# Rekonstruktionsverfahren in der 3D-Rückstreutomographie

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von

Markus Jäckels

Saarbrücken
2003

| | |
|---|---|
| Tag des Kolloquiums: | 11. Juli 2003 |
| Dekan: | Univ.-Prof. Dr. P. Slusallek |
| Berichterstatter: | Univ.-Prof. Dr. A. K. Louis<br>Univ.-Prof. Dr. S. Rjasanow |

# Inhaltsverzeichnis


**Symbolverzeichnis** **2**

**Einleitung** **5**

**1 Grundlagen der Rückstreutomographie** **9**

1.1 Meßaufbau und Modellierung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
1.2 Physikalische Grundlagen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.2.1 Röntgenstrahlung im Teilchenmodell . . . . . . . . . . . . 13
1.2.2 Abminderung von Röntgenstrahlung . . . . . . . . . . . . 14
1.2.3 Konsequenzen für die Modellierung . . . . . . . . . . . . 21
1.3 Die gedämpfte Radontransformation . . . . . . . . . . . . . . . . 24
1.3.1 Inversion der exponentiellen Radontransformation . . . . . 31
1.3.2 Inversion der gedämpften Radontransformation . . . . . . 33
1.4 Einordnung der Rückstreutomographie . . . . . . . . . . . . . . . 41

**2 Das direkte Problem der Rückstreutomographie** **45**

2.1 Geometrie der 3D-Rückstreutomographie . . . . . . . . . . . . . . 45
2.1.1 Die Objektfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
2.1.2 3D-Meßgeometrie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
2.1.3 Die auftretenden Strahlengänge . . . . . . . . . . . . . . . 48
2.1.4 Die Detektorfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
2.2 Das kontinuierliche Vorwärtsmodell . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
2.2.1 Funktionenräume und kontinuierlicher Vorwärtsoperator . 51
2.2.2 Stetigkeit des Vorwärtsoperators . . . . . . . . . . . . . . 59
2.2.3 Schlechtgestelltheit des inversen Problems . . . . . . . . . 63
2.3 Das diskrete Vorwärtsmodell . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
2.3.1 Funktionenräume und diskreter Vorwärtsoperator . . . . . 65
2.3.2 Erzeugung synthetischer Daten . . . . . . . . . . . . . . . 67

**3 Das inverse Problem der Rückstreutomographie** **71**

3.1 Idee der Strippingverfahren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
3.2 Rekonstruktionsverfahren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
3.2.1 Approximative Invertierung von $S^d_{\varphi_n}$ . . . . . . . . . . . . 73

3.2.2 Parameter-Verfahren für ideale Detektoren . . . . . . . . . . 78
3.2.3 Energieabhängige Rekonstruktionsverfahren . . . . . . . . . 88
3.2.4 Rekonstruktionsverfahren für unabhängige $\mu_c, \mu_t$ . . . . . . 92
3.2.5 Projektionsverfahren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 94
3.2.6 Rekonstruktion aus gestörten Daten . . . . . . . . . . . . . 98
3.2.7 Berücksichtigung mehrerer Meßrichtungen . . . . . . . . . . 100
3.3 Anwendung: Landminendetektion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102

**4 Ein detektororientiertes Modell zur Rückstreutomographie 107**
4.1 Meßaufbau und Modellierungsansatz . . . . . . . . . . . . . . . . . 107
4.2 Geometrie des detektorientierten Modells . . . . . . . . . . . . . . . 109
4.2.1 Die Objektfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
4.2.2 3D-Meßgeometrie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
4.2.3 Die auftretenden Strahlengänge . . . . . . . . . . . . . . . . 111
4.2.4 Die Detektorfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
4.3 Das kontinuierliche Vorwärtsmodell $\widetilde{S}^c$ . . . . . . . . . . . . . . . . 111
4.4 Das inverse Problem . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
4.4.1 Das Frequenzfiltermodell $\widetilde{S}^c_{E_{sc}}$ . . . . . . . . . . . . . . . . 113
4.4.2 Eine diskrete Version von $\widetilde{S}^c_{E_{sc}}$ . . . . . . . . . . . . . . . . 114
4.4.3 Invertierung von $\widetilde{S}^d_{E_{sc}}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115

**A Mathematische Hilfsmittel 119**
A.1 Integraldarstellung der Deltadistribution . . . . . . . . . . . . . . 119
A.2 Spezielle Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 120
A.3 Hilfsaussagen zur Invertierung von $R_a$ . . . . . . . . . . . . . . . . 122

**B Physikalische Tabellen 127**

# Symbolverzeichnis

| Symbol | Erläuterung | Abschnitt |
|---|---|---|
| $\mathbf{x}$ | Punkt im Rekonstruktionsgebiet | 1.1 |
| $I(\mathbf{x})$ | Intensität des Röntgenstrahls in $\mathbf{x}$ | 1.1 |
| $p(\mathbf{x})$ | Wahrscheinlichkeitsmaß für Streurichtung $\theta$ in $\mathbf{x}$ | 1.1 |
| $\mathcal{I}_k$ | Integrationsintervall | 1.1 |
| $L_q(\mathbf{x})$ | Quellstrahl bis $\mathbf{x}$ | 1.1 |
| $L_d(\mathbf{x})$ | Detektorstrahl von $\mathbf{x}$ | 1.1 |
| $E, E_{in}, E_{sc}$ | Photonenenergie (allg., einfallende, gestreute) | 1.2 |
| $h$ | Plancksches Wirkungsquantum | 1.2 |
| $c$ | Lichtgeschwindigkeit | 1.2 |
| $\nu$ | Frequenz | 1.2 |
| $\lambda$ | Wellenlänge | 1.2 |
| $\mu_t$ | totaler Absorptionskoeffizient | 1.2 |
| $W_b$ | Bindungsenergie | 1.2 |
| $Z$ | Kernladungszahl | 1.2 |
| $\sigma$ | Wirkungsquerschnitt | 1.2 |
| $m_e$ | Masse des Elektrons | 1.2 |
| $r_e$ | klassischer Elektronenradius | 1.2 |
| $\theta$ | Streuwinkel | 1.2 |
| $\lambda_c$ | Compton-Wellenlänge | 1.2 |
| $\mu_c$ | Comptonkoeffizient | 1.2 |
| $\mathbb{R}$ | Menge der reellen Zahlen | 1.3 |
| $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ | Menge der schnell fallenden Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ | 1.3 |
| $D$ | divergente Strahltransformation | 1.3 |
| $R$ | Radontransformation | 1.3 |
| $R_a$ | gedämpfte Radontransformation | 1.3 |
| $T_{a_0}$ | exponentielle Radontransformation | 1.3 |
| $\mathcal{K}$ | Menge der kompakten Mengen | 1.3 |
| $supp f$ | Träger von $f$ | 1.3 |
| $\hat{f}$ | Fouriertransformierte von $f$ | 1.3 |
| $A^\sharp$ | dualer Operator zu A | 1.3 |
| $L_2(\Omega)$ | Menge der auf $\Omega$ quadratintegrierbaren Funktionen | 1.3 |
| $f * g$ | Faltung von $f$ und $g$ | 1.3 |
| $J_n$ | Besselfunktion | 1.3 |

| Symbol | Erläuterung | Abschnitt |
|---|---|---|
| $H$ | Hilberttransformation | 1.3 |
| $\mathcal{R}(z)$ | Realteil von $z$ | 1.3 |
| $\mathcal{P}$ | Röntgentransformation | 1.4 |
| $\mathcal{Q}$ | Menge der Quellpositionen | 2.1 |
| $N_{q,x}, N_{q,y}$ | Anzahl der Quellpositionen in x- bzw. y-Richtung | 2.1 |
| $\mathcal{C}_{i,j}$ | Menge der Kollimatorpositionen | 2.1 |
| $N_{c,p}$ | Anzahl der Meßrichtungen | 2.1 |
| $N_d$ | Anzahl der vertikal angeordneten Detektorelemente | 2.1 |
| $\mathbf{n}_z$ | Einheitsvektor in z-Richtung | 2.1 |
| $\omega_\varphi$ | Meßrichtung | 2.1 |
| $D_k$ | k-tes Detektorelement | 2.1 |
| $(I\!R^3, \mathcal{B}^3, \lambda^3)$ | Lebesgue-Borelscher Maßraum | 2.2 |
| $\mathcal{M}, X, Y_\psi$ | Funktionenräume | 2.2 |
| $\psi$ | Energiefunktional | 2.2 |
| $S_\varphi^c$ | kontinuierlicher Vorwärtsoperator | 2.2 |
| $g_\varphi$ | Meßdaten in Richtung $\varphi$ | 2.2 |
| $\lvert\cdot\rvert, \lVert\cdot\rVert$ | Normen | 2.2 |
| $A \times B$ | kartesisches Produkt | 2.2 |
| $\mathcal{D}$ | Dämpfungsoperator | 2.2 |
| $S_{\varphi_n}^d$ | diskreter Vorwärtsoperator | 2.3 |
| $W(z)$ | charakteristische Detektorfunktion | 2.3 |
| $L_k$ | k-te Schicht | 3.1 |
| $\delta_x, \delta_y$ | Auflösungen in x- bzw. y-Richtung | 3.2 |
| $A(\mathbf{n})$ | Absorptionsterm | 3.2 |
| $\Delta$ | vertikale Schichtdicke | 3.2 |
| $\mathcal{W}$ | Lambertsche $\mathcal{W}$-Funktion | 3.2 |
| $\beta$ | Parameter | 3.2 |
| $A^{in}, A^{sc}$ | Dämpfungsterme für Quell- bzw. Detektorstrahl | 3.2 |
| $\gamma$ | Energieparameter | 3.2 |
| $\mathcal{K}_j$ | j-te Objektklasse | 3.2 |
| $P$ | Projektionsoperator | 3.2 |
| $\mathbf{s}_d$ | Detektorpunkt | 4.1 |
| $L_{\mathbf{s}_d}^{-1}$ | orthogonale Rückprojektion von $\mathbf{s}_d$ | 4.1 |
| $\mathbf{n}(\mathbf{s}_d)$ | Detektornormale in $\mathbf{s}_d$ | 4.1 |
| $\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}_\psi$ | Funktionenräume | 4.3 |
| $\omega_{in,n}$ | Spur des Quellstrahls in Voxel | 4.4 |
| $K_S^{i,j,k}$ | Voxel | 4.4 |

