätzliche Inhomogenitäten im Innern.

$$\Re(\mathcal{O}(x)) = \begin{cases} 0.19 & , \quad \|x-\bar{x}\| < 0.06 \text{ und } \|x\| < 1, \ \bar{x} = 1/3 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Im(\mathcal{O}(x)) = \begin{cases} 0.1 \ \cos(\frac{\pi x_1}{\lambda})\cos(\frac{\pi x_2}{\lambda}) & , \quad \|x\| \leq 0.5 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Rechenzeit betrug wie bei dem Beispiel 2 für eine Auflösung $N = 20$, entsprechend $1/5\lambda$, 4 Sekunden pro Richtung und 80 Sekunden für alle Einfallsrichtungen. Aufgrund der relativ geringen Auflösung wird bei zusätzlichen Inhomogenitäten im Innern des Objekts keine "gute" Rekonstruktion geliefert. Das Bild 4.19 zeigt die "ungewichtete" Rekonstruktion des Imaginärteils des Objekts. Eine Gewichtung führte zu einer weitgehenden Glättung dieser zusätzlichen Inhomogenitäten, so daß dabei eine Rekonstruktion wie im Bild 4.11, also nur Erkennung der Kontur des Objekts, entstand. Bei diesem und dem hierauf folgenden Beispiel ist es zusätzlich darauf zu achten, daß das zu rekonstruierende Objekt von der Wellenlänge abhängig ist, so daß die Auflösung und damit die Rekonstruktion der Inhomogenitäten innerhalb des Objekts zusätzlich beeinträchtigt sind.

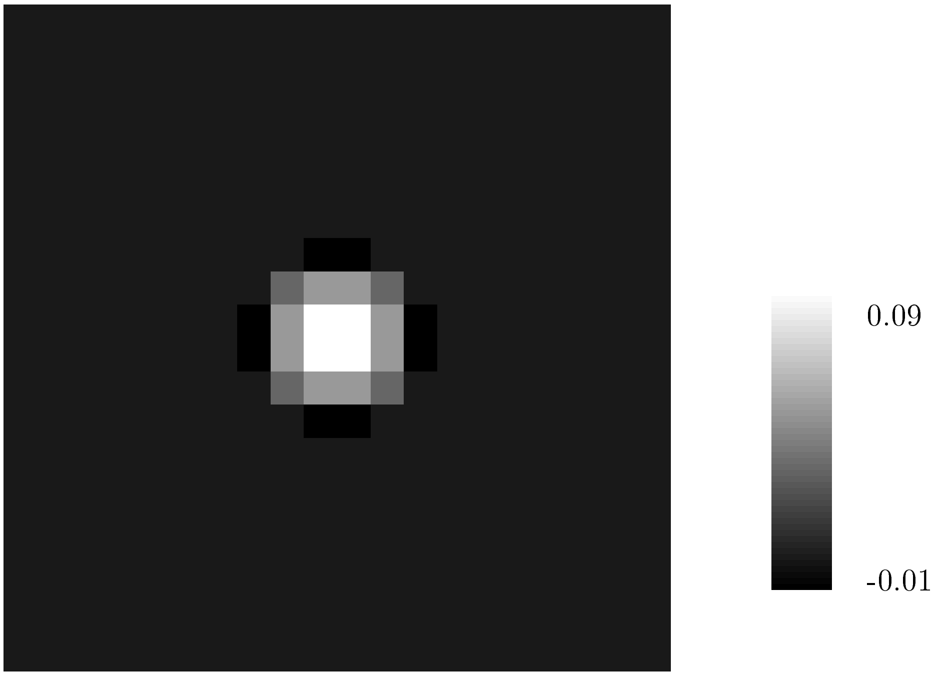

Abbildung 4.17: Das exakte Objekt (Imaginärteil)

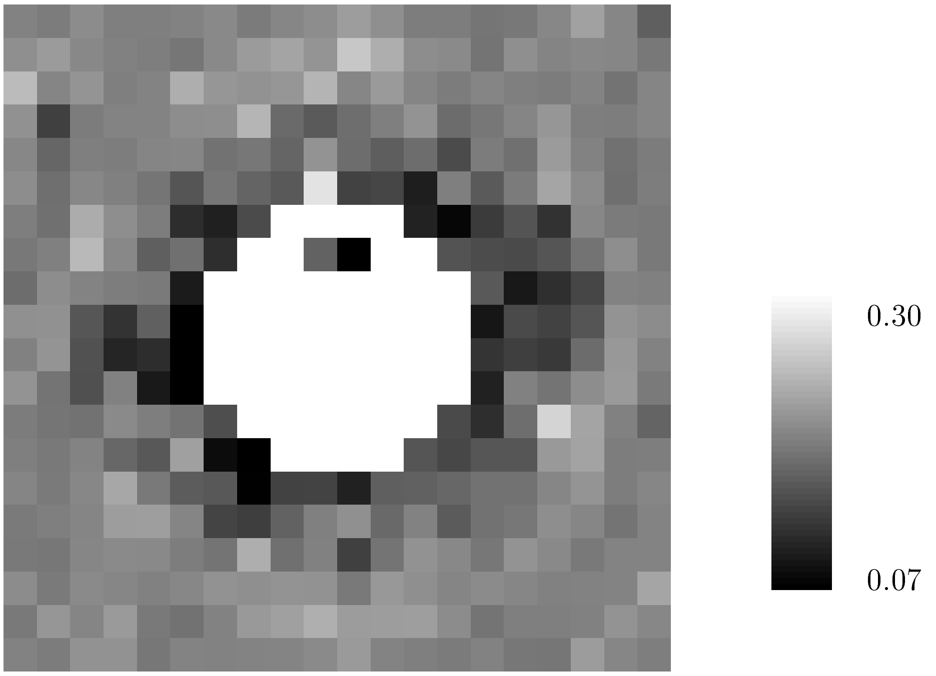

Abbildung 4.18: Rekonstruktion des Realteils

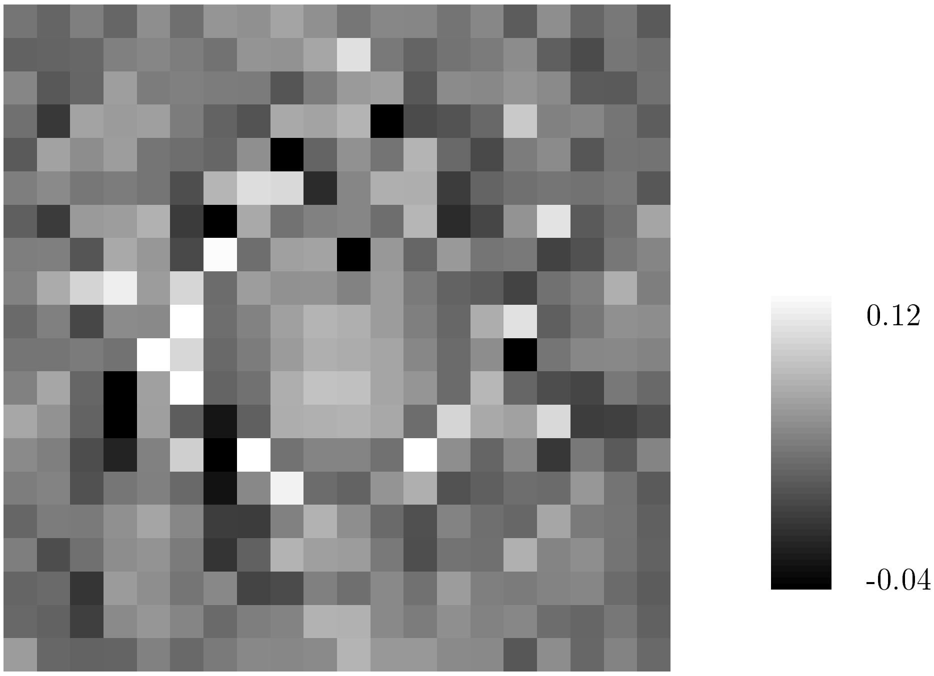

Abbildung 4.19: Rekonstruktion des Imaginärteils

Beispiel 5:

