Die Approximative Inverse als Rekonstruktionsmethode in der Röntgen–Computertomographie

Dissertation

zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von

Rainer L. Dietz

Saarbrücken

1999

Tag des Kolloquiums:	16. Juli 1999
Dekan:	Univ.-Prof. Dr. Th. Eicher
Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr. A. K. Louis
	Univ.-Prof. Dr. G. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Röntgen–Computertomographie ist ein bildgebendes Verfahren, das sowohl in der diagnostischen Medizin als auch bei der zerstörungsfreien Materialprüfung eingesetzt wird. Dabei appliziert man auf einen ebenen Schnitt durch ein Objekt oder ein ganzes Volumen aus verschiedenen Richtungen eine Röntgenstrahlung. Mit Hilfe der Durchstrahlungsaufnahmen läßt sich die innere Struktur des Prüfobjektes rekonstruieren.

Die mathematische Formulierung dieser Aufgabe führt zu einer Integralgleichung 1. Art,

$$\mathcal{P}f = g \ .$$

Die Integraltransformation $\mathcal{P}$ wird Röntgen–Transformation genannt.

Die Rekonstruktion der Gewebedichte f aus den gemessenen Absorbtionskoeffizienten ist also ein inverses Problem. Eine typische Eigenschaft von inversen Problemen ist ihre Schlechtgestelltheit. Kleine Meßfehler in den Daten führen zu großen Änderungen im Ergebnis. Da also die exakte Lösung nicht erreichbar ist, muß man mit Hilfe eines Regularisierungsverfahrens eine Näherungslösung bestimmen. Einen Überblick über inverse und schlecht gestellte Probleme und deren Regularisierung gibt das Buch von Louis [26].

In den siebziger Jahren stand die Entwicklung der 2D–Röntgen–Computertomographie im Vordergrund. Hierbei überdecken Röntgenstrahlen eine Objektschicht. Die verschiedenen Abtastgeometrien werden je nach Anordnung von Röntgenquelle und Detektor bezeichnet. Die parallele Geometrie, die in den ersten Scannern benutzt wurde, ist mittlerweile weitgehend von der effizienteren Fächerstrahlgeometrie abgelöst worden. Im parallelen Fall stimmt jedoch die Röntgen–Transformation bis auf die Parametrisierung mit der Radon–Transformation überein. Die Inversionsformel von Ra-

DON [44] ist zwar zur Lösung des Rekonstruktionsproblems nicht geeignet, aber die theoretischen Überlegungen, insbesondere zur Schlechtgestelltheit, sowie die Herleitung und Analyse von Inversionsmethoden basieren überwiegend auf dieser Abtastgeometrie. Für eine ausführliche Diskussion sei auf das Buch von NATTERER [42] hingewiesen, einen Überblick gibt auch das Buch von HERMAN [16]. Unter den Algorithmen hat sich die gefilterte Rückprojektion als das Standardverfahren herauskristallisiert. Sie wurde ursprünglich in der Radioastronomie eingeführt (siehe BRACEWELL UND RIDDLE [2]). Für die Röntgen–Computertomographie in der medizinischen Anwendung wurde sie von SHEPP UND LOGAN [51] bzw. RAMACHANDRAN UND LAKSHMINARAYANAN [45] erstmals erfolgreich eingesetzt.

Im Idealfall müßte die Intensitätsabminderung für alle Strahlen, d. h. entlang sämtlicher Linien, die das Objekt treffen, bekannt sein. Da in der Praxis die Werte jedoch nur an diskreten Punkten gemessen werden können, spricht man von vollständigen Daten, wenn die Strahlen das Objekt gleichmäßig überdecken. In manchen Anwendungen ist es allerdings nicht möglich oder auch nicht erwünscht, den Objektquerschnitt komplett einzuscannen. Ein Beispiel dafür ist die Limited–Angle–Geometrie, bei der das Objekt nicht vollständig von der Röntgenröhre umrundet wird.

Die schichtweise Rekonstruktion von Volumina mit Methoden der 2D–Tomographie ist aufwendig. Da die einzelnen Schichten sukzessive projiziert werden müssen, ist die Meßzeit sehr hoch. Außerdem ist die Auflösung senkrecht zur Projektionsebene zu gering, so daß das Risiko besteht, beispielsweise bei der Prüfung von Bauteilen kleine Fehler nicht detektieren zu können. Es ist also effizienter, den Zeilendetektor durch einen flächigen Detektor zu ersetzen und das Volumen nicht mit einem Röntgen–Fächer sondern einem –Kegel zu bestrahlen. In den Anwendungen beschreibt die Röntgenröhre meist genau wie im zweidimensionalen Fall einen Kreis um das Objekt. Für diesen Fall hat sich das Verfahren von FELDKAMP ET AL. [7] zum Standardverfahren entwickelt. Es ist eine Verallgemeinerung der gefilterten Rückprojektion von der 2D– auf die 3D–Tomographie. Eine schnelle Version der Rückprojektion wird von BUCK [3] vorgeschlagen. Das Verfahren von GRANGEAT [12] basiert auf einem fundamentalen Zusammenhang zwischen den gemessenen Linienintegralen und der 3D–Radon–Transformation. Der Rekonstruktionsprozess kann bei dieser Methode jedoch erst gestartet werden, wenn alle Daten gemessen sind. JACOBSON [17] konstruierte eine schnellere

Version des Algorithmus durch den Einsatz von Fourier–Methoden. Eine sehr effiziente Methode ist auch die Konturrekonstruktion von LOUIS UND MAASS [34]. Hier werden allerdings keine Dichten sondern Dichtesprünge rekonstruiert. Gerade deshalb hat sich das Verfahren in der Materialprüfung bewährt (siehe auch [3, 29, 31]).

Eine relativ neue Methode zur Lösung von linearen, inversen Problemen ist die Approximative Inverse, die unter diesem Namen erstmals von LOUIS [28] verwendet wurde. Dabei wird nicht f sondern $\langle f, e\rangle$ berechnet. Die Funktion e hat die Aufgabe, die Fehler im Resultat zu glätten, und heißt deshalb Mollifier. Der Vorteil der Approximativen Inversen liegt darin, daß das Ergebnis als Skalarprodukt der Daten mit einem unabhängig davon vorzuberechnenden Rekonstruktionskern ψ ausgedrückt werden kann:

$$\langle f, e\rangle = \langle g, \psi\rangle \ .$$

Das nun zu verfolgende Ziel lautet, die Approximative Inverse für die Röntgen–Transformation zu bestimmen und die Ergebnisse in die Praxis umzusetzen, d. h. auf das Rekonstruktionsproblem sowohl in der 2D– als auch in der 3D–Röntgen–Computertomographie anzuwenden. Die grundlegende Idee dabei ist, obwohl die Daten nur diskret gemessen werden können, den Rekonstruktionskern für das kontinuierliche Problem zu bestimmen und die Diskretisierung auf die Berechnung der Approximativen Inversen zu verschieben.

Im ersten Kapitel wird das mathematische Modell der Röntgen–Computertomographie hergeleitet, die Approximative Inverse wird eingeführt, und am Beispiel der Radon–Transformation wird ein Rekonstruktionskern berechnet.

Mit einem Rekonstruktionsverfahren für die parallele Geometrie beginnt das zweite Kapitel. Daraus läßt sich das Verfahren für die Fächerstrahlgeometrie ableiten. Als Beispiel für unvollständige Daten wird dann noch die Approximative Inverse im Limited–Angle–Fall berechnet. Genau wie bei vollständigen Daten, werden auch hier numerische Beispiele gezeigt, und das Verfahren wird mit bekannten Methoden verglichen.

Das dritte Kapitel wendet sich schließlich der 3D–Tomographie zu. Eine parallele Geometrie ist zwar für die Praxis nicht relevant, wird hier dennoch betrachtet. Die Übertragung des Rekonstruktionskernes auf die Kegelstrahlgeometrie ist problemlos möglich, jedoch immer noch für eine Abtastkurve, der in der Praxis keine Bedeutung zukommt. Für Kurven, die die sogenannte Tuysche Bedingung erfüllen, wird ebenfalls ein Rekonstruktionsverfahren angegeben. Die Arbeit endet mit einem Rekonstruktionsalgorithmus für eine kreisförmige Abtastkurve, dessen numerische Ergebnisse mit denen des Feldkamp–Algorithmus verglichen werden.

Mein besonderer Dank gilt an dieser Stelle Herrn Univ.-Prof. Dr. Alfred K. Louis. Er hat meinen Weg durch den Dschungel der Tomographie stets interessiert und fürsorglich begleitet, und mir mit Rat und Tat zur Seite gestanden, wenn es galt, Hindernisse zu beseitigen.
Danken möchte ich auch meinen Kollegen aus der Arbeitsgruppe, insbesondere Herrn Dipl.-Math. Thomas Schuster. Die Zusammenarbeit mit ihm in sehr freundschaftlicher Atmosphäre hatte großen Anteil am Gelingen meiner Arbeit.
Ein herzliches Dankeschön geht auch an meine Eltern, ohne deren Unterstützung diese Dissertation nie entstanden wäre.
Nicht zuletzt danke ich meiner lieben Silke für ihr Verständnis und ihre Geduld.

Saarbrücken, im Juli 1999 Rainer Dietz

Kapitel 1

Problemstellung und mathematische Grundlagen

Am Beginn steht die Herleitung des mathematischen Modells der Röntgen–Computertomographie. Die physikalischen Zusammenhänge werden in mathematische Formeln gefaßt und wir formulieren die Rekonstruktionsaufgabe sowohl für den zweidimensionalen als auch für den dreidimensionalen Fall. Im zweiten Abschnitt wird die Approximative Inverse, die wir zur Lösung des entstehenden inversen Problems verwenden, eingeführt. Schließlich wollen wir am Beispiel der Radon–Transformation die Vorgehens– und Wirkungsweise dieses Regularisierungsverfahrens erklären.

1.1 Das Mathematische Modell der Röntgen–Computertomographie

Das Prinzip der Röntgen–Computertomographie läßt sich leicht in Worten beschreiben. Röntgenstrahlen durchdringen ausgehend von einer Röntgenquelle mit einer Ausgangsintensität I_0 das zu untersuchende Objekt. Die bei der Transmission entstehende Intensitätsabminderung eines Strahles wird an einem Detektor gemessen. Aus dieser für endlich viele Strahlen gemessenen Information wird rekonstruiert, wodurch der Intensitätsverlust im Objekt verursacht wurde.

Bei der Herleitung des zugehörigen mathematischen Modells wird angenommen, daß die Röntgenstrahlen sich geradlinig ausbreiten und die Intensitätsabnahme $-\Delta I$ proportional zur Intensität I und zur Weglänge Δt ist. Durch den Proportionalitätsfaktor f (dem Röntgenstrahlenabsorbtionskoeffizienten, der der Dichte des Gewebes entspricht) erhält man

$$\Delta I = -f \, I \, \Delta t \ .$$

Der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ liefert die gewöhnliche Differentialgleichung

$$I' = -f \, I \ ,$$

und deren Integration über den Strahl L ergibt schließlich

$$\int_L f \, dt = -\ln(I_L/I_0) \ ,$$

wobei I_L die für den Strahl L am Detektor gemessene Intensität bezeichnet. Das inverse Problem besteht nun darin, aus den für endlich viele Linien L bekannten Größen $g_L = -\ln(I_L/I_0)$ die Dichte f des Objektes zu rekonstruieren.

Die Strahlen L werden in Abhängigkeit von der Meßgeometrie parametrisiert. Bei der sogenannten parallelen Geometrie wird eine Gerade durch ihren Richtungsvektor θ und ihren Schnittpunkt mit der Hyperebene $\theta^\perp$ festgelegt. Für $f \in \mathsf{S}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in S^{n-1}$ und $y \in \theta^\perp$ definiert die Integral–Transformation $\mathcal{P}$ mit

$$\mathcal{P}f(\theta, \, y) := \int_{\mathbb{R}} f(y + t\theta) \, dt$$

die parallele Röntgen–Transformation. Hier bezeichnet $\mathsf{S}(\mathbb{R}^n)$ den Schwartzschen Raum der schnell fallenden Funktionen, S^{n-1} die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$. Geht man von zweidimensionalen Schichtrekonstruktionen aus ($n = 2$), dann stimmt die parallele Röntgen–Transformation bis auf die Parametrisierung mit der Radon–Transformation überein. Letztere ist allgemein für $f \in \mathsf{S}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in S^{n-1}$ und $s \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{R}f(\omega, \, s) = \int_{\omega^\perp} f(s\omega + y) \, dy \tag{1.1.1}$$

gegeben. Generell sei für $n = 2$

$$\omega(\varphi) = (\cos\varphi, \, \sin\varphi)^\top \quad \text{und} \quad \omega'(\varphi) = (-\sin\varphi, \, \cos\varphi)^\top \ , \ \varphi \in [0, \, 2\pi) \ .$$

Offensichtlich ist dann

$$\mathcal{R}f(\omega,\, s) = \mathcal{P}f(\omega',\, s\omega) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{P}f(\omega,\, y) = \mathcal{R}f(\omega',\, y^\top\omega')$$

für $\omega = \omega(\varphi)$. Ein Zusammenhang zwischen paralleler Röntgen–Transformation und Radon–Transformation kann aber auch für $n \geq 3$ hergestellt werden. Wie man leicht sieht, ist

$$\mathcal{R}^n f(\omega,\, s) = \mathcal{R}^{n-1}\mathcal{P}_\theta f(\omega,\, s)$$

mit $\mathcal{P}_\theta f = \mathcal{P}f(\theta, \cdot)$. Die $(n-1)$–dimensionale Radon–Transformation $\mathcal{R}^{n-1}$ wirkt hier auf $\theta^\perp$ (siehe [38]).

Eine Inversionsformel für die Radon–Transformation ist längst bekannt. Für $n = 2, 3$ konnte sie schon 1917 von Radon bewiesen werden (siehe [44]). In allgemeinerer Form wurde sie in Smith et al. [53] gezeigt. Die Inversionsformel für die parallele Röntgen–Transformation wurde von Solmon [54] hergeleitet. Eine eingehende Analyse der beiden genannten Integraltransformationen kann z. B. in dem Buch von Natterer [42] nachgelesen werden.

In den ersten kommerziellen Scannern wurde die parallele Geometrie benutzt. Man benötigte eine Röntgenquelle und ein einziges Detektorelement auf der gegenüberliegenden Seite des Objektes. Diese Anordnung wurde um das Objekt rotiert und an jeder Position parallel am Objekt vorbei verschoben, was relativ zeitaufwendig war.

Bei praktischen Anwendungen wird die parallele Geometrie heute nur noch ganz selten beim zerstörungsfreien Prüfen eingesetzt. Bei den modernen Scannern bewegt sich die Röntgenröhre auf einer (Kreis–)Bahn Γ um das Objekt und von Positionen $a \in \Gamma$ wird ein Fächer (bei Schichtaufnahmen) bzw. ein Kegel (bei Volumenaufnahmen) von Strahlen der Intensität I_0 ausgesandt. Nach Durchlaufen des Objektes werden die Intensitäten I_L von einem Zeilen– $(n = 2)$ bzw. einem Flächen–Detektor $(n = 3)$ gemessen. Die Daten lassen sich also durch

$$\mathcal{D}f(a,\, \theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta)\, dt \ ,\ \theta \in S^{n-1}\ , \tag{1.1.2}$$

beschreiben. Der Operator $\mathcal{D}$ wird in der Literatur auch (etwas irreführend) als "divergente Röntgen–Transformation" bezeichnet.

Fortan soll die Kurve Γ (wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angenommen wird) einen Kreis mit Radius $r > 1$ darstellen.

Im Fall $n = 2$ kann man sich wieder auf die Radon–Transformation zurückziehen. Ist $a = r\,\omega(\alpha)$, $\alpha \in [0,\, 2\pi)$, der Kurvenpunkt, an dem die Röntgenquelle positioniert ist, und β der Winkel zwischen $-a$ und dem Strahl in Richtung $\theta \in S^1$, dann ist

$$\mathcal{D}f(a,\, \theta) = \mathcal{R}f(\omega,\, r\, \sin\beta)$$

mit $\omega = \omega(\alpha - \beta + \pi/2)$.

Für die 3D–Tomographie konnte eine Inversionsformel zunächst nur angegeben werden, wenn die Quellpunkte a auf einer Kugeloberfläche rund um das Objekt liegen (siehe [14]). Tuy [55] gelang es zu zeigen, daß eine Inversion schon möglich ist, wenn jede Ebene im $\mathbb{R}^3$, die das Objekt schneidet, auch die Kurve Γ schneidet. Daß diese Inversion in gewissem Sinne als stabil bezeichnet werden kann, wurde von Finch [8] erarbeitet. Natürlich verletzt eine kreisförmige Abtastkurve, die bei den Anwendungen die Regel ist, die Tuysche Bedingung. Daß in diesem Fall das Rekonstruktionsproblem extrem schlecht gestellt ist, geht ebenfalls auf Finch [8] zurück.

1.2 Das Konzept der Approximativen Inversen

Bei der Lösung von inversen Problemen, deren typisches Merkmal ihre Schlechtgestelltheit ist (siehe [26]), muß man auf sogenannte Regularisierungsverfahren zurückgreifen. Ein allgemeiner Zugang hierzu ist für lineare, schlecht gestellte Probleme in [30] gegeben. Eine mögliche Methode ist die Approximative Inverse, die in [28] eingeführt wurde. Bevor die Approximative Inverse zur Lösung des Rekonstruktionsproblems in der Röntgen–Computertomographie eingesetzt wird, soll sie hier vorgestellt und einige ihrer wichtigen Eigenschaften genannt werden. Die Ursprünge dieser Methode gehen auf frühere Arbeiten von Louis und Maass [32, 33] zurück.

Es sei $\mathcal{A} : X \to Y$ ein linearer, kompakter Operator zwischen Hilberträumen X und Y. Für $\mathcal{A}$ gibt es eine Darstellung

$$\mathcal{A}f = \sum_n \sigma_n \, \langle f,\, v_n \rangle_X \, u_n \ ,$$

wobei $(v_n) \subset X$ und $(u_n) \subset Y$ vollständige Orthonormalsysteme für $\mathrm{N}(\mathcal{A})^\perp$ bzw. $\overline{\mathrm{range}(\mathcal{A})}$ bilden. Die reellen Zahlen σ_n heißen Singulärwerte und $\{v_n, u_n; \sigma_n\}_n$ Singulärwertzerlegung von $\mathcal{A}$. Es gelten die Beziehungen

$$\mathcal{A}v_n = \sigma_n u_n \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A}^* u_n = \sigma_n v_n \; . \tag{1.2.1}$$

Mit $\mathcal{A}^*$ bezeichnet man den adjungierten Operator von $\mathcal{A}$. Für ihn gilt

$$\mathcal{A}^* g = \sum_n \sigma_n \langle g, u_n \rangle_Y v_n \; .$$

Für die weiteren Betrachtungen müssen wir den Hilbertraum X auf Funktionenräume einschränken. Für unsere Zwecke genügt die Definition $X := \mathsf{L}_2(\Omega)$ mit einem beschränkten Gebiet Ω. Die Aufgabe besteht darin, zu gegebenen Daten $g \in Y$ ein $f \in X$ mit $\mathcal{A}f = g$ zu finden. Dieses Problem ist schlecht gestellt, falls $\dim\big(\mathrm{range}(\mathcal{A})\big) = \infty$ ist. Bei der Approximativen Inversen wird statt f eine geglättete Version $\check{f}$ durch

$$\check{f}(x) = \langle f, e(x, \cdot) \rangle_X, \;\; x \in \Omega,$$

bestimmt, wobei e einen geeigneten Mollifier bezeichnet. Gibt es ein $\psi(x; \cdot) \in Y$ mit $\mathcal{A}^*\psi(x; \cdot) = e(x, \cdot)$, so gilt

$$\begin{aligned} \langle f, e(x, \cdot) \rangle_X &= \langle f, \mathcal{A}^*\psi(x, \cdot) \rangle_X \\ &= \langle \mathcal{A}f, \psi(x, \cdot) \rangle_Y \\ &= \langle g, \psi(x, \cdot) \rangle_Y \; , \end{aligned}$$

mit anderen Worten die gesuchte Lösung berechnet sich als Skalarprodukt der Daten mit einem vorzuberechnenden Rekonstruktionskern. Ist $e(x, \cdot) \notin \mathrm{range}(\mathcal{A}^*)$, dann setzen wir $e \in \mathrm{range}(A^*) \oplus \mathrm{range}(A^*)^\perp$ voraus, was einer Glattheitsbedingung an den Mollifier entspricht. Der allgemeine Fall $e \in X$ wird in [48] behandelt. Ist $\mathcal{A}$ nicht injektiv (andernfalls ist $\mathrm{range}(A^*)^\perp = 0$), dann minimiert man den Defekt

$$\|\mathcal{A}^*\psi(x; \cdot) - e(x, \cdot)\|_X \; ,$$

indem man die Normalgleichung

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\psi(x; \cdot) = \mathcal{A}e(x, \cdot)$$

löst, d. h. der Rekonstruktionskern ist die verallgemeinerte Lösung von $\mathcal{A}^*\psi(x; \cdot) = e(x, \cdot)$. Es gilt $\psi(x; \cdot) = (\mathcal{A}^*)^\dagger e(x, \cdot)$ (siehe [26]).

Definition 1.2.1 *Die Abbildung* $\mathcal{S} : Y \to X$ *mit* $\mathcal{S}g(x) = \langle g,\, \psi(x;\cdot)\rangle$ *heißt Approximative Inverse von* $\mathcal{A}$*,* $\psi(x;\cdot)$ *heißt Rekonstruktionskern bezüglich dem Rekonstruktionspunkt* x*.*

Den Rekonstruktionskern kann man in allen Fällen unabhängig von den Daten vorberechnen. Kennt man das singuläre System $\{v_n,\, u_n;\, \sigma_n\}_n$ von $\mathcal{A}$, dann erhält man folgende Reihenentwicklung:

$$\psi(x;\cdot) = \sum_{\sigma_n>0} \sigma_n^{-1} \langle e(x,\cdot),\, v_n\rangle_X \, u_n \; . \tag{1.2.2}$$

Wegen der Voraussetzung $e(x,\cdot) \in \mathrm{D}\big((\mathcal{A}^*)^\dagger\big) = \mathrm{range}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{range}(\mathcal{A}^*)^\perp$ konvergiert die Reihe (1.2.2). Die Approximative Inverse kann auch als Glättung der Pseudoinversen von $\mathcal{A}$ verstanden werden: mit $\mathcal{A}^\dagger g = \sum_{\sigma_n>0} \sigma_n^{-1} \langle g,\, u_n\rangle \, v_n$ ist $\mathcal{S}g = \langle e,\, \mathcal{A}^\dagger g\rangle$ (siehe [30]).

Der Rekonstruktionskern kann zwar unabhängig von den Daten vorberechnet werden, jedoch ist diese Vorberechnung unter Umständen sehr rechenzeit– und vor allem sehr speicherintensiv, z. B. wenn der Rekonstruktionskern für alle Rekonstruktionspunkte x berechnet werden muß. Abhilfe schafft hier eine wichtige Eigenschaft der Approximativen Inversen: die Übertragung von Invarianzen des Operators $\mathcal{A}$ auf den Rekonstruktionskern.

Lemma 1.2.2 *Seien* $\mathcal{A} : X \to Y$*,* $T_1^x : X \to X$*,* $T_2^x : Y \to Y$ *und* $T_3^x : Y \to Y$ *lineare, stetige Operatoren mit* $T_1^x \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* T_2^x$ *und* $T_3^x \mathcal{A} = \mathcal{A} T_1^x$*. Weiterhin seien* $e(x,\cdot),\, E \in \mathrm{D}\big((\mathcal{A}^*)^\dagger\big)$ *Mollifier mit* $e(x,\cdot) = T_1^x E(\cdot)$ *und* ϕ *sei die Lösung von*

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\phi = \mathcal{A}E \; .$$

Dann ist die Lösung von

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\psi(x) = \mathcal{A}e(x,\cdot)$$

gegeben als

$$\psi(x) = T_2^x \phi \; .$$

Sind die Mollifier $e(x,\cdot),\, E \in \mathrm{range}(\mathcal{A}^*)$*, dann gilt für die Lösung von*

$$\mathcal{A}^*\psi(x) = e(x,\cdot)$$

ebenfalls

$$\psi(x) = T_2^x \phi \ ,$$

wobei ϕ nun

$$\mathcal{A}^* \phi = E$$

löst.

Beweis: Im zweiten Fall ist

$$\mathcal{A}^* \psi(x) = T_1^x E = T_1^x \mathcal{A}^* \phi = \mathcal{A}^* T_2^x \phi$$

und im ersten Fall

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* \psi(x) = \mathcal{A} T_1^x E = T_3^x \mathcal{A} E = T_3^x \mathcal{A}\mathcal{A}^* \phi = \mathcal{A}\mathcal{A}^* T_2^x \phi$$

(siehe auch [28]). ■

Damit lassen sich Rechen– und Speicheraufwand erheblich reduzieren. Mit Hilfe einer Translationsinvarianz beispielsweise braucht der Rekonstruktionskern nur noch für $x = 0$ berechnet zu werden. Er geht für alle anderen Rekonstruktionspunkte durch Translation aus $\psi(0; \cdot)$ hervor.

1.3 Die Approximative Inverse der Radon–Transformation

Am Beispiel der Radon–Transformation wird im folgenden Abschnitt ein Rekonstruktionskern und eine Approximative Inverse berechnet. Um die Reihenentwicklung (1.2.2) verwenden zu können, benötigen wir die Singulärwertzerlegung der Radon–Transformation. Nach Lemma 1.2.2 reduzieren Invarianzen den Aufwand. Deshalb muß man über solche Invarianzen nachdenken, bevor man schließlich an die Berechnung des Rekonstruktionskernes geht. Im letzten Teil wird noch eine Variante angegeben, wie man unter bestimmten Umständen den Rekonstruktionskern mit Hilfe der Inversionsformel der Radon–Transformation berechnen kann.

1.3.1 Die Singulärwertzerlegung

Die Radon–Transformation, die in (1.1.1) zunächst nur für schnell fallende Funktionen definiert wurde, läßt sich stetig auf gewichtete L_2–Räume fortsetzen. Zunächst einige Bezeichnungen: Ω^n steht für den Einheitsball im $\mathrm{I\!R}^n$ und $W_\nu(x) = (1-|x|^2)^{\nu-n/2}$, $x \in \Omega^n$, sei ein dazugehöriges Gewicht. Mit Z wird der Zylinder $S^{n-1} \times [-1,\, 1]$ abgekürzt und $w_\nu(s) = (1-s^2)^{\nu-1/2}$, $s \in [-1,\, 1]$, lautet das entsprechende Gewicht.