# Einleitung

Im Verlauf der letzten beiden Jahrzehnte sind *bildgebende Verfahren* in vielen naturwissenschaftlichen Bereichen zunehmend in den Blickpunkt des Interesses gerückt. Dies gilt insbesondere auch für Anwendungen auf dem Gebiet des *zerstörungsfreien Prüfens*. Ziel der *bildgebenden Verfahren* ist, aus indirekten, meßbaren Informationen über das zu untersuchende Objekt ein Abbild der dieses Objekt beschreibenden Funktionen zu gewinnen. Dabei können diese Funktionen skalaren oder vektoriellen Charakter aufweisen. Ein bekanntes Beispiel für die Rekonstruktion einer skalaren Größe ist die *Computer-Tomographie*, deren Mathematik Gegenstand zahlreicher Abhandlungen ist. Eine umfassende Darstellung bieten Louis in [34] oder Natterer in [40]. Die gemessenen Daten $g$ sind im mathematischen Modell der *2D-Computer-Tomographie* die Radontransformierten $Rf$ der gesuchten Funktion $f$. Für dieses Problem existieren mittlerweile effiziente Lösungen. Ein vektorielles Beispiel ist die Rekonstruktion von Geschwindigkeitsfeldern. Hier beschreibt die *Doppler-Transformation* das mathematische Modell, eine detaillierte Analyse dieses *inversen Problems* bietet Schuster in [47].

Die bekannten tomographischen Rekonstruktionsverfahren zu den oben beschriebenen Beispielen nutzen zur Gewinnung der gesuchten Objektfunktionen Informationen aus verschiedenen Meßrichtungen. Grundsätzlich müssen die untersuchten Objekte von allen Seiten zugänglich sein, um ohne weitere Zusatzinformationen qualitativ hochwertige Rekonstruktionsergebnisse zu erzielen. Jedoch gibt es durchaus Anwendungsgebiete, in denen die zu analysierenden Objekte nicht uneingeschränkt zugänglich sind. Aus dem Bereich der *zerstörungsfreien Prüfverfahren* sei hier stellvertretend der Flugzeugbau genannt, in dem der technische Aufwand für einen uneingeschränkten Zugang zu aufwendig ist. Soll dagegen ein Rekonstruktionsverfahren Informationen über ein dicht unterhalb der Erdoberfläche befindliches Objekt liefern, ist dieses sicherlich nur von einer Seite zugänglich. Diese Aufgabenstellung liegt beispielsweise beim Aufsuchen und Identifizieren von Landminen vor. Das Verfahren muß dann mit diesem eingeschränkten Informationsbereich arbeiten. Für eine solche Problematik bietet sich das in der vorliegenden Arbeit behandelte Modell der *Rückstreutomographie* an.

Erste Verfahren, die dieses Modell für eine Rekonstruktion von Dichtewerten eines unbekannten Objekts heranziehen, wurden gegen Ende des zwanzigsten Jahrhunderts entwickelt. Im ersten Kapitel erfolgt eine Beschreibung dieser zweidimensionalen Modellierung, sie dient als Grundlage der in dieser Arbeit entwickelten dreidimensionalen Meßgeometrie. Die Idee der Rückstreutomographie ist, mit Hilfe des *Comptoneffektes* die Dichtewerte des untersuchten Objekts zu rekonstruieren. Der Meßaufbau wird im ersten Kapitel eingehend beschrieben. Es zeigt sich, daß den gemessenen Daten $g_\varphi$ eine nichtlineare Integraltransformation der Gestalt

$$g_\varphi \;=\; \int f\,(x)\; e^{-Da(x,\varphi)}\,dx \tag{1}$$

zugrunde liegt, wobei $f$ und $a$ die gesuchten Objektfunktionen sind. Die genaue Modellierung wird anhand einer aufmerksamen Untersuchung der physikalischen Gegebenheiten hergeleitet. Außerdem beinhaltet dieses erste Kapitel eine Einordnung der *Rückstreutomographie* in die Reihe der tomographischen Methoden. Ihre Nähe zur ausführlich beschriebenen *Emissionstomographie* wird im Verlauf der Arbeit deutlich.

Die mathematische Analyse des direkten Problems ist Gegenstand des zweiten Kapitels. Dort werden die geeigneten Funktionenräume für das kontinuierliche und das diskrete Modell der *Rückstreutomographie* definiert. Dabei dient der kontinuierliche Vorwärtsoperator als Basis der durchgeführten theoretischen Untersuchungen, anhand des diskreten Operators werden synthetische Daten erzeugt. Diese Daten stellen dann die Grundlage für das Testen der im dritten Kapitel hergeleiteten Rekonstruktionsverfahren.

Das dritte Kapitel behandelt das inverse Problem der Rückstreutomographie. Zunächst werden die sogenannten *Strippingverfahren* vorgestellt. Diese Verfahren ermöglichen eine sukzessive Rekonstruktion einzelner Schichten des untersuchten Objekts und damit gelingt eine approximative Invertierung des diskreten Vorwärtsoperators. Die hieraus abgeleiteten Rekonstruktionsverfahren bilden dann den Kern dieses Kapitels. Ihre Leistungsfähigkeit wird sowohl anhand exakter als auch mittels gestörter Daten überprüft. An dieser Stelle zahlen sich die aufwendigen physikalischen Betrachtungen des ersten Kapitels aus. Es zeigt sich die enorme Effizienzsteigerung gegenüber einfachen Verfahren, die vergleichend angegeben werden. Auch erweisen sich die regularisierten Verfahren als stabil gegenüber Datenfehlern. Abgerundet wird dieses Kapitel durch ein aktuelles Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Kampfmittelerkennung, der Detektion von Landminen.

Den Abschluß der Arbeit bildet im vierten Kapitel die Vorstellung einer neu entwickelten Meßgeometrie. Ziel des dort beschriebenen *detektororientierten Modells* ist, den Meßvorgang zu beschleunigen. Dies gelingt durch die Annahme einer fixierten Röntgenquelle. Ein von ihr ausgehender Kegelstrahl überdeckt das Objekt vollständig, so daß hier das Rekonstruktionsgebiet nicht mehr durch Verschieben der Röntgenquelle in einzelne Meßpositionen abgetastet werden muß. Durch das Einbringen eines zusätzlichen Filters kann dieses Modell erneut durch eine Integralgleichung vom Typ (1) beschrieben werden.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr. Alfred K. Louis, der mir stets durch seinen persönlichen und fachlichen Erfahrungsschatz im Entstehungsprozeß dieser Arbeit neue und lehrreiche Wege aufgezeigt hat. Weiter bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für das produktive und ausgesprochen gute Arbeitsklima. An dieser Stelle möchte ich meine Kollegen und Freunde Volker Gebhard und Peter Jonas hervorheben, die mir auch in schwierigen Zeiten stets ihre Unterstützung zukommen ließen und maßgeblichen Anteil an der Entstehung dieser Arbeit haben. Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Univ.-Prof. Dr. Gerd Schmidt, ohne den ich diese Aufgabe sicher nicht angegangen wäre.

Schließlich gilt mein ganz besonderer Dank meiner Familie, ohne deren jahrelange Unterstützung diese Dissertation nicht möglich gewesen wäre, und meiner lieben Sabine für ihre beständige Aufmunterung.

# Kapitel 1

# Grundlagen der Rückstreutomographie

Erste ausführliche Arbeiten zu dem Themenkomplex der Rückstreutomographie entstanden Anfang der neunziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts am *Fraunhoferinstitut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren* in Saarbrücken. In diesen Arbeiten wurde ein vereinfachtes, zweidimensionales Modell betrachtet, das in einer Arbeit von SCHMITT [46] 1997 erstmals einen exakten mathematischen Rahmen erhielt. SCHMITT gelang zudem eine approximative Inversion dieses Modells und seine genaue Analyse versetzten ihn in die Lage, gute Rekonstruktionen aus synthetisch erzeugten Daten zu gewinnen. Aufbauend auf dieser Arbeit wird in einem ersten Abschnitt ein dreidimensionales Modell der Rückstreutomographie sowie den dazugehörigen Meßaufbau entwickelt. Anschließend werden die physikalischen Grundlagen zur Rückstreutomographie diskutiert, wodurch dem Leser ein Gefühl für die Problematik der auftretenden Phänomene vermittelt wird. Abgerundet wird dieses erste Kapitel mit einer kurzen Beschreibung der gedämpften Radontransformation, zusammen mit ihrer im Jahre 2000 unabhängig voneinander von NOVIKOV [43] und NATTERER [41] hergeleiteten Inversion, welche die Einordnung der Rückstreutomographie in die Reihe der tomographischen Methoden sowie einen Vergleich mit diesen gestattet.