Dieses Beispiel versucht, ebenfalls einen schwachen Streuer mit zusätzlichen inneren Inhomogenitäten zu rekonstruieren. Der Real- beziehungsweise Imaginärteil der Funktion $\mathcal{O}$ sind wie folgt gegeben:

$$\Re(\mathcal{O}(x)) = \begin{cases} 0.1\ \cos(\frac{\pi x_1}{\lambda})\cos(\frac{\pi x_2}{\lambda}) & , \ \|x-\bar{x}\| \leq 0.09, \text{ und } \|x\| < 1,\ \bar{x} = 1/3 \\ 0.2\ \cos(\frac{\pi x_1}{\lambda})\cos(\frac{\pi x_2}{\lambda}) & , \ \|x-\bar{x}\| > 0.4, \text{ und } \|x\| < 1,\ \bar{x} = 1/3 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Im(\mathcal{O}(x)) = \begin{cases} 0.2\ \cos(\frac{\pi x_1}{\lambda})\cos(\frac{\pi x_2}{\lambda}) & , \ \|x\| \leq 0.8 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Rechenzeit betrug wie bei dem Beispiel 1 für eine Auflösung $N = 32$, also $1/8\lambda$, 22 Sekunden pro Richtung. Die Rekonstruktion erfolgte für $J = 40$ verschiedene Richtungen. Aufgrund der gewählten Auflösung wurde bei diesem Objekt die Kontur des Realteils erkannt, während die rekonstruierten Werte beim Imaginärteil verfälscht worden sind. Bei diesem Beispiel ist noch zusätzlich zu bemerken, daß aufgrund der zusätzlichen Inhomogenitäten die Simulation ebenfalls “extrem” gestörte Daten geliefert haben kann. Dies beeinflußt zusätzlich die Güte der Rekonstruktion. Desweiteren liefert eine Mittelwertkorrektur, ähnlich wie im Beispiel 4, eine im Innern zu geglättete Struktur des Objekts.

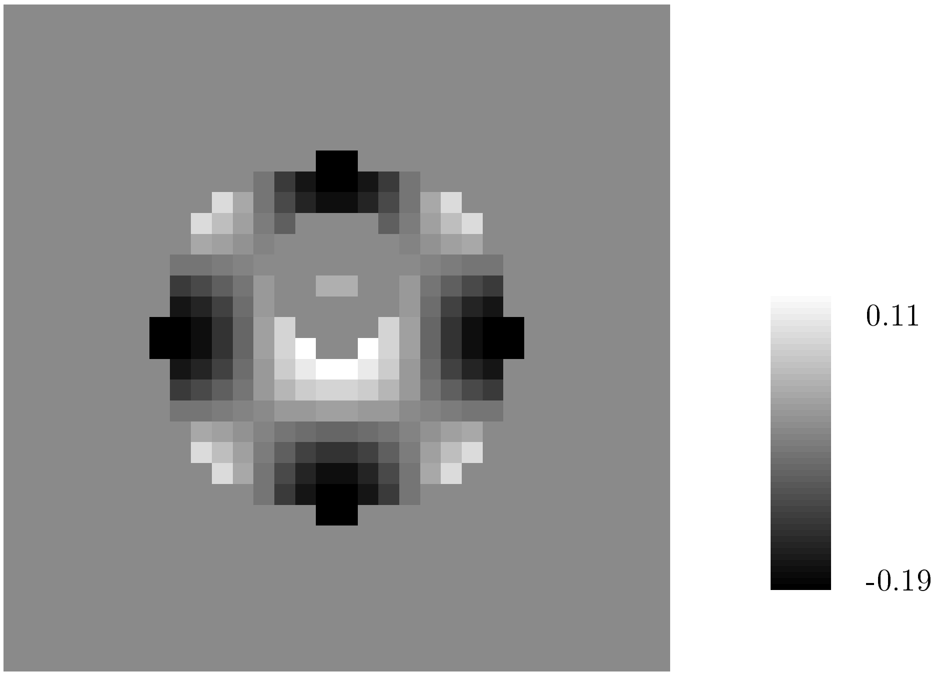

Abbildung 4.20: Das exakte Objekt (Realteil)

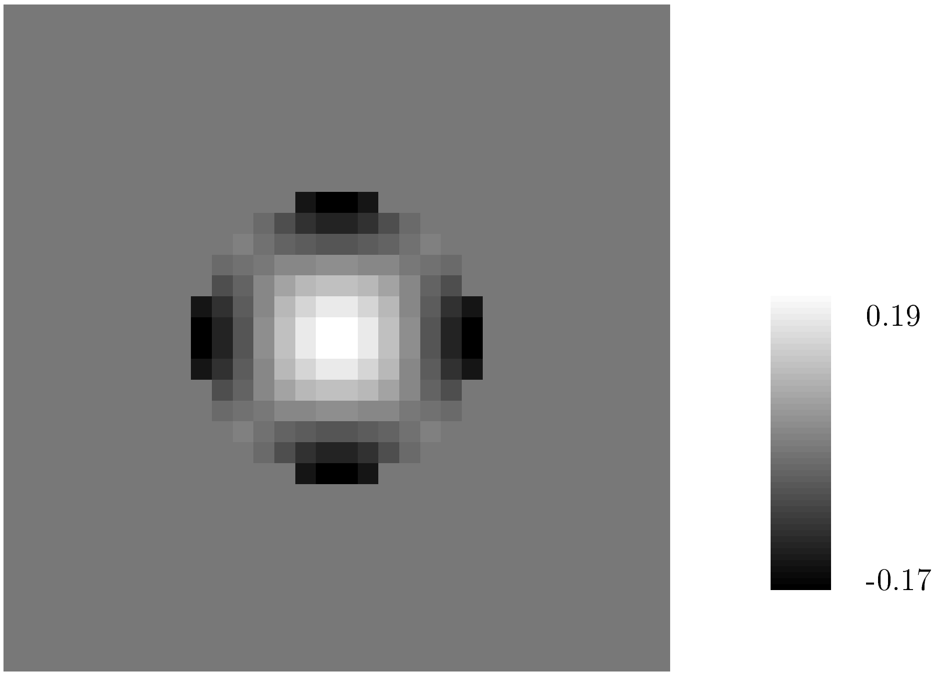

Abbildung 4.21: Das exakte Objekt (Imaginärteil)