Satz 1.3.1 *Sei $\nu > n/2-1$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathsf{L}_2(\Omega^n,\, W_\nu^{-1}) &\rightarrow \mathsf{L}_2(Z,\, w_\nu^{-1})\ , \\ \mathcal{R}f(\omega,\, s) &= \int\limits_{\omega^\perp \cap \Omega^n} f(s\omega + y)\, dy \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

ist stetig. Ihre Adjungierte ist

$$\mathcal{R}^* g(x) = W_\nu(x) \int\limits_{S^{n-1}} g(\omega,\, x^\top\omega)\, w_\nu^{-1}(x^\top\omega)\, d\omega\ .$$

Beweis: Mit $\mathcal{R}_\omega f = \mathcal{R}f(\omega, \cdot)$ und der Cauchy–Schwartzschen Ungleichung ist zunächst

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_\omega f(s)|^2 &= \left| \int\limits_{\omega^\perp\cap\Omega^n} W_\nu^{1/2}(s\omega+y)\, W_\nu^{-1/2}(s\omega+y)\, f(s\omega+y)\, dy \right|^2 \\ &\le \int\limits_{\omega^\perp\cap\Omega^n} W_\nu(s\omega+y)\, dy \int\limits_{\omega^\perp\cap\Omega^n} |f(s\omega+y)|^2\, W_\nu^{-1}(s\omega+y)\, dy\ . \end{aligned}$$

Für $\nu > n/2-1$ ist W_ν integrierbar und das erste Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \int\limits_{\omega^\perp\cap\Omega^n} W_\nu(s\omega+y)\, dy &= \int\limits_{S^{n-1}\cap\omega^\perp} \int\limits_0^{\sqrt{1-s^2}} W_\nu(s\omega+t\theta)\, t^{n-2}\, dt\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\, |S^{n-2}|\, B\big((n-1)/2,\, \nu+1-n/2\big)\, w_\nu(s) \\ &= c_\nu\, w_\nu(s)\ . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet B die Beta–Funktion und $|S^{n-2}|$ die Oberfläche von S^{n-2}. Damit ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{1} |\mathcal{R}_\omega f(s)|^2\, w_v^{-1}(s)\, ds &\le c_\nu \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{\omega^\perp\cap\Omega^n} |f(s\omega+y)|^2\, W_\nu^{-1}(s\omega+y)\, dy\, ds \\ &= c_\nu\, \|f\|^2_{\mathsf{L}_2(\Omega^n,\, W_\nu^{-1})}\ . \end{aligned}$$

Integration über S^{n-1} ergibt die Stetigkeit von $\mathcal{R}$. Den adjungierten Operator erhalten wir durch

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}f,\, g\rangle_{\mathsf{L}_2(Z,\, w_\nu^{-1})} &= \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{-1}^{1} \mathcal{R}f(\omega,\, s)\, g(\omega,\, s)\, w_\nu^{-1}(s)\, ds\, d\omega \\
&= \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{\omega^\perp \cap \Omega^n} f(s\omega + y)\, g(\omega,\, s)\, w_\nu^{-1}(s)\, dy\, ds\, d\omega \\
&= \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{\Omega^n} f(x)\, W_\nu^{-1}(x)\, W_\nu(x)\, g(\omega,\, x^\top\omega)\, w_\nu^{-1}(x^\top\omega)\, dx\, d\omega \\
&= \int\limits_{\Omega^n} f(x)\, W_\nu^{-1}(x)\, W_\nu(x) \int\limits_{S^{n-1}} g(\omega,\, x^\top\omega)\, w_\nu^{-1}(x^\top\omega)\, d\omega\, dx \;.
\end{aligned}
$$

■

Bemerkung: Der Beweis kann auch in [21] nachgelesen werden. Die Spezialfälle $\nu = n/2$ bzw. $n = 2$ wurden in [42] bzw. [26] behandelt.

Die Singulärwertzerlegung für diese Abbildung wurde von Louis [23] berechnet. Die Notation orientiert sich hier an [24].

Es bezeichnen $P_m^{(\alpha,\,\beta)}$ die Jacobi–Polynome vom Grad m, C_m^ν die Gegenbauer–Polynome vom Grad m, Y_{lk}, $k = 1,\, \ldots\,,\, N(n,\, l)$ eine Orthonormalbasis der Kugelflächenfunktionen auf S^{n-1} vom Grad l und $N(n,\, l)$ die Dimension dieses Vektorraumes.

Satz 1.3.2 *Sei*

$$
\begin{aligned}
v_{mlk}^\nu(x) &= W_\nu(x)\, |x|^l\, P_{(m-l)/2}^{(\nu-n/2,\, l+n/2-1)}(2|x|^2 - 1)\, Y_{lk}(x/|x|) \;, \\
u_{mlk}^\nu(\omega,\, s) &= d_{ml}\, w_\nu(s)\, C_m^\nu(s)\, Y_{lk}(\omega) \;, \\
\sigma_{mlk}^2 &= \pi^{n-1}\, 2^{2\nu}\, \frac{\Gamma\big((m+l)/2+\nu\big)\, \Gamma\big((m-l)/2+\nu-n/2+1\big)\, \Gamma(m+1)}{\Gamma\big((m+l+n)/2\big)\, \Gamma\big((m-l)/2+1\big)\, \Gamma(m+2\nu)} \\
&= \sigma_{ml}^2 \;,
\end{aligned}
$$

mit

$$
d_{ml} = \pi^{n/2-1}\, 2^{2\nu-1} \frac{\Gamma\big((m-l)/2+\nu-n/2+1\big)\, \Gamma(m+1)\, \Gamma(\nu)}{\Gamma\big((m-l)/2+1\big)\, \Gamma(m+2\nu)} \;.
$$

Dann bildet $\{v_{mlk}^\nu,\, u_{mlk}^\nu;\, \sigma_{mlk}^\nu\}$: $m \geq 0,\, 0 \leq l \leq m$ *mit* $m + l$ *gerade,* $k = 1,\, \ldots\,,\, N(n,\, l)$*, ein vollständiges (nicht normiertes) singuläres System für die Radon–Transformation als Abbildung von* $\mathsf{L}_2(\Omega^n,\, W_\nu^{-1})$ *nach* $\mathsf{L}_2(Z,\, w_\nu^{-1})$.

1.3.2 Invarianzen des Operators

Bevor wir den Rekonstruktionskern konkret ausrechnen, beantworten wir die Frage, ob er für alle Rekonstruktionspunkte x, für alle $\omega \in S^{n-1}$ und für alle $s \in [-1, 1]$ ausgewertet werden muß, oder ob wir Rechenaufwand einsparen können. Für diese Betrachtungen müssen wir uns auf den Fall $\nu = n/2$ beschränken, da die gewünschten Ergebnisse in einer größeren Allgemeinheit nicht erzielbar sind. Es ist $W_{n/2}(x) = 1$ und $w_{n/2}(s) = (1 - s^2)^{(n-1)/2} =: w(s)$ und wir betrachten

$$\mathcal{R} : \mathsf{L}_2(\Omega^n) \to \mathsf{L}_2(Z, w^{-1}) \ .$$

Als erstes wird eine Translationsinvarianz hergeleitet. Seien dazu

$$\begin{array}{rcl} T_1^x : \mathsf{L}_2(\Omega^n) & \to & \mathsf{L}_2(\Omega^n) \ , \\ f(\cdot) & \mapsto & 2^{-n} f\left(\dfrac{\cdot - x}{2}\right) \end{array} \tag{1.3.2}$$

und

$$\begin{array}{rcl} T_2^x : \mathsf{L}_2(Z, w^{-1}) & \to & \mathsf{L}_2(Z, w^{-1}) \ , \\ g(\omega, s) & \mapsto & 2^{-n} g(\omega, \dfrac{s - x^\top \omega}{2}) \, w^{-1}\left(\dfrac{s - x^\top \omega}{2}\right) w(s) \ . \end{array} \tag{1.3.3}$$

Der Faktor "1/2" garantiert, daß das jeweilige Argument wieder Element von Ω^n bzw. $[-1, 1]$ ist. Es gilt:

$$\begin{array}{rcl} T_1^x \mathcal{R}^* g(y) & = & 2^{-n} \displaystyle\int_{S^{n-1}} g(\omega, \left(\frac{y - x}{2}\right)^\top \omega) \, w^{-1}(\left(\frac{y - x}{2}\right)^\top \omega) \, d\omega \\ & = & \displaystyle\int_{S^{n-1}} 2^{-n} g(\omega, \frac{y^\top \omega - x^\top \omega}{2}) \, w^{-1}(\frac{y^\top \omega - x^\top \omega}{2}) \, w(y^\top \omega) \, w^{-1}(y^\top \omega) \, d\omega \\ & = & \mathcal{R}^* T_2^x \, g(y) \ . \end{array}$$

Da die Radon–Transformation injektiv ist, folgt für die Lösung von $\mathcal{R}^* \psi(x; \cdot) = e(x, \cdot)$ aus Lemma 1.2.2

$$\psi(x; \omega, s) = T_2^x \phi(\omega, s) \ ,$$

wenn $e(x, \cdot) = T_1^x e^0$ und $\mathcal{R}^* \phi = e^0$ ist. Konkret bedeutet dies, daß der Rekonstruktionskern bei einem Mollifier mit $e(x, y) = T_1^x e^0(y)$ nur einmal (für $x = 0$) berechnet werden muß. Einen solchen Rekonstruktionskern bezeichnen wir künftig mit ψ^0. Für alle übrigen Rekonstruktionspunkte ergibt sich der Kern durch Translation von ψ^0.

Analog läßt sich eine Rotationsinvarianz zeigen. Sei U eine unitäre Transformation,

$$T_1^U f(y) := f(Uy) \tag{1.3.4}$$

und

$$T_2^U g(\omega,\, s) := g(U\omega,\, s)\ . \tag{1.3.5}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} T_1^U \mathcal{R}^* g(y) &= \int\limits_{S^{n-1}} g(\omega,\, (Uy)^\top \omega)\, w^{-1}\big((Uy)^\top \omega\big)\, d\omega \\ &= \int\limits_{S^{n-1}} g(U\omega,\, y^\top \omega)\, w^{-1}(y^\top \omega)\, d\omega \\ &= \mathcal{R}^* T_2^U g(y)\ . \end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\psi^0(\omega,\, s) = \psi^0(\omega_0,\, s)$$

für eine beliebige aber feste Richtung ω_0. Das heißt, daß der Rekonstruktionskern ψ^0 für rotationssymmetrische Mollifier ($e^0(y) = \bar{e}(|y|)$) unabhängig von der Richtung ω ist. Wir schreiben daher künftig nur noch $\psi^0(s)$.

Schließlich wird im weiteren Verlauf noch von einer Dilatationsinvarianz Gebrauch gemacht werden. Diese erhalten wir wie folgt. Sei $\varrho \geq 1$,

$$T_1^\varrho f(x) := \varrho^{-n}\, f(x/\varrho) \tag{1.3.6}$$

und

$$T_2^\varrho g(\omega,\, s) := \varrho^{-n}\, g(\omega,\, s/\varrho)\, w^{-1}(s/\varrho)\, w(s)\ . \tag{1.3.7}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} T_1^\varrho \mathcal{R}^* g(y) &= \varrho^{-n} \int\limits_{S^{n-1}} g(\omega,\, y^\top \omega/\varrho)\, w^{-1}(y^\top \omega/\varrho)\, d\omega \\ &= \int\limits_{S^{n-1}} \varrho^{-n}\, g(\omega,\, y^\top \omega/\varrho)\, w^{-1}(y^\top \omega/\varrho)\, w(y^\top \omega)\, w^{-1}(y^\top \omega)\, d\omega \\ &= \mathcal{R}^* T_2^\varrho g(y)\ . \end{aligned}$$

Geht also der Mollifier aus der Dilatation eines anderen Mollifiers hervor, sprich $e^0(y) = T_1^\varrho e^\varrho(y)$, dann geht auch der Rekonstruktionskern durch Dilatation aus ψ^0 hervor.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 1.3.3 *Sei $\varrho \geq 1$, U eine unitäre Transformation und $e(x,\cdot)$, e^ϱ seien Mollifier mit*

$$e(x,\, y) = (2\varrho)^{-n}\, e^\varrho\big(U\left(\frac{y-x}{2\varrho}\right)\big)\ . \tag{1.3.8}$$

Dann gilt für den Rekonstruktionskern $\psi(x)$ als Lösung von $\mathcal{R}^*\psi(x;\cdot) = e(x,\cdot)$ die Gleichung

$$\psi(x;\,\omega,\,s) = (2\varrho)^{-n}\,\psi^{0,\,\varrho}\left(\frac{s-x^\top\omega}{2\varrho}\right)\,w^{-1}\left(\frac{s-x^\top\omega}{2\varrho}\right)\,w(s)\ ,$$

wobei $\mathcal{R}^*\psi^{0,\,\varrho} = e^\varrho$ gilt.

Beweis: Die Mollifier wurden so gewählt, daß

$$e(x,\,y) = T_1^x\,T_1^U\,T_1^\varrho\,e^\varrho(y)$$

ist mit T_1^x, T_1^U, T_1^ϱ aus (1.3.2), (1.3.4) bzw. (1.3.6). Damit ist nach Lemma 1.2.2

$$\psi(x;\,\omega,\,s) = T_2^x\,T_2^U\,T_2^\varrho\,\psi^{0,\,\varrho}(s)\ .$$

Einsetzen von (1.3.3), (1.3.5) und (1.3.7) beendet den Beweis. ■

Einen möglichen Mollifier, der (1.3.8) erfüllt, beinhaltet das folgende

Beispiel: Sei

$$e(x,\,y) = (2\pi)^{-n/2}\,\exp(-|y-x|^2/2)$$

und

$$e^\varrho(y) = (2/\pi)^{n/2}\,\varrho^n\,\exp(-2\,\varrho^2\,|y|^2)\ ,$$

dann ist

$$\begin{aligned} T_1^x\,T_1^U\,T_1^\varrho\,e^\varrho(y) &= T_1^x\,T_1^U\,(2/\pi)^{n/2}\,\exp(-2\,|y|^2) \\ &= T_1^x\,(2/\pi)^{n/2}\,\exp(-2\,|y|^2) \\ &= (2\pi)^{-n/2}\,\exp(-|y-x|^2/2) \\ &= e(x,\,y)\ . \end{aligned}$$

Damit lassen sich erste Schlußfolgerungen ziehen, welche Gestalt die Approximative Inverse der Radon–Transformation hat.

Korollar 1.3.4 *Wird der Rekonstruktionskern $\psi(x)$ mit $\mathcal{R}^*\psi(x;\cdot) = e(x,\cdot)$ aus einem Mollifier $e(x,\cdot)$ berechnet, der (1.3.8) erfüllt, dann lautet die Approximative Inverse der Radon–Transformation*

$$\mathcal{S}g(x) = (2\varrho)^{-n} \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\, s)\, \psi^{0,\varrho}\left(\frac{s - x^\top\omega}{2\varrho}\right)\, w^{-1}\left(\frac{s - x^\top\omega}{2\varrho}\right)\, ds\, d\omega \ .$$

Beweis: *Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 1.3.3.*

Im nächsten Schritt gilt es nun, den Rekonstruktionskern explizit zu berechnen.

1.3.3 Die Berechnung des Rekonstruktionskernes

Dank der im vorhergehenden Abschnitt gezeigten Translationsinvarianz braucht der Rekonstruktionskern nur im Punkt $x = 0$ ausgerechnet zu werden, natürlich unter der Bedingung, daß der Mollifier ebenfalls translationsinvariant ist, was im folgenden vorausgesetzt wird. Ebenso wird Rotationsinvarianz vorausgesetzt und der Kern für ein beliebiges aber festes ω berechnet. Auf die Dilatationsinvarianz können wir zunächst noch verzichten.

Aus der Darstellung (1.2.2) und der in Satz 1.3.2 angegebenen Singulärwertzerlegung folgt für Mollifier $e \in \mathrm{range}(\mathcal{R}^*)$

$$\psi^0(s) = \psi(0;\, \omega,\, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{l=0 \\ l+m \text{ gerade}}}^{m} \sum_{k=1}^{N(n,l)} \sigma_{mlk}^{-1}\, \langle e,\, v_{mlk}\rangle_{\mathsf{L}_2(\Omega^n)}\, u_{mlk}(\omega,\, s) \ ,$$

wobei v_{mlk} und u_{mlk} normiert sein sollen. Wegen der Rotationsinvarianz des Mollifiers schreiben wir $e(y) = \bar{e}(|y|)$. Daraus folgt

$$\langle e,\, v_{mlk}\rangle_{\mathsf{L}_2(\Omega^n)} = \|\dot{v}_{mlk}\|_{\mathsf{L}_2(\Omega^n)}^{-1} \int\limits_0^1 r^{l+1}\, P_{(m-l)/2}^{(0,\, l+n/2-1)}(2r^2 - 1)\, \bar{e}(r)\, dr \int\limits_{S^{n-1}} Y_{lk}(\theta)\, d\theta \ ,$$

$v_{\dot{m}lk}$ sind die nicht normierten Eigenfunktionen von $\mathcal{R}$. Nun ist aber $\int\limits_{S^{n-1}} Y_{lk}(\theta)\, d\theta = 0$ für alle $l > 0$ und damit

$$\psi^0(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m,\,0}^{-1} \langle e,\, v_{2m,\,0,\,1}\rangle_{\mathsf{L}_2(\Omega^n)}\, u_{2m,\,0,\,1}(\omega,\, s) \tag{1.3.9}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m,\,0}^{-2} \langle \mathcal{R}_\omega e,\, u_{2m,\,0,\,1}\rangle_{\mathsf{L}_2(Z,\,w^{-1})}\, u_{2m,\,0,\,1}(\omega,\, s) \tag{1.3.10}$$

wegen (1.2.1). Mit $\mathcal{R}_\omega$ bezeichnet man die Radon–Transformation für eine beliebige aber feste Richtung ω. Bevor wir $u_{2m,\,0,\,1}$ einsetzen, haben wir noch zu normieren. Sei

$$u_{2\dot{m},\,0,\,1}(\omega,\, s) = d_{2m,\,0}\, w(s)\, C_{2m}^{n/2}(s)\, Y_0(\omega)\ ,$$

dann ist

$$\begin{aligned} \|u_{2\dot{m},\,0,\,1}\|^2_{\mathsf{L}_2(Z,\,w^{-1})} &= d_{2m,\,0}^2 \int\limits_{S^{n-1}} d\omega \int\limits_{-1}^{1} \left[C_{2m}^{n/2}(s)\right]^2 w(s)\, ds \\ &= d_{2m,\,0}^2\, |S^{n-1}|\, h_{2m} \end{aligned}$$

mit

$$h_{2m} = \frac{\pi\, 2^{1-n}\, \Gamma(2m+n)}{(2m)!\, (2m+2n)\, \Gamma(n/2)^2}\ ,$$

siehe [1, 22.2.3]. Wegen $Y_0(\omega) = 1$ ist

$$u_{2m,\,0,\,1}(s) = u_{2\dot{m},\,0,\,1}(\omega,\, s)/\|u_{2\dot{m},\,0,\,1}\| = h_{2m}^{-1/2}\, |S^{n-1}|^{-1/2}\, w(s)\, C_{2m}^{n/2}(s)\ . \tag{1.3.11}$$

So folgt schließlich

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_\omega e,\, u_{2m,0,1}\rangle_{\mathsf{L}_2(Z,\,w^{-1})} &= h_{2m}^{-1/2}\, |S^{n-1}|^{-1/2} \int\limits_{-1}^{1} \mathcal{R}_\omega e(t)\, C_{2m}^{n/2}(t)\, dt \int\limits_{S^{n-1}} d\omega \\ &= h_{2m}^{-1/2}\, |S^{n-1}|^{1/2} \int\limits_{-1}^{1} \mathcal{R}_\omega e(t)\, C_{2m}^{n/2}(t)\, dt\ , \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

und wir erhalten insgesamt

Satz 1.3.5 *Sei $e \in \mathrm{range}(\mathcal{R}^*)$ ein rotationssymmetrischer Mollifier. Für die Radon–Transformation*

$$\mathcal{R} : \mathsf{L}_2(\Omega^n) \to \mathsf{L}_2(Z,\, w^{-1})$$

lautet der Rekonstruktionskern der Approximativen Inversen

$$\psi^0(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m}^{-2}\, h_{2m}^{-1}\, w(s)\, C_{2m}^{n/2}(s) \int_{-1}^{1} \mathcal{R}_\omega e(t)\, C_{2m}^{n/2}(t)\, dt \ . \qquad (1.3.13)$$

Beweis: Die Behauptung wird durch Einsetzen von (1.3.11) und (1.3.12) in (1.3.10) bewiesen. ■

Bemerkung: Bei Verwendung von (1.3.9) statt (1.3.10) kann man analog eine Darstellung für den Rekonstruktionskern herleiten, die auf die Radon–Transformation des Mollifiers verzichtet. In beiden Fällen kann man jedoch im allgemeinen die auftretenden Integrale nicht analytisch berechnen, sondern muß sie numerisch approximieren.

Zum Abschluß werden die zwei für die Praxis relevanten Spezialfälle gesondert betrachtet.

Korollar 1.3.6 *a) Für $n = 2$ ist*

$$\psi^0(s) = \pi^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\, I_{2m}\, U_{2m}(s)\, w(s)$$

mit

$$I_{2m} = \int_{0}^{1} \mathcal{R}_\omega e(t)\, U_{2m}(t)\, dt \ .$$

b) Für $n = 3$ ist

$$\psi^0(s) = (2\pi)^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+3/2)\, I_{2m}\, C_{2m}^{3/2}(s)\, w(s)$$

mit

$$I_{2m} = \int_{0}^{1} \mathcal{R}_\omega e(t)\, C_{2m}^{3/2}(t)\, dt \ .$$

Beweis: Einsetzen in (1.3.13) ergibt im Fall a) $h_{2m} = \pi/2$ und im Fall b) $h_{2m} = (2m+2)(2m+1)/(2m+3/2)$. Die Gegenbauer–Polynome C_m^1 sind gerade die Tschebyschew–Polynome zweiter Art. ■

1.3.4 Ein anderer Zugang

Die Darstellungen in Korollar 1.3.6 lassen erahnen, daß insbesondere im Fall $n = 3$ die Berechnung des Rekonstruktionskernes mit einigem Aufwand verbunden ist. Dies ist der Grund, warum nun noch ein anderer Zugang vorgestellt wird. Hier wird der Rekonstruktionskern mit Hilfe der Inversionsformel der Radon–Transformation hergeleitet.

Im folgenden sei $\widetilde{Z} = S^{n-1} \times \mathrm{IR}$ und wir betrachten die Radon–Transformation als Abbildung

$$\mathcal{R} : \mathsf{L}_2(\Omega) \to \mathsf{L}_2(\widetilde{Z}) \ .$$

Für den adjungierten Operator gilt jetzt

$$\mathcal{R}^{\#} g(x) = \int\limits_{S^{n-1}} g(\omega,\, x^\top \omega)\, d\omega \ .$$

Die Sobolev–Räume, die gleich benötigt werden, lassen sich wie folgt definieren: $\mathsf{H}_0^\alpha(\Omega)$ bezeichnet den Abschluß von $\mathsf{C}_0^\infty(\Omega)$, den beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω, bezüglich der Norm

$$\|f\|_\alpha^2 = \int\limits_{\mathrm{IR}^n} (1 + |\xi|^2)^\alpha \, |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi, \ \alpha \in \mathrm{IR},$$

in $\mathsf{L}_2(\Omega)$.

Für Funktionen $e(x, \cdot) \in \mathsf{H}_0^\alpha(\Omega)$, $\alpha \geq (n-1)/2$, lautet die Inversionsformel der Radon–Transformation

$$e(x, \cdot) = \frac{1}{2}\, (2\pi)^{1-n}\, \mathcal{R}^{\#}\, I^{1-n}\, \mathcal{R} e(x, \cdot)$$

(siehe z. B. [42]). Hier bezeichnet I das Riesz–Potential, das durch

$$(I^\alpha f)^\wedge(\xi) = |\xi|^{-\alpha}\, \widehat{f}(\xi)$$

definiert ist.

Berechnet man nun eine Funktion $\psi(x)$ durch

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\, (2\pi)^{1-n}\, I^{1-n}\, \mathcal{R} e(x, \cdot)$$

für einen geeigneten Mollifier $e(x,\cdot)$, so ist diese Funktion wegen

$$\mathcal{R}^{\#}\psi(x) = e(x,\cdot)$$

der gesuchte Rekonstruktionskern.

In Analogie zu Satz 1.3.3 lassen sich auch hier Invarianzen des Operators auf den Rekonstruktionskern übertragen.

Satz 1.3.7 *Sei $\varrho \geq 1$, U eine unitäre Transformation und $e(x,\cdot)$, $e^{\varrho} \in \mathsf{H}_0^{\alpha}(\Omega)$, $\alpha \geq (n-1)/2$, seien Mollifier mit*

$$e(x,\,y) = (2\varrho)^{-n}\, e^{\varrho}\big(U\left(\frac{x-y}{2\varrho}\right)\big)\ .$$

Dann gilt für den Rekonstruktionskern ψ als Lösung von $\mathcal{R}^{\#}\psi = e^{\varrho}$ die Gleichung

$$\psi(x;\,\omega,\,s) = (2\varrho)^{-n}\,\psi^{0,\,\varrho}\left(\frac{s - x^{\top}\omega}{2\varrho}\right)\ ,$$

wobei $\mathcal{R}^{\#}\psi^{0,\,\varrho} = e^{\varrho}$ gilt.

Beweis: Der Beweis läßt sich aus der Situation von Abschnitt 1.3.2 übertragen. Seien T_1^x, T_1^U und T_1^{ϱ} wie in (1.3.2), (1.3.4) bzw. (1.3.6), sowie

$$T_2^x g(\omega,\,s) := 2^{-n}\,g(\omega,\,\frac{s - x^{\top}\omega}{2})\ ,$$

$$T_2^U g(\omega,\,s) := g(U\omega, s)$$

und

$$T_2^{\varrho} g(\omega,\,s) := \varrho^{-n}\,g(\omega,\,s/\varrho)\ .$$

Dann folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 1.2.2 (siehe auch [37]). ■

Im Fall $n = 2$ ist

$$\psi^0(s) = (2\pi)^{-1}\,I^{-1}\,\mathcal{R}_{\omega}e(s)\ .$$

Nach Einsetzen des Riesz–Potentials wird daraus

$$\psi^0(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\sigma\,\widehat{e}\big(\sigma\,\omega(0)\big)\,\cos(s\,\sigma)\,d\sigma$$

(siehe auch [48]). Wesentlich attraktiver erscheint diese Vorgehensweise jedoch für ungerades n, da dann für das Riesz–Potential

$$I^{1-n} g = (-1)^{(n-1)/2}\, g^{(n-1)}$$

gilt, d. h. es wird hier lediglich die $(n-1)$–te Ableitung von $\mathcal{R}_\omega e$ benötigt, so daß sich bei $n = 3$ beispielsweise

$$\psi^0(s) = -\frac{1}{8\pi^2}\, \mathcal{R}_\omega e''(s) \tag{1.3.14}$$

für einen geeigneten Mollifier ergibt.