## 1.1 Meßaufbau und Modellierung

Die der Rückstreutomographie zu Grunde liegende Idee besteht darin, die Dichteverteilung eines zu untersuchenden Objektes mit Hilfe des Comptoneffektes zu rekonstruieren. Als ein solches Objekt kann zum Beispiel ein auf Risse oder Materialverunreinigungen hin zu überprüfendes Werkstück angesehen werden, welches während der durchgeführten Qualitätsprüfung nicht zerstört werden soll. Das zu untersuchende Objekt befinde sich hierzu vollständig innerhalb eines Würfels $W$. Wird dieser Würfel einem monochromatischen Röntgenstrahl ausgesetzt, so

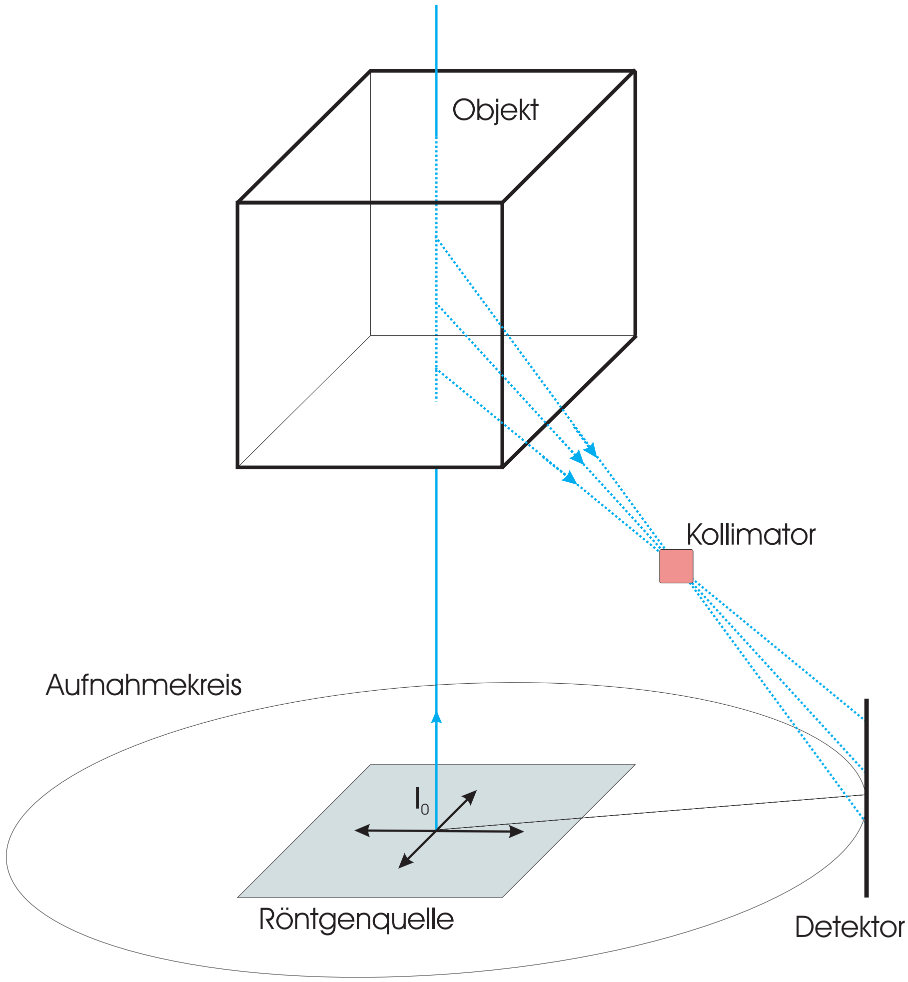


Abbildung 1.1: Meßaufbau der Rückstreutomographie

führen verschiedene physikalische Effekte zu einer Intensitätsabminderung dieses Strahls entlang seines Weges durch das Objekt. Eine Ursache für diese Dämpfung besteht darin, daß Photonen an Materie gestreut werden und ihren Weg durch das Objekt in Richtung dieser Streuung fortsetzen. Eine Bestrahlung des Würfel gemäß Abbildung 1.1 und die Betrachtung des eingezeichneten Strahlenganges kann demnach wie folgt beschrieben werden.

Eine Röntgenquelle $Q$ sendet in Richtung der Geraden $L_q$ einen Röntgenstrahl der Intensität $I_0$ aus, die emittierten Photonen besitzen die Energie $E_{in}$. Auf seinem Weg durch das zu untersuchende Objekt verliert der Strahl in jedem Punkt in Folge von Rayleighstreuung, Photoeffekt und Comptonstreuung (bei sehr hohen Photonenenergien treten auch Paarbildungseffekte auf) an Intensität. Während sich sowohl bei der Rayleighstreuung als auch beim Photoeffekt die Energie der einzelnen Photonen nicht verändert, verliert ein durch einen Comptonstoß gestreutes Photon einen vom Streuwinkel abhängigen Anteil seiner Energie $E_{in}$ und breitet sich nun mit einer geringeren Energie $E_{sc}$ in Streurichtung aus. Dabei werden auch die in Richtung eines fest installierten Kollimators gestreuten Röntgenstrahlen auf ihrem weiteren Weg durch das Objekt an Intensität verlieren. Auf welchen Effekten diese weitere Intensitätsabnahme basiert, ist für den hier betrachteten Meßaufbau unerheblich. Nachdem die gestreuten Photonen aus dem Objekt ausgetreten sind und den Kollimator passiert haben, treffen sie schließlich auf einem Detektor auf, von dem die einfallende Intensität gemessen wird.

Durch Parallelverschiebung der Anordnung „Quelle - Kollimator - Detektor" innerhalb der Quellebene gelingt es, das zu untersuchende Objekt vollständig abzutasten. Durch Rotation des Detektors entlang des in der Quellebene liegenden Aufnahmekreises kann dieses Objekt hinsichtlich mehrerer Streurichtungen untersucht werden.

Für einen separierten Strahlengang bestimmt sich die Intensität $I(\mathbf{x})$ des Quellstrahles in einem Punkt $\mathbf{x} \in W \cap L_q$ zu

$$I(\mathbf{x})|_{L_q} = I_0 \, e^{-\int\limits_{L_q(\mathbf{x})} a(\xi) d\xi} , \tag{1.1}$$

wobei $L_q(\mathbf{x})$ den von der Röntgenquelle mit einer Intensität $I_0$ ausgesandten Quellstrahl bis zum Punkt $\mathbf{x}$ darstellt und $a(\xi)$ das Absorptionsverhalten des durchstrahlten Mediums entlang dieser Strecke beschreibt. Zu (1.1) führt unmittelbar die Annahme, daß die Intensitätsabminderung $\Delta I$ entlang eines infinitesimal kleinen Wegstückes von $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ proportional zur Länge $\Delta\mathbf{x}$ dieses Wegstückes und proportional zur momentanen Intensität $I(\mathbf{x})$ selbst ist, also $\Delta I = -a \, I(\mathbf{x}) \, \Delta\mathbf{x}$ gilt. Dabei stellt $a$ den materialabhängigen Proportionalitätsfaktor dar. Nun ergibt sich (1.1) durch Integration dieser Gleichung und Berücksichtigung der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$. Steht nun weiter die Annahme, daß es in dem betrachteten Punkt $\mathbf{x}$ zur Comptonstreuung kommt, bestimmt sich die infolge des Streuvorganges in $\mathbf{x}$ auf den Detektor einfallende Intensität $I(\mathbf{x})$ gemäß

$$I(\mathbf{x}) = I_0 \, p(\mathbf{x}) \, f(\mathbf{x}) \, e^{-\int\limits_{L_q(\mathbf{x})} a(\xi) d\xi - \int\limits_{L_d(\mathbf{x})} a(\xi) d\xi} . \tag{1.2}$$

Hier stellt $f(\mathbf{x})$ ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dar, daß es in $\mathbf{x}$ zur Comptonstreuung kommt, während $p(\mathbf{x})$ die Wahrscheinlichkeit beschreibt, daß die Streuung in Richtung des Kollimators erfolgt. Weiter steht $L_d(\mathbf{x})$ analog zu $L_q(\mathbf{x})$ für den auf den Detektor einfallenden Strahl, der seine Ursache in der in $\mathbf{x}$ stattgefundenen Comptonstreuung hat.

Letztendlich führt das Berücksichtigen der Tatsache, daß jedes Detektorelement endliche Abmessungen aufweist, ein derartiges Element also nicht allein von einem einzelnen Röntgenstrahl, sondern von einem ganzen Fächer solcher Strahlen getroffen wird, die ihren Ursprung auf einem durch die geometrische Anordnung von Detektor und Kollimator eindeutig festgelegten Intervall des fixierten Quellstrahles haben, zu der Erkenntnis, daß auf ein Detektorelement $D_k$ die Intensität

$$I_k \;=\; I_0 \int_{\mathcal{I}_k} p(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x})\, e^{-\int\limits_{L_q(\mathbf{x})} a(\xi)d\xi \;-\; \int\limits_{L_d(\mathbf{x})} a(\xi)d\xi}\, d\mathbf{x} \tag{1.3}$$

eintrifft. In dieser Formel steht $\mathcal{I}_k$ für das Teilstück des Quellstrahles, von dem aus Photonen durch Comptonstreuung auf das betrachtete Detektorelement gelangen können. Vorausgesetzt, es handelt sich um eine fixierte geometrische Anordnung von Röntgenquelle, Kollimator und Detektor, wird hieraus ersichtlich, daß der Detektor aus einer hinreichend großen Anzahl von vertikal angeordneten Elementen bestehen muß, damit das zu untersuchende Objekt in seiner gesamten Tiefe abgetastet wird. Oder umgekehrt: sind die Abmessungen des Detektors fest vorgegeben, so lassen sich mit dem Meßaufbau gemäß Abbildung 1.1 nur Objekte bis zu einer durch diese Abmessungen vorgeschriebenen Größe detektieren.