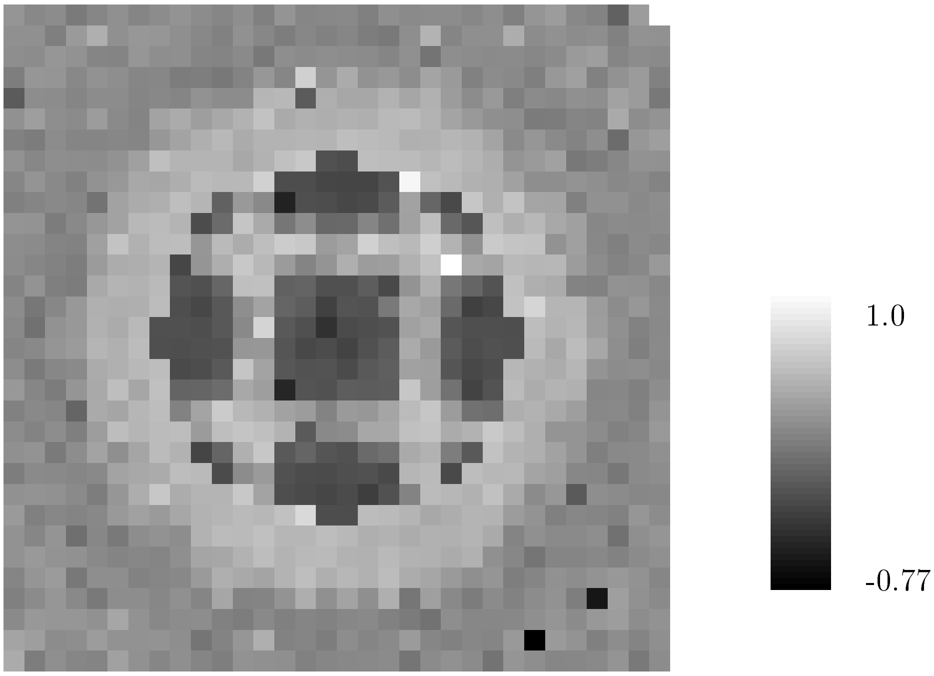

Abbildung 4.22: Rekonstruktion des Realteils

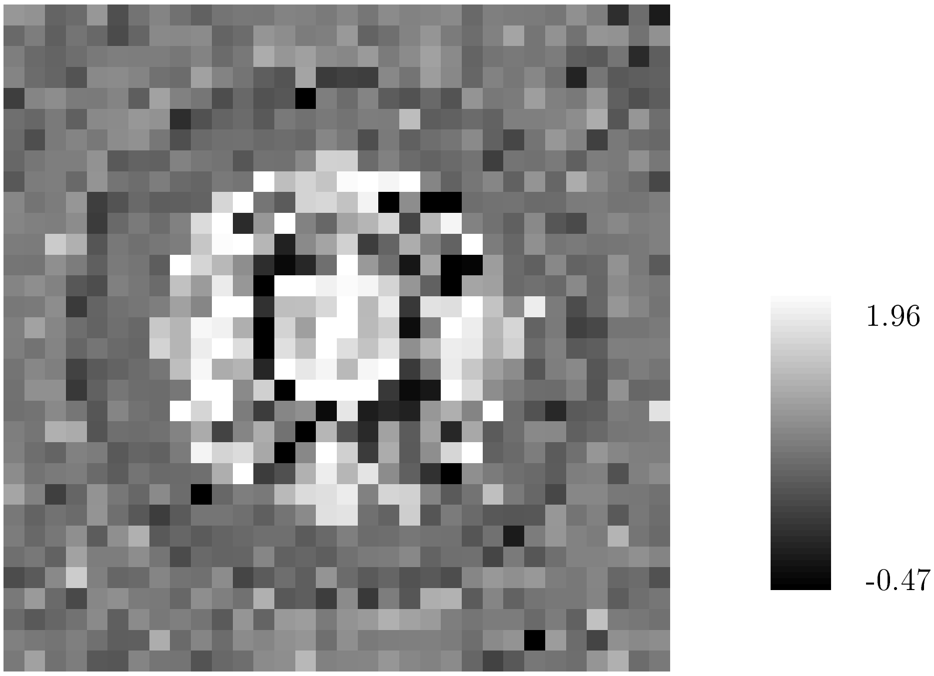

Abbildung 4.23: Rekonstruktion des Imaginärteils

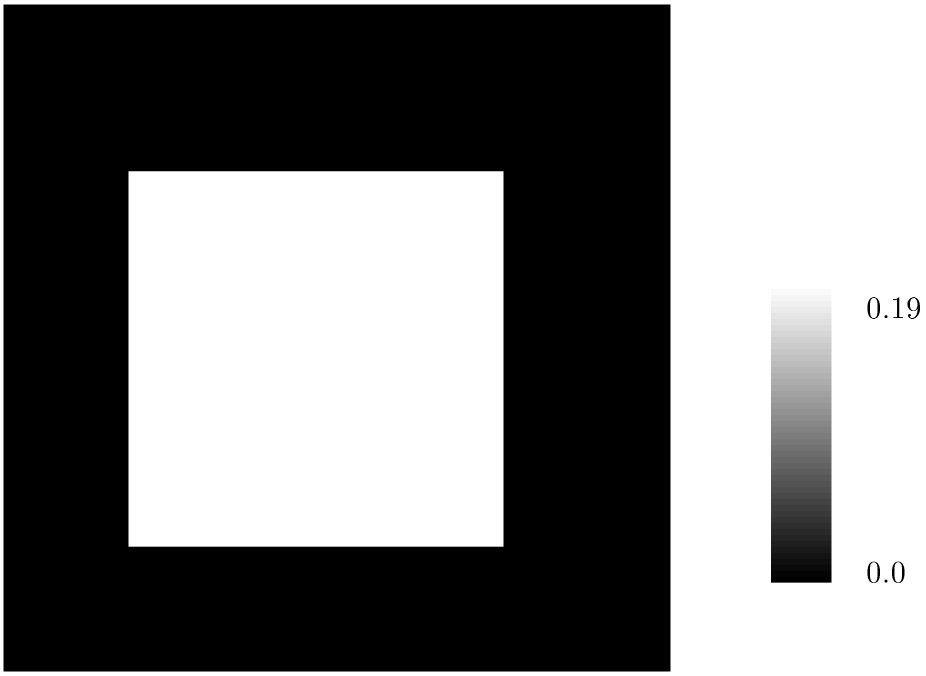

Abbildung 4.24: Das exakte Objekt (Realteil)

Beispiel 6:

Dieses Beispiel versucht ebenfalls einen schwachen Streuer zu rekonstruieren, wobei sowohl der Real- als auch der Imaginärteil des Objekts den Nullpunkt ohne zusätzliche Inhomogenitäten im Innern enthalten. Die Rechenzeit betrug für eine Auflösung $1/4\lambda$, das heißt $N = 16$ weniger als fünf Sekunden für alle Richtungen. Die Rekonstruktion erfolgte für $J = 5$ verschiedene Richtungen. Das gleiche Objekt wurde ebenfalls mittels des zweistufigen Iterationsverfahrens - vorgestellt im Kapitel 2.3 - rekonstruiert (vgl. Bilder 2.4 und 2.5). Hierbei wurde in Abhängigkeit der Wellenlänge ein Gewicht $w = 10\lambda = 2\|\psi\|_{L_2(B_R(0))}$ gewählt. Vergleicht man dieses Beispiel mit der Rekonstruktion im Kapitel 2.3, so sind bei beiden Methoden die *a priori* Informationen über das Objekt von Vorteil gewesen, während die Rechenzeit einen erheblichen Unterschied zwischen den Methoden aufweist.

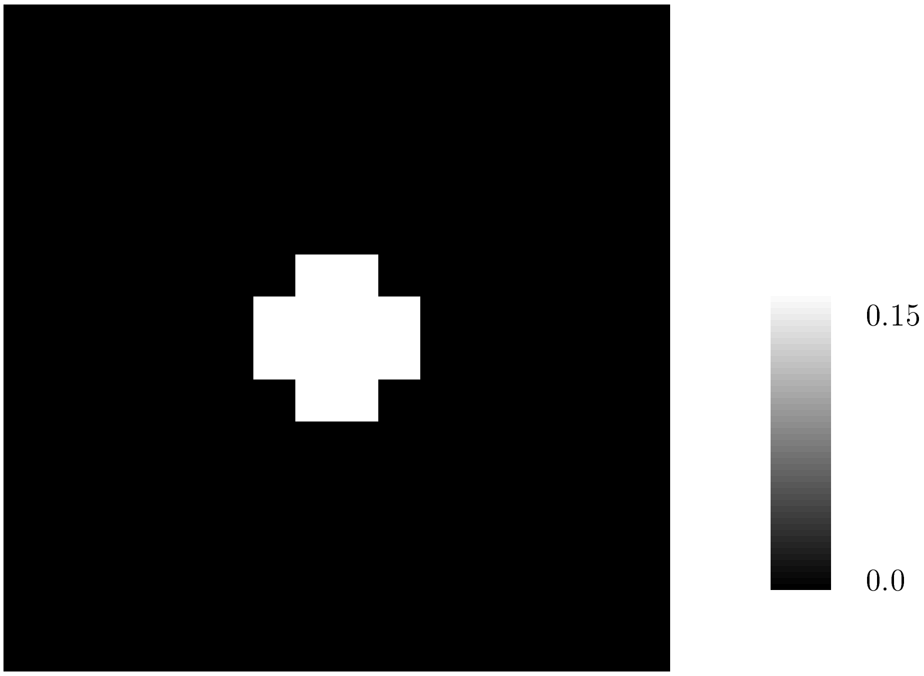

Abbildung 4.25: Das exakte Objekt (Imaginärteil)