Kapitel 2

Approximative Inverse und 2D–Computertomographie

Bei der Anwendung der Approximativen Inversen in der 2D–Röntgen–Computertomographie, d. h. bei der Schichtrekonstruktion aus Messungen mit Zeilendetektoren, beginnen wir mit dem einfachsten Fall, der parallelen Geometrie. Diese Anordnung von Röntgenröhre und Detektor ist zwar kaum praxisrelevant, da jedoch die Radon–Transformation das mathematische Modell liefert, ist es hier am einfachsten, die Vorgehensweise nachzuvollziehen. Die Übertragung der Ergebnisse auf die wesentlich interessantere Fächerstrahlgeometrie ist danach kein Problem mehr. In beiden Situationen geht man jedoch von vollständigen Daten aus. Am Beispiel der Limited–Angle–Geometrie wenden wir schließlich noch die Approximative Inverse bei unvollständigen Daten an. Hier können wir allerdings nur bedingt auf Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte zurückgreifen.

2.1 Die parallele Geometrie

Die parallele Geometrie ist heutzutage kaum noch von praktischem Interesse. Dennoch ist sie wegen der Einfachheit ihrer Handhabung bei der Herleitung von Verfahren meist (so auch hier) Ausgangspunkt der Überlegungen für die anderen Abtastgeometrien. Auf die theoretische Herleitung des Verfahrens folgen nichtsdestotrotz auch Aspekte zur Implementierung und numerische Resultate. Ein Vergleich mit dem Standardverfahren der 2D–Röntgen–Computertomographie, der gefilterten Rückprojektion, beendet diesen Abschnitt.

2.1.1 Das Rekonstruktionsverfahren

Erstmals wurde die Approximative Inverse von Louis und Schuster [37] auf die 2D–Röntgen–Computertomographie (parallele Geometrie) angewendet. Wir wollen dies hier noch einmal tun, jedoch einen anderen Weg beschreiten. Dieser Weg wird schneller und leichter zum Ziel führen, insbesondere kann der Rekonstruktionskern mit höherer Geschwindigkeit und Genauigkeit berechnet werden.

2.1.1.1 Die Herleitung

Bei 2D–Schichtrekonstruktionen ergab sich für die parallele Geometrie als mathematisches Modell gerade die kontinuierliche Radon–Transformation (siehe Abschnitt 1.1). Für Berechnungen liegen real gemessene oder auch synthetisch erzeugte Daten nur an diskreten Stellen vor. Louis und Schuster [37] schlagen daher vor, die diskrete Radon–Transformation als Modell zu verwenden. Sie betrachten

$$\mathcal{R}_D : \mathsf{L}_2(\Omega) \to \mathrm{I\!R}^{KL} \ ,$$

$$(\mathcal{R}_D f)_{kl} := [\mathcal{R}_D f]_{kL+l} = \mathcal{R} f(\omega_k,\, s_l)$$

für diskrete $\omega_k \in S^1$, $k = 1, \ldots, K$ und $s_l \in [-1,\, 1]$, $l = 1, \ldots, L$ (in diesem Kapitel sei $\Omega := \Omega^2$ der Einheitskreis). Der Rekonstruktionskern ψ_D im Punkt x_i wird als Lösung des Gleichungssystems

$$\mathcal{R}_D \mathcal{R}_D^* \psi_D^i = \mathcal{R}_D e^i$$

berechnet. Um dieses Gleichungssystem aufstellen zu können, muß das Modell geändert werden, da die Matrix $\mathcal{R}_D \mathcal{R}_D^*$ nicht existiert. Für die Radon–Transformation gilt

$$\mathcal{R} f(\omega,\, s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu \text{ gerade}}}^{\mu} \langle \mathcal{R} f,\, u_{\mu\lambda} \rangle_{\mathsf{L}_2(Z,\, w^{-1})}\, u_{\mu\lambda}(\omega,\, s) \ .$$

Nach Abschneiden dieser Reihe, d. h.

$$\mathcal{R}_M f(\omega,\, s) := \sum_{\mu=0}^{M} \sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu \text{ gerade}}}^{\mu} \langle \mathcal{R}f,\, u_{\mu\lambda}\rangle_{\mathsf{L}_2(Z,\,w^{-1})}\, u_{\mu\lambda}(\omega,\, s)$$

erhält die Matrix die Darstellung

$$(\mathcal{R}_D\mathcal{R}_D^*)_{(kl)(mn)} = \sum_{\mu=0}^{M} \sum_{\substack{\lambda=-\mu \\ \lambda+\mu \text{ gerade}}}^{m} u_{\mu\lambda}(\omega_m,\, s_n)\, \overline{u_{\mu\lambda}(\omega_k,\, s_l)}\ .$$

Die Approximative Inverse ergibt sich dann gerade als das euklidische Skalarprodukt des vorberechneten Rekonstruktionskernes mit den Daten:

$$\mathcal{S}_D\, g(x^i) = \langle \psi_D^i,\, g\rangle_{\mathrm{IR}^{KL}}\ . \tag{2.1.1}$$

Obwohl auch hier Invarianzen einsetzbar sind, die die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems verringern, ist das Aufstellen der Matrix sehr aufwendig.

In der vorliegenden Arbeit wird die Vorgehensweise wie folgt sein:

1. Der Rekonstruktionskern wird als Lösung des kontinuierlichen Problems berechnet.

2. Die Diskretisierung wird auf die Berechnung der Approximativen Inversen verschoben.

Im einzelnen heißt das, daß zum einen der Rekonstruktionskern als Lösung von $\mathcal{R}^*\psi(x) = e(x,\cdot)$ und somit mit den in Abschnitt 1.3 vorgestellten Methoden bestimmt werden kann, zum anderen, daß die Integrale $\langle \psi(x),\, g\rangle_{\mathsf{L}_2(Z,\,w^{-1})}$, die nicht analytisch berechnet werden können, durch eine Quadraturformel (explizit: durch die Trapezregel) approximiert werden. Dieses Vorgehen macht es später einfacher, die Methode auf andere Geometrien anzuwenden, außerdem liefert sie in kürzerer Rechenzeit sehr gute Ergebnisse.

Rieder und Schuster [48] zeigen, daß bei Verwendung der Punktauswertung des kontinuierlichen Kernes statt ψ_D^i in (2.1.1) die Lösung für große Datenmengen in einem gewissen Sinne gegen die Momente $\langle f,\, e^i\rangle$ konvergiert. Daher ist, egal bei welcher philosophischen Sichtweise des Rekonstruktionsproblems, die Verwendung des leichter zu berechnenden kontinuierlichen Kernes immer gerechtfertigt und daher auch zu empfehlen.

Der Rekonstruktionskern wurde allgemein bereits in Korollar 1.3.6 berechnet. Er ist abhängig vom Mollifier e. Für die Wahl des Mollifiers sind unterschiedliche Vorgehensweisen denkbar (siehe [28]). Setzt man ein Wavelet ein, dann hat e verschwindenden Mittelwert (siehe [35]). Für die Dichterekonstruktion in der Röntgen–Computertomographie wird sinnvollerweise verlangt, daß $e(x, \cdot)$ die Diracsche Delta–Distribution approximiert. Diese Approximation wird durch einen Parameter γ reguliert. Es soll

$$\lim_{\gamma \to 0} \int\limits_{\Omega} e_\gamma(x,\, y)\, f(y)\, dy = f(x) \quad \text{f. ü.}$$

gelten. Der Mollifier soll hinreichend glatt sein und für festes x Mittelwert 1 haben.

Beispiel: Die Gaußsche Glockenkurve

$$e(x,\, y) = (2\pi)^{-1} \exp(-|x-y|^2/2)$$

ist beliebig oft differenzierbar und hat den Mittelwert 1. Der Regularisierungsparameter γ muß so eingearbeitet werden, daß der Mittelwert erhalten bleibt:

$$e_\gamma(x,\, y) = (2\pi)^{-1}\, \gamma^{-2} \exp\big(-|x-y|^2/(2\gamma^2)\big)\ .$$

Die Voraussetzung $e_\gamma(x, \cdot) \in \operatorname{range}(\mathcal{R}^*)$ ist erfüllt. Die Rekonstruktionsformel lautet also

$$\mathcal{S}_\gamma g(x) = \frac{1}{4} \int\limits_{S^1} \int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\, s)\, \psi_\gamma^0 \left(\frac{s - x^\top \omega}{2} \right) w^{-1} \left(\frac{s - x^\top \omega}{2} \right) ds\, d\omega\ , \qquad (2.1.2)$$

wobei

$$\psi_\gamma^0(s) = \pi^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\, U_{2m}(s)\, I_{2m,\,\gamma}\, w(s)$$

mit

$$I_{2m,\,\gamma} = \int\limits_0^1 \mathcal{R}_\omega e_\gamma(t)\, U_{2m}(t)\, dt$$

ist. Wie man direkt sieht, vereinfacht sich die Formel (auch wegen $\mathcal{R}f(-\omega,\,-s) = \mathcal{R}f(\omega,\,s)$) noch zu

$$\mathcal{S}_\gamma g(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_{-1}^1 g(\omega(\varphi),\,s)\,\breve{\psi}_\gamma^0\left(\frac{s - x^\top\omega(\varphi)}{2}\right) ds\,d\varphi\ ,$$

mit $\omega(\varphi) = (\cos\varphi,\,\sin\varphi)^\top$ und

$$\breve{\psi}_\gamma^0(s) = \pi^{-2}\sum_{m=0}^\infty (2m+1)\,U_{2m}(s)\,I_{2m,\,\gamma}\ , \tag{2.1.3}$$

so daß das Gewicht w, das für die Singulärwertzerlegung der Radon–Transformation von Nöten war, nicht mehr gebraucht wird. Verwendet man also die Radon–Transformation ohne dieses Gewicht, d. h. als Abbildung $\mathcal{R} : \mathsf{L}_2(\Omega) \to \mathsf{L}_2(Z)$, dann ist die Approximative Inverse identisch mit der für $\mathcal{R} : \mathsf{L}_2(\Omega) \to \mathsf{L}_2(Z,\,w^{-1})$.

2.1.1.2 Zur Implementierung

Wir nehmen an, daß die Daten für K gemessene Richtungen und $2L+1$ Strahlen pro Projektion an folgenden diskreten Stellen zur Verfügung stehen: $\omega_k = \omega(\varphi_k)$, $\varphi_k = k\pi/K$, $k = 0,\,\ldots\,,\,K-1$, $s_l = hl$, $h = 1/L$, $l = -L,\,\ldots\,,\,L$.

Im ersten Schritt des Verfahrens läßt sich (unabhängig von den Daten(!)) der Rekonstruktionskern berechnen. Hierbei kann man noch vorneweg die Integrale $I_{2m,\gamma}$ auswerten, da diese wiederum unabhängig von s sind. Der Parameter γ hängt von der Anzahl der gemessenen Daten pro Projektion ab, muß aber durch "trial and error" ermittelt werden. Bei der Implementierung von (2.1.3) kann die Summation nur bis zu einem zu bestimmenden Summationsindex M durchgeführt werden:

$$\widetilde{\psi}_\gamma^0(s) = \pi^{-2}\sum_{m=0}^M (2m+1)\,U_{2m}(s)\,I_{2m,\,\gamma}\ . \tag{2.1.4}$$

Um M zu bestimmen, wird zunächst gefordert, daß es ein M_0 gibt, so daß die Summanden vom Betrage her monoton fallend für $m > M_0$ sind. Wegen $|U_{2m}(s)| \leq 2m+1$ soll dann

$$\left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2\ |I_{2m,\,\gamma}| < \varepsilon$$

sein für alle $m \geq M > M_0$ bei vorgegebener Schranke ε. Die Integrale müssen also $|I_{2m,\gamma}| = \mathcal{O}(m^{-\alpha})$, $\alpha > 2$, erfüllen, was eine Glattheitsbedingung an den Mollifier e_γ darstellt.

Aus Gründen der effizienten Implementierung wird der Rekonstruktionskern (in Analogie zur gefilterten Rückprojektion, siehe z. B. [42]) nicht für alle $(s - x^\top \omega)/2$ ausgewertet. Er wird (auch weil er gerade ist) lediglich an den Stellen $t_i = ih/2$, $i = 0, \ldots, 2L$, berechnet und dazwischen (linear) interpoliert. Der gesamte Algorithmus hat also folgende Gestalt:

<u>AI_2d_pg</u>

`für` $m = 0, \ldots, M$: `berechne (oder approximiere)`

$$I_{2m,\gamma} = \int_0^1 \mathcal{R}_\omega e_\gamma(t)\, U_{2m}(t)\, dt \;\; ;$$

`für` $i = 0, \ldots, 2L$:

$$p_i = \widetilde{\psi}^0_\gamma(t_i)/2 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{M} (2m+1)\, U_{2m}(t_i)\, I_{2m,\gamma} \;\; ;$$

`für` $k = 0, \ldots, K-1$:

$$v_{k,l} = h \sum_{j=-L}^{L} p_{|l-j|}\, g(\omega_k, s_j) \;\; , \; l = -L, \ldots, L \;\; ;$$

`für alle Rekonstruktionspunkte` x:

$$\check{f}(x) = \frac{\pi}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \big((1-u)\, v_{k,l} + u\, v_{k,l+1}\big)$$

`mit`

$$s = x^\top \omega_k,\; l \leq s/h \leq l+1,\; u = s/h - l \;\; ;$$

`Ende.`

Wir halten fest, daß die Approximative Inverse ein Rekonstruktionsverfahren vom Typ 'gefilterte Rückprojektion' liefert.

2.1.2 Numerische Beispiele

Wegen ihrer angenehmen Eigenschaften wird die schon mehrfach erwähnte Gaußglocke in dieser Arbeit bei allen Anwendungen als Mollifier verwendet. Im 2D–Fall ist

$$e_\gamma(x,\,y) = T_1^x \bar{e}_\gamma(y) = (2\pi)^{-1}\,\gamma^{-2}\,\exp\big(-|y-x|^2/(2\gamma^2)\big) \tag{2.1.5}$$

mit

$$T_1^x f(y) = \frac{1}{4}\,f\left(\frac{y-x}{2}\right) \quad \text{und} \quad \bar{e}_\gamma(y) = \frac{2}{\pi}\,\gamma^{-2}\,\exp(-2|y|^2/\gamma^2)\ .$$

Der Mollifier ist nach Konstruktion sowohl translations– als auch rotationsinvariant. Sein Träger ist jedoch $\mathbb{R}^2$ und nicht Ω, und sein Mittelwert auf der Kreisscheibe beträgt nur ungefähr 1, denn es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e_\gamma(x,\,y)\,dy = 1\ .$$

Der Fehler, den man hierbei macht, ist für kleine γ aber vernachlässigbar. In Abbildung 2.1.1 ist der Mollifier (2.1.5) für zwei verschiedene γ–Werte geplottet. Je größer γ ist, desto "breiter" erscheint der Mollifier, d. h. desto stärker ist die Glättung.

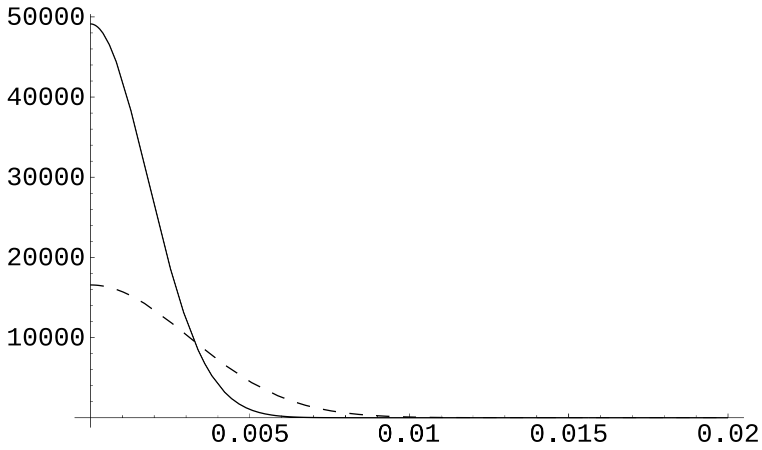

Abbildung 2.1.1: Radialer Anteil des Mollifiers (2.1.5) für $\gamma = 0.0031$ (gestrichelt) bzw. $\gamma = 0.0018$.

Wie schon in Kapitel 1 ausgeführt, kann der Rekonstruktionskern auf unterschiedliche Art und Weise berechnet werden. Für den Weg über die Singulärwertzerlegung sollte man zunächst die Radon–Transformation durch

$$\mathcal{R}e_\gamma(\omega,\,s) \approx \int\limits_{\omega^\perp} e_\gamma(s\omega + y)\,dy$$

approximieren. Hier wird nicht über $\omega^\perp \cap \Omega$ integriert, was aber für kleine γ wieder nur einen vernachlässigbar kleinen Fehler produziert. Damit ist man in der Lage, die Radon–Transformation des Mollifiers analytisch zu berechnen. Sie ist aufgrund der Rotationsinvarianz von e_γ unabhängig von der Richtung ω:

$$\mathcal{R}e_\gamma(\omega,\, s) = \mathcal{R}_\omega e_\gamma(s) = \gamma^{-1}\,(2\pi)^{-1/2}\,\exp\big(-s^2/(2\gamma^2)\big)\ .$$

Die $M+1$ Integrale $I_{2m,\gamma}$ in der Summenformel (2.1.4) müssen (mit Hilfe einer adaptiven Routine) numerisch approximiert werden.

Verwendet man den Zugang über die Inversionsformel der Radon–Transformation, so kann man den Rekonstruktionskern explizit angeben. Es ist (siehe [48, (5.14)])

$$\psi_\gamma^0(s) = \frac{1}{2\pi^2\,\gamma^2}\left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{s}{\gamma}\,\exp\big(-s^2/(2\gamma^2)\big)\,\imath\,\mathrm{erf}\big(\imath\, s/(\sqrt{2}\,\gamma)\big)\right) \tag{2.1.6}$$

mit der Error–Funktion

$$\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp(-z^2)\,dz\ .$$

Abbildung 2.1.2 zeigt zwei Rekonstruktionskerne. Für $\gamma = 0.0018$ wurde der Kern mit (2.1.4) berechnet, für $\gamma = 0.0031$ mit (2.1.6).

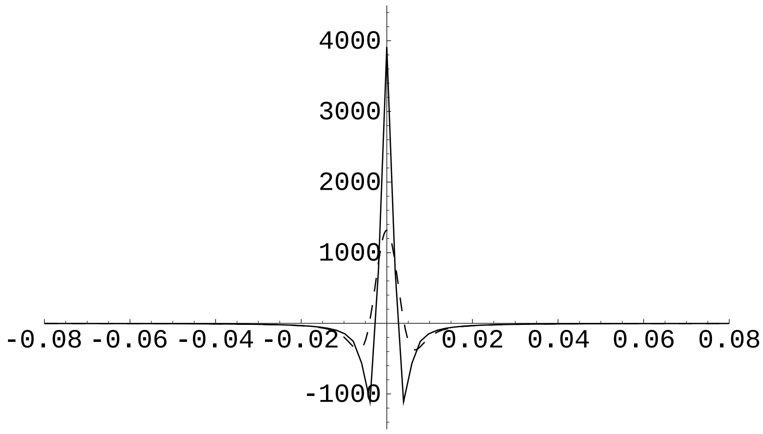

Abbildung 2.1.2: Rekonstruktionskern für $\gamma = 0.0031$ (gestrichelt) und $\gamma = 0.0018$.

Für die Rekonstruktionen wurde das Shepp–Logan–Phantom aus [51] verwendet. Abbildung 2.1.3 zeigt das Original–Phantom. Es besteht aus Ellipsen, deren Inhalte von unterschiedlicher Dichte sind. Der äußere (in der Abbildung weiße) Rand hat den Wert

2, die anderen Werte bewegen sich im Intervall [1, 1.05]. Die Radon–Transformation von konstanten Flächen über Ellipsen ist einfach zu berechnen, so daß die Generierung der synthetischen Daten unproblematisch ist.

Eine Rekonstruktion aus vergleichsweise wenig Daten (200 Projektionen mit je 255 Strahlen) ist in Abbildung 2.1.4 dargestellt. Hier wurde der Rekonstruktionskern aus Abbildung 2.1.2 mit $\gamma = 0.0031$ verwendet, die Anzahl der Rekonstruktionspunkte war 255×255. Für die Rekonstruktionen in den Abbildungen 2.1.5 und 2.1.6 war die Datenmenge jeweils 400 Richtungen und 511 Strahlen pro Richtung. Bei beiden wurde jeweils $\gamma = 0.0018$ gewählt und es wurde mit 511×511 Bildpunkten gerechnet. Für die letzte Rekonstruktion wurde zu den Daten noch ein 2%–iges Rauschen addiert. Für alle Abbildungen waren 1.005 untere und 1.04 obere Grenze des Darstellungsfensters.

Die geringe Rechenzeit und die hohe Genauigkeit der numerischen Ergebnisse belegen die Effizienz und die Qualität der Approximativen Inversen als Regularisierungsverfahren bei der 2D–Röntgen–Computertomographie. Daß das Verfahren durchaus konkurrenzfähig zum Standardverfahren der 2D–Tomographie, der gefilterten Rückprojektion, ist, zeigt der im nächsten Abschnitt folgende Vergleich dieser beiden Methoden.

Abbildung 2.1.3: Original: Shepp–Logan–Phantom.

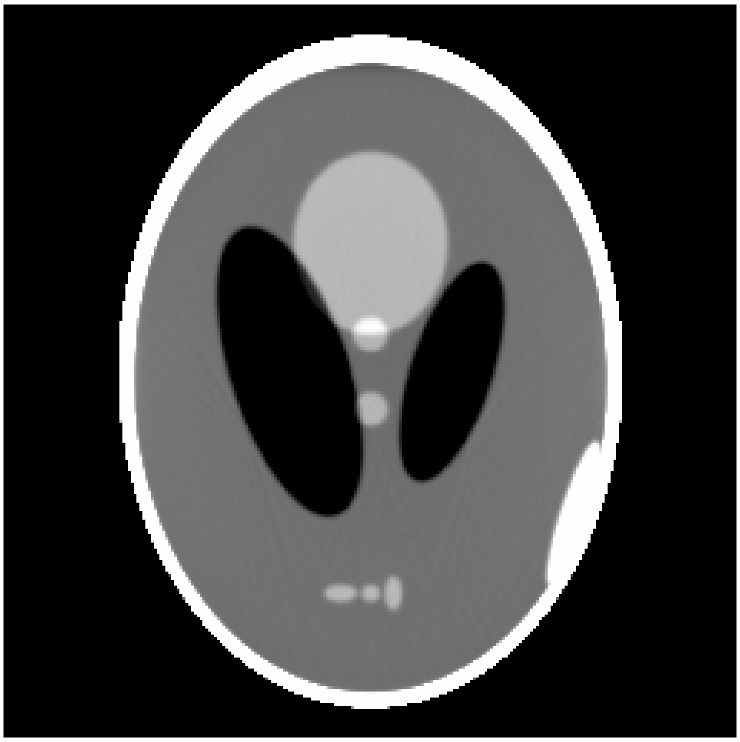

Abbildung 2.1.4: Rekonstruktion aus von 200 Richtungen mit 255 Strahlen pro Richtung gemessenen Daten.

Abbildung 2.1.5: Rekonstruktion aus von 400 Richtungen mit 511 Strahlen pro Richtung gemessenen Daten.

Abbildung 2.1.6: Rekonstruktion aus verrauschten Daten.

2.1.3 Ein Vergleich mit der gefilterten Rückprojektion

Der Algorithmus weist – wie schon mehrfach erwähnt – große Ähnlichkeiten mit der gefilterten Rückprojektion, die sich seit ihrer Einführung Anfang der siebziger Jahre ([45, 51]) als das Standardverfahren in der Tomographie etabliert hat, auf. Deshalb gilt es nun, die (wenigen) Unterschiede zwischen den beiden Methoden herauszuarbeiten.

Wählt man den in Abschnitt 1.3.4 gemachten Ansatz, dann kann man den Zusammenhang

$$\psi_\gamma^0(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \widehat{e_\gamma^0}\big(\sigma\,\omega(0)\big)\;\cos(s\,\sigma)\,\sigma\,d\sigma \tag{2.1.7}$$

zeigen (siehe Seite 21 und [48, (5.13)]), den man auch aus der Verfahrensvorschrift der gefilterten Rückprojektion ableiten kann. Dort ist der Ansatz jedoch ein anderer. Die gefilterte Rückprojektion wählt den Rekonstruktionskern ψ^0 so, daß der Mollifier e^0 ein Tiefpaßfilter ist, d. h. $\widehat{e_\gamma^0}(\xi) = 0$ für alle ξ mit $|\xi| > \gamma$. Daraus folgt dann (2.1.7), siehe [42, V.1, (1.3) u. (1.5)]. Bei der Approximativen Inversen ist es jedoch umgekehrt:

der Rekonstruktionskern wird aus einem vorgegebenen Mollifier berechnet. Der letztere Weg erscheint einfacher und macht die Approximative Inverse daher flexibler. Für die gefilterte Rückprojektion ist z. B. beim Shepp–Logan–Filter (aus [51]) zwar ψ^0 bekannt (weil vorgegeben), jedoch kann man e^0 lediglich in Integraldarstellung angeben.

Der Ram–Lak–Filter (benannt nach Ramachandran und Lakshminarayanan [45]) hat die unangenehme Eigenschaft, stark zu oszillieren, was sich in Form von Ring–Artefakten bei der Rekonstruktion wiederspiegelt. Beim Shepp–Logan–Filter läßt sich dies vermeiden, jedoch auch nur für eine spezielle Wahl des Parameters γ (siehe Abbildung 2.1.7). Es ist

$$\psi_\gamma^{SL}(s) = \frac{\gamma^2}{2\pi^3} \frac{\pi/2 - (\gamma s)\,\sin(\gamma s)}{\pi^2/4 - (\gamma s)^2}\ .$$

Ist h die Diskretisierungsschrittweite in s–Richtung, dann gilt für $s_l = lh$, $l \in \mathbb{Z}$, mit $\gamma = \pi/h$

$$\psi_\gamma^{SL}(s_l) = \frac{\gamma^2}{\pi^4} \frac{1}{1 - 4l^2} \tag{2.1.8}$$

(vergleiche [42, Seite 111]).

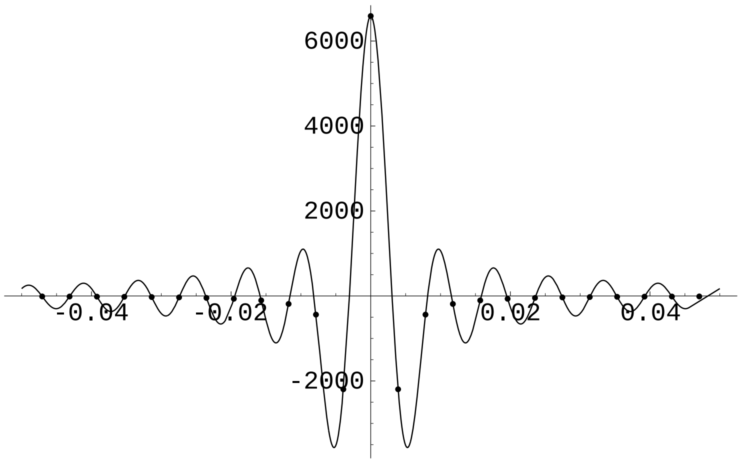

Abbildung 2.1.7: Shepp–Logan–Filter: Der kontinuierliche Filter wird für die Rekonstruktion nur an speziell gewählten Stellen ausgewertet.