## 1.2 Physikalische Grundlagen

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Modellierung der Rückstreutomographie basiert im Wesentlichen auf den in den Arbeiten von Gorshkov [17, 18, 15, 16] bzw. Schmitt [46] entwickelten Modellen für zweidimensionale Objekte. Diese Modellierung wird im Folgenden physikalisch motiviert werden und eine genaue Analyse der auftretenden Effekte wird dann zu einem verfeinerten Modell führen.

Um die Abschwächung von Röntgenstrahlen[1] beim Durchlaufen von Materie angemessen erklären zu können, soll zunächst auf die hierfür relevanten Wechselwirkungen elektromagnetischer Strahlung, die ja insbesondere auch Licht und Röntgenstrahlung umfaßt, mit Materie eingegangen werden. Was aber ist unter „elektromagnetischer Strahlung“ zu verstehen? Zumindest für den Spezialfall des Lichtes schien diese Frage spätestens 1889 nach langem erbitterten Streit zwischen Vertretern des Partikelmodells und Anhängern des Wellenmodells endgültig geklärt, als Heinrich Hertz in seinem Vortrag auf der Heidelberger Tagung der Naturforschergesellschaft festhielt[2] :

[1] Diese Strahlen wude 1895 von Wilhelm Conrad Röntgen entdeckt, der dafür im Jahre 1903 als erster Physiker den Nobelpreis erhielt. Von ihm erhielten sie auch den Namen „X-Strahlen“, da ihre Struktur noch recht unerforscht war.

[2] Dieses Zitat und eine sehr weitreichende Darstellung der hier aufgeführten Physik findet sich in [48] und [49]; wer lediglich an einer kurzen Zusammenfassung der wesentlichen Sachverhalte interessiert ist, sei auf [52] oder [9] verwiesen.

> »Was ist das Licht? Seit den Zeiten Youngs und Fresnels wissen wir, daß es eine Wellenbewegung ist. Wir kennen die Geschwindigkeit der Wellen, wir kennen ihre Länge, wir wissen, daß es Transversalwellen sind; wir kennen mit einem Worte die geometrischen Verhältnisse der Bewegung vollkommen. An diesen Dingen ist ein Zweifel nicht mehr möglich, eine Widerlegung dieser Anschauungen ist für den Physiker undenkbar. Die Wellentheorie des Lichtes ist, menschlich gesprochen, Gewißheit!«

In der Tat erklärt das Wellenmodell Interferenz- und Beugungserscheinungen auf höchst befriedigende Art. Sollen aber Fragen bezüglich der Absorption oder Emission elektromagnetischer Strahlung beantwortet werden, erlebt das Teilchenmodell seine Renaissance, denn dieses Modell eignet sich hierfür besonders gut. Daher gelingt es mit seiner Hilfe auch, die weiter unten noch zu behandelnden Phänomene des photoelektrischen Effektes und des Comptoneffektes auf einfache Weise zu verstehen. Diese im klassischen Sinne unvereinbar gegenüberstehenden Betrachtungsweisen führen zu dem Begriff „Welle-Teilchen-Dualismus“ und die *Heisenbergsche Unschärferelation* der modernen Quantenmechanik[3] sorgt dafür, daß die beiden Modelle konfliktlos nebeneinander bestehen können.

### 1.2.1 Röntgenstrahlung im Teilchenmodell

Während das Wellenmodell elektromagnetische Strahlung als Transversalwellen ansieht und dieses Modell durch die *Maxwellgleichungen* vollständig beschrieben wird, soll hier der Teilchencharakter der Röntgenstrahlung[4] hervorgehoben werden.

Unter einem Röntgenstrahl wird ein Teilchenstrahl verstanden werden, dessen einzelne Photonen (Lichtquanten), wie diese Teilchen genannt werden, räumlich lokalisierte Objekte bestimmter Energie sind. Die Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit ($c = 2,998 \cdot 10^8 m/s$), folglich muß ihnen die Ruhemasse Null zugeordnet werden, damit sie den Gesetzen der Relativitätstheorie genügen. Weiter besitzen sie die Energie

$$E = h \cdot \nu , \tag{1.4}$$

[3] Zu diesem weiten Feld der modernen Physik existiert eine entsprechend große Zahl an Lehrbüchern. Exemplarisch sei hier auf die Werke [14], [37] und [30] verwiesen.

[4] Die Fokussierung der Betrachtung auf die Röntgenstrahlung erfolgt hier ausschließlich unter dem Aspekt, daß in dieser Arbeit in erster Linie die Rückstreutomographie untersucht wird und diese zur Abtastung der Untersuchungsobjekte eine Röntgenquelle verwendet. Allgemein versteht man unter Röntgenstrahlung den Teil der elektromagnetischen Strahlung, der aus Frequenzen im Bereich von wenigen keV (weiche Röntgenstrahlung) bis mehrere MeV (ultraharte Röntgenstrahlung, Gammastrahlung) besteht.

wobei $h$ das Plancksche Wirkungsquantum und $\nu$ die Frequenz der Röntgenstrahlung darstellen, womit der Strahlung über den Zusammenhang $c = \lambda \cdot \nu$ eine entsprechende Wellenlänge $\lambda$ zugeordnet werden kann. Da gemäß dem Gesetz über die Trägheit der Energie jede bewegte Energie einen Impuls repräsentiert, muß dem Photon der relativistische Impuls

$$p_{rel} \quad = \quad \frac{E}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{1.5}$$

zugeordnet werden.

Unter Beachtung von Energieerhaltung und Impulserhaltung kann nun mit Hilfe von (1.4) und (1.5) eine Darstellung der wichtigsten Arten von Röntgenstrahlabminderung in Folge von Wechselwirkung mit Materie erfolgen.

### 1.2.2 Abminderung von Röntgenstrahlung

Die Abschwächung von Röntgenstrahlung beim Durchlaufen von Materie liefert die Grundlage vieler tomographischer Methoden und ist daher für den Anwender, sei es nun der Arzt, der mit Hilfe einer Computer-Tomographie-Aufnahme Tumore lokalisieren und behandeln möchte, oder sei es ein Zulieferer aus der Automobilindustrie, der die Qualität seiner Werkstücke durch ein *zerstörungsfreies Prüfverfahren* mittels Röntgenstrahlung überprüft, von besonderem Interesse.

Auf welche Art und in welchem Maße ein Röntgenstrahl der Intensität $I$ abgemindert wird, hängt von mehreren Faktoren ab. Zum einen spielt natürlich das bestrahlte Material eine entscheidende Rolle, genauer die Kernladungszahl der bestrahlten Teilchen. Weiter muß die Energie der Photonen, aus denen die Strahlung besteht, berücksichtigt werden, und schließlich ist noch die Dicke des durchstrahlten Materials zu beachten. Werden alle möglichen Abschwächungsarten in dem Abschwächungs- oder Dämpfungskoeffizienten $\mu_t$ zusammengefaßt und durchläuft ein Röntgenstrahl $L$ gemäß Abbildung 1.2 ein Objekt $\Omega$, so erfolgt die Intensitätsabminderung dieses Strahles nach dem *Lambert-Beer-Gesetz*

$$I(\mathbf{x}) \quad = \quad I_0 \cdot e^{-\int\limits_L \mu_t(\xi,E)\, d\xi} \quad . \tag{1.6}$$

In dieser Formel[5] bezeichnet $I_0$ die Intensität des Röntgenstrahles in $\mathbf{x}_0 = 0$ und die Schreibweise $\mu_t(\xi, E)$ bringt die Energieabhängigkeit des Abschwächungskoeffizienten zum Ausdruck.

[5]Eine Herleitung dieses Abschwächungsgesetzes wird in einer Vielzahl von Arbeiten aus dem Umfeld der Röntgenstrahlen geboten, wozu insbesondere auch Arbeiten aus dem Gebiet der Computertomographie zu zählen sind. Stellvertretend seien hier die Arbeiten [34] und [46] angeführt.

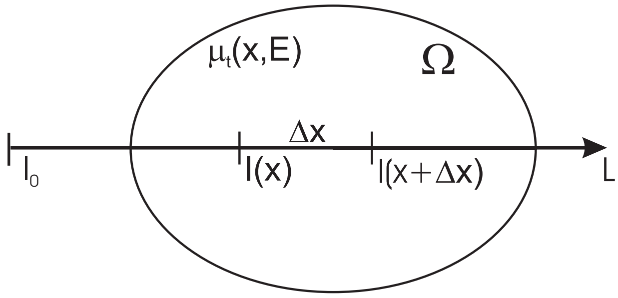


Abbildung 1.2: Abminderung von Röntgenstrahlen

Aus welchen Anteilen aber setzt sich nun der Dämpfungskoeffizient $\mu_t$ zusammen? Grundsätzlich kann die Abschwächung von Röntgenstrahlung durch Absorption der Photonen, elastische oder inelastische Stöße der Photonen mit Elektronen der Atomhülle oder aber auf Grund von Paarbildungseffekten hervorgerufen werden. Die für das Modell der Rückstreutomographie wesentlichen Effekte sind im Einzelnen:

**Der Photoeffekt:**

Der Photoeffekt, auch lichtelektrischer Effekt genannt, beschreibt die Absorption eines Photons mit einer Energie $E_{ph} = h \cdot \nu > W_b$ durch ein Hüllenelektron, wobei mit $W_b$ die Bindungsenergie oder Austrittsarbeit dieses Elektrons bezeichnet wird. Infolge dieser Energieaufnahme verläßt das Elektron das Atom mit der kinetischen Energie $E_{kin} = E_{ph} - W_b$, während das Photon durch Absorption verschwindet. Daher muß, um den Prinzipien der Energie- und Impulserhaltung gerecht zu werden, das Atom in der Bilanzierung berücksichtigt werden, es muß einen Teil des Impulses aufgenommen haben. Aus demselben Grund kann der lichtelektrische Effekt auch nicht an freien Elektronen auftreten. Abbildung 1.3 skizziert noch einmal den schematischen Verlauf des Photoeffektes[6].
Der Wirkungsquerschnitt des Photoeffektes erhält seinen größten Beitrag von Elektronen der innersten Schale der Atomhülle und nach [22] berechnet sich dieser Anteil für Photonenenergien $E_{ph} > W_b(K)$ zu

$$\sigma_{ph,K} \quad \sim \quad \sigma_0 \cdot Z^5 \cdot \left( \frac{m_e c^2}{E_{ph}} \right)^{\frac{7}{2}} \quad . \tag{1.7}$$

[6]Auch dieser Effekt wurde 1887 von Heinrich Hertz entdeckt und es scheint gerade im Hinblick auf seine oben zitierte Rede recht interessant, daß der lichtelektrische Effekt nicht durch das Wellenmodell erklärt werden kann. Jedoch gelang Albert Einstein 1905 eine vollständig korrekte Beschreibung eben mit Hilfe des Teilchenmodells und der von Max Planck im Jahre 1900 vorgestellten Energiequantelung.