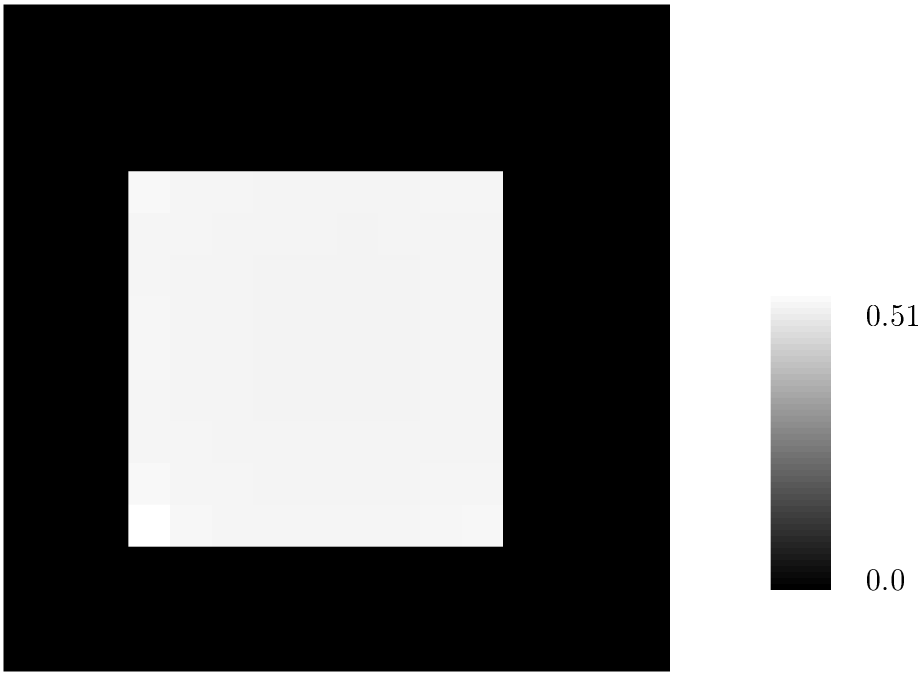

Abbildung 4.26: Rekonstruktion des Realteils

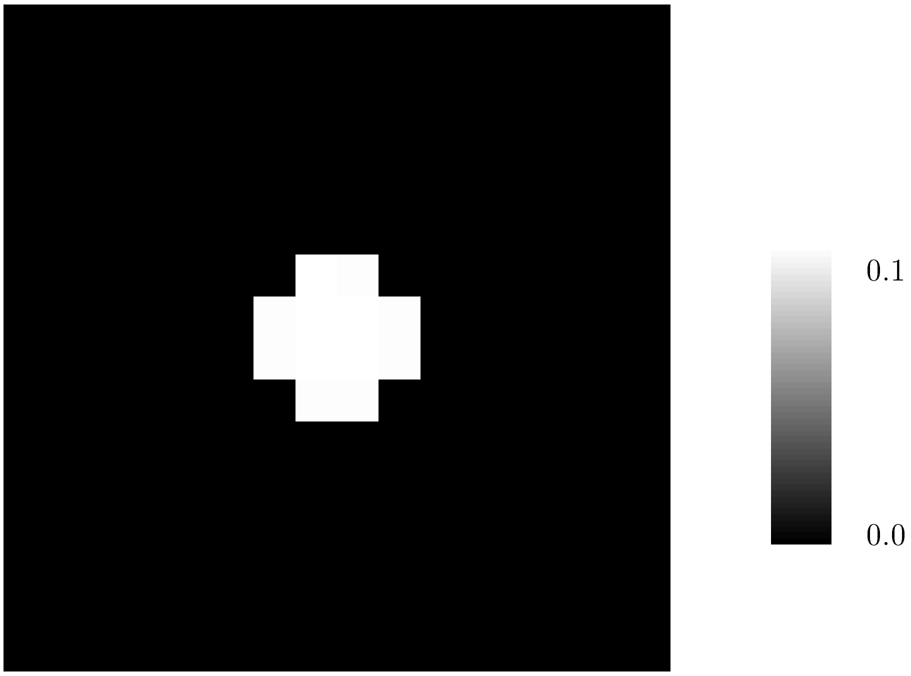

Abbildung 4.27: Rekonstruktion des Imaginärteils

Kapitel 5

Schlußbetrachtung und Ausblick

Das Hauptziel dieser Arbeit bestand in der Bestimmung eines inhomogenen Objekts aus gegebenen akustischen gestreuten Daten. Um diese Aufgabe zu lösen, wurde die Methode der approximativen Inversen angewandt. Ausgehend von einem implizit-nichtlinearen Operator - dem Streuoperator - wurde eine analytische Darstellung für den Rekonstruktionskern mit Hilfe der Singulärwertzerlegung des Operators hergeleitet. Die Anwendung der Methode der approximativen Inversen lieferte die äquivalenten Quellen. Aus diesen und dem Gesamtfeld wurde schließlich eine gemittelte Approximation an das Objekt bestimmt. *A priori* Informationen über das zu bestimmende Objekt ließen sich sehr effizient bei der Verbesserung des Kontrasts verwenden.

Bei der Anwendung dieser Methode ist es von ganz besonderer Bedeutung, daß die Daten von einem beliebigen Objekt herrühren können, und damit die Bornsche oder irgendeine andere Voraussetzung nicht zu erfüllen brauchen. Dieses Verfahren verglichen mit denen im Kapitel 2.3 unterscheidet sich nicht zuletzt im Verhältnis des numerischen Aufwandes, sondern versucht die vorliegende Ausgangsgleichung analytisch soweit umzuformen, um anschließend mit vergleichsweise geringem Aufwand eine Lösung zu suchen. Bei der oben vorgeschlagenen Lösungsmethode besteht nicht die Notwendigkeit, das direkte Problem bei der Inversion zu lösen, um die Nichtlinearität und die Schlechtgestelltheit des Ausgangsproblems zu behandeln.

Während die Rekonstruktion für einen reellwertigen Streuer beziehungsweise für den Realteil des Streuers akzeptabel ist, bedarf die Rekonstruktion des Imaginärteils (mit zusätzlichen Inhomogenitäten) eines Streuers, also die Rekonstruktion des Absorptionskoeffizienten, einige Modifikationen. Obgleich die Kontur eines extrem inhomogenen Objekts, das heißt Existenz zu vieler und zu extremer Unstetigkeiten innerhalb des zu untersuchen Objekts, relativ gut rekonstruiert werden kann, können für solche Objekte, um deren innere Eigenschaften zu bestimmen, zusätzliche Anwendung von Verfahren wie Edge-Preserving-Method vorteilhaft sein. Das heißt für solche Objekte eignet sich das Verfahren zu deren Lokalisierung sehr gut.

Desweiteren besteht die Möglichkeit, mit entsprechender Modifikation des Ausdruckes $\mathcal{O} = \frac{\phi}{u}$ und des Algorithmus Objekte auch aus rückgestreuten Daten zu bestimmen.

Die Rekonstruktionsmethode wurde in dieser Arbeit für 2D akustische Wellen realisiert. Betrachtet man statt Helmholtz-Gleichung - mit Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung als eine Randbedingung - die *Maxwell-Gleichung* mit *Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung*, so kann die Methode mit geringen Modifikationen ebenfalls zur Rekonstruktion eines inhomogenen dielektrischen Objekts aus gestreuten elektromagnetischen Wellen angewandt werden. Mit analoger Vorgehensweise ist eine Erweiterung auf 3D-Probleme sowohl für akustische als auch für elektromagnetische Wellen möglich.