Der zur Gaußglocke gehörige Rekonstruktionskern hat (unabhängig von γ) in $\mathbb{R}^+$ nur einen Tiefpunkt s_0 und ist streng monoton wachsend im Intervall $[s_0,\, 1]$. Ebenso lassen sich aus Polynomen beliebige Mollifier konstruieren, deren zugehöriger Rekonstruktionskern die gleiche Eigenschaft aufweist (vergleiche wieder [48]).

In den Abbildungen 2.1.8.a) und 2.1.8.b) sind der mit der Gaußglocke als Mollifier berechnete Rekonstruktionskern und der Shepp–Logan–Filter dargestellt. Für letzteren wurde an den Stellen s_l die Darstellung (2.1.8) verwendet und zwischen diesen Punkten linear interpoliert.

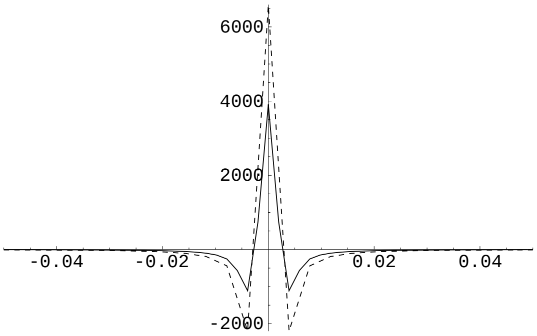

Abbildung 2.1.8.a): beide Rekonstruktionskerne, $s \in [-0.06, 0.06]$, gestrichelte Linie: Shepp–Logan–Filter.

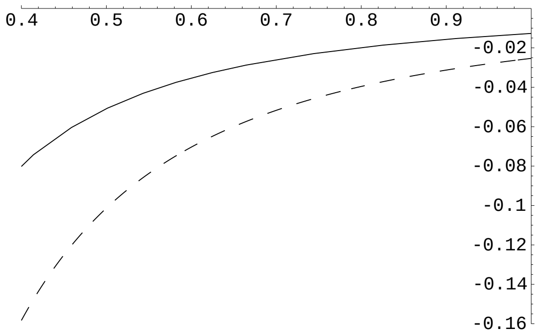

Abbildung 2.1.8.b): beide Rekonstruktionskerne, $s \in [0.4, 1]$, gestrichelte Linie: Shepp–Logan–Filter.

Alle so erzeugten Rekonstruktionskerne sind nicht lokal. Ein Erzwingen von "Pseudo–Lokalität" durch Abschneiden des Kernes führt in jedem Fall zu Cupping–Artefakten in der Rekonstruktion.

Bei der gefilterten Rückprojektion wurden spezielle Filter für die sogenannte Lokale Tomographie konstruiert. Mit diesen lokalen Filtern werden aber nicht mehr Dichten sondern Dichtesprünge rekonstruiert (siehe z. B. FARIDANI ET AL. [6]). Dies ist auch bei der Approximativen Inversen möglich, wurde jedoch nicht in der vorliegenden Arbeit sondern in [47] thematisiert.

Abbildung 2.1.9 zeigt einen Vergleich der Rekonstruktionsergebnisse der gefilterten Rückprojektion mit Shepp–Logan–Filter und der Approximativen Inversen. Es zeigt sich, daß bei zunehmendem Datenfehler der relative Fehler im Ergebnis bei der gefilterten Rückprojektion schlechter wird.

Selbst bei nahezu exakten Daten gibt es einen unvermeidbaren Fehler in der Rekonstruktion, dessen Hauptanteil aber außerhalb des Objektes liegt (siehe Abbildung 2.1.10). Durch das Einbringen einer Vorinformation in Form der äußeren Abmessung des Objektes, wäre eine Verringerung des relativen Fehlers in der Rekonstruktion möglich. Der Fehler an den Rändern der Ellipsoide ist nicht verwunderlich, da nicht f

sondern eine geglättete Version von f berechnet wird.

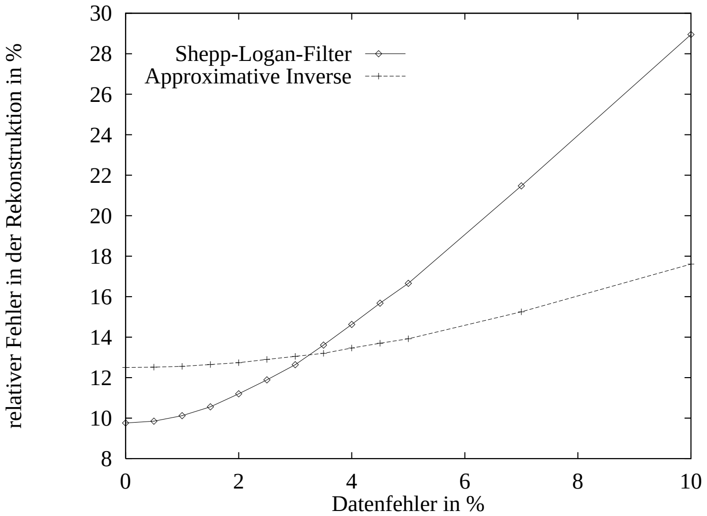

Abbildung 2.1.9: Vergleich der Rekonstruktionen mit verrauschten Daten.

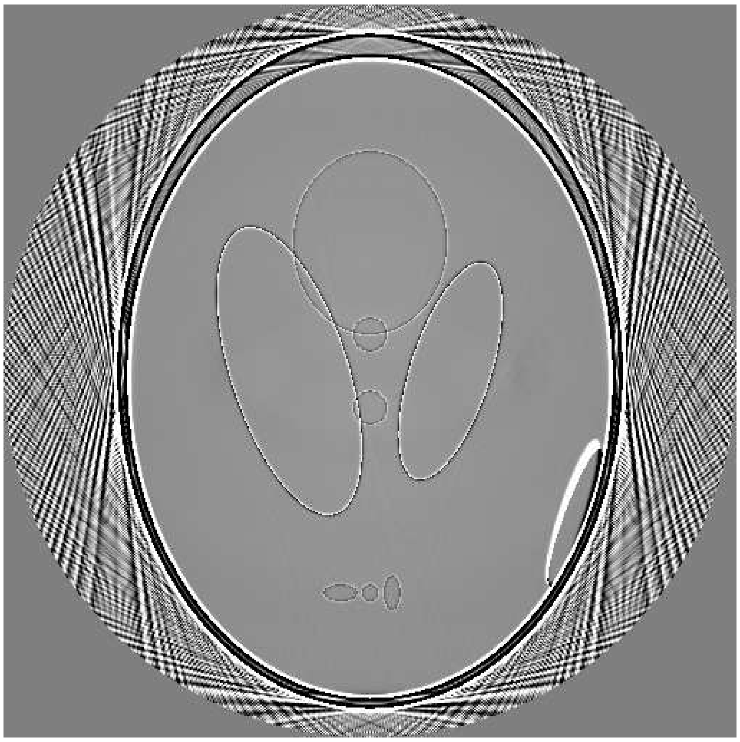

Abbildung 2.1.10: Differenz des Originalbildes (Abbildung 2.1.3) und des rekonstruierten Bildes (Abbildung 2.1.5).

2.2 Die Fächerstrahlgeometrie

In den meisten Anwendungen wurde die parallele Geometrie schon lange durch die wesentlich schneller abtastbare Fächerstrahlgeometrie ersetzt. Diese Anordnung erfordert eine neue Parametrisierung des Strahlenweges durch das Objekt (siehe schon Abschnitt 1.1). Die gefilterte Rückprojektion läßt sich durch eine einfache Koordinatentransformation (siehe z. B. [42]) auf die neuen Gegebenheiten anpassen. Im nächsten Abschnitt wird sich herausstellen, daß dies auch für die Approximative Inverse problemlos möglich ist.

2.2.1 Zur Herleitung des Rekonstruktionsalgorithmus

Wie schon auf Seite 7 angegeben, können die Strahlenwege für die Fächerstrahlgeometrie durch die Quellposition $a = (r\cos\alpha,\, r\sin\alpha)^\top$, $r > 1$, $\alpha \in [0,\, 2\pi)$, und den Richtungsvektor $\theta \in S^1$ definiert werden. Bezeichnet man mit β den Winkel zwischen der Richtung θ und $-a$ und definiert

$$\mathcal{D}_2 f(\alpha,\, \beta) := \mathcal{D} f\big(r\,\omega(\alpha),\, \omega(\alpha-\beta+\pi)\big)$$

($\mathcal{D}f$ bezeichnet die divergente Röntgen–Transformation, siehe (1.1.2)), dann ist

$$\mathcal{D}_2 f(\alpha,\, \beta) = \mathcal{R} f(\omega(\alpha-\beta+\pi/2),\, r\sin\beta)$$

das mathematische Modell für die Fächerstrahlgeometrie. Für die weiteren Betrachtungen führen wir eine andere Schreibweise ein. Es ist

$$\mathcal{D}_2 f(\alpha,\, \beta) = \mathcal{U}\mathcal{R} f(\alpha,\, \beta)$$

mit

$$\mathcal{U} g(\alpha,\, \beta) = g(\omega(\alpha-\beta+\pi/2),\, r\sin\beta)\ . \tag{2.2.1}$$

Die Ergebnisse der beiden nachfolgenden Lemmata zeigen, wie der Rekonstruktionskern für die Fächerstrahlgeometrie leicht aus dem für die parallele Geometrie gewonnen werden kann. Zunächst beweisen wir ein allgemeingültiges Lemma, das auch in [49] nachgelesen werden kann.

Lemma 2.2.1 *Seien X, Y_1 und Y_2 Hilberträume, $\mathcal{A} : X \to Y_1$, $\mathcal{B} : X \to Y_2$ lineare Operatoren und $\mathcal{U} : Y_1 \to Y_2$ unitär mit $\mathcal{B} = \mathcal{U}\mathcal{A}$. Dann gilt für den Rekonstruktionskern als Lösung von $\mathcal{B}^*\phi = e$ die Gleichung*

$$\phi = \mathcal{U}\psi \ ,$$

wobei ψ die Lösung von $\mathcal{A}^*\psi = e$ bezeichnet.

Beweis: Sei $\phi := \mathcal{U}\psi$. Dann ist

$$\mathcal{B}^*\phi = \mathcal{A}^*\mathcal{U}^*\mathcal{U}\psi = \mathcal{A}^*\psi = e \ .$$

■

Wir zeigen nun noch, daß der Operator $\mathcal{U}$ aus (2.2.1) unitär ist.

Lemma 2.2.2 *Sei $V = [0,\, 2\pi) \times [-\arcsin 1/r,\, \arcsin 1/r]$, dann ist*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \mathsf{L}_2(Z,\, w^{-1}) &\to \mathsf{L}_2(V,\, \widetilde{w}^{-1}) \ , \\ \mathcal{U}g(\alpha,\, \beta) &= g(\omega(\alpha - \beta + \pi/2),\, r\sin\beta) \end{aligned}$$

mit $\widetilde{w}(\beta) = (r\cos\beta)^{-1}\, w(r\sin\beta)$ ein unitärer Operator und

$$D_2 : \mathsf{L}_2(\Omega) \to \mathsf{L}_2(V,\, \widetilde{w}^{-1})$$

stetig.

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}g,\, h\rangle_{\mathsf{L}_2(V,\widetilde{w}^{-1})} &= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\arcsin 1/r}^{\arcsin 1/r} g(\omega(\alpha - \beta + \pi/2),\, r\sin\beta)\, h(\alpha,\, \beta) \ \times \\ &\qquad\qquad \times r\cos\beta\, w^{-1}(r\sin\beta)\, d\beta\, d\alpha \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} g(\omega(\varphi),\, s)\, h(\varphi + \arcsin s/r - \pi/2,\, \arcsin s/r) \ \times \\ &\qquad \times w^{-1}(s)\, ds\, d\varphi \\ &= \langle g,\, \mathcal{U}^*h\rangle_{\mathsf{L}_2(Z,w^{-1})} \end{aligned}$$

ist

$$\mathcal{U}^*h(\omega(\varphi),\, s) = h(\varphi + \arcsin s/r - \pi/2,\, \arcsin s/r)$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^*\mathcal{U}g\big(\omega(\varphi),\, s\big) &= \mathcal{U}g(\varphi + \arcsin s/r - \pi/2,\, \arcsin s/r) \\ &= g(\omega(\varphi),\, s)\ ,\end{aligned}$$

sowie

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^*h(\alpha,\, \beta) = \mathcal{U}^*h(\omega(\alpha - \beta + \pi/2),\, r\sin\beta) = h(\alpha,\, \beta)\ ,$$

da $s/r \in [-\pi/2,\, \pi/2]$ ist.
Da U eine Isometrie ist, folgt die Stetigkeit von $\mathcal{D}_2$ als Hintereinanderausführung von $\mathcal{U}$ und der Radon–Transformation sofort. ■

Bemerkung : Die im obigen Beweis benötigte Koordinatentransformation ist die gleiche, die auch bei der gefilterten Rückprojektion Anwendung findet (siehe [42, Seite 112]).

Der nächste Satz zeigt, wie man den Rekonstruktionskern für die Fächerstrahlgeometrie aus dem für die parallele Geometrie gewinnen kann. Dazu benötigen wir die Dilatationsinvarianz des Rekonstruktionskernes (siehe Seite 15).

Satz 2.2.3 *Sei $e(x,\cdot)$ ein translations–, rotations– und dilatationsinvarianter Mollifier, $\psi(x)$ der zugehörige Rekonstruktionskern für die parallele Geometrie und $\phi(x)$ der Rekonstruktionskern für die Fächerstrahlgeometrie: $D_2^*\phi(x) = e(x,\cdot)$. Weiterhin bezeichne $a = r\,\omega(\alpha)$ eine Quellposition, x einen Rekonstruktionspunkt und η den Winkel zwischen den Vektoren $x - a$ und $-a$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\phi(x;\, \alpha,\, \beta) &= \left(\frac{r-1}{2\,|a-x|}\right)^2 \psi^{0,\, \frac{|a-x|}{r-1}}\left(\frac{(r-1)\sin(\beta-\eta)}{2}\right) \times \\ &\quad \times w^{-1}\left(\frac{(r-1)\sin(\beta-\eta)}{2}\right)\, w(r\sin\beta)\ .\end{aligned}$$

Beweis: Wegen Lemma 2.2.1, Lemma 2.2.2 und der Translationsinvarianz von ψ^0 ist

$$\begin{aligned}\phi(x;\, \alpha,\, \beta) &= \frac{1}{4}\psi^0\left(\frac{r\,\sin\beta - x^\top\omega(\alpha-\beta+\pi/2)}{2}\right) \times \\ &\quad \times w^{-1}\left(\frac{r\,\sin\beta - x^\top\omega(\alpha-\beta+\pi/2)}{2}\right)\, w(r\sin\beta)\ .\end{aligned}$$

Mit $r\sin\beta = a^\top\omega(\alpha-\beta+\pi/2)$ und $a-x = |a-x|\,\omega(\alpha-\eta)$ folgt

$$\begin{aligned}\phi(x;\,\alpha,\,\beta) &= \frac{1}{4}\,\psi^0\left(\frac{(a-x)^\top\omega(\alpha-\beta+\pi/2)}{2}\right)\,w^{-1}\left(\frac{(a-x)^\top\omega(\alpha-\beta+\pi/2)}{2}\right)\,\times\\ &\quad\times w(r\sin\beta)\\ &= \frac{1}{4}\,\psi^0\left(\frac{|a-x|\sin(\beta-\eta)}{2}\right)\,w^{-1}\left(\frac{|a-x|\sin(\beta-\eta)}{2}\right)\,w(r\sin\beta)\ .\end{aligned}$$

Nun benutzen wir die in 1.3.2 gezeigte Dilatationsinvarianz. Es ist $|a-x|\geq r-1$ und damit

$$\begin{aligned}\psi^0\left(\frac{|a-x|\sin(\beta-\eta)}{2}\right) &= \left(\frac{r-1}{|a-x|}\right)^2\psi^{0,\,\frac{|a-x|}{r-1}}\left(\frac{(r-1)\,\sin(\beta-\eta)}{2}\right)\,\times\\ &\quad\times w^{-1}\left(\frac{(r-1)\sin(\beta-\eta)}{2}\right)\,w\left(\frac{|a-x|\sin(\beta-\eta)}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Berechnet man die Approximative Inverse für die Fächerstrahlgeometrie, so erhält man mit $\widetilde{\psi}^0$ aus (2.1.4)

$$\begin{aligned}\mathcal{S}g(x) &= \int_0^{2\pi}\int_{-\arcsin 1/r}^{\arcsin 1/r}\phi(x;\,\alpha,\,\beta)\,g(\alpha,\,\beta)\,\widetilde{w}^{-1}(\beta)\,d\beta\,d\alpha\\ &= \frac{r\,(r-1)^2}{4}\int_0^{2\pi}|a-x|^{-2}\int_{-\arcsin 1/r}^{\arcsin 1/r}\widetilde{\psi}^{0,\,\frac{|a-x|}{r-1}}\left(\frac{(r-1)\sin(\beta-\eta)}{2}\right)\,g(\alpha,\,\beta)\,\times\\ &\quad\times\,\cos\beta\,d\beta\,d\alpha\ .\end{aligned}$$

Der Nachteil dieser Formel besteht darin, daß die Auswertung des inneren Integrales abhängig vom Rekonstruktionspunkt x ist. Durch die Approximation $|a-x|/(r-1)\approx 1$ riskiert man einen kleinen Fehler, kann aber für alle Rekonstruktionspunkte den gleichen Rekonstruktionskern $\widetilde{\psi}^0$ verwenden. Der geringe Genauigkeitsverlust wird ausgeglichen durch einen immensen Gewinn an Rechenzeit und Speicherplatzbedarf: hat man N^2 Rekonstruktionspunkte und $N\times N$ Daten, dann braucht der Rekonstruktionskern nur N anstatt N^4 mal ausgewertet zu werden. Es gilt schließlich

$$\mathcal{S}g(x)\approx\frac{r\,(r-1)^2}{4}\int_0^{2\pi}|a-x|^{-2}\int_{-\arcsin 1/r}^{\arcsin 1/r}\widetilde{\psi}^0\left(\frac{(r-1)\,\sin(\beta-\eta)}{2}\right)\,g(\alpha,\,\beta)\,\cos\beta\,d\beta\,d\alpha\ .$$

Damit erhalten wir wieder ein Verfahren, das sich in Analogie zur gefilterten Rückprojektion effizient implementieren läßt. Dazu nehmen wir an, daß die Daten für K Quellpositionen mit $a_k = r\omega(\alpha_k)$, $a'_k = \omega'(\alpha_k)$, $\alpha_k = 2\pi k/K$, $k = 0, \dots, K-1$, und je $2L+1$ Strahlen vorliegen, d. h. $\beta_l = hl$, $l = -L, \dots, L$, $h = \arcsin(1/r)/L$. Der Algorithmus hat folgende Gestalt:

AI_2d_fg

`für` $i = 0, \dots, 2L$:

$$p_i = \frac{1}{4}\,\widetilde{\psi}^0_\gamma\left(\frac{(r-1)\sin\beta_i}{2}\right) \quad ;$$

`für` $k = 0, \dots, K-1$:

$$v_{k,l} = h\sum_{j=-L}^{L} p_{|l-j|}\, g(\alpha_k,\, \beta_j)\, \cos\beta_j \quad , l = -L, \dots, L \quad ;$$

`für alle Rekonstruktionspunkte` x:

$$\check{f}(x) = r\,(r-1)^2\,\frac{2\pi}{K}\sum_{k=0}^{K-1} |x-a_k|^{-2}\,\big((1-u)\,v_{k,l} + u\,v_{k,l+1}\big)$$

`mit`

$$\eta = \arcsin(\langle\frac{x-a_k}{|x-a_k|},\, a'_k\rangle),\; l \le \eta/h < l+1,\; u = \eta/h - l \quad ;$$

`Ende.`

Genau wie bei der gefilterten Rückprojektion läßt sich also auch bei der Approximativen Inversen die Rekonstruktionsmethode leicht von der parallelen Geometrie auf die Fächerstrahlgeometrie übertragen. Rekonstruktionen des Shepp–Logan–Phantoms bringen bei gleicher Datenmenge gleich gute Ergebnisse wie in Abschnitt 2.1.2.

2.3 Die Limited–Angle–Geometrie

Das Problem unvollständiger Daten bei der Röntgen–Computertomographie ist so alt wie das Rekonstruktionsproblem selbst. Insbesondere in der 3D–Tomographie sind vollständige Daten eher die Ausnahme als die Regel (siehe Kapitel 3). Aber auch bei der 2D–Tomographie wurden in der Literatur verschiedenste Fälle von unvollständigen Daten behandelt, wie z. B. "Limited Angle", "Region of Interests" oder "Hollow Projections" (siehe etwa [25, 36, 40, 43]). Auf das Problem des fehlenden Winkelbereiches wollen wir im folgenden Abschnitt die Approximative Inverse anwenden.

2.3.1 Das Rekonstruktionsverfahren

Bei der parallelen Geometrie sind im Falle vollständiger Daten (siehe Abschnitt 2.1) diese für alle $\omega \in S^1 = \{\omega(\varphi),\, \varphi \in [-\pi,\, \pi)\}$ (im kontinuierlichen Fall) bzw. für in S^1 äquidistant verteilte Richtungen (im diskreten Fall) bekannt. Bei einem eingeschränkten Winkelbereich stehen die Daten für die Richtungen $\omega(\varphi)$ mit $|\varphi| < \Phi$, $0 < \Phi < \pi/2$, nicht zur Verfügung. Durch die Beziehung $\mathcal{R}f(\omega(\varphi),\, s) = \mathcal{R}f(\omega(\varphi+\pi),\, -s)$ ergibt sich eine Redundanz der Daten, so daß die vorhandenen Richtungen im folgenden in

$$S^1_\Phi = \{\omega(\varphi) \in S^1 : |\varphi \pm \pi/2| \le \pi/2 - \Phi\}$$

liegen und die Radon–Transformation als Abbildung

$$\mathcal{R}_\Phi : \mathsf{L}_2(\Omega) \to \mathsf{L}_2(Z_\Phi,\, w^{-1}) \tag{2.3.1}$$

mit $Z_\Phi = S^1_\Phi \times [-1,\, 1]$ betrachtet wird.

2.3.1.1 Die Singulärwertzerlegung

In die Singulärwertzerlegung für die Abbildung (2.3.1) geht die der Radon–Transformation (1.3.1) ein. Deshalb formulieren wir zunächst erneut die Singulärwertzerlegung aus 1.3.1, allerdings für den Spezialfall $n = 2$, $\nu = 1$. Das Tripel $\{v_{ml},\, u_{ml};\, \sigma_{ml}\} : m \ge 0,\, l \in \mathbb{Z} : |l| \le m,\, l + m$ gerade, mit

$$\begin{aligned} v_{ml}(x) &= \sqrt{\frac{m+1}{\pi}}\, |x|^{|l|}\, P^{(0,\,|l|)}_{(m-|l|)/2}(2|x|^2 - 1)\, Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right) , \\ u_{ml}(\omega,\, s) &= \pi^{-1}\, w(s)\, U_m(s)\, Y_l(\omega) , \\ \sigma_{ml} &= \sigma_m = 2\sqrt{\frac{\pi}{m+1}} \end{aligned}$$

bildet eine Singulärwertzerlegung von

$$\mathcal{R} : L_2(\Omega) \to L_2(Z,\, w^{-1}) .$$

Es folgt (ohne Beweis) die Singulärwertzerlegung für die Limited–Angle–Tomographie.

Lemma 2.3.1 *Sei* $A(m,\,\Phi) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ *die Matrix mit Einträgen*

$$a_{kl} = \pi^{-1} \int\limits_{-\Phi}^{\Phi} e^{2\imath(k-l)\varphi}\, d\varphi \tag{2.3.2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin(2\,(k-l)\,\Phi)}{(k-l)\,\pi} & \textit{für} \quad k \neq l \;, \\[2ex] \dfrac{2\,\Phi}{\pi} & \textit{für} \quad k = l \;, \end{cases}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_\mu(m,\,\Phi)$ *und den normalisierten Eigenvektoren* $d_\mu(m,\,\Phi)$, $\mu = 0, \ldots, m$. *Weiterhin sei*

$$f_{m\mu}(x) = \sum_{l=0}^{m} d_\mu(m,\,\Phi)_l \; v_{m,\,2l-m}(x) \;,$$

$$g_{m\mu}(\omega,\,s) = \big(1 - \lambda_\mu(m,\,\Phi)\big)^{-1/2} \sum_{l=0}^{m} d_\mu(m,\,\Phi)_l \; u_{m,\,2l-m}(\omega,\,s) \;,$$

$$\tau_{m\mu} = \big(1 - \lambda_\mu(m,\,\Phi)\big)^{1/2} \, \sigma_m \;.$$

Dann bildet

$$\{f_{m\mu},\, g_{m\mu};\, \tau_{m\mu}\} : m,\, \mu \in \mathbb{N}_0 \,,\; \mu \leq m \;,$$

eine Singulärwertzerlegung von

$$\mathcal{R}_\Phi : L_2(\Omega) \to L_2(Z_\Phi,\, w^{-1}) \;.$$

Bemerkung: Der Beweis ist in der Arbeit von Louis [25] nachzulesen. Die Matrix (2.3.2) wurde in Slepian [52] untersucht.