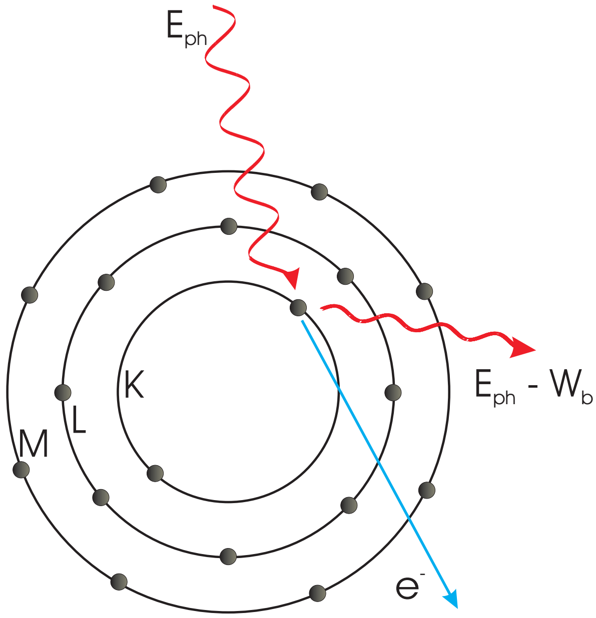


Abbildung 1.3: Photoeffekt als Absorption von Photonen

Hier bezeichnet $\sigma_0 := \frac{8\pi}{3} r_e^2$ den *Thomsonquerschnitt* der elastischen Streuung von Photonen einer Energie $E_{ph} < W_b$. Damit bringt (1.7) die starke Abhängigkeit dieses Streuungsquerschnittes von der Kernladungszahl $Z$ zum Ausdruck. Für wachsende Photonenenergien $E_{ph}$ nimmt also der Photoeffekt stark ab. Dieser Abfall flacht für sehr hohe Energien ab und bestimmt sich asymptotisch zu

$$\sigma_{ph,K} \quad \sim \quad \frac{Z^5}{E_{ph}} \,. \tag{1.8}$$

Die Abbildungen 1.7 - 1.10 am Ende dieses Abschnittes zeigen dieses Verhalten anhand verschiedener Beispiele.

**Der Comptoneffekt:**

Im Gegensatz zum Photoeffekt stellt der nun zu behandelnde Comptoneffekt[7] eine Streuung kurzwelliger Röntgenstrahlung an freien oder nur schwach gebun-

[7] Auch dieses von Arthur Compton 1922/23 erstmals beobachtete Phänomen kann ausschließlich durch das Teilchenmodell richtig erklärt werden, denn nach dem Wellenmodell würden die Elektronen durch die einfallende Welle zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden, um dann ihrerseits eine Strahlung derselben Wellenlänge zu emittieren. Neben der Frequenz der einfallenden Welle wird jedoch auch eine energieärmere, also langwelligere, gestreute Strahlung beobachtet, im krassen Widerspruch zum klassischen Wellenmodell der elektromagnetischen Strahlung.

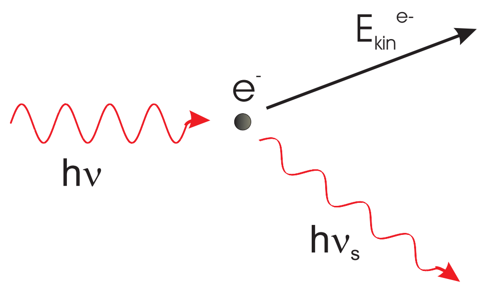


Abbildung 1.4: Comptoneffekt als elastischer Stoß

denen Elektronen der äußeren Atomhülle dar. Im Teilchenmodell beschreibt sich die Comptonstreuung gemäß Abbildung 1.4 als elastischer Stoß zwischen einem Photon der Energie $E_{ph} = h \cdot \nu$ und dem Impuls $p_{ph} = \hbar k$ und einem schwach gebundenen Elektron des Streumaterials. Da es sich um ein annähernd freies Elektron handelt, ist die Annahme $W_b \ll E_{ph}$ gerechtfertigt, und unter relativistischer Rechnung liefert der Energieerhaltungssatz[8]:

$$h\nu = h\nu_s + E_{kin}^{e^-} , \tag{1.9}$$

$$\text{wobei} \quad E_{kin}^{e^-} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} - m_0 c^2 . \tag{1.10}$$

Hier bedeuten: $\nu$ die Frequenz der einfallenden, $\nu_s$ die Frequenz der gestreuten Strahlung sowie $E_{kin}^{e^-}$ die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß, die sich gemäß (1.10) aus der Ruhemasse $m_0$ und der Geschwindigkeit $v_e$ des Elektrons sowie der Lichtgeschwindigkeit $c$ berechnet. Entsprechend schreibt sich der Impulserhaltungssatz als

$$\hbar k = \hbar k_s + p_e , \tag{1.11}$$

$$\text{mit} \quad p_e = \frac{m_0 v_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} . \tag{1.12}$$

Wird die nach $p_e$ aufgelöste Gleichung (1.11) quadriert und mit der analog quadrierten Gleichung (1.9) verglichen, führt dies unmittelbar zu

$$\nu - \nu_s = \frac{h\nu\nu_s}{m_0 c^2} (1 - \cos\theta) . \tag{1.13}$$

[8]Der Einfachheit halber wird die Rechnung in dem Koordinatensystem ausgeführt, in dem sich das Elektron vor dem Stoß in Ruhe befindet.

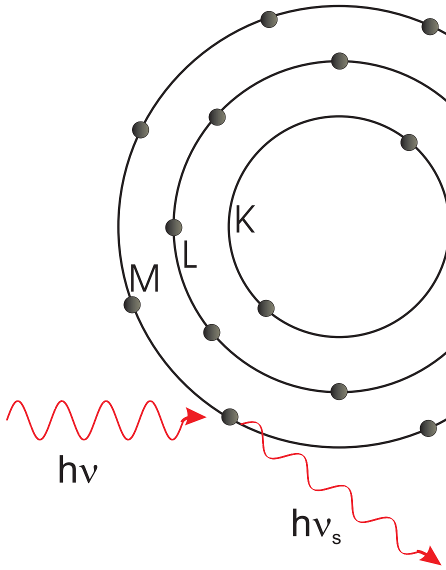


Abbildung 1.5: Comptoneffekt an schwach gebundenen Elektronen

Die Größe $\theta$ bezeichnet den Streuwinkel zwischen dem einfallenden und dem gestreuten Photonenstrahl. Die Gleichung (1.13) wird üblicherweise als Wellenlängenänderung dargestellt, die sich aus (1.13) zu

$$\Delta\lambda = \lambda_c \,(1 - \cos\theta) \tag{1.14}$$

ergibt, wobei $\lambda_c := \frac{h}{m_0 c}$ als *Compton-Wellenlänge* des Elektrons bezeichnet wird. Aus (1.14) wird insbesondere ersichtlich, daß die durch Comptonstreuung hervorgerufene Größe der Wellenlängenänderung lediglich vom Streuwinkel $\theta$ abhängig ist, nicht jedoch von der Energie der einfallenden Photonen oder der Intensität des Röntgenstrahles. In Abbildung 1.5 ist noch einmal der Comptoneffekt anhand des Atommodells schematisiert dargestellt, um den Unterschied zum Photoeffekt zu verdeutlichen.