Anhang A

Ausdrücke mit speziellen Funktionen

Für die Hankel- (H), Bessel- (J) und Neumann-Funktionen (N) gelten folgende Identitäten und Additionstheoreme (vgl. [Ab/St 72] und [Lu 62]).

Abhängigkeiten:

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iN_n(z), \tag{A.1}$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iN_n(z), \tag{A.2}$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \qquad N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z), \tag{A.3}$$

$$H_{-n}^{(1)}(z) = e^{in\pi} H_n^{(1)}(z), \tag{A.4}$$

$$H_{-n}^{(2)}(z) = e^{-in\pi} H_n^{(1)}(z), \tag{A.5}$$

$$J_n(ze^{im\pi}) = e^{imn\pi} J_n(z), \tag{A.6}$$

$$N_n(ze^{im\pi}) = e^{-imn\pi} N_n(z) + 2i\sin(mn\pi)\cot(n\pi) J_n(z), \tag{A.7}$$

$$H_n^{(1)}(ze^{im\pi}) = -e^{-in\pi} H_n^{(2)}(z), \tag{A.8}$$

$$H_n^{(2)}(ze^{-im\pi}) = -e^{in\pi} H_n^{(1)}(z), \quad \text{für} \quad m, n \in I\!N, \tag{A.9}$$

$$J_0^{(1)}(z) = \sum_{k \in I\!N_0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \tag{A.10}$$

$$N_0^{(1)}(z) = \frac{2}{\pi}\left(ln(\frac{z}{2})+\gamma\right) J_0^{(1)}(z) - \frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k \frac{J_{2k}^{(1)}(z)}{k}. \tag{A.11}$$

Ableitungen:

$$Z_n'(z) = -\frac{n}{z}Z_n(z) + Z_{n-1}(z), \tag{A.12}$$

$$= \frac{n}{z}Z_n(z) - Z_{n+1}(z), \tag{A.13}$$

$$= \frac{1}{2}\{Z_{n-1}(z) - Z_{n+1}(z)\}, \tag{A.14}$$

wobei Z eine der Funktionen $H,\ J,\ N$ repräsentiert.

Asymptotische Darstellung für große Argumentwerte:

$$H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi)}\left\{1+O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right\}, \tag{A.15}$$

$$\text{für } -\pi < argz < 2\pi, |z| \to \infty$$

Asymptotische Darstellung für kleine Argumentwerte:

Um bei der numerischen Behandlung die Singularitäten der Hankel-Funktion zu umgehen, betrachtet man folgende Entwicklung der Hankel-Funktion für das Argument z mit $|z| \ll 1$.

$$H_0^{(1)}(z) \approx 1 - i\frac{2}{\pi}\left(\ln(\frac{z}{2})+\gamma\right), \tag{A.16}$$

$$N_0(z) \approx \frac{2}{\pi}\left(\ln(\frac{z}{2})+\gamma\right), \qquad \text{für} \qquad |z| \ll 1. \tag{A.17}$$

Hierbei bezeichnet $\gamma = 0.5772156649$ die *Eulerzahl.*

Asymptotische Darstellung für großen Index:

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n n!}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \tag{A.18}$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $I\!R$.

$$H_n^1(t) \;=\; \frac{2^n(n-1)!}{i\pi t^n}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \text{ auf } (0,\infty). \tag{A.19}$$

Bestimmte und unbestimmte Integrale mit Bessel-Funktionen:

Sei $k \in I\!R^+$.

$$\int_0^R rJ_0^2(kr)dr \;=\; \frac{R^2}{2}\left\{J_0^2(kR) - J_1^2(kR)\right\} \tag{A.20}$$

$$\int_0^R rJ_n^2(kr)dr \;=\; \frac{R^2}{2}\left\{J_n^2(kR) - J_{n-1}(kR)J_{n+1}(kR)\right\} \tag{A.21}$$

$$\int_0^R J_0(kr)J_1(kr)dr \;=\; \frac{1}{2}\left\{1 - J_0^2(kR)\right\} \tag{A.22}$$

$$\int_0^\infty J_\nu(at)J_{\nu+1}(bt)dt = \begin{cases} a^\nu b^{-\nu-1} & : \; 0<a<b \\ \frac{1}{2a} & : \; 0<a=b \\ 0 & : \; 0<b<a \end{cases} \tag{A.23}$$

Hypergeometrische Reihe:

Die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1(a,b;c;z)$ sei definiert als

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu (b)_\nu}{(c)_\nu \nu!}\, z^\nu, \tag{A.24}$$

mit den Pochhammer-Symbolen $(a)_\nu,\ (b)_\nu,\ (c)_\nu$, wobei

$$(a)_\nu := \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}.$$

Anhang B

B.1 Fernfeldbestimmung im zweidimensionalen Fall

Definition B.1 *Eine Lösung u der Helmholtz-Gleichung (1.7), deren Definitionsbereich die äußere einer beliebigen Sphäre enthält, heißt* ausstrahlend, *wenn sie der Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung laut Gleichung (1.8) genügt.*

Betrachtet man im Gegensatz zu Nahfeld (vgl. Definition 2.2) mit $1 < R < \infty$ den Fall $R \to \infty$, so spricht man vom *Fernfeld* oder *Streuamplitude*, die sich wie folgt bestimmen läßt.

Lemma B.2 *Jede ausstrahlende Lösung u der Helmholtz-Gleichung besitzt folgendes asymptotisches Verhalten einer auslaufenden Kugelwelle (mit der Amplitude u_∞)*

$$u(x) = \frac{e^{ik\|x\|}}{\|x\|^{1/2}} u_\infty(\hat{x}) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{3/2}}\right), \quad \text{für } \|x\| \to \infty \tag{B.1}$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = x/\|x\|$. Die Funktion u_∞ - definiert auf der Einheitssphäre $\mathcal{S}^1$ - heißt das Fernfeld (Fernfelddaten) *oder* Streuamplitude *der Funktion u und hat folgende Darstellung*

$$u_\infty(\hat{x}) = i\sqrt{\frac{1}{8k\pi}} e^{-i\pi/4} \int_{\partial\Omega_{sc}} \left\{ u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} e^{-ik<\hat{x},y>} - e^{-ik<\hat{x},y>} \frac{\partial}{\partial \nu_y} u(y) \right\} d\sigma_y \tag{B.2}$$

für $x \in I\!R^2 \setminus \overline{B_\rho(0)}$, wobei ρ so gewählt ist, daß $B_\rho(0) \supset \overline{\Omega_{sc}}$ und $\|x\| \gg \rho$.

Beweis :
Man betrachtet die Darstellung einer ausstrahlenden Lösung der Helmholtz-Gleichung außerhalb eines das Streuobjekt umschreibenden Kreises, also die Ausbreitung des gestreuten Feldes in dem Gebiet $I\!R^2 \setminus \overline{\Omega_{sc}}$, und wendet darauf den zweiten Greenschen Satz an, unter Berücksichtigung der Sommerfeld-Ausstrahlungsbedingung und der asymptotischen Entwicklung der Hankel-Funktion für $\|x\| \to \infty$ (Gleichung (A.15)) und der Identität $\|x-y\| = \|x\| - < \hat{x}, y > + O(\frac{1}{\|x\|})$, so erhält man die Behauptung. ■

Bemerkung B.3 *Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde die Abhängigkeit des einfallenden, gestreuten und damit die des Fernfeldes von der Richtung α nicht berücksichtigt.*
Das hierzu 3D Analogon und die Eigenschaften des Fernfeldes kann man aus [Co/Kr 92], [La 87] und [Ra 86] entnehmen.