2.3.1.2 Die Berechnung des Rekonstruktionskernes

Im Limited–Angle–Fall ist keine Inversionsformel bekannt, so daß ein Zugang zum Rekonstruktionskern wie in 1.3.4 nicht möglich ist und nur der Weg über die Singulärwertzerlegung bleibt. Die Translationsinvarianz gilt hier ebenso wie bei vollständigen Daten, weswegen der Kern wieder nur für $x = 0$ ausgerechnet werden muß. Eine Rotationsinvarianz des Rekonstruktionskernes kann nicht gezeigt werden, denn die Rückprojektion hat in diesem Fall die Darstellung

$$\mathcal{R}_\Phi^* g(x) = \int\limits_{S_\Phi^1} g(\omega,\, x^\top \omega)\, w^{-1}(x^\top \omega)\, d\omega$$

und für die Transformationen T_1^U (1.3.4) und T_2^U (1.3.5) gilt $T_1^U \mathcal{R}_\Phi^* g(y) \neq \mathcal{R}_\Phi^* T_2^U g(y)$. Dennoch wird ein rotationsinvarianter Mollifier angenommen, was den Rekonstruktionskern mit dem für die parallele Geometrie vergleichbar macht.
Nach (1.2.2) und dem vorhergehenden Abschnitt ist für $e \in \mathrm{D}\big((\mathcal{R}_\Phi^*)^\dagger\big)$

$$\psi^{0,\,LA}(\omega,\, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{m} \tau_{m\mu}^{-1} \langle e,\, f_{m\mu} \rangle\, g_{m\mu}(\omega,\, s)$$

mit

$$\begin{aligned}
\langle e,\, f_{m\mu} \rangle &= \sum_{l=0}^{m} d_\mu(m,\, \Phi)_l \,\langle e,\, v_{m,\,2l-m} \rangle \;, \\
&= \begin{cases} d_\mu(m,\, \Phi)_{m/2} \,\langle e,\, v_{m,\,0} \rangle & ,\; m \text{ gerade}\;, \\ 0 & ,\; m \text{ ungerade}\;, \end{cases}
\end{aligned}$$

(siehe (1.3.9)). Daraus folgt ($\omega = \omega(\varphi)$)

$$\begin{aligned}
\psi^{0,\,LA}(\omega,\, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{2m} \tau_{2m,\,\mu}^{-1}\, d_\mu(2m,\, \Phi)_m \,\langle e,\, v_{2m,\,0} \rangle\, g_{2m,\,\mu}(\omega,\, s) \\
&= 4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{2m} \sigma_{2m}^{-2}\, I_{2m}\, d_\mu(2m,\, \Phi)_m \,\big(1 - \lambda_\mu(2m,\, \Phi)\big)^{-1} \times \\
&\qquad\qquad \times \sum_{l=0}^{2m} d_\mu(2m,\, \Phi)_l\, u_{2m,\,2l-2m}(\omega,\, s)\;,
\end{aligned}$$

wobei für die Integrale I_{2m} wieder

$$I_{2m} = \int\limits_0^1 \mathcal{R}_\omega e(t)\, U_{2m}(t)\, dt$$

gilt. Für den Rekonstruktionskern schreiben wir dann

$$\psi^{0,\,LA}(\omega,\, s) = \pi^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\, I_{2m}\, U_{2m}(s)\, w(s)\, q_{2m}(\varphi) \tag{2.3.3}$$

mit

$$q_{2m}(\varphi) = \sum_{\mu=0}^{2m} \big(1 - \lambda_\mu(2m,\, \Phi)\big)^{-1} d_\mu(2m,\, \Phi)_m \sum_{l=0}^{2m} d_\mu(2m,\, \Phi)_l \, e^{2\imath(l-m)\varphi} \,. \tag{2.3.4}$$

Vergleicht man diesen Rekonstruktionskern mit dem für die parallele Geometrie aus Korollar 1.3.6, so erkennt man direkt den Zusammenhang.

Satz 2.3.2 *Sei $0 < \Phi < \pi/2$ und $A(m,\, \Phi)$ die Slepian–Matrix (2.3.2), $m = 0, 1, \dots,$ mit Eigenwerten $\lambda_\mu(m,\, \Phi)$ und normalisierten Eigenvektoren $d_\mu(m,\, \Phi)$, $\mu = 0, \dots, m$. Weiterhin sei $e \in \mathrm{D}\big((\mathcal{R}^*)^\dagger\big) \cap \mathrm{D}\big((\mathcal{R}_\Phi^*)^\dagger\big)$ ein translations– und rotationsinvarianter Mollifier und ψ^0 der zugehörige Rekonstruktionskern für die parallele Geometrie im Punkt $x = 0$. Dann ergibt sich der Rekonstruktionskern für den Limited–Angle–Fall bei $x = 0$ als*

$$\psi^{0,\,LA}(\omega,\, s) = \psi^0(s) + \zeta(\omega,\, s)$$

mit

$$\begin{aligned}
\zeta(\omega,\, s) &= \pi^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\, U_{2m}(s)\, I_{2m}\, w(s)\, \left(q_{2m}(\varphi) - 1\right) \,, \\
I_{2m} &= \int_0^1 \mathcal{R}_\omega e(t)\, U_{2m}(t)\, dt \,, \\
q_{2m}(\varphi) &= \sum_{\mu=0}^{2m} \big(1 - \lambda_\mu(2m,\, \Phi)\big)^{-1} d_\mu(2m,\, \Phi)_m \sum_{l=0}^{2m} d_\mu(2m,\, \Phi)_l \, e^{2\imath(l-m)\varphi} \,.
\end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich direkt aus Korollar 1.3.6 und (2.3.3):

$$\begin{aligned}
\psi^{0,\,LA}(\omega,\, s) &= \pi^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\, I_{2m}\, U_{2m}(s)\, w(s)\, \left(1 + q_{2m}(\varphi) - 1\right) \\
&= \psi^0(s) + \zeta(\omega,\, s) \,.
\end{aligned}$$

■

Der gesuchte Rekonstruktionskern berechnet sich also aus dem bekannten Kern für vollständige Daten durch Addition eines von der Richtung abhängigen Korrekturtermes.

2.3.1.3 Die Approximative Inverse und ihre Implementierung

In Analogie zu (2.1.2) läßt sich die Rekonstruktionsformel angeben. Der Mollifier (und damit auch der Rekonstruktionskern) ist abhängig vom Parameter γ:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\gamma g(x) &= \frac{1}{4}\int\limits_{S^1_\Phi}\int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\, s)\,\psi_\gamma^{0,\,LA}\left(\omega,\, \frac{s-x^\top\omega}{2}\right) w^{-1}\left(\frac{s-x^\top\omega}{2}\right) ds\, d\omega \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{\Phi}^{\pi-\Phi}\int\limits_{-1}^{1} g(\omega(\varphi), s)\,\psi_\gamma^{0,\,LA}\left(\omega(\varphi),\, \frac{s-x^\top\omega(\varphi)}{2}\right) w^{-1}\left(\frac{s-x^\top\omega(\varphi)}{2}\right) ds\, d\varphi\ .\end{aligned}$$

Die Umformung ist wegen der Struktur von S^1_Φ und der schon erwähnten Redundanz der Daten offensichtlich. Auch in diesem Fall ist das Verfahren sehr effizient implementierbar. Hier ist allerdings zu beachten, daß der Rekonstruktionskern abhängig von der Richtung ω ist, was einen höheren Rechenaufwand bei der Vorberechnung des Kernes, sowie einen höheren Speicheraufwand, jedoch gleichbleibenden Aufwand bei der Rekonstruktion bedeutet.

Der numerisch schwierige Teil ist die Berechnung der Funktionen q_{2m} aus (2.3.4). Hier äußert sich die extreme Schlechtgestelltheit des Problems. Beschränkt man sich (was vernünftig ist) auf die Rekonstruktion von realen Dichtefunktionen, so kann man auch den Imaginärteil des Rekonstruktionskernes vernachlässigen. Vertauschen der Summationsreihenfolge liefert dann

$$q_{2m}(\varphi) = \sum_{l=0}^{2m}\cos(2\,(l-m)\,\varphi)\sum_{\mu=0}^{2m}\big(1-\lambda_\mu(2m,\,\Phi)\big)^{-1} d_\mu(2m,\,\Phi)_m\, d_\mu(2m,\,\Phi)_l\ .$$

Aufgrund des Verhaltens der Eigenwerte der Slepian–Matrix $A(m,\,\Phi)$ ($\lambda_\mu(2m,\,\Phi)\to 1$ monoton wachsend für $m,\,\mu\to\infty$, siehe z. B. [42, 52]) ist es bei der Berechnung der inneren Summe erforderlich, eine zusätzliche Tikhonov–Phillips–Regularisierung durchzuführen und den Faktor $\big((1-\lambda_\mu(2m,\,\Phi)\big)^{-1}$ durch

$$\frac{1-\lambda_\mu(2m,\,\Phi)}{\big(1-\lambda_\mu(2m,\,\Phi)\big)^2+\varrho^2}$$

zu ersetzen. Die Größe des Parameters ϱ ist jeweils abhängig von m. Da die Kondition der Matrix $A(m,\,\Phi)$ mit wachsendem m immer schlechter wird, wird die Notwendigkeit der Regularisierung immer größer, d. h. je größer die Dimension der Matrix ist, desto größer muß auch der Regularisierungsparameter ϱ sein. Die $q_{2m}(\varphi)$ werden ebenso wie die Integrale $I_{2m,\gamma}$ unabhängig von s vorberechnet und in einer Matrix abgespeichert.

Die Daten stehen für $K+1$ gemessene Richtungen und $2L+1$ Strahlen pro Projektion an folgenden diskreten Stellen zur Verfügung: $\omega_k = (\cos\varphi_k,\, \sin\varphi_k)^\top$, $\varphi_k = \Phi + k(\pi - 2\Phi)/K$, $k = 0, \ldots, K$, $s_l = hl$, $h = 1/L$, $l = -L, \ldots, L$.

Den Algorithmus kann man wieder analog zur parallelen und zur Fächerstrahlgeometrie formulieren. Dazu sei

$$\widetilde{\psi}_\gamma^{0,\,LA}(\varphi,\, s) = \pi^{-2} \sum_{m=0}^{M} (2m+1)\, U_{2m}(s)\, I_{2m}\, q_{2m}(\varphi)$$

und wie bei der parallelen Geometrie (siehe Abschnitt 2.1.1.2) $t_i = ih/2$, $i = 0, \ldots, 2L$.

<u>AI_2d_la</u>

`für` $m = 0, \ldots, M$: `berechne (bzw. approximiere)`

$$I_{2m,\gamma} = \int_0^1 \mathcal{R}_\omega e_\gamma(t)\, U_{2m}(t)\, dt \;\; ;$$

`für` $k = 0, \ldots, K$:

$$q_{m,k} = q_{2m}(\varphi_k) \;\; ;$$

`für` $k = 0, \ldots, K$, $i = 0, \ldots, 2L$:

$$p_{k,i} = \widetilde{\psi}_\gamma^{0,\,LA}(\varphi_k,\, t_i)/2 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{M} (2m+1)\, U_{2m}(t_i)\, I_{2m,\gamma}\, q_{m,k} \;\; ;$$

`für` $k = 0, \ldots, K$:

$$v_{k,l} = h \sum_{j=-L}^{L} p_{k,|l-j|}\, g(\omega_k,\, s_j) \;\; ,\; l = -L, \ldots, L \;\; ;$$

`für alle Rekonstruktionspunkte` x:

$$\check{f}(x) = \frac{\pi - 2\Phi}{K+1} \sum_{k=0}^{K} \big((1-u)\, v_{k,l} + u\, v_{k,l+1}\big)$$

`mit`

$$s = x^\top \omega_k,\; l \le s/h \le l+1,\; u = s/h - l \;\; ;$$

`Ende.`

2.3.2 Numerische Beispiele

Für die nachfolgenden Rekonstruktionen wurde als Mollifier wieder die Gaußglocke (2.1.5), als Objekt wieder das Shepp–Logan–Phantom (Abbildung 2.1.3) gewählt. Es lagen jeweils 255 Strahlen pro Projektion vor. Die Anzahl der Projektionen richtete sich nach der Größe des fehlenden Winkelbereiches. Für $\Phi = \pi/12$ wurden im Intervall $[\Phi, \pi - \Phi]$ 167 Punkte äquidistant verteilt, für $\Phi = \pi/6$ wurden dementsprechend 134 Projektionen gemessen. In Abbildung 2.3.1 sind die beiden Rekonstruktionskerne dargestellt. Abbildung 2.3.2 zeigt die zugehörigen Rekonstruktionen.

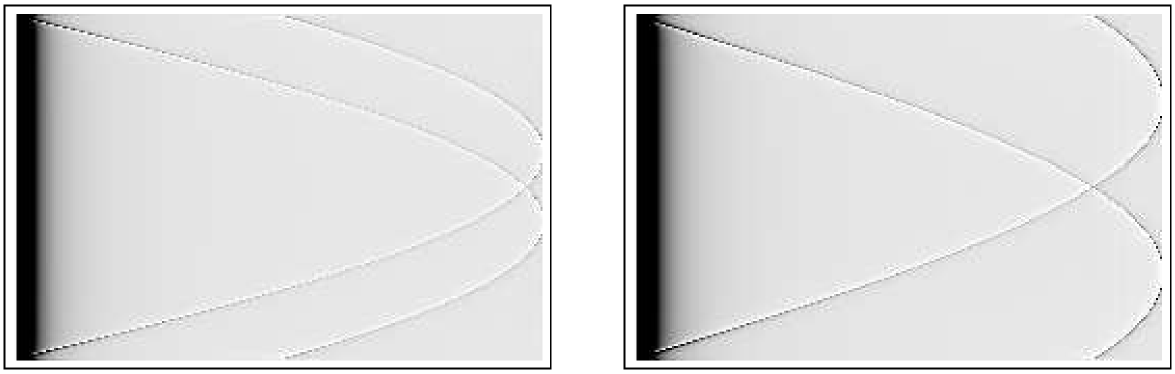

Abbildung 2.3.1: Density–Plot der Rekonstruktionskerne für $\gamma = 0.0031$ und $\Phi = \pi/12$ (links) bzw. $\Phi = \pi/6$ (rechts): die horizontale Richtung ist die s–Richtung im Intervall $[0, 1]$, die vertikale Richtung die φ–Richtung im Intervall $[\Phi, \pi - \Phi]$).

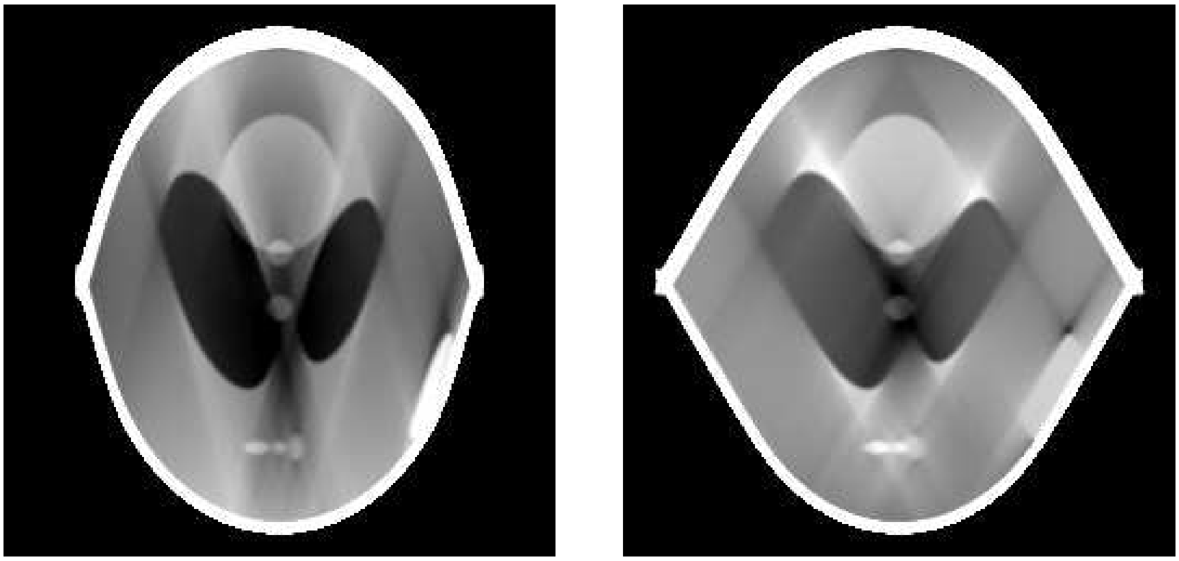

Abbildung 2.3.2: Rekonstruktion mit 255×255 Bildpunkten für $\Phi = \pi/12$ (links) bzw. $\Phi = \pi/6$ (rechts).

Die für Limited–Angle typischen Artefakte sind auch hier unvermeidbar.

In Abschnitt 2.3.1.2 haben wir bereits festgestellt, daß sich der Rekonstruktionskern durch Addition einer von der Richtung abhängigen Korrektur aus dem Rekonstruktionskern für die parallele Geometrie ergibt. Deshalb muß die Frage gestellt werden: Was bringt dieser Korrekturterm? Für den Fall $\Phi = \pi/6$ zeigt Abbildung 2.3.3 eine Rekonstruktion bei der auf den Korrekturterm verzichtet wurde, mit anderen Worten die fehlenden Daten wurden durch den Wert 0 ersetzt.

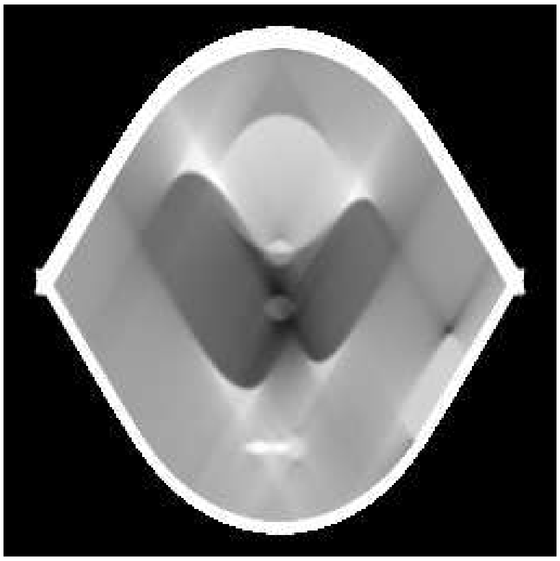

Abbildung 2.3.3: Rekonstruktion für $\Phi = \pi/6$ ohne Verwendung des Korrekturterms.

Optisch ist zwischen den beiden Rekonstruktionen kein Unterschied festzustellen. Der Korrekturterm hat also keine Artefaktreduktion bewirkt. Es läßt sich jedoch feststellen, daß die mit Korrekturterm rekonstruierte Funktion die gesuchte Dichtefunktion besser approximiert.

Für die Darstellung der Abbildung 2.3.3 mußte das Fenster nach unten verschoben werden. Der relative Fehler im Ergebnis beträgt bei der Rekonstruktion mit Korrektur 43.94%, bei der Rekonstruktion ohne Korrektur 50.75%. In Abbildung 2.3.4 sind horizontale Querschnitte ($y = 0.102$) durch die Originaldichte und die beiden Rekonstruktionen geplottet. Auf der Abszisse sind die Spaltennummern der Bildmatrix abgetragen, auf der Ordinate die zugehörigen Funktionswerte. Bei beiden Rekonstruktionen ist die "Verbreiterung" des Objektes zu erkennen, die Rekonstruktion mit Korrektur kommt im Innern des Phantoms jedoch deutlich näher an die Originaldichte heran. Der Korrekturterm hat letztendlich wie eine multiplikative Konstante gewirkt.

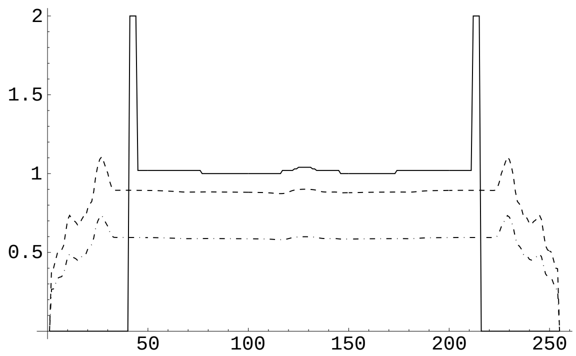

Abbildung 2.3.4: Querschnitt durch das Shepp–Logan–Phantom: durchgezogene Linie: Original–Werte, gestrichelt: Rekonstruktion mit Korrekturterm, gepunktet: Rekonstruktion ohne Korrekturterm.

Da die Berechnung des Korrekturterms der aufwendigste Teil bei der Bestimmung des Rekonstruktionskernes ist, gilt es in Anwendungen, von Fall zu Fall abzuschätzen, ob eine Rekonstruktion mit Korrekturterm erforderlich ist oder nicht.

2.3.3 Ein Vergleich mit anderen Methoden

Zum Abschluß der Betrachtungen für den 2D–Fall wird die Approximative Inverse für die Limited–Angle–Geometrie mit zwei bekannten Verfahren verglichen: zum einen mit dem Verfahren von Louis [20], zum anderen mit dem Verfahren von Davison und Grünbaum [4].

2.3.3.1 Das Verfahren von Louis

Die Methode, die in Louis [20] eingeführt wird, basiert auf einer konsistenten Approximation der Daten im fehlenden Bereich. Aus den Helgason–Ludwig–Konsistenz–Bedingungen (siehe z. B. [15]) läßt sich eine Reihendarstellung für $\mathcal{R}f$ folgern:

$$\mathcal{R}f(\omega(\varphi), s) = w(s) \sum_{m=0}^{\infty} U_m(s)\, g_m(\varphi) \tag{2.3.5}$$

mit

$$\begin{aligned} g_m(\varphi) &= \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \mathcal{R}f(\omega(\varphi),\, s)\, U_m(s)\, ds & (2.3.6) \\ &= \sum_{\substack{|l| \leq m \\ l+m \text{ gerade}}} g_{ml} \exp(\imath\, l\, \varphi)\ . & (2.3.7) \end{aligned}$$

Die Idee des Verfahrens ist es, mit Hilfe der gemessenen Daten und den Gleichungen (2.3.5), (2.3.6) und (2.3.7) die fehlenden Daten zu approximieren. Dazu werden im ersten Schritt die Koeffizienten g_m für φ mit $\omega(\varphi) \in S^1_\Phi$ durch (2.3.6) angenähert. Aus diesen Koeffizienten wird im zweiten Schritt das lineare Gleichungssystem (2.3.7) zur Bestimmung der g_{ml} gelöst. Damit kann man dann die $g_m(\varphi)$ für $|\varphi| \leq \Phi$ und schließlich mit der Summe (2.3.5) die fehlenden Daten berechnen.

Das zu lösende Gleichungssystem ist im allgemeinen überbestimmt und sehr schlecht konditioniert. Um dies festzustellen, betrachten wir die Matrizen A_m des Systems:

$$\begin{aligned} A_m &= (a_m)_{k=0,\ldots,K,\, l=0,\ldots,m}\ , \\ (a_m)_{k,l} &= \exp(\imath\,(2l-m)\,\varphi_k)\ . \end{aligned}$$

Für die Matrix des Ausgleichsproblems gilt damit

$$\begin{aligned} B_m &= (A_m^H A_m)_{k,\, l=0,\ldots,m}\ , \\ (b_m)_{k,l} &= \sum_{j=0}^{K} \exp(2\,\imath\,(l-k)\,\varphi_j)\ , \end{aligned}$$

d. h. ihre Matrixelemente sind Diskretisierungen der Integrale, die die Slepian–Matrix definieren (siehe (2.3.2)). Deshalb verhalten sich die Singulärwerte von B_m etwa wie die Wurzel der Eigenwerte der Slepian–Matrix, was die Schlechtkonditioniertheit des Gleichungssystems (2.3.6) beweist.

Der entscheidende Unterschied zwischen dem Verfahren von Louis und der Approximativen Inversen für Limited Angle ist der, daß die Louis–Methode die fehlenden Daten mit Hilfe der vorhandenen Daten ausgleicht, die Approximative Inverse die fehlenden Daten im Rekonstruktionskern kompensiert. Bezeichnet f_1 die mit der Approximativen Inversen berechnete Näherung an die Dichtefunktion f, f_2 die mit dem Louisschen

Verfahren ermittelte Dichte, g die gemessenen Daten und $\widetilde{g}$ die approximierten Daten (in S^1_Φ ist $g = \widetilde{g}$), dann ist

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{4} \int\limits_{S^1_\Phi} \int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\, s)\, \psi^{0,LA}(\omega,\, \frac{s - x^\top\omega}{2})\, w^{-1}(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, ds\, d\omega \\
&= \frac{1}{4} \int\limits_{S^1_\Phi} \int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\, s)\, \big(\psi^0(\frac{s - x^\top\omega}{2}) + \zeta(\omega,\, \frac{s - x^\top\omega}{2})\big)\, w^{-1}(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, ds\, d\omega \\
&= \frac{1}{4} \int\limits_{S^1_\Phi} \int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\, s)\, \psi^0(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, w^{-1}(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, ds\, d\omega + \\
&\quad + \frac{1}{4} \int\limits_{S^1_\Phi} \int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\, s)\, \zeta(\omega,\, \frac{s - x^\top\omega}{2})\, w^{-1}(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, ds\, d\omega
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{1}{4} \int\limits_{S^1} \int\limits_{-1}^{1} \widetilde{g}(\omega,\, s)\, \psi^0(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, w^{-1}(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, ds\, d\omega \\
&= \frac{1}{4} \int\limits_{S^1_\Phi} \int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\, s)\, \psi^0(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, w^{-1}(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, ds\, d\omega + \\
&\quad + \frac{1}{4} \int\limits_{S^1 \setminus S^1_\Phi} \int\limits_{-1}^{1} \widetilde{g}(\omega,\, s)\, \psi^0(\omega,\, \frac{s - x^\top\omega}{2})\, w^{-1}(\frac{s - x^\top\omega}{2})\, ds\, d\omega
\end{aligned}$$

und die unterschiedlichen Konzepte werden sichtbar: In dem Bereich, in dem die Daten bekannt sind, ist die Berechnung identisch; dort wo die Information fehlt wird diese einmal durch die Korrektur des Rekonstruktionskernes, beim zweiten Mal aus den vorhandenen Daten beschafft. Die Approximative Inverse ist dabei im Vorteil: der Rekonstruktionskern muß nur einmal berechnet werden und bei einer neuen Datenerzeugung kann der Rekonstruktionsalgorithmus direkt gestartet werden. Der Korrekturterm ist unabhängig von den Daten und daher auch nicht mit Datenfehlern behaftet. Bei der zweiten Methode muß jedoch nach jeder Messung von neuem die Datenapproximation der Rekonstruktion vorangestellt werden. Es ist also keine Vorberechnung möglich und eventuelle Fehler in den gemessenen Daten setzen sich in den ergänzten Daten fort.

2.3.3.2 Das Verfahren von Davison und Grünbaum

Die Methode von Davison und Grünbaum ähnelt der Approximativen Inversen, rührt aber von einer etwas anderen Idee her und ist in der Durchführung wesentlich aufwendiger. Ausgangspunkt ist eine gefilterte Rückprojektion mit von der Richtung abhängigen Filtern. Im Kontext der Approximativen Inversen heißt das, der Rekonstruktionskern ist (wie dies auch in 2.3.1 war) von der Richtung abhängig. Die Methode ist flexibel, um für beliebige Richtungen eingesetzt zu werden. Es sei

$$\check{f}(x) = \int_{S^1_\Phi} \int_{-1}^{1} \psi(\omega,\, s - x^\top \omega)\, \mathcal{R}f(\omega,\, s)\, ds\, d\omega \ .$$

Diskretisiert man das äußere Integral, d. h. man betrachtet das semi–diskrete Problem und nicht wie Louis und Schuster [37] das diskrete Problem, und vernachlässigt die Schrittweite(n), so erhält man bei K diskreten Richtungen

$$\begin{aligned}
\check{f}(x) &\doteq \sum_{j=1}^{K} \int_{-1}^{1} \psi(\omega_j,\, s - x^\top \omega_j)\, \mathcal{R}f(\omega_j,\, s)\, ds \\
&= \sum_{j=1}^{K} \int_{\omega_j^\perp} \int_{-1}^{1} \psi(\omega_j,\, s - x^\top \omega_j) f(s\omega_j + y)\, ds\, dy \\
&= \sum_{j=1}^{K} \int_{\Omega} \psi(\omega_j,\, (y - x)^\top \omega_j)\, f(y)\, dy
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\check{f} = E * f \quad \text{mit} \quad E(x) = \sum_{j=1}^{K} \psi(\omega_j,\, x^\top \omega_j) \ .$$

Die Aufgabe besteht nun darin, für einen vorgegebenen Mollifier e den Rekonstruktionskern ψ so zu bestimmen, daß $\|e - E\|_{L_2(\Omega)}$ möglichst klein wird. Schreibt man $\mathrm{R} = (\mathcal{R}_{\omega_1}, \ldots, \mathcal{R}_{\omega_K})^\top$ und $\Psi = w \cdot (\psi_1, \ldots, \psi_K)^\top$ mit $\psi_j = \psi(\omega_j, \cdot)$, dann ist wegen

$$\mathcal{R}^*_{\omega_j} g(x) = g(x^\top \omega_j)\, w^{-1}(x^\top \omega_j)$$

$E = \mathrm{R}^*\Psi$ und das Minimieren der Fehlernorm läßt sich durch Lösen der Normalgleichung

$$\mathrm{R}\mathrm{R}^*\Psi = \mathrm{R}e \tag{2.3.8}$$

erreichen. Bei der Invertierung des Gleichungssystems (2.3.8) kann man wieder Gebrauch von Invarianzen der Radon–Transformation machen und damit die Dimension des Problems verkleinern. Es sind schließlich (siehe [42, Seite 152]) Gleichungssysteme der Form

$$A_m\, c_m = b_m,\ m = 0, \ldots$$

zu lösen mit

$$A_m = (a_m)_{i,j=1,\ldots,K},\ (a_m)_{i,j} = \frac{2}{m+1}\, U_m(\omega_i^\top \omega_j)$$

und

$$b_m = (b_m)_{i=1,\ldots,K},\ (b_m)_i = \frac{1}{m+1} \int\limits_{-1}^{1} \mathcal{R}_{\omega_i} e(s)\, ds\ .$$

Über die Beziehung

$$\Psi = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\, w(\cdot)\, U_m(\cdot) \tag{2.3.9}$$

können die gesuchten Rekonstruktionskerne ψ_j bestimmt werden.