Der Wirkungsquerschnitt $\sigma_c$ für die Comptonstreuung errechnet sich nach Oskar B.Klein und Yoshio Nishina für mittlere Photonenenergien $E_{ph} < m_e c^2$ mit Hilfe der Dirac-Gleichung[9] zu

$$\sigma_c \doteq \sigma_0 Z \left(1 - \frac{2h\nu}{m_e c^2} + \frac{26}{5}\left(\frac{2h\nu}{m_e c^2}\right)^2\right) , \tag{1.15}$$

[9]Eine ausführliche Herleitung findet sich in [49].

für hohe Photonenenergien $E_{ph} \gg m_e c^2$ zu

$$\sigma_c \doteq \sigma_0 Z \frac{3 m_e c^2}{8 h\nu} \left( \log\left( \frac{2h\nu}{m_e c^2} \right) + \frac{1}{2} \right) . \tag{1.16}$$

Auch hier zeigt sich erneut eine Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Kernladungszahl $Z$ des bestrahlten Materials, jedoch ist diese nach (1.15) bzw. (1.16) lediglich linear. Dies hat zur Folge, daß bei Materialien hoher Kernladungszahl die Absorption durch Photoeffekt die Abschwächung durch Comptonstreuung bei weitem überwiegt. Für das hier behandelte Modell[10] sind (1.15) bzw. (1.16) weniger geeignet, da dort der gesamte Wirkungsquerschnitt, also bezüglich aller Raumrichtungen, angegeben ist. Dies erfordert einen Übergang zum differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\psi(\theta, \varphi) = \frac{r_e^2}{2} \left(1 + \alpha\left(1 - \cos\theta\right)\right)^{-2} \left( 1 + \cos^2\theta + \frac{\alpha^2 \left(1 - \cos\theta\right)^2}{1 + \alpha\left(1 - \cos\theta\right)} \right), \tag{1.17}$$

mit dem sich die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung durch $B \subset S^2$ gemäß

$$P(B) = \iint_B \psi(x) dx \tag{1.18}$$

berechnet.[11]

In (1.17) stellt $r_e$ den klassischen Elektronenradius dar und die Konstante $\alpha$ ergibt sich zu $\alpha := \frac{h \cdot \nu}{m_0 c^2}$, so daß der differentielle Wirkungsquerschnitt, abgesehen von fest vorgegebenen Naturkonstanten, nur von dem Streuwinkel $\theta$ und der Photonenenergie $E_{ph} = h \cdot \nu$ abhängig ist. Ähnlich wie beim Photoeffekt fällt auch der Wirkungsquerschnitt für die Comptonstreuung gemäß (1.15) und (1.16) mit zunehmender Photonenenergie. Dies ist ebenfalls den Abbildungen 1.7 bis 1.10 zu entnehmen.

### Die Paarbildung:

Erreicht die Energie der Photonen einen Wert $E_{ph} > 2 m_e c^2$, trägt ein weiterer Effekt zur Abschwächung der Röntgenstrahlung bei: die als Paarbildung bezeichnete und in Abbildung 1.6 schematisch skizzierte Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares im Coulombfeld des Atomkernes. Bei diesem Vorgang wird ein Elektron

[10] Vergleiche hierzu den in Abschnitt 1.1 beschriebenen Meßaufbau.

[11] Hier ist $\psi(\theta, \varphi)$ in Kugelkoordinaten beschrieben, wobei $\theta$ den Winkel zur positiven z-Achse darstellt und diese mit der Bewegungsrichtung der einfallenden Photonen übereinstimmt.

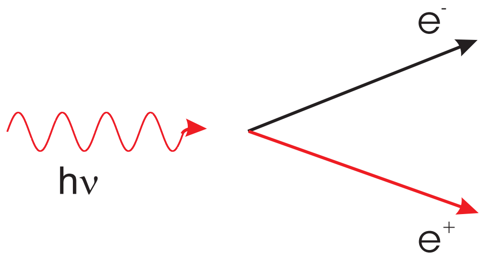


Abbildung 1.6: Paarbildung im Coulombfeld eines Atoms

der nicht beobachtbaren Antiwelt aus einem besetzten negativen Energiezustand in einen realen Zustand positiver Energie gehoben. Es entsteht also gemäß

$$h \cdot \nu \quad \longrightarrow \quad e^- + e^+ + 2E_{kin} \tag{1.19}$$

ein Elektron-Positron-Paar. Die kinetische Energie verteilt sich dabei gleichmäßig auf die beiden gleichschweren Teilchen.
Der Wirkungsquerschnitt $\sigma_p$ für die Paarbildung nimmt mit wachsenden Photonenenergien zunächst logarithmisch zu,

$$\sigma_p \quad \sim \quad Z^2 \log\left(h \cdot \nu\right) \ , \tag{1.20}$$

um sich dann bei sehr hohen Energien einem materialabhängigen, konstanten Wert zu nähern.

Um den oben aufgeführten Abminderungsprozessen einen anschaulicheren Rahmen zu verleihen und um ein Gefühl für die Größenverhältnisse zu erlangen, werden nun einige charakteristische Beispiele[12] für das Zusammenspiel der einzelnen Effekte aufgeführt.

In den Abbildungen 1.7 bis 1.10 werden die einzelnen Koeffizienten jeweils gegen die Photonenenergie doppellogarithmisch aufgetragen. Hierbei stellt die türkise (——) Linie den totalen Dämpfungskoeffizienten $\mu_t$ dar, der sich aus den Abminderungsfaktoren der Rayleighstreuung (blaue(——) Linie, $\mu_r$), des Photoeffektes (rote(——) Linie, $\mu_p$), des Comptoneffektes (grüne(——) Linie $\mu_c$), sowie der Paarbildung (magenta(——) Linie, $\mu_{pb}$), zusammensetzt. Ein Vergleich der vier

[12]Die Daten für die auf den folgenden Seiten dargestellten Beispiele sind der Datenbank des *Physics Laboratory*, einer Abteilung des *National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, (NIST)* entnommen.

Abbildungen bringt eine wesentliche Gemeinsamkeit der Zusammensetzung des totalen Dämpfungskoeffizienten $\mu_t$ bei allen Beispielen zum Ausdruck: es existiert ein Bereich niedriger Photonenenergie, in dem der Photoeffekt den absolut dominierenden Faktor der Strahlabminderung darstellt, einen mittleren Energiebereich, in welchem der Comptoneffekt fast ausschließlich zur Abminderung beiträgt, und einen Bereich sehr hoher Photonenenergie, in dem die Abminderung im Wesentlichen nur noch durch Paarbildungsprozesse erfolgt. Ebenso werden die oben diskutierten Abhängigkeiten der einzelnen Effekte von der Ordnungszahl der Elemente und der Photonenenergie deutlich erkennbar. Die im Bereich kleiner Photonenenergien auftretenden Unstetigkeiten in $\mu_p$ stellen die sogenannten „Absorptionskanten“ dar. Diese werden dadurch hervorgerufen, daß mit wachsender Photonenenergie Elektronen innerer Schalen ausgelöst werden können, in einzelnen Schalen jedoch nur Elektronen mit einer durch die Schale fest vorgegebenen Bindungsenergie $W_b$ auftreten. Da die Atomhüllen von Elementen höherer Ordnungszahl aus mehreren Schalen bestehen, existieren für solche Elemente auch mehrere Absorptionskanten (siehe Abbildung 1.10).

Eine grobe Betrachtung des Bereiches der Photonenenergie, in dem der Comptoneffekt die vorherrschende Rolle einnimmt, kann insbesondere bei leichten Materialien (siehe die Abbildungen 1.7 bis 1.9) den Eindruck erwecken, daß in diesem Energiebereich die Abschwächung der Röntgenstrahlen ausschließlich durch Comptonstreuung hervorgerufen wird. Diese Beobachtung wurde zum grundlegenden Bestandteil früherer Modelle zur Rückstreutomographie, wie sie in den Arbeiten von Gorshkov [17, 18] und Schmitt [46] verwendet wurden. Ein genauerer Vergleich dieser drei Beispiele zeigt jedoch auch, daß dieser von Comptonstreuung dominierte Energiebereich keineswegs fest bestimmbar, sondern materialabhängig ist. Schließlich wird in Abbildung 1.10 deutlich, daß der Anteil der Comptonstreuung zum totalen Dämpfungskoeffizienten $\mu_t$ bei Elementen höherer Kernladungszahl selbst in diesem mittleren Bereich der Photonenenergie wesentlich geringer ausfällt.

### 1.2.3 Konsequenzen für die Modellierung

Werden die hier dargestellten physikalischen Grundlagen in das Modell der Rückstreutomographie eingearbeitet, so schreibt sich (1.3) wie folgt:

$$I_k = I_0 \int_{\mathcal{I}_k} p(\mathbf{x})\, \mu_c(\mathbf{x}, E_{Ph})\, e^{-\int_{L_q(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{Ph}) d\xi - \int_{L_d(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{Ph}) d\xi} d\mathbf{x}\,. \tag{1.21}$$

In (1.21) ist nun also insbesondere die Abhängigkeit der Koeffizienten $\mu_t$ und $\mu_c$ von der Photonenenergie $E_{Ph}$ berücksichtigt. Für den in Abschnitt 1.1 eingeführten Meßaufbau bedeutet dies explizit, daß für alle Koeffizienten entlang