B.2 Fourier-Transformierte des Fernfeldes

Wie man aus der obigen Darstellung des Fernfeldes u_∞ ersehen kann, ist diese eine Funktion des Winkels θ. Zur Berechnung von

$$\tilde{u}_{\infty,\mu} = \int_0^{2\pi} u_\infty(\theta)\ Y_\mu(\omega(\theta))\ d\theta$$

betrachtet man folgende Darstellung einer ausstrahlenden Lösung der Helmholtz-Gleichung außerhalb des Kreises $\partial B_R(0)$. Für beliebigen Streuer konvergiert der Feldansatz

$$u_s(R\omega(\theta)) = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}} c_n H_n^{(1)}(kR) Y_n(\omega(\theta)) \tag{B.3}$$

auf kompakten Teilmengen von $I\!R^2 \setminus \overline{B_R(0)}$. Die Koeffizienten c_n sind gegeben durch:

$$c_n = \frac{1}{2\pi H_n^{(1)}(kR)} \int_0^{2\pi} u_s(R\omega(\theta)) \overline{Y_n(\omega(\theta))} d\theta.$$

Da diese Reihe nicht gleichmäßig für alle n gilt, kann man keinen Grenzwertbetrachtung für $R \to \infty$ durchführen. Da aber u_∞ eine analytische Funktion ist (vgl.

[Co/Kr 92] und [La 87]), kann das Fernfeld in Termen der Oberflächenfunktionen in eine Reihe entwickelt werden. Es gilt

$$u_\infty(\theta) = \sum_{n\in \boldsymbol{Z}} b_n Y_n(\omega(\theta))$$

mit den Koeffizienten

$$b_n = \int_0^{2\pi} u_\infty(\theta)\ \overline{Y_n(\omega(\theta))}\ d\theta.$$

Benutzt man nun die Beziehung zwischen u_s und u_∞ (Gleichung (B.1)), so stellt man fest:

$$b_n \;\; = \;\; R^{1/2} e^{-ikR} \int_0^{2\pi} u_s(R\omega(\theta))\ \overline{Y_n(\omega(\theta))}\ d\theta.$$

Setzt man nun für u_s die Entwicklung (B.3) ein, so ist der Grenzübergang nach Ausnutzung der Orthogonalität der Oberflächenfunktionen möglich. Dies liefert mit der Gleichung (A.15)

$$b_n \;\; = \;\; 2\pi \sqrt{\frac{2}{k\pi}}\, \underbrace{e^{-in\pi/2}}_{=(-i)^n} e^{-i\pi/4}\ c_n.$$

Hiermit gelangt man zu folgender Darstellung des Fernfeldes:

$$u_\infty(\theta) \;\; = \;\; \sqrt{\frac{8\pi}{k}} e^{-i\pi/4} \sum_{n\in \boldsymbol{Z}} (-i)^n c_n Y_n(\omega(\theta)). \tag{B.4}$$

Mit dieser Darstellung des Fernfeldes kann man die Fourier-Transformation davon angeben. Man stellt fest, daß diese sich in Termen der Fourier-Transformation der gemessenen gestreuten Daten im Nahfeld angeben läßt.

$$\tilde{u}_{\infty,\mu} = \sqrt{\frac{8\pi}{k}}\ e^{-i\pi/4}\ \frac{(i)^\mu}{(-1)^\mu H_\mu^{(1)}(kR)}\ \tilde{u}_{s,-\mu}(R). \tag{B.5}$$

Anhang C

C.1 Analytische Lösung im Nahfeld

Ein wesentlicher Vorzug dieser analytischen Lösung liegt in der Möglichkeit der Bestätigung der in dieser Arbeit vorgestellten Methode, eine *notwendige* Bedingung für ihre Anwendbarkeit, da die Daten analytisch vorliegen.

Für einen kreisförmigen durchdringlichen Streuer mit dem Mittelpunkt im Ursprung und den bekannten Materialeigenschaften, das heißt bekanntem Brechungsindex, kann die Lösung des direkten Streuproblems analytisch angegeben werden.
Analog zum dreidimensionalen Fall (vgl. [Co/Kr 92]) erhält man für die Lösung der Helmholtz-Gleichung (das Vorwärtsproblem), das heißt für das Feld innerhalb des Streuers Ω_{sc} und das Feld auf der Meßoberfläche (beziehungsweise Meßlinie oder Meßkreis) Γ mittels einer Eigenfunktionentwicklung folgenden Reihenansätze für $x \in \Omega_{sc} \subset \mathbb{R}^2, x = r\omega(\theta)$ und $x' \in \Gamma, x' = R\omega(\theta')$:

$$u(\alpha, r\omega(\theta)) = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}} a_n J_n(k_1 r) Y_n(\omega(\theta)) \overline{Y_n(\omega(\theta_{in}))} \tag{C.1}$$

und

$$u_s(\alpha, R\omega(\theta')) = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}} b_n H_n^{(1)}(k_2 R) Y_n(\omega(\theta'))\, \overline{Y_n(\omega(\theta_{in}))}, \tag{C.2}$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten a_n und b_n. Hierbei bezeichnen $\alpha \in \mathcal{S}^1, \alpha = \omega(\theta_{in})$, θ_{in} den Richtungswinkel des einfallenden Feldes u_i, $k_1 = k_2\sqrt{1-n^2}$ die bekannte Wellenzahl innerhalb des Streuobjekts und k_2 die ebenfalls bekannte Wellenzahl in dem umgebenden Medium. Mit Hilfe des Huygensschen Prinzips $u - u_s = u_i$

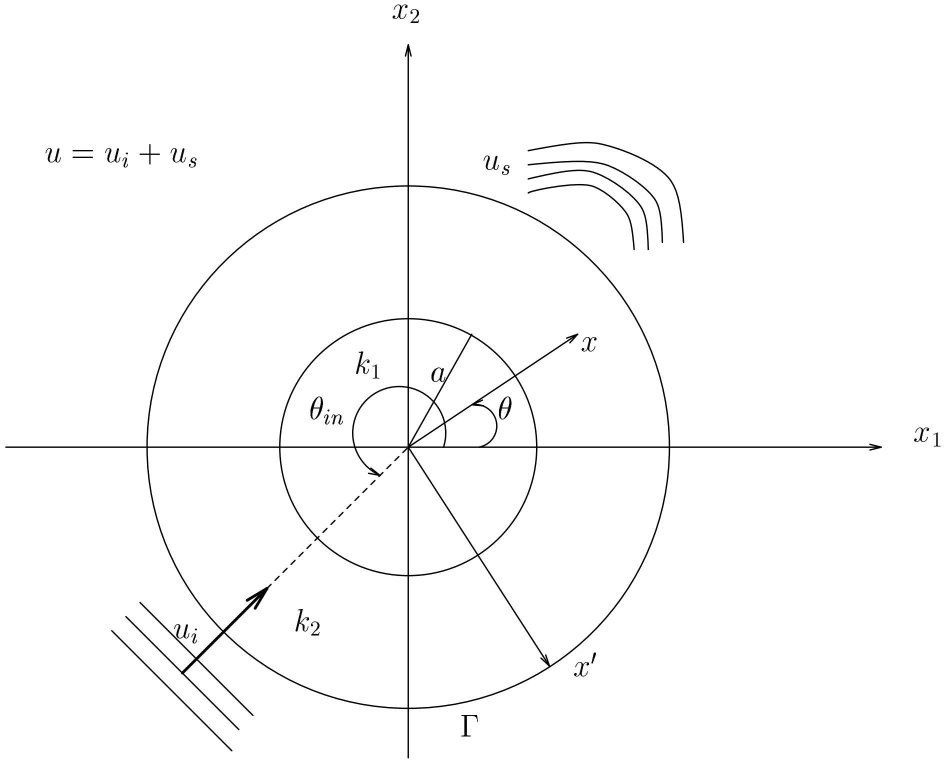

Abbildung C.1: Streuung an einen kreisförmigen Streuer

und der damit verbundenen Regularitätsbedingung $u' - u'_s = u'_i$ erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten a_n und b_n.
Nach Lösen des obigen Systems ergibt sich für a_n und b_n

$$a_n = (-i)^n \frac{J_n(k_2 a)}{J_n(k_1 a)} + b_n \frac{H_n^{(1)}(k_2 a)}{J_n(k_1 a)} \tag{C.3}$$

$$b_n = (-i)^n \frac{k_2 J_n(k_1 a) J'_n(k_2 a) - k_1 J_n(k_2 a) J'_n(k_1 a)}{k_1 H_n^{(1)}(k_2 a) J'_n(k_1 a) - k_2 J_n(k_1 a) H_n^{(1)'}(k_2 a)}, \tag{C.4}$$

wobei a den Radius des kreisförmigen Streuers bezeichnet (vgl. Bild (C.1)). Die Dichteverteilung dieses kreisförmigen Objekts ist im nachstehenden Bild dargestellt.