Der Nachteil dieser Methode liegt darin, daß sehr viele lineare Gleichungssysteme der Dimension $K \times K$ gelöst werden müssen: Wird die Summation (2.3.9) beim Index M abgebrochen und es liegen L Daten pro Richtung vor, dann sind insgesamt $L \times (M+1)$ Systeme zu lösen.

Kapitel 3

Approximative Inverse und 3D–Computertomographie

Die Übertragung der Ergebnisse für die 2D–Computertomographie auf die 3D–Computertomographie gestaltet sich schwierig, da die Radon–Transformation im dreidimensionalen einer Funktion f ihre Ebenenintegrale zuordnet, die gemessenen Daten aber nach wie vor Linienintegrale sind. Dennoch ist die Vorgehensweise vergleichbar. Wir starten mit einer parallelen Geometrie, die in der Praxis keine Bedeutung hat. Die Idee dabei ist aber, den Rekonstruktionskern danach mittels einer einfachen Transformation auf die relevante Kegelstrahlgeometrie übertragen zu können. Dies wird auch gelingen, jedoch nur für eine viel zu aufwendige Abtastgeometrie. Zur Herleitung eines Rekonstruktionsverfahrens für die in der Praxis interessanten Geometrien können wir aber schließlich wieder den Bogen zum Anfang spannen und die Approximative Inverse der Radon–Transformation verwenden.

3.1 Die parallele Geometrie

Ganz zu Beginn haben wir für beliebige Dimensionen die parallele Röntgen–Transformation definiert, die im zweidimensionalen bis auf die Parametrisierung mit der Radon–Transformation übereinstimmt. Obwohl eine parallele Geometrie in der 3D–Tomographie nicht umsetzbar ist, wollen wir dennoch zum Einstieg in dieses Kapitel den Rekonstruktionskern für die parallele Röntgen–Transformation berechnen. Der Ablauf wird der gleiche wie im 2D–Fall sein: Wir benötigen die Singulärwertzerlegung und müssen nach Invarianzen suchen, bevor wir den Rekonstruktionskern angeben können. Schließlich wird es uns auch hier gelingen, den Rekonstruktionskern mit Hilfe der Inversionsformel herzuleiten. Zuvor zitieren wir einige grundlegende Eigenschaften der Transformation.

3.1.1 Vorbereitungen

Analog zur Radon–Transformation läßt sich auch die parallele Röntgen–Transformation stetig auf gewichtete L_2–Räume fortsetzen. Bevor Satz 1.3.1 adaptiert werden kann, notieren wir wieder einige Bezeichnungen: T steht für das Tangentenbündel $\{(\theta, y) : \theta \in S^{n-1},\, y \in \theta^\perp \cap \Omega^n\}$ und $W_\nu^n(y) = (1-|y|^2)^{\nu-n/2}$, $\bar{W}_\nu^n(y) = (1-|y|^2)^{\nu-(n-1)/2}$ für $(\theta, y) \in T$.

Satz 3.1.1 *Sei $\nu > n/2 - 1$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathsf{L}_2(\Omega^n, W_\nu^{-1}) &\to \mathsf{L}_2(T, \bar{W}_\nu^{-1}) \;, \\ \mathcal{P}f(\theta, y) &= \int_{\mathbb{R}} f(y + t\theta)\, dt \end{aligned}$$

ist stetig. Ihre Adjungierte ist

$$\mathcal{P}^* g(x) = W_\nu(x) \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta x)\, \bar{W}_\nu^{-1}(E_\theta x)\, d\theta \;.$$

Hierbei ist $E_\theta : \mathbb{R}^n \to \theta^\perp$ die orthogonale Projektion auf $\theta^\perp$.

Bemerkung: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 1.3.1 und kann in MAASS [39] nachgelesen werden.

Die Singulärwertzerlegung der parallelen Röntgen–Transformation wurde von MAASS in [38] für allgemeine Dimension n angegeben. Der Übersichtlichkeit halber wollen wir uns hier auf den Fall $n = 3$, $\nu = 3/2$ beschränken. Mit $\Omega := \Omega^3$ (bis zum Ende der Arbeit) bezeichnen wir die Einheitskugel, mit $P_n^{(\alpha,\beta)}$ die Jacobi–Polynome der Ordnung n, mit C_l^λ die Gegenbauer–Polynome, mit B die Beta–Funktion, mit Y_{lj} eine spezielle Basis der Kugelflächenfunktionen auf S^2 und mit $\bar{Y}_j$ eine spezielle Basis derer auf S^1. Schließlich sei $w := \bar{W}_{3/2}^3$. Damit gilt (siehe [38, Corollary 8])

Satz 3.1.2 *Seien $m,\, l \in \mathbb{N}$ mit $m \geq l$, $m+l$ gerade, $j \in \mathbb{Z}$ mit $|j| \leq l$. Weiterhin sei*

$$\dot{v}_{mlj}(x) = |x|^l \, P^{(0,\, l+1/2)}_{(m-l)/2}(2|x|^2 - 1)\, Y_{lj}(x/|x|) \ ,$$

$$\dot{u}_{mlj}(\theta,\, y) = w(y) \sum_{\substack{j_1=-l \\ j_1+l \text{ gerade}}}^{l} d_{mlj_1}\, d^j_{j_1}(A_\theta)\, |y|^{|j_1|} P^{(1/2,\, |j_1|)}_{(m-|j_1|)/2}(2|y|^2 - 1)\, \bar{Y}_{j_1}(A_\theta^{-1} y/|y|)$$

mit

$$d_{mlj_1} = C^{|j_1|+1/2}_{l-|j_1|}(0)\, B(\frac{m-|j_1|}{2}+1,\, \frac{1}{2})$$

und

$$\sigma^2_{ml} = \sum_{\substack{j=0 \\ j+l \text{ gerade}}}^{l} B(\frac{m+j}{2}+1, \frac{1}{2})\, B(\frac{m-j}{2}+1, \frac{1}{2})\, B(\frac{l+j+1}{2}+1, \frac{1}{2})\, B(\frac{l-j+1}{2}+1, \frac{1}{2}) \ .$$

Dabei bestimmen sich die Koeffizienten $d^{j_1}_j$ aus

$$Y_{lj}(A_\theta \omega) = \sum_{j_1=-l}^{l} d^{j_1}_j(A_\theta)\, Y_{lj_1}(\omega)$$

und die Matrix A_θ ist eine orthogonale Transformation, die den kanonischen Einheitsvektor $(0,\, 0,\, 1)^\top$ in θ abbildet.
Dann bildet $\{\dot{v}_{mlj}/\|\dot{v}_{mlj}\|_{\mathsf{L}_2(\Omega)},\, \dot{u}_{mlj}/\|\dot{u}_{mlj}\|_{\mathsf{L}_2(T,\, w^{-1})};\, \sigma_{ml}\}$ ein vollständiges singuläres System für die parallele Röntgen–Transformation $\mathcal{P} : \mathsf{L}_2(\Omega) \to \mathsf{L}_2(T,\, w^{-1})$.

Invarianzen des Operators ergeben sich in Analogie zur Radon–Transformation. Wir geben eine Translations– und eine Rotationsinvarianz an. Seien dazu

$$T_1^x f(z) := \frac{1}{8}\, f\left(\frac{z-x}{2}\right) \ \text{ und } T_2^x g(\theta,\, y) := \frac{1}{8}\, g\left(\theta,\, \frac{y - E_\theta x}{2}\right) w^{-1}\left(\frac{y - E_\theta x}{2}\right) w(y) \ , \tag{3.1.1}$$

sowie

$$T_1^U f(z) := f(Uz) \ \text{ und } \ T_2^U g(\theta,\, y) := g(U\theta,\, Uy) \ . \tag{3.1.2}$$

Einfache Rechnungen zeigen, daß dann

$$T_1^x \mathcal{P}^* g(z) = \mathcal{P}^* T_2^x g(z) \quad \text{bzw.} \quad T_1^U \mathcal{P}^* g(z) = \mathcal{P}^* T_2^U g(z) \tag{3.1.3}$$

gilt. Daraus resultiert wiederum bei einem translations– und rotationsinvarianten Mollifier, daß der Rekonstruktionskern nur für $x = 0$ berechnet werden muß und unabhängig von der Richtung θ ist.

Satz 3.1.3 *Sei U eine unitäre Transformation und $e(x,\cdot)$ sei ein Mollifier mit*

$$e(x,\, y) = \frac{1}{8}\, e\big(0,\, U\left(\frac{x-y}{2}\right)\big) = \frac{1}{8}\, e^0\big(U\left(\frac{x-y}{2}\right)\big) = \frac{1}{8}\,\bar{e}\big(\left|\frac{x-y}{2}\right|\big)\ .$$

Dann gilt für die Lösung von $\mathcal{P}^*\psi(x) = e(x,\cdot)$ die Gleichung

$$\psi(x;\, \theta,\, y) = \frac{1}{8}\,\psi^0\left(\frac{y - E_\theta x}{2}\right)\, w^{-1}\left(\frac{y - E_\theta x}{2}\right)\, w(y)\ ,$$

wobei ψ^0 den von der Richtung unabhängigen Rekonstruktionskern für $x = 0$ bezeichnet, d. h. $\mathcal{P}^*\psi^0 = e^0$.

Beweis: Der Beweis ergibt sich direkt mit Hilfe von (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) und Lemma 1.2.2. ∎

Mit diesen Vorbereitungen kann nun der Rekonstruktionskern für die parallele Röntgen–Transformation berechnet werden.

3.1.2 Rekonstruktionskern und Approximative Inverse

Ausgangspunkt für die Berechnung des Rekonstruktionskernes sind die Reihenentwicklung (1.2.2) und ein geeigneter Mollifier. Zunächst gilt mit einer beliebigen aber festen Richtung θ_0

$$\psi^0(y) = \sum_{m=0}^{\infty}\ \sum_{\substack{l=0\\ l+m \text{ gerade}}}^{m} \sigma_{ml}^{-2} \sum_{j=-l}^{l} \langle \mathcal{P}e^0,\, u_{mlj}\rangle_{\mathsf{L}_2(T,\, w^{-1})}\, u_{mlj}(\theta_0,\, y)\ .$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}e^0,\, u_{mlj}\rangle_{\mathsf{L}_2(T,\, w^{-1})} &= \sigma_{ml}\,\langle e^0,\, v_{mlj}\rangle_{\mathsf{L}_2(\Omega)} \\
&= \sigma_{ml} \int_{\Omega} e^0(x)\, v_{mlj}(x)\, dx \\
&= \sigma_{ml} \int_{S^2}\int_0^1 e^0(s\omega)\, v_{mlj}(s\omega)\, s\, ds\, d\omega\ .
\end{aligned}$$

Der Mollifier wird als rotationssymmetrisch vorausgesetzt, also gilt $e^0(x) = \bar{e}(|x|)$. Nach Einsetzen der Eigenfunktionen wird

$$\begin{aligned}
\langle e^0,\, v_{mlj}\rangle_{\mathsf{L}_2(\Omega)} &= \|\dot{v}_{mlj}\|_{\mathsf{L}_2(\Omega)}^{-1} \int_0^1 \bar{e}(s)\, s^{l+2}\, P_{(m-l)/2}^{(0,\,l+1/2)}(2s^2-1)\, ds \int_{S^2} Y_{lj}(\omega)\, d\omega \\
&= 0 \text{ für } l \neq 0 \vee j \neq 0\ .
\end{aligned}$$

Als Zwischenergebnis halten wir

$$\psi^0(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{2m,0}^{-2} \, \langle \mathcal{P}e^0, \, u_{2m,0,0} \rangle \, u_{2m,0,0}(\theta_0, \, y) \, , \tag{3.1.4}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathsf{L}_2(T, w^{-1})}$, fest. Uns fehlt noch eine Darstellung für $u_{2m,0,0}$. Es gilt

$$\dot{u}_{2m,0,0}(\theta, \, y) = (1 - |y|^2)^{1/2} \, d_{2m,0,0} \, d_0^0(A_\theta) \, P_m^{(1/2,0)}(2|y|^2 - 1)$$

mit

$$d_{2m,0,0} = B(m+1, \, 1/2), \, d_0^0(A_\theta) = 1$$

sowie

$$\begin{aligned} P_m^{(1/2,0)}(2|y|^2 - 1) &= (-1)^m \, P_m^{(0,1/2)}(1 - 2|y|^2) \\ &= (-1)^m \, (1 - |y|^2)^{-1/2} \, P_{2m+1}\big((1 - |y|^2)^{1/2}\big) \end{aligned}$$

(siehe [1]). Hier bezeichnen P_n die Legendre–Polynome. Damit erhalten wir

$$\dot{u}_{2m,0,0}(\theta, \, y) = (-1)^m \, B(m+1, \, 1/2) \, P_{2m+1}\big((1 - |y|^2)^{1/2}\big) \; .$$

Die Norm von $u_{2m,0,0}$ berechnet sich (ebenfalls unter Verwendung von [1]) zu

$$\begin{aligned} \|u_{2m,0,0}\|^2_{\mathsf{L}_2(T, w^{-1})} &= \int_{S^2} \int_{\theta^\perp} B^2(m+1, \, 1/2) \, P^2_{2m+1}\big((1 - |y|^2)^{1/2}\big) \, (1 - |y|^2)^{-1/2} \, dy \, d\theta \\ &= 8\pi^2 \, B^2(m+1, \, 1/2) \int_0^1 P^2_{2m+1}\big((1 - t^2)^{1/2}\big) \, \frac{t}{(1 - t^2)^{1/2}} \, dt \\ &= 8\pi^2 \, B^2(m+1, \, 1/2) \int_0^1 P^2_{2m+1}(s) \, ds \\ &= 4\pi^2 \, B^2(m+1, \, 1/2) \int_{-1}^1 P^2_{2m+1}(s) \, ds \\ &= 4\pi^2 \, B^2(m+1, \, 1/2) \, \frac{2}{4m+3} \; . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_{2m,0,0}(\theta, \, y) = \frac{\dot{u}_{2m,0,0}(\theta, \, y)}{\|\dot{u}_{2m,0,0}\|_{\mathsf{L}_2(T, w^{-1})}} = (-1)^m \, \frac{\sqrt{2m + 3/2}}{2\pi} \, P_{2m+1}\big((1 - |y|^2)^{1/2}\big) \; .$$

Abschließend berechnen wir noch $\langle \mathcal{P}e^0,\, u_{2m,\,0,\,0}\rangle$. Wir beachten dabei, daß die Röntgen–Transformation von e^0 nur von $|y|$ abhängt. Deshalb führen wir eine neue Bezeichnung ein. Es sei

$$\widetilde{\mathcal{P}}e^0(t) := \mathcal{P}e^0(\theta_0,\, t\theta_0') \ ,$$

mit $\theta_0' \in \theta_0^\perp \cap S^2$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}e^0,\, u_{2m,\,0,\,0}\rangle &= \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \mathcal{P}e^0(\theta,\, y)\, u_{2m,\,0,\,0}(\theta,\, y)\, w^{-1}(y)\, dy\, d\theta \\
&= (-1)^m\, 4\pi\, \sqrt{2m+3/2} \int\limits_0^1 \widetilde{\mathcal{P}}e^0(t)\, P_{2m+1}\big((1-t^2)^{1/2}\big)\, \frac{t}{(1-t^2)^{1/2}}\, dt \\
&= (-1)^m\, 4\pi\, \sqrt{2m+3/2} \int\limits_0^1 \widetilde{\mathcal{P}}e^0\big((1-t^2)^{1/2}\big)\, P_{2m+1}(t)\, dt \ .
\end{aligned}$$

Einsetzen der erzielten Ergebnisse in Gleichung (3.1.4) liefert zusammen mit $\sigma_{2m,\,0} = \pi\, B(m+1,\, 1/2)$

$$\psi^0(y) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+3/2}{B^2(m+1,\, 1/2)}\, P_{2m+1}\big((1-|y|^2)^{1/2}\big) \int\limits_0^1 \widetilde{\mathcal{P}}e^0\big((1-t^2)^{1/2}\big)\, P_{2m+1}(t)\, dt \ . \tag{3.1.5}$$

Die Resultate fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 3.1.4 *Sei $\mathcal{P}$ die 3D–Röntgen–Transformation und $e(x,\cdot)$ ein translations– und rotationsinvarianter Mollifier aus* range$(\mathcal{P}^*)$. *Für die Lösung von*

$$\mathcal{P}^*\psi^0 = e^0 \ ,$$

$e(x,\cdot) = T_1^x e^0$ *(siehe (3.1.1)), gilt*

$$\psi^0(y) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+3/2}{B^2(m+1,\, 1/2)}\, I_{2m+1}\, P_{2m+1}\big(w(y)\big) \tag{3.1.6}$$

mit

$$I_{2m+1} = \int\limits_0^1 \widetilde{\mathcal{P}}e^0\big((1-t^2)^{1/2}\big)\, P_{2m+1}(t)\, dt.$$

Aus der Darstellung (3.1.6) ist ersichtlich, daß der Rekonstruktionskern nicht von y sondern lediglich von $|y|$ abhängt. Dennoch sind die Kosten zur Berechnung des Rekonstruktionskernes auf diese Art enorm. Die Integrale I_{2m+1} müssen in der Regel wieder numerisch approximiert werden. Daneben muß auch noch beachtet werden, daß die Auswertung der Legendre–Polynome P_{2m+1} sehr aufwendig ist. Daher wollen wir uns noch einer anderen Möglichkeit zuwenden, den Rekonstruktionskern herzuleiten.

Wieder in Analogie zur Radon–Transformation läßt sich auch für die parallele Röntgen–Transformation der Rekonstruktionskern aus der Inversionsformel herleiten, wobei wir uns auch hier auf den Fall $n = 3$ beschränken. Dazu betrachten wir nun

$$\mathcal{P} : \mathsf{L}_2(\Omega) \to \mathsf{L}_2(\widetilde{T})$$

mit $\widetilde{T} = \{(\theta,\, y) : \theta \in S^2,\, y \in \theta^\perp\}$. Der adjungierte Operator hat die Form

$$\mathcal{P}^\# g(x) = \int_{S^2} g(\theta,\, E_\theta x)\, d\theta \ ,$$

wobei auch hier wieder E_θ die senkrechte Projektion auf die Ebene $\theta^\perp$ bezeichnet.

Mit Hilfe der Inversionsformel der parallelen Röntgen–Transformation (siehe z. B. [42, 54]) kann eine Darstellung für den Rekonstruktionskern als Lösung von $\mathcal{P}^\#\psi(x) = e(x,\cdot)$ $(e(x,\cdot) \in H_0^\alpha(\Omega),\ \alpha \geq 1/2)$ angegeben werden:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-2} I^{-1} \mathcal{P} e(x,\cdot) \ .$$

Erneut steht I für das Riesz–Potential und wirkt auf die zweite Variable. Da sich die Invarianzen auch in diesem Fall übertragen lassen, muß der Rekonstruktionskern wieder nur für $x = 0$ ausgerechnet werden und ist unabhängig von der Richtung θ.

Es gilt

$$\begin{aligned} I^{-1}\mathcal{P}_\theta e(y) &= (2\pi)^{-1} \int_{\theta^\perp} |\eta|\, (\mathcal{P}_\theta e)^\wedge(\eta)\, \exp(\imath\, y^\top \eta)\, d\eta \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\theta^\perp} |\eta|\, \widehat{e}(\eta)\, \exp(\imath\, y^\top \eta)\, d\eta \end{aligned}$$

nach Einsetzen des Riesz–Potentials und Verwendung des Projektionssatzes (siehe [42, Theorem II.1.1]) und deswegen

$$\psi^0(y) = (2\pi)^{-5/2} \int_{\theta^\perp} |\eta|\, \widehat{e^0}(\eta)\, \exp(\imath\, y^\top \eta)\, d\eta \ .$$

Verwendet man als Mollifier wieder die Gaußglocke, d. h.

$$e_\gamma^0(y) = (2\pi)^{-3/2}\,\gamma^{-3}\,\exp\big(-|y|^2/(2\gamma^2)\big)\ ,$$

dann ist $\widehat{e_\gamma^0}(\eta) = (2\pi)^{-3/2}\exp(-\gamma^2\,|\eta|^2/2)$ und für den Rekonstruktionskern gilt

$$\begin{aligned}
\psi_\gamma^0(y) &= (2\pi)^{-4}\int\limits_{\theta^\perp}|\eta|\,\exp(-\gamma^2\,|\eta|^2/2)\exp(\imath\,y^\top\eta)\,d\eta \\
&= (2\pi)^{-4}\int\limits_0^\infty r^2\,\exp(-\gamma^2\,r^2/2)\int\limits_{S^1}\exp(\imath\,r\,y^\top\theta)\,d\theta\,dr \\
&= (2\pi)^{-3}\int\limits_0^\infty r^2\,\exp(-\gamma^2\,r^2/2)\,J_0(r|y|)\,dr \\
&= \frac{1}{2}\,(2\pi)^{-5/2}\,\gamma^{-3}\,{}_1F_1\big(3/2;1;-|y|^2/(2\gamma^2)\big)\ .
\end{aligned}$$

Hier wurden die Hansensche Integraldarstellung für die Besselfunktion J_0 sowie Formel 6.631.1 aus Gradshteyn und Ryzhik [10] verwendet.

In Abbildung 3.1.1 ist der Rekonstruktionskern für $\gamma = 0.0031$ dargestellt.

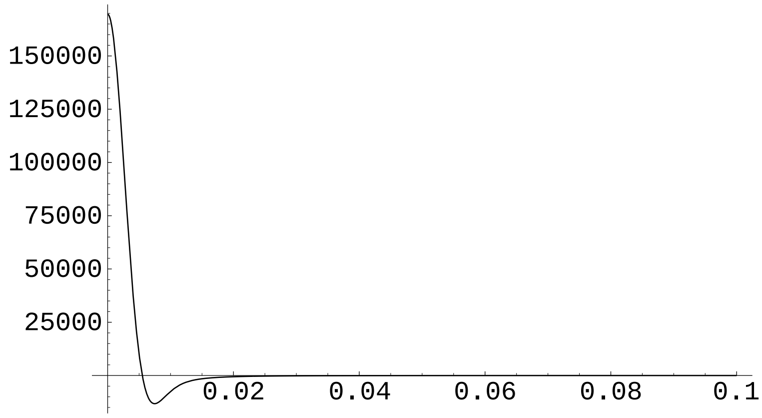

Abbildung 3.1.1: Radialer Anteil des Rekonstruktionskernes für $\gamma = 0.0031$.

Die Approximative Inverse für die parallele Geometrie hat die Gestalt

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}g(x) &= \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp\cap\Omega} g(\theta,\,y)\,\psi(x;\,\theta,\,y)\,w^{-1}(y)\,dy\,d\theta \\
&= \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp\cap\Omega} g(\theta,\,y)\,\psi^0(y-E_\theta x)\,w^{-1}(y)\,dy\,d\theta
\end{aligned}$$

mit ψ^0 als Lösung von $\mathcal{P}^*\psi^0 = e^0$, bzw.

$$\mathcal{S}g(x) = \int\limits_{S^2} \int\limits_{\theta^\perp} g(\theta,\, y)\, \psi^0(y - E_\theta x)\, dy\, d\theta$$

mit ψ^0 als Lösung von $\mathcal{P}^\#\psi^0 = e^0$, und ist in jedem Fall wieder vom Typ 'gefilterte Rückprojektion'. Für eine Anwendung in der Praxis ist die parallele Geometrie nicht verwendbar, deshalb wird hier auf die Formulierung eines Algorithmus verzichtet.

3.2 Die Kegelstrahlgeometrie

Das mathematische Modell für die Röntgen–Computertomographie bei Kegelstrahlgeometrie (siehe auch schon Abschnitt 1.1) wird von der Transformation

$$\mathcal{D} : \mathcal{D}f(a,\, \theta) = \int\limits_0^\infty f(a + t\theta)\, dt$$

geliefert. Dabei steht $a \in \Gamma$ für die Position der Röntgenquelle und $\theta \in S^2$ ist der Richtungsvektor des Strahlenweges. Beschreibt die Abtastkurve die Oberfläche einer Kugel mit Radius $r > 1$ um das Objekt Ω, so spricht man von vollständigen Daten. Für diesen Fall ist eine Inversionsformel bekannt (siehe [14]), und wir werden mit einfachen Mitteln den Rekonstruktionskern herleiten können. Tuy [55] beweist eine Inversionsformel, bei der die Daten zwar nicht vollständig sind, jedoch die Abtastkurve die sogenannte Tuysche Bedingung, die hin und wieder auch Tuy–Kirillov–Bedingung (wegen [18]) genannt wird, erfüllt. Auch auf solche Abtastgeometrien ist die Approximative Inverse anwendbar. In den Anwendungen überwiegt jedoch eine kreisförmige Abtastkurve. In diesem Fall ist keine exakte Rekonstruktion möglich. Ein Approximationsalgorithmus, der wieder auf der Approximativen Inversen beruht, bildet den Abschluß dieser Arbeit.

3.2.1 Vollständige Daten

Die Idee, die den folgenden Ausführungen zugrunde liegt ist die, den Rekonstruktionskern für die Kegelstrahlgeometrie in Analogie zum zweidimensionalen Fall (Fächerstrahlgeometrie) wieder aus der parallelen Geometrie abzuleiten, d. h. mit Lemma 2.2.1 zu berechnen. Wie man leicht sieht ist

$$\mathcal{D}f(a,\, \theta) = \mathcal{P}f(\theta,\, E_\theta a)\ ,$$

wobei $E_\theta a$ erneut die senkrechte Projektion von a auf die Ebene $\theta^\perp$ bezeichnet: $E_\theta a = a - (a^\top \theta)\,\theta$. Sei also U die Abbildung, die die Daten von der parallelen Geometrie in die Kegelstrahlgeometrie transformiert:

$$Ug(a,\,\theta) = g(\theta,\,E_\theta a).$$

Wir zeigen, daß U eine unitäre Transformation ist, wenn $\Gamma = r\,S^2$, $r > 1$, ist.