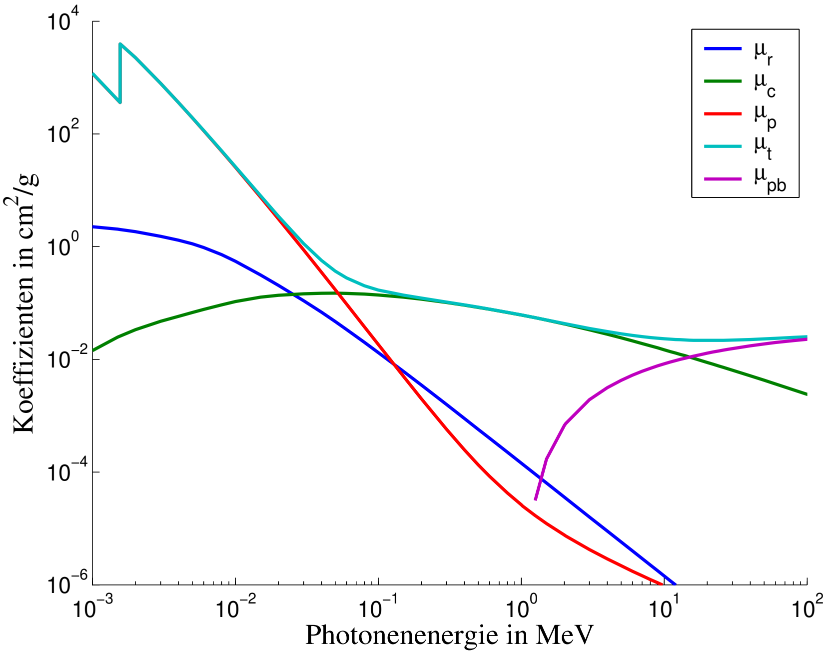


Abbildung 1.7: Absorptionskoeffizienten für Aluminium

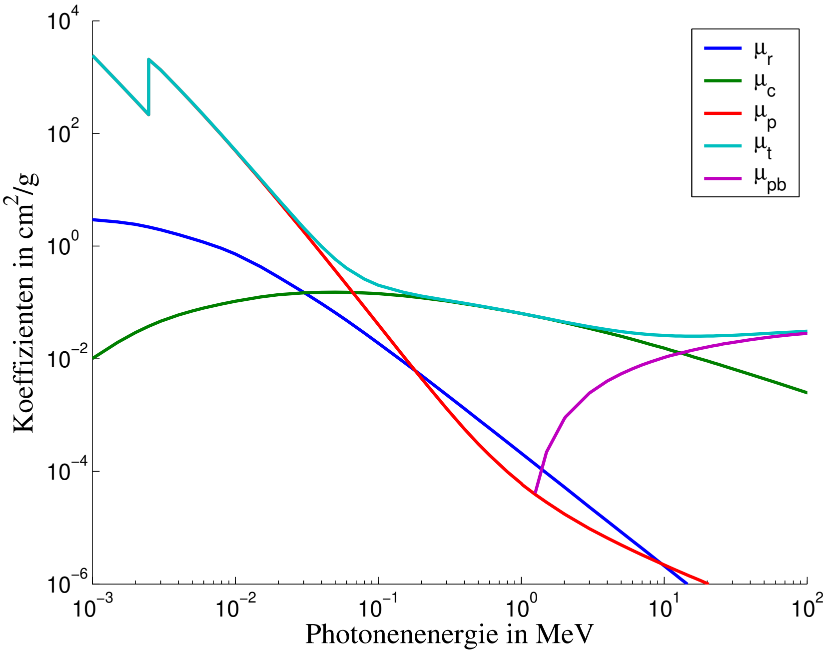


Abbildung 1.8: Absorptionskoeffizienten für Eisen

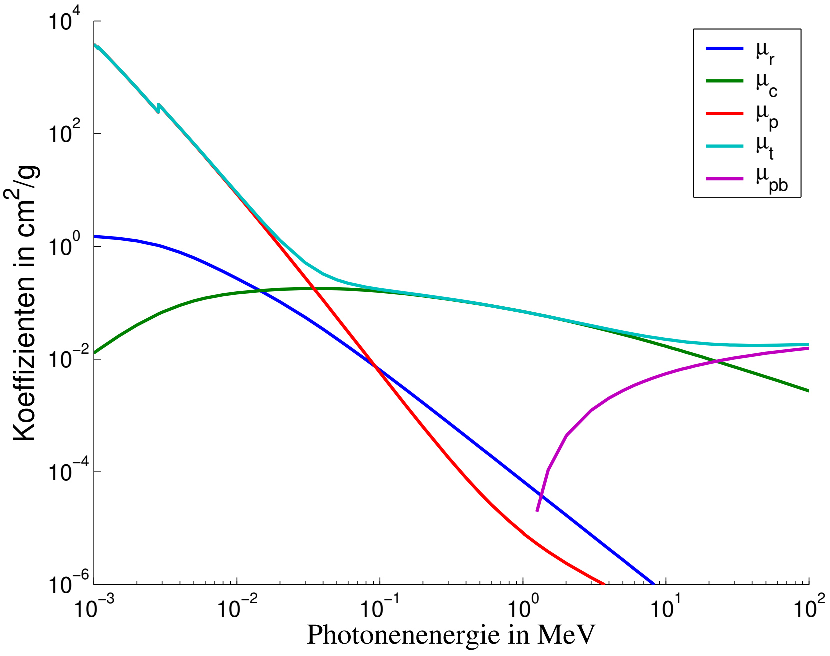


Abbildung 1.9: Absorptionskoeffizienten für Wasser

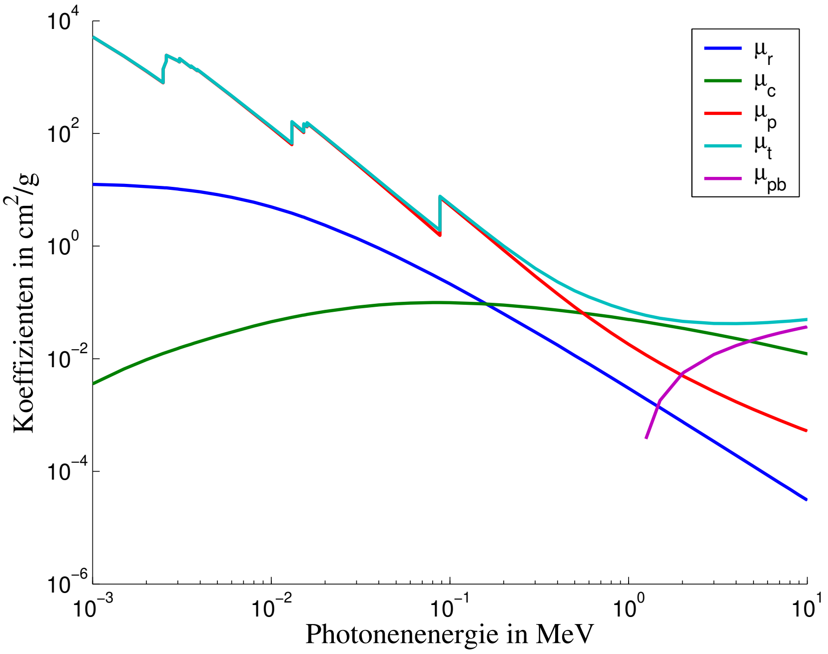


Abbildung 1.10: Absorptionskoeffizienten für Blei

des Quellstrahles $L_q(\mathbf{x})$ eine durch die Röntgenquelle fest vorgegebene Photonenenergie $E_{in}$ maßgebend ist, für die Koeffizienten entlang der Detektorstrahlen $L_d(\mathbf{x})$ jedoch die durch die Comptonstreuung in $\mathbf{x}$ gemäß (1.13) reduzierte Photonenenergie $E_{sc}(\mathbf{x})$ zu nehmen ist. Wird (1.21) dieser speziellen Geometrie des Meßaufbaus angepaßt, so ergibt sich schließlich für die auf das Detektorelement einfallende Intensität

$$I_k \;=\; I_0 \int\limits_{\mathcal{I}_k} p(\mathbf{x})\; \mu_c(\mathbf{x}, E_{in})\; e^{-\int\limits_{L_q(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{in}) d\xi \,-\, \int\limits_{L_d(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{sc}(\mathbf{x})) d\xi}\, d\mathbf{x}\;. \qquad (1.22)$$

Nachdem nun die physikalischen Grundlagen dargestellt wurden, liegt auch die Problematik des durch (1.22) beschriebenen Modells der Rückstreutomographie auf der Hand: einerseits darf die Energie der von der Röntgenquelle emittierten Photonen nicht zu niedrig gewählt werden, da sonst der totale Dämpfungskoeffizient $\mu_t$ zu groß ist und somit die auf den Detektor einfallende Intensität nicht mehr von diesem registriert werden kann. Andererseits darf die Photonenenergie aber auch nicht zu hoch gewählt werden, da sonst die Streurichtung der Photonen beim Comptonstoß gemäß (1.17) im Wesentlichen nach „vorne“ erfolgt, also nur wenige Photonen in Richtung des Detektors gestreut werden. Benutzen Modelle die zusätzliche Annahme $\mu_t \approx \mu_c$, so führt dies zu weitergehenden Einschränkungen im Falle von Objekten, die aus Materialien niedriger Kernladungszahl bestehen. Denn die durch Comptonstreuung in Richtung des Detektors gestreuten Photonen verlieren bei dieser Streuung einen Teil ihrer Energie, so daß ihre ursprüngliche Energie so hoch gewählt werden muß, daß die Energien der gestreuten Photonen immer noch im entsprechenden Intervall liegen (siehe Abbildungen 1.7 bis 1.9). Im Falle von Objekten bestehend aus Materialien hoher Ordnungszahl dagegen können diese Modelle die tatsächlichen Vorgänge nicht mehr beschreiben, wie Abbildung 1.10 zeigt.

## 1.3 Die gedämpfte Radontransformation

In diesem Abschnitt wird der Bezug der Rückstreutomographie zur Computer- und zur Emissionstomographie hergestellt. Um dies zu ermöglichen, soll zunächst die gedämpfte Radontransformation vorgestellt werden, welche das mathematische Modell zur Emissionstomographie darstellt, sowie die sich aus dieser als Spezialfall ergebende exponentielle Radontransformation. Es folgt die Zusammenstellung der von NATTERER hergeleiteten Invertierungsalgorithmen, an die sich die Gegenüberstellung der betrachteten tomographischen Methoden anschließt.