Bemerkung C.1 *Aus Gründen der Einfachheit ist unter Ausnutzung der Jacobi-Anger-Entwicklung*

$$e^{ik<\alpha,x>} = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}} i^n J_n(k\|x\|) Y_n(\omega(\theta)) \overline{Y_n(\omega(\theta_{in}))} \tag{C.5}$$

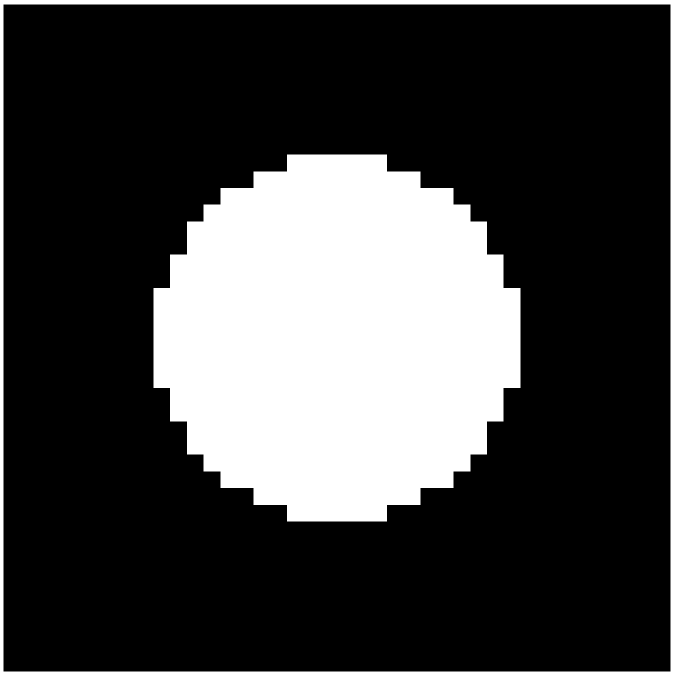

Abbildung C.2: Dichteverteilung eines homogenen kreisförmigen Objekts

das einfallende Feld und damit die Möglichkeit der Variation der Einfallsrichtung gleich bei der analytischen Lösung des Vorwärtsproblems berücksichtigt worden.

C.2 Analytische Lösung im Fernfeld

Mit Hilfe der Beziehung zwischen dem Nah- und Fernfeld und der asymptotischen Entwicklung der Hankel-Funktion kann das Fernfeld für einen bekannten kreisförmigen Streuer ebenfalls analytisch angegeben werden. Hierfür ergibt sich

$$u_\infty(\theta') = \sqrt{\frac{2}{k_2\pi}}\, e^{-i\pi/4} \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} (-i)^n b_n Y_n(\omega(\theta'))\, \overline{Y_n(\omega(\theta_{in}))}. \tag{C.6}$$

Anhang D

D.1 Integral-Transformationen

Fourier-Transformation:

Für eine vom Ortswinkel θ abhängige ($2\pi-$periodische) Funktion f kann der *Summenindex* als *Fouriervariable* interpretiert werden, somit gilt:

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta, \tag{D.1}$$

und

$$f(\theta) = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \tilde{f}_n e^{in\theta}. \tag{D.2}$$

Hankel-Transformation:

Genügt eine von einer Variable $r > 0$ abhängige Funktion $f(r)$ der *Dirichlet-Jordan-Bedingung*, dann ist die *Hankel-Transformation* (oder *Fourier-Bessel-Transformation*) $\mathcal{H}_m$ der Ordnung m definiert als:

$$\mathcal{H}_m f(k) := \int_0^R r f(r) J_m(kr)dr, \text{ für } 0 < R \leq \infty \tag{D.3}$$

und

$$f(r) = \int_0^\infty k\mathcal{H}_m f(k) J_m(kr)dk \text{ für } 0 < r < R. \tag{D.4}$$

Bemerkung:
Die Hankel-Transformation der Ordnung 0 ist als eine Abbildung

$$\mathcal{H}_0 : L_2((0,\infty); s\ ds) \to L_2((0,\infty); s\ ds)$$

eine Isometrie.

D.2 Über die räumliche Fourier-Transformation der Greenschen Funktion

Bei der Bestimmung der Fourier-Transformation der Greenschen Funktion im 2D Fall gibt es zwei Möglichkeiten.

Erstens kann man die Integraldarstellung der Hankel-Funktion erster Art der Ordnung Null betrachten und die Fourier-Transformierte dieser Funktion bilden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Greensche Funktion als Lösung der Gleichung

$$(\Delta + k^2)G_k(x,y) = -\delta(x-y)$$

zu betrachten. Die räumliche Fourier-Transformation dieser Funktion bezüglich y liefert

$$G_k(\zeta) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{I\!R^2} G_k(x,y) e^{-i<\zeta,y>} dy$$

mit der inversen

$$G_k(x,y) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{I\!R^2} G_k(\zeta) e^{i<\zeta,x-y>} d\zeta.$$

Mit Hilfe dieser Darstellung und des Differentiationssatzes für die Fourier-Transformation gelangt man zu:

$$G_k(\zeta) = \frac{1}{\|\zeta\|^2 - k^2} \quad \text{mit} \quad \Im(k) > 0, \tag{D.5}$$

wobei die Einschränkung $\Im(k) > 0$ die Analytizität der Funktion $G_k(\zeta)$ in dieser Halbebene liefert. Um $G_k(\zeta)$ auf die reelle Achse - für $\Im(k) = 0$ - fortzusetzen, betrachte man die im Null-Punkt singuläre Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Mit Hilfe der

Fourier-Transformation im eindimensionalen Fall erhält man eine Fortsetzung dieser Funktion im Nullpunkt durch

$$\frac{1}{x} = pv\ \frac{1}{x} + i\ \pi\delta(x).$$

Entsprechend dieser erhält man für die Fortsetzung der Fourier-Transformation der Greenschen Funktion für $\Im(k) = 0$

$$G_k(\zeta) = pv\ \frac{1}{\|\zeta\|^2 - k^2} + i\pi\delta(\|\zeta\|^2 - k^2). \tag{D.6}$$

Literaturverzeichnis

[Ab/St 72] **Abramowitz M. - Stegung I.A.:** *Handbook of mathematical functions.* Dover Publications, New York (1972)

[An/Kl 89] **Angell T.S. - Kleinman R.E. - Kok B. - Roach G.F.:** *A constructive method for identification of an impenetrable scatterer.* Wave Motion 11 (1989) 185 - 200

[Ch/Sa 89] **Chadan K. - Sabatier P.C.:** *Inverse problems in quantum scattering.* 2nd edition, Springer, Berlin (1989)

[Ch/Ro 88] **Cheyney M. - Rose J.H.:** *Threedimensional inverse scattering for the wave equation: Weak scattering approximation with error estimation.* Inverse problems 4 (1988) 435-447

[Co 96] **Colton D.L.:** *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory.* In: Engl - Louis - Rundell (eds): Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing. Springer (1996)

[Co/Kr 83] **Colton D.L. - Kress R.:** *Integral equation methods in scattering theory.* Wiley, New York (1983)