Lemma 3.2.1 *Sei $\widetilde{w}(a,\,\theta) = 2\,(|a^\top\theta|)^{-1}\,w(E_\theta a)$ für $(a,\,\theta) \in \Gamma \times S^2$, $\Gamma = r\,S^2$, $r > 1$. Dann ist*

$$\begin{aligned} U : \mathsf{L}_2(T,\,w^{-1}) &\;\to\; \mathsf{L}_2(\Gamma \times S^2,\,\widetilde{w}^{-1})\ , \\ Ug(a,\,\theta) &\;=\; g(\theta,\,E_\theta a) \end{aligned}$$

ein unitärer Operator und

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathsf{L}_2(\Omega) &\;\to\; \mathsf{L}_2(\Gamma \times S^2,\,\widetilde{w}^{-1})\ , \\ \mathcal{D}f(a,\,\theta) &\;=\; \int\limits_0^\infty f(a + t\theta)\,dt \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

stetig.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \langle Ug,\,h\rangle_{\mathsf{L}_2(\Gamma\times S^2,\widetilde{w}^{-1})} &= \frac{1}{2}\int\limits_{S^2}\int\limits_{\Gamma} Ug(a,\,\theta)\,h(a,\,\theta)\,|a^\top\theta|\,w^{-1}(E_\theta a)\,da\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{S^2}\int\limits_{\Gamma} g(\theta,\,E_\theta a)\,h(a,\,\theta)\,|a^\top\theta|\,w^{-1}(E_\theta a)\,da\,d\theta \\ &= \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} g(\theta,\,y)\,h(y + \sqrt{r^2 - |y|^2}\,\theta,\,\theta)\,w^{-1}(y)\,dy\,d\theta \\ &= \langle g,\,U^*h\rangle_{\mathsf{L}_2(T,\,w^{-1})} \end{aligned}$$

und zwar mit Hilfe der Substitution $y = E_\theta a$ (siehe auch RIEDER [46, Seite 136]). Deshalb ist

$$U^*h(\theta,\,y) = h(y + \sqrt{r^2 - |y|^2}\,\theta,\,\theta)$$

und einfache Rechnungen zeigen, daß $UU^* = U^*U = I$ gilt:

$$\begin{aligned}
U^*Ug(\theta,\, y) &= Ug(y + \sqrt{r^2 - |y|^2}\,\theta,\, \theta) \\
&= g(\theta,\, y)\ , \\
UU^*h(a,\, \theta) &= U^*h(\theta,\, E_\theta a) \\
&= h(E_\theta a + \sqrt{r^2 - |E_\theta a|^2}\,\theta,\, \theta) \\
&= h(a,\, \theta)\ .
\end{aligned}$$

Da U eine Isometrie ist, folgt die Stetigkeit von $\mathcal{D}$ als Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen sofort. ■

Mit diesem Ergebnis läßt sich eine Darstellung für den Rekonstruktionskern und die Approximative Inverse ableiten.

Satz 3.2.2 *Sei $\psi_\mathcal{D}$ der Rekonstruktionskern für die Abbildung (3.2.1), $\psi_\mathcal{P}$ der Rekonstruktionskern für die parallele Röntgen–Transformation und $\psi^0_\mathcal{P} = \psi_\mathcal{P}(0;\cdot)$. Dann gilt*

$$\psi_\mathcal{D}(x;\, a,\, \theta) = \psi^0_\mathcal{P}\big(E_\theta(a-x)\big)\ ,$$

und die Approximative Inverse von $\mathcal{D}$ lautet

$$\mathcal{S}g(x) = \int_\Gamma \int_{S^2} g(a,\, \theta)\, \psi^0_\mathcal{P}\big(E_\theta(a-x)\big)\, \widetilde{w}^{-1}(a,\, \theta)\, d\theta\, da$$

Beweis: Der erste Teil der Behauptung folgt aus Lemma 2.2.1, Lemma 3.2.1, der Translationsinvarianz von $\psi_\mathcal{P}$ und der Linearität von E_θ:

$$\psi_\mathcal{D}(x;\, a,\, \theta) = \psi_\mathcal{P}(x;\, \theta,\, E_\theta a) = \psi^0(E_\theta a - E_\theta x) = \psi^0\big(E_\theta(a-x)\big).$$

Der zweite Teil ergibt sich dann direkt durch Einsetzen der Definition 1.2.1. ■

Diese Methode wäre wieder effizient implementierbar. Der Filterschritt würde nicht für alle $a - x$ sondern nur für die gemessenen Richtungen θ durchgeführt werden. Bei der Rückprojektion würde auf dem Detektor bilinear interpoliert werden. Detailliertere Angaben dazu folgen in Abschnitt 3.2.3. Nichtsdestotrotz ist eine Abtastkurve $\Gamma = r\,S^2$ viel zu aufwendig und in medizinischen Anwendungen für den Patienten viel zu belastend. Daher ist diese Methode in der Praxis nicht einsetzbar.

3.2.2 Eine Rekonstruktionsformel für Tuy–Kirillov–Kurven

Man nennt eine Abtastkurve Tuy–Kirillov–Kurve, wenn jede Ebene, die die Einheitskugel Ω schneidet, die Abtastkurve Γ in mindestens einem Punkte schneidet, d. h. für alle $(\omega,\, s)$ mit $\omega \in S^2$ und $s \in [-1,\, 1]$ gibt es ein $a \in \Gamma$ mit $a^\top \omega = s$ und $a'^\top \omega \neq 0$. Mit a' wird hier der Richtungsvektor der Tangente im Punkt a an die Kurve Γ bezeichnet. Zum Beispiel bilden zwei orthogonale Kreise mit Radius $r > 1$ eine Tuy–Kirillov–Kurve. Für solche Kurven läßt sich ein Rekonstruktionsverfahren mit Hilfe der Approximativen Inversen angeben. Dazu muß man aber einen Umweg über die dreidimensionale Radon–Transformation gehen und einen Zusammenhang zwischen den Daten $\mathcal{D}f$ und der Ableitung von $\mathcal{R}f$ nach der zweiten Variablen benutzen, der als "Formel von GRANGEAT" in die Literatur eingegangen ist. Für diese Formel wollen wir zunächst eine neue Beweisvariante angeben, bevor wir das Rekonstruktionsverfahren herleiten und es mit anderen Methoden vergleichen.

3.2.2.1 Die Formel von GRANGEAT

Die Formel von GRANGEAT, die einen Zusammenhang zwischen der 3D–Radon–Transformation und den bei der Kegelstrahlgeometrie gemessenen Daten herstellt, wurde von GRANGEAT erstmals 1986 in [11] vorgestellt. Andere Autoren haben die Formel in anderen (wesentlich einfacheren) Versionen bewiesen, so z. B. FINCH [9], LOUIS [27] oder DEFRISE UND CLACK [5]. Wir wollen eine weitere Version des Beweises angeben.

Lemma 3.2.3 *Sei $\omega \in S^2$ ein Einheitsvektor und $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \Omega$, δ bezeichne die Delta–Distribution. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\omega,\, a^\top\omega) = -\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\, \theta)\, \delta'(\theta^\top\omega)\, d\theta. \tag{3.2.2}$$

Beweis: Sei U eine unitäre Transformation mit $U\omega = e_3$, dem dritten kanonischen Einheitsvektor. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\, \theta)\, \delta'(\theta^\top\omega)\, d\theta &= \int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\, \theta)\, \delta'\big((U\theta)^\top U\omega\big)\, d\theta \\ &= \int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\, U^\top\theta)\, \delta'(\theta^\top e_3)\, d\theta \end{aligned}$$

Wir führen Polarkoordinaten in S^2 ein: $\theta(\vartheta,\,\varphi) = (\sin\vartheta\,\cos\varphi,\,\sin\vartheta\,\sin\varphi,\,\cos\vartheta)^\top$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\,\theta)\,\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{D}f\big(a,\,U^\top\theta(\vartheta,\,\varphi)\big)\,\delta'(\cos\vartheta)\,d\varphi\,\sin\vartheta\,d\vartheta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{D}f\big(a,\,U^\top\theta(\vartheta,\,\varphi)\big)\,\delta'(\cos\vartheta)\,(-\sin\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathcal{D}f\big(a,\,U^\top\theta(\vartheta,\,\varphi)\big)\,\delta(\cos\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi
\end{aligned}$$

durch die Ableitung der Delta–Distribution. Mit der Definition von δ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\,\theta)\,\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathcal{D}f\big(a,\,U^\top\theta(\vartheta,\,\varphi)\big)\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_0^{\infty} f\big(a + t\,U^\top\theta(\vartheta,\,\varphi)\big)\,dt\,\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Big(\nabla f\big(a + t\,U^\top\theta(\vartheta,\,\varphi)\big)\Big)^\top \Big(t\,U^\top\theta(\vartheta + \frac{\pi}{2},\,\varphi)\Big)\,dt\,\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Big(\nabla f\big(a + t\,U^\top\theta(\frac{\pi}{2},\,\varphi)\big)\Big)^\top \big(U^\top\theta(\pi,\,\varphi)\big)\;t\,dt\;d\varphi\;.
\end{aligned}$$

Wegen $\theta(\pi,\,\varphi) = -e_3$ ist schließlich

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\,\theta)\,\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Big(\nabla f\big(a + t\,U^\top\theta(\frac{\pi}{2},\,\varphi)\big)\Big)^\top \omega\,t\,dt\;d\varphi \\
&= -\int_{S^2\cap\omega^\perp}\int_0^{\infty} \big(\nabla f(a + t\theta)\big)^\top \omega\,t\,dt\,d\theta \\
&= -\int_{S^2\cap\omega^\perp}\int_0^{\infty} \Big(\nabla f\big((a^\top\omega)\,\omega + t\theta\big)\Big)^\top \omega\,t\,dt\,d\theta \\
&= -\int_{\omega^\perp} \Big(\nabla f\big((a^\top\omega)\,\omega + y\big)\Big)^\top \omega\,dy\;.
\end{aligned}$$

Nach Vertauschung von Differentiation und Integration sind wir am Ziel:

$$\begin{aligned} \int\limits_{S^2} \mathcal{D}f(a,\,\theta)\,\delta'(\theta^\top\omega)\,d\theta &= -\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{\omega^\perp} f\big((a^\top\omega)\,\omega + y\big)\,dy \\ &= -\frac{\partial}{\partial s}\,\mathcal{R}f(\omega,\,a^\top\omega)\ . \end{aligned}$$

■

Bemerkung: In der Beweisversion von Louis [27] werden statt der Transformation U Polarkoordinaten in S^2 verwendet.

3.2.2.2 Das Rekonstruktionsverfahren

Die grundlegende Idee, auf der die beiden letzten Verfahren dieser Arbeit (in diesem Abschnitt für Tuy–Kirillov–Kurven und in Abschnitt 3.2.3 für eine kreisförmige Abtastkurve) basieren, ist die, die Approximative Inverse für die 3D–Radon–Transformation zu verwenden und es mittels partieller Integration und der Formel von Grangeat zu ermöglichen, daß die gemessenen Linienintegrale als Daten eingesetzt werden können. Wir betrachten dazu die Radon–Transformation $\mathcal{R} : \mathsf{L}_2(\Omega) \to \mathsf{L}_2(Z)$ und schränken den in 1.3.4 berechneten Rekonstruktionskern von $\widetilde{Z}$ auf Z ein. Zunächst ist also

$$\begin{aligned} \mathcal{S}g(x) &= \langle g,\,\psi(x,\cdot)\rangle_{\mathsf{L}_2(Z)} \\ &= \int\limits_{S^2}\int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\,s)\,\psi(x;\,\omega,\,s)\,ds\,d\omega \\ &= \frac{1}{8}\int\limits_{S^2}\int\limits_{-1}^{1} g(\omega,\,s)\,\psi^0\big((s-x^\top\omega)/2\big)\,ds\,d\omega\ . \end{aligned}$$

Integrieren wir partiell, so erhalten wir

$$\mathcal{S}g(x) = -\frac{1}{4}\int\limits_{S^2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial s}\,g(\omega,\,s)\,\Psi^0\big((s-x^\top\omega)/2\big)\,ds\,d\omega \tag{3.2.3}$$

mit

$$\Psi^0(s) = \int\limits_0^s \psi^0(t)\,dt + c\ .$$

Für eine beliebige Tuy–Kirillov–Kurve A läßt sich dieser Ausdruck mittels Substitution umformulieren in

$$\mathcal{S}g(x) = -\frac{1}{4} \int_{S^2} \int_{A} \frac{\partial}{\partial s} g(\omega,\, a^\top \omega)\, \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top \omega}{2}\Big)\, |a'^\top \omega|\, n(\omega,\, a^\top \omega)^{-1}\, da\, d\omega\ .$$

Mit $n(\omega, s)$ bezeichnen wir dabei die Anzahl der Schnittpunkte der Ebene $x^\top \omega = s$ mit der Abtastkurve (siehe dazu auch [5]). Setzt man die Formel von Grangeat ein ($g = \mathcal{R}f$), dann erhält man

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}g(x) &= \frac{1}{4} \int_{S^2} \int_{\Gamma} \int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\, \theta)\, \delta'(\theta^\top \omega)\, d\theta\, \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top \omega}{2}\Big)\, |a'^\top \omega|\, n(\omega,\, a^\top \omega)^{-1}\, da\, d\omega \\
&= \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \int_{S^2} \mathcal{D}f(a,\, \theta)\, k(x;\, a,\, \theta)\, d\theta\, da
\end{aligned}$$

mit

$$k(x;\, a,\, \theta) = \int_{S^2} \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top \omega}{2}\Big)\, |a'^\top \omega|\, n(\omega,\, a^\top \omega)^{-1}\, \delta'(\theta^\top \omega)\, d\omega\ .$$

Die Funktion n ist im allgemeinen nicht stetig. Da sie aber für eine weitere Entwicklung des Kernes k differenziert werden müßte, muß sie durch eine stetige Funktion ersetzt werden (siehe dazu auch [5, 19]). Auf diese Entwicklung wollen wir jedoch an dieser Stelle verzichten und abschließend den Ansatz des Rekonstruktionsverfahrens mit zwei anderen Methoden vergleichen.

Das Verfahren von Defrise und Clack [5] ist eine Erweiterung des Verfahrens von Grangeat [13] (siehe Abschnitt 3.2.3.3) auf Tuy–Kirillov–Kurven. Der Nachteil dieser Methode ist, daß zwei (numerisch instabile) Differentiationen der Daten im Algorithmus enthalten sind. Das Verfahren von Kudo und Saito [19] wurde unabhängig davon entwickelt, unterscheidet sich aber nur in der Wahl der Differentiationsfilter und der Wahl des stetigen Ersatzes für die Funktion n. Das aus der Approximativen Inversen abgeleitete Verfahren hat gegenüber den Verfahren von Defrise und Clack und Kudo und Saito den Vorteil, daß auf jegliche Differentiation der Daten verzichtet werden kann, denn sämtliche Differentiationen sind auf den Rekonstruktionskern verschoben worden.

3.2.3 Ein Rekonstruktionsalgorithmus für eine kreisförmige Abtastkurve

Bei der 2D–Röntgen–Computertomographie stellt die Fächerstrahlgeometrie die übliche Abtastung dar. Die Röntgenröhre bewegt sich auf einer Kreisbahn um das Objekt und sendet von äquidistant verteilten Stellen Strahlenfächer aus. Die Intensitätsabminderungen werden auf der gegenüberliegenden Seite von einem Zeilendetektor gemessen. Eine kreisförmige Abtastgeometrie wird auch in der 3D–Röntgen–Computertomographie sehr häufig angewendet. Hier wird nicht mehr ein Fächer sondern ein Kegel von Strahlen ausgesandt, und der Detektor besteht nicht mehr aus einer sondern aus mehreren Zeilen. Diese Abtastkurve ist jedoch keine Tuy–Kirillov–Kurve und eine exakte Rekonstruktion ist daher nicht möglich. Dennoch werden wir ein Verfahren herleiten, das auf der Approximativen Inversen beruht und eine Näherungslösung berechnet. Neben einigen Beispielen ist am Ende auch wieder ein Vergleich unserer Methode mit bekannten Verfahren zu finden.

3.2.3.1 Die Entwicklung des Algorithmus

Die Methode, die wir nun vorstellen, basiert auf den gleichen Ideen, wie die des vergangenen Abschnittes. Wir starten wieder mit (3.2.3):

$$\mathcal{S}g(x) = -\frac{1}{4} \int\limits_{S^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial s}\, g(\omega,\, s)\, \Psi^0\big((s - x^\top \omega)/2\big)\, ds\, d\omega$$

mit

$$\Psi^0(s) = \int\limits_0^s \psi^0(t)\, dt\ ,$$

$g = \mathcal{R}f$ (der dreidimensionalen Radon–Transformation) und ψ^0 dem Rekonstruktionskern in $x = 0$. Die additive Konstante bei der Bildung der Stammfunktion dürfen wir, wie sich zeigen wird, auf den Wert Null setzen. Für die Abtastkurve nehmen wir $\Gamma = r\, S^1$ an. Da sie die Tuysche Bedingung nicht erfüllt, ist eine Substitution wie im vorangegangenen Abschnitt nicht ohne weiteres möglich. Wir führen Polarkoordinaten ein, machen für Winkel ϑ mit $\sin\vartheta < 1/r$ eine Einschränkung an s und definieren

$$\widetilde{\mathcal{S}}g(x) := -\frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-r\sin\vartheta}^{r\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial s}\, g(\omega(\vartheta,\, \varphi),\, s)\, \Psi^0\Big(\big(s - x^\top \omega(\vartheta,\, \varphi)\big)/2\Big)\, ds\, d\varphi\, \sin\vartheta\, d\vartheta\ .$$

Mit der Substitution $s = a^\top \omega$ folgt

$$\widetilde{\mathcal{S}}g(x) = -\frac{1}{8} \int\limits_{S^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s}\, g(\omega,\, a^\top\omega)\, \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\Big)\, |a'^\top\omega|\, da\, d\omega\ ,$$

wobei auch hier a' den Tangentenvektor an die Abtastkurve im Punkt a bezeichnet. Einsetzen der Formel von Grangeat (3.2.2) ergibt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{S}}g(x) &= \frac{1}{8} \int\limits_{S^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{S^2} \mathcal{D}f(a,\,\theta)\, \delta'(\theta^\top\omega)\, d\theta\, \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\Big)\, |a'^\top\omega|\, da\, d\omega \\
&= \frac{1}{8} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{S^2} \mathcal{D}f(a,\,\theta)\, k(x;\, a,\, \theta)\, d\theta\, da
\end{aligned}$$

mit

$$k(x;\, a,\, \theta) = \int\limits_{S^2} \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\Big)\, |a'^\top\omega|\, \delta'(\theta^\top\omega)\, d\omega\ .$$

Um daraus eine "implementierfähige Version" zu machen, sind noch einige Umformungen notwendig. Sei dazu U eine unitäre Transformation mit $U\theta = e_3$. Dann ist

$$\begin{aligned}
k(x;\, a,\, \theta) &= \int\limits_{S^2} \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\Big)\, |a'^\top\omega|\, \delta'\big((U\theta)^\top U\omega\big)\, d\omega \\
&= \int\limits_{S^2} \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top U^\top\omega}{2}\Big)\, |a'^\top U^\top\omega|\, \delta'(e_3^\top\omega)\, d\omega \\
&= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top U^\top\omega(\vartheta,\,\varphi)}{2}\Big)\, |a'^\top U^\top\omega(\vartheta,\,\varphi)|\, \delta'(\cos\vartheta)\, d\varphi\, \sin\vartheta\, d\vartheta
\end{aligned}$$

nach der Einführung von Polarkoordinaten. Durch Einsetzen der Delta–Funktion folgt

$$\begin{aligned}
k(x;\, a,\, \theta) &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big\{\Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top U^\top\omega(\vartheta,\,\varphi)}{2}\Big)\, |a'^\top U^\top\omega(\vartheta,\,\varphi)|\Big\}\Big|_{\vartheta=\pi/2}\, d\varphi \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top U^\top\omega(\pi/2,\,\varphi)}{2}\Big)\, |a'^\top U^\top\omega(\pi/2,\,\varphi)|\, (-\frac{1}{2}\, (a-x)^\top\theta) + \\
&\qquad + \Psi^0\Big(\frac{(a-x)^\top\, U^\top\omega(\pi/2,\,\varphi)}{2}\Big)\, \mathrm{sgn}\big(a'^\top U^\top\omega(\pi/2,\,\varphi)\big)\, (-a'^\top\theta)\, d\varphi\ .
\end{aligned}$$

Daraus resultiert schließlich

$$\begin{aligned} k(x;\, a,\, \theta) &= \frac{1}{2}\,(x-a)^\top\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^\perp} \psi^0\big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\big)\,|a'^\top\omega|\,d\omega - \\ &\quad -a'^\top\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^\perp} \Psi^0\big(\frac{(a-x)^\top\omega}{2}\big)\,\mathrm{sgn}(a'^\top\omega)\,d\omega\ . \end{aligned}$$

Bemerkung: Wegen $\int_{S^2\cap\theta^\perp} \mathrm{sgn}(a'^\top\omega)\,d\omega = 0$ ist nun auch ersichtlich, daß die additive Konstante bei der Bildung der Stammfunktion keine Rolle spielt.

Im Sinne einer effizienten Implementierung müssen wir nun noch (ähnlich wie in der 2D–Fächerstrahlgeometrie) zwei Näherungen machen. Wegen der Dilatationsinvarianz des Rekonstruktionskernes ψ^0 (siehe Seite 21) gilt zunächst ($|a-x| \geq r-1$)

$$\begin{aligned} \psi^0(s) &= \frac{(r-1)^3}{|a-x|^3}\,\psi^{0,\,\frac{|a-x|}{r-1}}\big(\frac{r-1}{|a-x|}\,s\big) \\ &\approx \frac{(r-1)^3}{|a-x|^3}\,\psi^{0}\big(\frac{r-1}{|a-x|}\,s\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi^0(s) &= \frac{(r-1)^3}{|a-x|^3} \int\limits_0^s \psi^{0,\,\frac{|a-x|}{r-1}}\big(\frac{r-1}{|a-x|}\,t\big)\,dt \\ &= \frac{(r-1)^2}{|a-x|^2} \int\limits_0^{\frac{r-1}{|a-x|}s} \psi^{0,\,\frac{|a-x|}{r-1}}(t)\,dt \\ &\approx \frac{(r-1)^2}{|a-x|^2}\,\Psi^0\big(\frac{r-1}{|a-x|}\,s\big)\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt für den Kern

$$\begin{aligned} \frac{|a-x|^2}{(r-1)^2}\,k(x;\, a,\, \theta) &\approx \frac{r-1}{2}\left(\frac{x-a}{|a-x|}\right)^\top\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^\perp} \psi^0\big(\frac{r-1}{2}\left(\frac{a-x}{|a-x|}\right)^\top\omega\big)\,|a'^\top\omega|\,d\omega - \\ &\quad -a'^\top\theta \int\limits_{S^2\cap\theta^\perp} \Psi^0\big(\frac{r-1}{2}\left(\frac{a-x}{|a-x|}\right)^\top\omega\big)\,\mathrm{sgn}(a'^\top\omega)\,d\omega \\ &=: \widetilde{k}(x;\, a,\, \theta)\ . \end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$\widetilde{\mathcal{S}}g(x) \approx \frac{(r-1)^2}{8} \int\limits_\Gamma |a-x|^{-2} \int\limits_{S^2} \mathcal{D}f(a,\,\theta)\,\widetilde{k}(x;\, a,\, \theta)\,d\theta\,da\ .$$

Um ein konkurrenzfähiges Verfahren zu erhalten, müssen wir noch in $\widetilde{k}$ nach Invarianzen suchen, damit der Rechenaufwand möglichst gering wird. Dazu sei zunächst U die Drehung, mit der eine Quellposition a aus der Position a_0 hervorgeht, $Ua_0 = a$. Dann gilt

$$\widetilde{k}(0; a, \theta) = \widetilde{k}(0; a_0, U\theta)$$

d. h. $\widetilde{k}$ muß bei $x = 0$ nur für eine Quellposition a_0 berechnet werden. Um zu zeigen, daß $\widetilde{k}$ nur für $x = 0$ berechnet werden muß, machen wir eine letzte Näherung. Sei U die unitäre Transformation, für die $U^\top\big((a-x)/|a-x|\big) = a/r$ gilt. Dann approximieren wir $Ua' \approx a'$ und haben

$$\widetilde{k}(x; a, \theta) \approx \widetilde{k}(0; a, U\theta) \ .$$

Man braucht den Kern $\widetilde{k}$ also nur für $x = 0$ und eine Quellposition a_0 vorzuberechnen und zu speichern.

Für die Formulierung eines Algorithmus nehmen wir an, daß P Projektionen von den Positionen $a_l = r(\cos\lambda_l, \sin\lambda_l, 0)^\top$, $\lambda_l = 2l\pi/P$, $l = 0, \ldots, P-1$, aufgenommen werden. Den Abstand von Quelle und Detektor bezeichnen wir mit d. Der Detektor habe die Breite l_y und die Höhe l_z. Er bestehe aus n_z Detektorzeilen mit je n_y Detektorelementen, d. h. wir haben die Detektorschrittweiten $h_z = l_z/n_z$ und $h_y = l_y/n_y$.

<u>AI_3d_kg</u>

`für` $i = -n_z+1, \ldots, n_z-1$, `für` $j = -n_y+1, \ldots, n_y-1$ `berechne:`

$$\begin{aligned} \eta_{i,j} &= -a_0 + (r-d,\, j\,h_y, i\,h_z)^\top \ , \\ \theta_{i,j} &= \eta_{i,j}/|\eta_{i,j}| \ , \\ p_{i,j} &= \widetilde{k}(0;\, a_0,\, \theta_{i,j}) \ ; \end{aligned}$$

`für` $l = 0, \ldots, P-1$:

$$v_{l,m,n} = h_z\, h_y \sum_{i=(-n_z+1)/2}^{(n_z-1)/2} \sum_{j=(-n_y+1)/2}^{(n_y-1)/2} p_{m-i,n-j}\, g(a_l,\, U_l\theta_{ij}) \ ,$$

$$m = (-n_z+1)/2, \ldots, (n_z-1)/2,\ n = (-n_y+1)/2, \ldots, (n_y-1)/2 \ ,$$

`mit der Drehung` $U_l : U_l a_0 = a_l$;

```
für alle Rekonstruktionspunkte x:
```

$$\check{f}(x) = \frac{2\pi}{P}\frac{(r-1)^2}{8}\sum_{l=0}^{P-1}|a_l - x|^{-2}\big((1-u_z-u_y+u_z\,u_y)\,v_{l,m,n} + \\ +(u_z-u_z\,u_y)\,v_{l,m+1,n} + \\ +(u_y-u_z\,u_y)\,v_{l,m,n+1} + \\ +u_z\,u_y\,v_{l,m+1,n+1}\big)$$

```
mit
```

$$\begin{aligned} s_z &= d\,\frac{r}{-a_l^\top(x-a_l)}\,(x-a_l)^\top e_3,\ m \le s_z/h_z \le m+1,\ u_z = s_z/h_z - m \ , \\ s_y &= d\,\frac{r}{-a_l^\top(x-a_l)}\,(x-a_l)^\top a_l',\ n \le s_y/h_y \le n+1,\ u_y = s_y/h_y - n \ ; \end{aligned}$$

```
Ende.
```

Bemerkung: Die Berechnung der $v_{l,m,n}$ ist sehr aufwendig. Da sich die Summation aber als diskrete Faltung schreiben läßt, kann sie auch im Fourier–Raum durchgeführt werden, was die Rechenzeit dramatisch verkürzt.

3.2.3.2 Numerische Beispiele

Auch für die Anwendungsbeispiele in der 3D–Röntgen–Computertomographie verwenden wir die Gaußglocke als Mollifier. Von ihr können wir mit (1.3.14) den Rekonstruktionskern für die 3D–Radon–Transformation berechnen. Sei

$$e_\gamma(x,\,y) = (2\pi)^{-3/2}\,\gamma^{-3}\,\exp\big(-|y-x|^2/(2\gamma^2)\big)\ .$$

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} e_\gamma(x,\,y)\,dy = 1\ ,$$

und mit

$$\mathcal{R}e_\gamma(\omega,\,s) = \int_{\omega^\perp} e_\gamma(0,\,s\omega+y)\,dy$$

ist

$$\mathcal{R}e_\gamma(\omega,\,s) = (2\pi)^{-1/2}\,\gamma^{-1}\,\exp\big(-s^2/(2\gamma^2)\big)\ .$$

Daraus folgt

$$\psi_\gamma^0(s) = \frac{\gamma^2 - s^2}{2\,(2\pi)^{5/2}\,\gamma^5}\ \exp\big(-s^2/(2\gamma^2)\big)\ .$$

Der Rekonstruktionskern ist für $\gamma = 0.01$ in Abbildung 3.2.1 dargestellt, die Abbildungen 3.2.2.a) und b) zeigen den damit berechneten Kern $\widetilde{k}$ für $x = 0$ in unterschiedlichen Betrachtungsweisen.

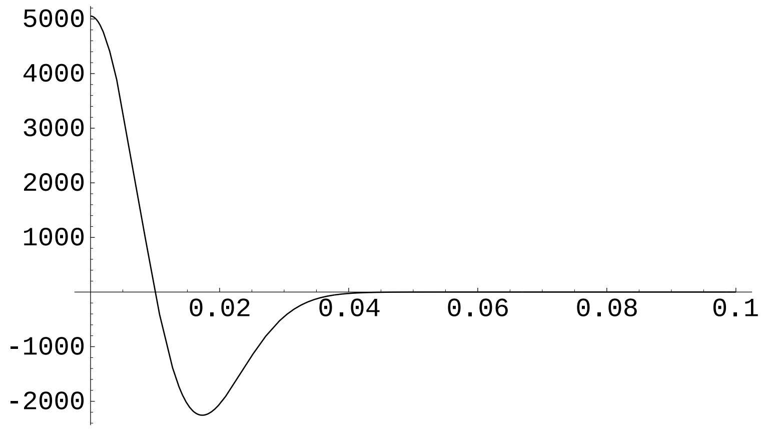

Abbildung 3.2.1: Rekonstruktionskern für die 3D–Radon–Transformation, $\gamma = 0.01$.

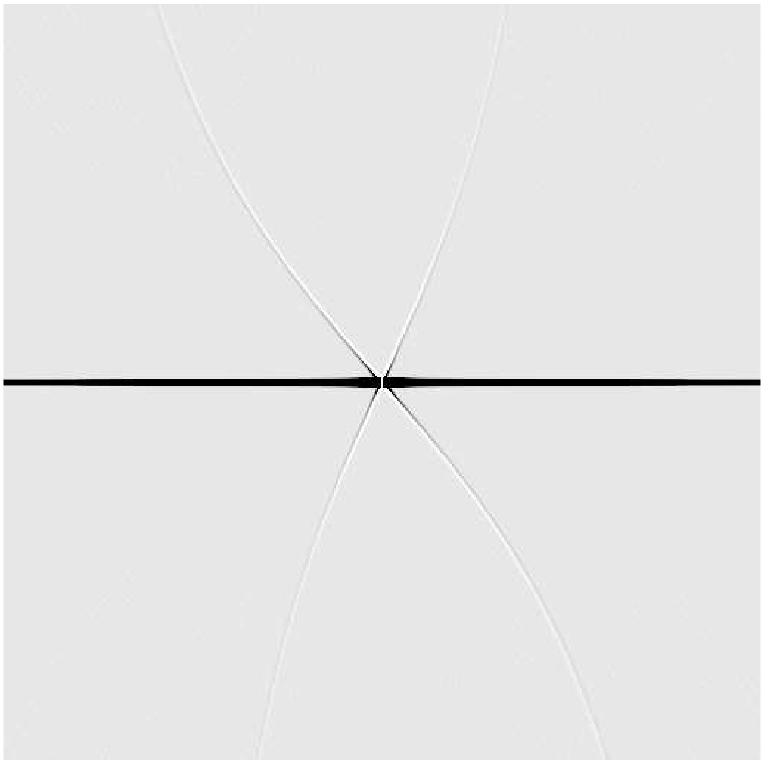

Abbildung 3.2.2.a): Kern $\widetilde{k}(0;\, a_0,\, \theta)$.

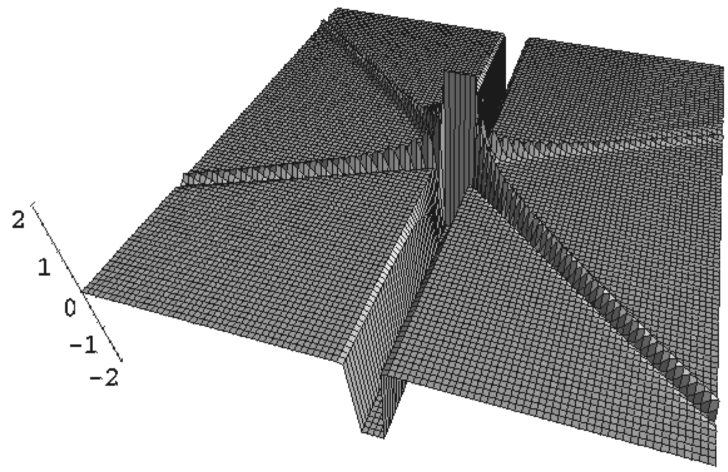

Abbildung 3.2.2.b): Kern $\widetilde{k}(0;\, a_0,\, \theta)$.

Abbildung 3.2.2.b) gibt einen Einblick in das was 3.2.2.a) nur erahnen läßt. Mißt man die Daten von einem Quellpunkt a, dann haben nur die Strahlen einen Einfluß auf die Rekonstruktion in einem Punkt x, die in der Nähe der von $x - a$ und a' aufgespannten Ebene liegen. In größerer Entfernung hat der Kern Werte, die dicht bei Null liegen. Auch der Einfluß der sichtbaren nichtsymmetrischen Strukturen ist vernachlässigbar.

Als Phantom für die Rekonstruktionen wurde das Shepp–Phantom verwendet (siehe [50]). Es ist ein dreidimensionales Phantom, das in der Ebene $z = 0.381$ mit dem Shepp–Logan–Phantom für die 2D–Röntgen–Computertomographie übereinstimmt. Für die Generierung des Datensatzes war $r = 3$, $d = 6$, $l_y = l_z = 5.5$, $n_y = n_z = 255$ und $P = 200$. Abbildung 3.2.3 zeigt einen dreidimensionalen Ausschnitt des Originalphantoms. Die Abbildungen 3.2.4, 3.2.5.a) und b) sowie 3.2.6 zeigen Rekonstruktionen der Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0.381$. Die Berechnungen erfolgten jeweils mit 255×255 Bildpunkten. Die vertikalen Schnitte lassen erkennen, daß das Verfahren Schwierigkeiten bei zu großem Öffnungswinkel hat. Dies war zu vermuten, da dann die Approximation $\widetilde{\mathcal{S}}$ an $\mathcal{S}$ (siehe Seite 72) zu ungenau ist. Für die Abbildung 3.2.5.b) wurde der Radius der Abtastkurve vervierfacht, was den Öffnungswinkel entsprechend verkleinerte. Vergleicht man die Rekonstruktion der Ebene $z = 0.381$ mit der des Shepp–Logan–Phantoms (Abbildung 2.1.4), dann erkennt man lediglich im Zentrum der 3D–Rekonstruktion eine Ungenauigkeit, die ebenfalls auf die Approximation $\widetilde{\mathcal{S}}$ an $\mathcal{S}$ zurückzuführen ist.

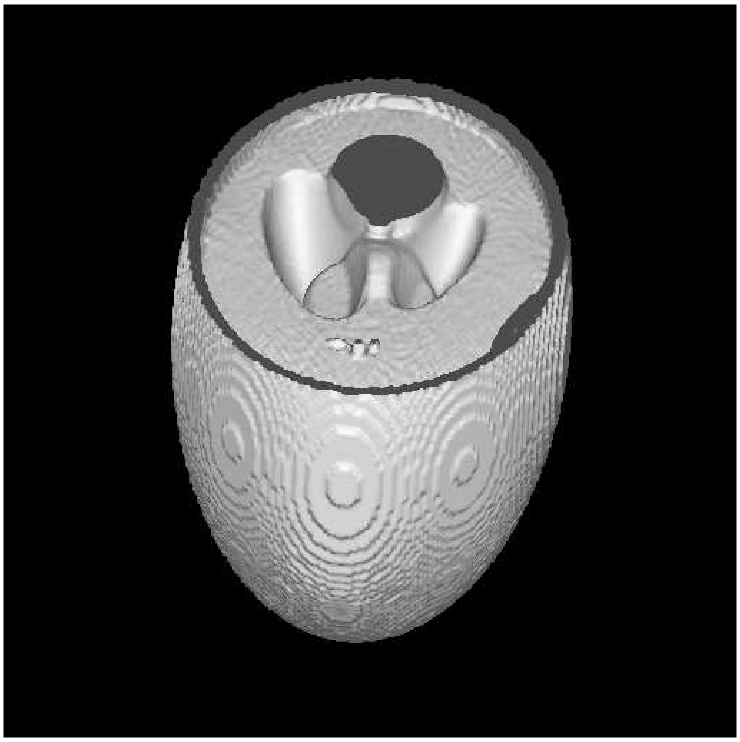

Abbildung 3.2.3: Dreidimensionale Darstellung des originalen Shepp–Phantoms.

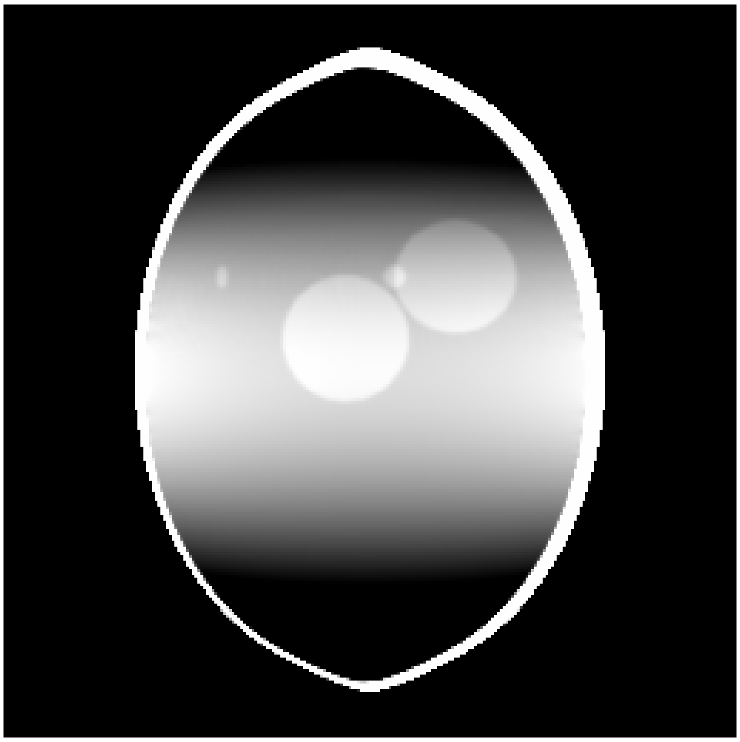

Abbildung 3.2.4: Rekonstruktion der Ebene $x = 0$.

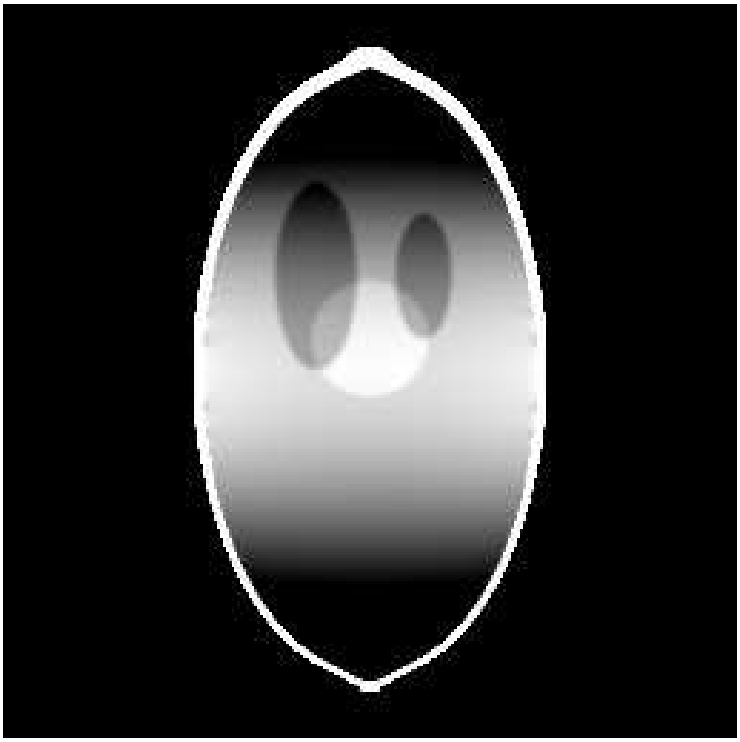

Abbildung 3.2.5.a): Rekonstruktion der Ebene $y = 0$.

Abbildung 3.2.5.b): Rekonstruktion der Ebene $y = 0.102$, Radius der Abtastkurve: $r = 12$.

Abbildung 3.2.6: Rekonstruktion der Ebene $z = 0.381$.

3.2.3.3 Ein Vergleich mit zwei anderen Methoden

Abschließend wird unser Rekonstruktionsverfahren noch mit zwei bekannten Verfahren verglichen. Das Verfahren von GRANGEAT [12, 13] beruht auf der Inversionsformel der dreidimensionalen Radon–Transformation,

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}f(\omega,\, x^\top \omega)\, d\omega \ .$$

Der Algorithmus besteht aus zwei Phasen:

1. Aus den Daten wird mit Hilfe von (3.2.2) die erste Ableitung der Radon–Transformation bestimmt. Die Werte, die fehlen, weil die Tuysche Bedingung nicht erfüllt ist, können durch Interpolation gewonnen werden (für Details sei auf [13] verwiesen);

2. Differentiation und anschließende Rückprojektion nach einer Methode von MARR ET AL. [41] (siehe dazu auch LOUIS [22]).

Das Grangeat–Verfahren hat zwei gravierende Nachteile: zum einen müssen die Daten mehrfach numerisch differenziert werden, zum anderen kann mit dem zweiten Schritt erst begonnen werden, wenn alle Daten gemessen sind und Phase 1 abgeschlossen ist. Im Vergleich dazu wird bei unserem Verfahren sämtliche Differentiation von den Daten weg auf den Rekonstruktionskern verschoben. Außerdem ist es parallelisierbar, da die einzelnen Projektionen unabhängig voneinander gefiltert und rückprojiziert werden.

Das Verfahren von Feldkamp et al. [7] ist eine heuristische Verallgemeinerung der gefilterten Rückprojektion aus der 2D–Röntgen–Computertomographie. Der Filterschritt wird auf dem Detektor zeilenweise angewendet, d. h. jede Detektorzeile wird zunächst wie eine einzelne Schichtaufnahme behandelt und beispielsweise mit dem Ram–Lak– oder dem Shepp–Logan–Filter gefiltert. Die gefilterten Projektionen werden dann genau wie bei unserem Rekonstruktionsalgorithmus rückprojiziert. Für einen direkten Vergleich der beiden Verfahren, Feldkamp–Algorithmus und Approximative Inverse, wurde ein horizontaler Schnitt durch das Shepp–Phantom mit beiden Methoden bei verrauschten Daten rekonstruiert. Die Tabelle in Abbildung 3.2.7 zeigt das Ergebnis.

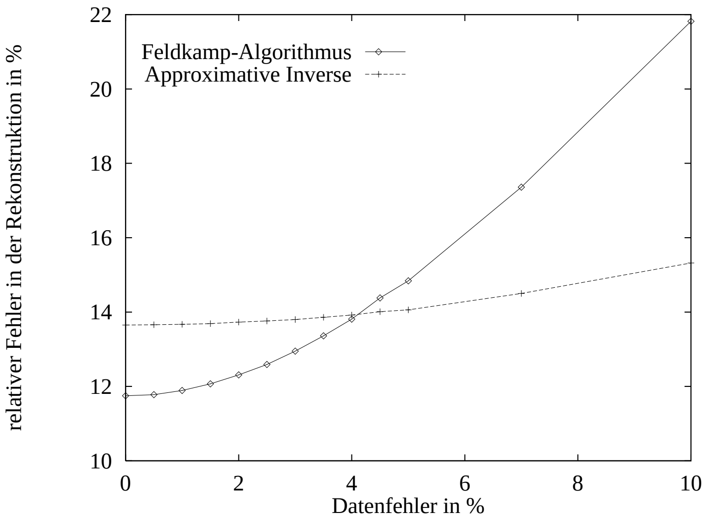

Abbildung 3.2.7: Vergleich der Rekonstruktionen aus verrauschten Daten.

Ähnlich wie beim Vergleich mit der gefilterten Rückprojektion in der 2D–Tomographie erweist sich die Approximative Inverse bei zunehmendem Datenfehler als das stabilere Verfahren.

Literaturverzeichnis

[1] M. ABRAMOWITZ UND I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.

[2] R. N. BRACEWELL UND A. C. RIDDLE, *Inversion of fan-beam scans in radio astronomy*, The Astrophysical Journal, 150 (1967), S. 427–434.

[3] J. BUCK, *Schnelles Rekonstruktionsverfahren für die 3D-Röntgen-Computertomographie in der Materialprüfung*, Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1996.

[4] M. E. DAVISON UND F. A. GRÜNBAUM, *Tomographic reconstructions with arbitrary directions*, Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), S. 77–120.

[5] M. DEFRISE UND R. CLACK, *A Cone-Beam Reconstruction Algorithm Using Shift-Variant Filtering and Cone-Beam Backprojection*, IEEE Trans. Med. Imag., 13 (1994), S. 186–195.

[6] A. FARIDANI, E. L. RITMAN UND K. T. SMITH, *Local Tomography*, SIAM J. Appl. Math., 52 (1992), S. 459–484.

[7] L. A. FELDKAMP, L. C. DAVIS UND J. W. KRESS, *Practical cone-beam algorithm*, J. Opt. Soc. Am., 1 (1984), S. 612–619.

[8] D. V. FINCH, *Cone-beam reconstructions with sources on a curve*, SIAM J. Appl. Math., 45 (1985), S. 665–673.

[9] ——. private communication, November 1993.

[10] I. S. GRADSHTEYN UND I. M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1980. Corrected and enlarged edition.

[11] P. GRANGEAT, *An analysis of the divergent beam X–ray transform based on the 3D Radon transform.* Vortrag bei der Tagung "Theory and Application of Radon transforms", Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1986.

[12] ——, *Analyse d'un Système d'Imagerie 3D par Reconstruction à partir de Radiographies X en Géométrie Conique*, Dissertation, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 1987.

[13] ——, *Mathematical framework of cone beam 3-D reconstruction via the first derivative of the Radon Transform*, in Mathematical Methods in Tomography, G. T. Herman, A. K. Louis und F. Natterer (Hrsg.), Nr. 1497 in Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1991, S. 66–97.

[14] C. Hamaker, K. T. Smith, D. C. Solmon und S. L. Wagner, *The divergent beam X-ray transform*, Rocky Mountain J. Math., 10 (1980), S. 253–283.

[15] S. Helgason, *The Radon Transform*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[16] G. T. Herman, *Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography*, Academic Press, 1980.

[17] C. Jacobson, *Fourier Methods in 3D-Reconstruction from Cone-Beam Data*, Dissertation, Linköping University, 1996.

[18] A. A. Kirillov, *On a problem of I.M. Gel'fand*, Soviet Math. Dokl., 2 (1961), S. 268–269.

[19] H. Kudo und T. Saito, *Derivation and Implementation of a Cone-Beam Reconstruction Algorithm for Nonplanar Orbits*, IEEE Trans. Med. Imag., 13 (1994), S. 196–211.

[20] A. K. Louis, *Picture reconstruction from projections in restricted range*, Math. Meth. in the Appl. Sci., 2 (1980), S. 209–220.

[21] ——, *Analytische Methoden in der Computer-Tomographie.* Habilitationsschrift, Fachbereich Mathematik der Universität Münster, 1981.

[22] ——, *Approximate inversion of the 3D Radon transform*, Math. Meth. in the Appl. Sci., 5 (1983), S. 176–185.

[23] ——, *Orthogonal Function Series Expansions and the Null Space of the Radon Transform*, SIAM J. Math. Anal., 15 (1984), S. 621–633.

[24] ——, *Tikhonov-Phillips Regularization of the Radon transform*, in Constructive Methods for the Practical Treatment of Integral Equations, G. Hämmerlin und K. H. Hoffmann (Hrsg.), Nr. 73 in ISNM, Birkhäuser, 1985, S. 211–223.

[25] ——, *Incomplete Data Problems in X-ray Computerized Tomography, I. Singular Value Decomposition of the Limited Angle Transform*, Numer. Math., 48 (1986), S. 251–262.

[26] ——, *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Studienbücher Mathematik, B. G. Teubner, Stuttgart, Germany, 1989.

[27] ——, *Medical imaging: state of the art and future developments*, Inverse Problems, 8 (1992), S. 709–738.

[28] ——, *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Problems, 12 (1996), S. 175–190.

[29] ——, *Application of the Approximate Inverse to 3D X-Ray CT and Ultrasound Tomography*, in Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing, H. W. Engl, A. K. Louis und W. Rundell (Hrsg.), Springer-Verlag, Wien, New York, 1997, S. 120–133.

[30] ——, *A Unified Approach to Regularization Methods for Linear Ill-Posed Problems*, Inverse Problems, 15 (1999), S. 489–498.

[31] A. K. Louis und R. Dietz, *Algorithmen für die 3D-Computer-Tomographie bei zerstörungsfreien Prüfverfahren*, in Mathematik – Schlüsseltechnologie für die Zukunft, K. H. Hoffmann, W. Jäger, T. Lohmann und H. Schunk (Hrsg.), Springer-Verlag, Heidelberg/Berlin, 1996, S. 397–407.

[32] A. K. Louis und P. Maass, *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*, Inverse Problems, 6 (1990), S. 427–440.

[33] ——, *Smoothed projection methods for the moment problem*, Numer. Math., 59 (1991), S. 277–294.

[34] ——, *Contour reconstruction in 3-D X-Ray CT*, IEEE Trans. Med. Imag., 12 (1993), S. 764–769.

[35] A. K. Louis, P. Maass und A. Rieder, *Wavelets: Theorie und Anwendungen*, Studienbücher Mathematik, B. G. Teubner, Stuttgart, Germany, 2., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1998. *English translation: Wiley, Chichester, 1997.*

[36] A. K. Louis und A. Rieder, *Incomplete Data Problems in X-ray Computerized Tomography, II. Truncated Projections and Region-of-Interest Tomography*, Numer. Math., 56 (1989), S. 371–383.

[37] A. K. Louis und T. Schuster, *A novel filter design technique in 2D computerized tomography*, Inverse Problems, 12 (1996), S. 685–696.

[38] P. Maass, *The x-ray transform: singular value decomposition and resolution*, Inverse Problems, 3 (1987), S. 729–741.

[39] ——, *Die Singulärwertzerlegung der Röntgentransformation und ihre Anwendung in der Computertomographie*, Dissertation, Technische Universität Berlin, 1988.

[40] ——, *The interior Radon transform*, SIAM J. Appl. Math., 52 (1992), S. 710–724.

[41] R. B. Marr, C. N. Chen und P. C. Lauterbur, *On two approaches to 3D reconstruction in NMR zeugmatography*, in Mathematical Aspects of Computerized Tomography, G. T. Herman und F. Natterer (Hrsg.), Nr. 8 in LNMI, Springer-Verlag, 1981, S. 225–240.

[42] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[43] E. T. Quinto, *Singular value decomposition and inversion methods for the exterior Radon transform and a spherical transform*, J. Math. Anal. Appl., 95 (1985), S. 437–448.

[44] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss., 69 (1917), S. 262–267.

[45] G. N. Ramachandran und A. V. Lakshminarayanan, *Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolution instead of Fourier transforms*, Proc. Nat. Acad. Sci. US, 68 (1971), S. 2236–2240.

[46] A. Rieder, *Wavelet-Methoden für schlecht-gestellte und elliptische Probleme*, Annales Universitatis Saraviensis, Series Mathematicae, 7 (1997), S. 75–194. Habilitationsschrift, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1996.

[47] A. Rieder, R. Dietz und T. Schuster, *Approximate Inverse meets Local Tomography.* Preprint, Februar 1999.

[48] A. Rieder und T. Schuster, *The Approximate Inverse in Action with an Application to Computerized Tomography.* Zur Veröffentlichung eingereicht bei SIAM J. Num. Anal., Mai 1999.

[49] T. Schuster, *Schnelle Rekonstruktion von Geschwindigkeitsfeldern und Theorie der Approximativen Inversen*, Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1999.

[50] L. A. Shepp, *Computerized tomography and nuclear magnetic resonance*, J. Comp. Assist. Tomogr., 4 (1980), S. 95–107.

[51] L. A. Shepp und B. F. Logan, *The fourier reconstruction of a head section*, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-21 (1974), S. 21–43.

[52] D. Slepian, *Prolate Spheroidal Wave Functions. Fourier Analysis and Uncertainty, V: The Discrete Case*, Bell Syst. Tech. J., 57 (1978), S. 1371–1430.

[53] K. T. Smith, D. C. Solmon und S. L. Wagner, *Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing a function from radiographs*, Bull. AMS, 83 (1977), S. 1227–1270.

[54] D. C. Solmon, *The X-ray transform*, Journ. Math. Anal. Appl., 56 (1976), S. 61–83.

[55] H. K. Tuy, *An inversion formula for cone-beam reconstruction*, SIAM J. Appl. Math., 43 (1983), S. 546–552.