[Co/Kr 92] **Colton D.L. - Kress R.:** *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory.* Springer, Berlin (1992)

[De 97] **Dertnig F.G.:** *Stabile und schnelle Algorithmen zur Approximation von Parametern eines elliptischen Differentialoperators.* Dissertation, Universität des Saarlandes (1997)

[De 86] **Devaney A.J.:** *Reconstructive tomography with diffracting wavefields.* Inverse Problems 2 (1986) 161 - 183

[Gu/Kl 94] **Gutman S. - Klibanov M.:** *Three-dimensional inhomogeneous media imaging.* Inverse Problems 10 (1994) 239 - 246

[Is 93] **Isakov F.:** *Uniqueness and stability in multi-dimensional inverse problems.* Inverse Problems 9 (1993) 579 - 621, Review Article

[Ki/Kr 87] **Kirsch A. - Kress R.:** *A numerical method in inverse acoustic scattering.* In : Engl and Groetsch (eds.): Inverse Problems. Academic Press, Orlando, 279 - 290 (1987)

[Kl/Be 92] **Kleinman R.E. - van den Berg P.M.:** *A modified gradient method for two-dimensional problems in tomography.* Journal of Comp. and Appl. Math. 42 (1992) 17 - 35

[Kl/Be 93] **Kleinman R.E. - van den Berg P.M.:** *An extended range-modified gradient technique for profile inversion.* Radio Science 28 (1993) 877 - 884

[Kl/Be 94] **Kleinman R.E. - van den Berg P.M.:** *Two-dimensional location and shape reconstruction.* Radio Science 29 (1994) 1157 - 1169

[La 87] **Langenberg K.J.:** *Applied inverse problems for acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering.* In: Hermann G.T. - Tuy H.K. - Langenberg K.J. - Sabatier P.: Basic methods of tomography and inverse Problems 1987 (Bristol : Adam Hilger)

[La 92] **Langenberg K.J.:** *Elastic wave inverse scattering as applied to nondestructive evaluation.* In: Bertero M. (ed.): Inverse Problems in scattering and imaging 1992 (Bristol : Adam Hilger)

[Lob 96] **Lobel P.:** *Problème de diffraction inverse: reconstruction d'image et optimisation avec régularisation par préservation des discontinuités - Application à l'imagerie microonde.*
Ph D Thesis, L'Université de Nice-Sophia Antipolis (1996)

[Lo1 84] **Louis A.K.:** *Orthogonal function series expansion and the null space of the Radon transform.* SIAM J. Math. Anal. 15 (1984) 621 - 633

[Lo2 84] **Louis A.K.:** *Nonuniqueness in inverse Radon problems: The frequency distribution of the ghosts.* Math. Z. 185 (1984) 429 - 440

[Lo 86] **Louis A.K.:** *Incomplete data problems in x-ray computerized tomography I: Singular value decomposition of the limited angle transform.* Numer. Math. 48 (1986) 251 - 262

[Lo1 89] **Louis A.K.:** *The eikonal approximation in ultrasound computer tomography.* In: Friedman A. et al (eds.): Proceedings of the IMA Conference on Signal Processing. Springer, Berlin (1989)

[Lo2 89] **Louis A.K.:** *Inverse und schlecht gestellte Probleme.* Teubner, Stuttgart (1989)

[Lo 96] **Louis A.K.:** *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems.* Inverse Problems 12 (1996) 175 - 190

[Lo 97] **Louis A.K.:** *Application of the Approximate Inverse to Inverse Scattering.* In Chavent G., Sabatier P.C. (eds.): Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction, LN in Physics, Vol.: 486 (1997).

[Lo 98] **Louis A.K.:** *A unified approach to regularization methods for linear ill-posed problems.* preprint (1998)

[Lo/Di 96] **Louis A.K. - Dietz R.:** *Algorithmen für die 3D - Computer - Tomographie bei zerstörungsfeien Prüfverfahren.* In: Mathematik - Schlüsseltechnologie für die Zukunft. Herausgeber: K.H. Hoffmann, W. Jäger, T. Lohmann, H. Schunck. Springer-Verlag, Heidelberg/Berlin (1996) 397 - 407

[Lo/Ma 90] **Louis A.K. - Maaß P.:** *A mollifier method for linear operator equations of the first kind.* Inverse Problems 6 (1990) 427 - 440

[Lo/Ma 91] **Louis A.K. - Maaß P.:** *Smoothed projection methods for the moment problem.* Num. Math. 59 (1991) 277 - 294

[Lo/Ma/Ri 94] **Louis A.K. - Maaß P. - Rieder A.:** *Wavelets.* Teubner, Stuttgart (1994)

[Lo/Na 83] **Louis A.K. - Natterer F.:** *Mathematical problems in computerized tomography.* Proceedings IEEE 71 (1983) 379 - 389

[Lo/Sc 96] **Louis A.K. - Schuster T.:** *A novel filter design technique in 2D computerized tomography.* Inverse Problems 12 (1996) 685 - 696

[Lu 62] **Luke Y.:** *Integrals of Bessel functions.* McGraw-Hill, New York (1962)

[Ma 87] **Maaß P.:** *The X-ray transform: Singular value decomposition and resolution.* Inverse Problems 3 (1987) 729 - 741

[Mo/Fe 53] **Morse P.M. - Feshbach H.:** *Methods of theoretical physics, Parts I and II.* International student edition. McGraw-Hill (1953)

[Nac 88] **Nachman A.:** *Reconstructions from boundary measurements.* Annals of Math. 128 (1988) 531 - 576

[Nac 96] **Nachman A.:** *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem.* Annals of Math. 143 (1996) 71 - 96

[Nat 86] **Natterer F.:** *The mathematics of computerized tomography.* Teubner, Stuttgart ; Wiley, New York (1986)

[Nat 97] **Natterer F.:** *An algorithm for 3D ultrasound tomography.* In Chavent G., Sabatier P.C. (eds.): Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction, LN in Physics, Vol.: 486 (1997).

[Nat/Wu 93] **Natterer F. - Wübbeling F.:** *A finite difference method for the inverse scattering problem at fixed frequency.* Lecture Notes in Physics, Vol. 422 (1993) (Berlin : Springer) 157 - 166

[Nat/Wu 95] **Natterer F. - Wübbeling F.:** *A propagation-backpropagation method for ultrasound tomography.* Inverse Problems 11 (1995) 1225 - 1232

[Ne 82] **Newton R.G.:** *Scattering theory of waves and particles.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1982)

[Or/Rh 70] **Ortega J. - Rheinboldt W.:** *Iterative solution of nonlinear equations in several variables.* Academic Press (1970)

[Pa/So 87] **Päivärinta L. - Somersalo E.:** *The uniqueness of the one dimensional electromagnetic inversion with bounded potentials.* J. Math. Anal. Appl. 127 (1987) 312 - 333

[Pi/Jo/Hu 91] **Pichot C. - Joachimowicz N. - Hugonin J.-P.:** *Inverse Scattering: An iterative numerical method for electromagnetic imaging.* IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 39, No. 12 (1991) 1742 - 1752

[Ra 86] **Ramm A.G.:** *Scattering by obstacles.*
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1986)

[Ra 95] **Ramm A.G.:** *A numerical method for solving inverse scattering problems.* Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 50 (1) (1995) 18 - 22

[Su/Uh 93] **Sun Z. - Uhlmann G.:** *Recovery of singularities for formally determined inverse problems.* Comm. Math. Physics 153 (1993) 431 - 445

[Sy/Uh 90] **Sylvester J. - Uhlmann G.:** *The Dirichlet to Neumann map and applications.* SIAM Inverse Problems in Part. Diff. Eq. Proc. (1990) 101 - 139

[Va/Kl 97] **Van den Berg P. - Kleinman R.E.:** *A contrast source inversion method.* Inverse Problems 13 (1997) 1607 - 1620

Index