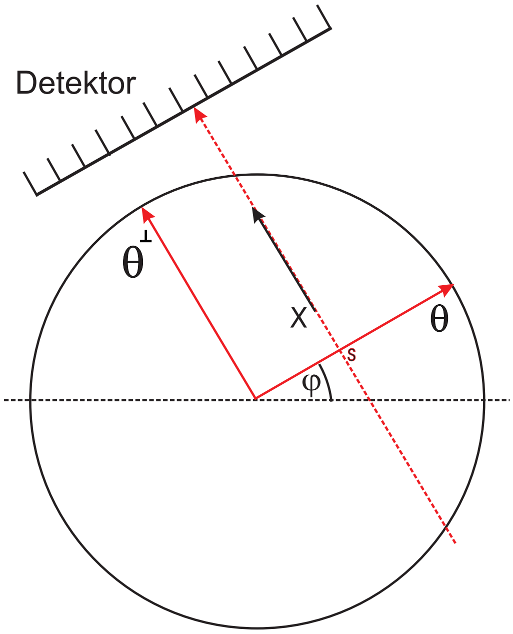


Abbildung 1.11: Modell der Radontransformation

**Definition 1.1** *Sei $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und $\theta := (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$, $\theta^\perp := (-\sin\varphi, \cos\varphi)^T$. Dann ist für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ die gedämpfte Radontransformation definiert als*

$$(R_a f)(\theta, s) = \int\limits_{x\cdot\theta=s} f(x) e^{-(Da)\left(x,\theta^\perp\right)} dx \,, \tag{1.23}$$

*wobei die divergente Strahltransformation $D$ gegeben ist durch*

$$(Da)(x,\theta) = \int\limits_0^\infty a(x+t\theta)dt \,. \tag{1.24}$$

Die Situation von Definition 1.1 wird noch einmal in Abbildung 1.11 verdeutlicht. Dort wird o.B.d.A. davon ausgegangen, daß sich der Träger der Funktionen $a$ und $f$ auf die Einheitskreisscheibe beschränkt.

Ziel der Emissionstomographie ist, die Verteilung $f(x)$ eines radioaktiven Pharmazeutikums innerhalb eines vorgegebenen Bereiches (zumeist das Herz und die Herzkranzgefäße eines Patienten) bei unbekanntem linearen Absorptionskoeffizienten $a(x)$ zu bestimmen. In (1.23) beschreibt $R_a f(\theta, s)$ die auf den Detektor einfallende Intensität, welche durch in Richtung von $\theta^\perp$ emittierte Strahlung aller auf der Geraden $x \cdot \theta = s$ liegenden Quellen verursacht wird. Eine detaillierte Behandlung der gedämpften Radontransformation bietet Natterer [40], diese Arbeit beschränkt sich an dieser Stelle auf eine kurze Zusammenstellung der hier relevanten Eigenschaften.

**Proposition 1.2** *Unter den Voraussetzungen von Definition 1.1 ergibt sich aus $R_a f$ für $a = a_0 = const$ auf $\Omega \in \mathcal{K}$, $supp f \subset \Omega$, der Spezialfall der exponentiellen Radontransformation*

$$(T_{a_0} f)(\theta, s) \quad := \int\limits_{x\cdot\theta = s} e^{a_0 x\cdot\theta^\perp} f(x) dx \tag{1.25}$$

*und für die spezielle Wahl $a_0 = 0$ die Radontransformation*[13]

$$(Rf)(\theta, s) \quad := \int\limits_{x\cdot\theta = s} f(x) dx \,. \tag{1.26}$$

**Beweis:**
Durch Einsetzen von $a = 0$ folgt (1.26) unmittelbar aus (1.23), Aussage (1.25) ergibt sich leicht wie folgt.

Sei $\tau_\Omega(\theta, s)$ das eindeutig bestimmte $t > 0$ mit $s\theta + t\theta^\perp \in \partial\Omega$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
(R_{a_0} f)(\theta, s) \quad &= \int\limits_{x\cdot\theta = s} f(x)\; e^{-(Da_0)\left(x,\theta^\perp\right)} dx \\
&= \int\limits_{x\cdot\theta = s} f(x)\; e^{-\left(\tau_\Omega(\theta,s) - x\cdot\theta^\perp\right) a_0 - \int\limits_{\tau_\Omega(\theta,s)}^{\infty} a_0(s\theta + t\theta^\perp) dt} dx \\
&= e^{-\tau_\Omega(\theta,s) a_0 - \int\limits_{\tau_\Omega(\theta,s)}^{\infty} a_0(s\theta + t\theta^\perp) dt} \int\limits_{x\cdot\theta = s} e^{a_0 x\cdot\theta^\perp} f(x) dx \,.
\end{aligned}$$

Skalieren der letzten Gleichung mit dem nur von $\theta$ und $s$ abhängigen Faktor

$$c(\theta, s) \quad := \quad e^{-\tau_\Omega(\theta,s) a_0 - \int\limits_{\tau_\Omega(\theta,s)}^{\infty} a_0(s\theta + t\theta^\perp) dt}$$

führt dann unmittelbar zur exponentiellen Radontransformation (1.25). ■

Im Sinne von Proposition 1.2 kann die gedämpfte Radontransformation $R_a$ folglich sowohl als Verallgemeinerung der exponentiellen Radontransformation $T_{a_0}$ als auch der Radontransformation $R$ angesehen werden. Jedoch lassen sich die

[13] Benannt ist diese Integraltransformation nach Johan Radon, der bereits 1917 eine Inversionsformel für das zwei- bzw. dreidimensionale Problem angeben konnte (siehe [44]).

nützlichen Invarianzeigenschaften[14] von $R$, wie zum Beispiel Rotations- oder Verschiebungsinvarianz, nur eingeschränkt auf $T_{a_0}$ übertragen (siehe hierzu TRETIAK/METZ [50]), für $R_a$ hingegen sind solche Invarianzen nicht bekannt und auch nicht zu erwarten.

Ein wichtiger Baustein bei der Lösung des inversen Problems der Radontransformation stellt der Projektionssatz dar, der den Zusammenhang der Radontransformierten $Rf$ einer Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zu ihrer Fouriertransformierten $\hat{f}$ herstellt und die Grundlage für schnelle Rekonstruktionsverfahren in der Computertomographie bildet.

**Lemma 1.3** *Es sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $(\widehat{Rf})$ bezeichne die 1D-Fouriertransformation bezüglich des zweiten Arguments. Dann gilt*

$$\hat{f}(\sigma\theta) \quad = \quad (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} (\widehat{Rf})(\theta, \sigma) \; . \tag{1.27}$$

Der Beweis von Lemma 1.3 kann für den Fall $n = 2$ in LOUIS [34] nachgelesen werden, die Verallgemeinerung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist dann leicht nachvollziehbar. Der Projektionssatz kann für konstantes $a \neq 0$ auf den Fall der exponentiellen Radontransformation $g_a(\theta, s) := T_a f(\theta, s)$ erweitert werden, genauer gilt

**Lemma 1.4** *Es sei $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $a \in \mathbb{R}$ und $\widehat{g_a}$ bezeichne die 1D-Fouriertransformation bezüglich $s$. Dann gilt*

$$\hat{f}(\sigma\theta + i\, a\theta^{\perp}) \quad = \quad (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, \widehat{g_a}(\theta, \sigma) \; . \tag{1.28}$$

**Beweis:**
Jedes $x \in \mathbb{R}^2$ läßt sich darstellen als $x = s\theta + t\theta^{\perp}\,,\ s, t \in \mathbb{R}$, und somit folgt

[14] Eine ausführliche Darstellung dieser Invarianzen bietet DIETZ [11]. Eine detaillierte Analyse der Zusammenhänge zwischen Radontransformation und Differentialoperatoren findet sich bei LOUIS [34].

$$
\begin{aligned}
\hat{f}\left(\sigma\theta + i\,a\theta^\perp\right) &= (2\pi)^{-1} \int\limits_{I\!R^2} e^{-i(\sigma\theta+i\,a\theta^\perp)\cdot x} f(x)\,dx \\
&= (2\pi)^{-1} \int\limits_{I\!R^2} e^{-i(\sigma\theta+i\,a\theta^\perp)\cdot(s\theta+t\theta^\perp)} f(s\theta+t\theta^\perp)\,ds\,dt \\
&= (2\pi)^{-1} \int\limits_{I\!R} e^{-i\sigma s} \int\limits_{I\!R} e^{at} f(s\theta+t\theta^\perp)\,dt\,ds \\
&= (2\pi)^{-1} \int\limits_{I\!R} e^{-i\sigma s} g_a(\theta,s)\,ds \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,\widehat{g_a}(\theta,\sigma)\,.
\end{aligned}
$$

■

Dieser verallgemeinerte Projektionssatz wurde bereits von Natterer [38] zur Herleitung einer approximativen Inversionsformel für $T_{a_0}$ benutzt, die es gestattet, die gesuchte Aktivität $f$ aus den Daten $g_a := T_{a_0} f$ mit der Genauigkeit $\mathcal{O}\left(a^4\right)$ zu bestimmen. Leider ist diese Erweiterung (1.28) nicht gleichermaßen nützlich wie (1.27), da durch sie $\hat{f}$ auf einer zweidimensionalen Oberfläche in $\mathbb{C}^2$ gegeben ist, die inverse Fouriertransformation dagegen über $I\!R^2$ integriert. Zur Lösung dieses Problems benutzt Natterer an dieser Stelle eine Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes[15] für zwei komplexe Variablen. Eine geeignete Taylorentwicklung führt schließlich zwangsläufig zur angegebenen Approximationsordnung.

Tretiak und Metz [50] benutzen (1.28) zur Charakterisierung des Bildraumes von $T_{a_0}$ und ihnen gelingt auch die Invertierung der exponentiellen Radontransformation mit Hilfe eines Algorithmus vom Typ „gefilterte Rückprojektion“. Zur Darstellung dieser Inversionsformel wird der zu $T_{a_0}$ duale Operator $T_{a_0}^\sharp$ benötigt, der nun zusammen mit dem zu $R_a$ dualen Operator $R_a^\sharp$, letzterer in Vorgriff auf die weiter unten dargestellte Inversionsformel zur gedämpften Radontransformation, angegeben wird.

[15]Der Algorithmus kann bei Natterer [38] nachgelesen werden, die dort benötigte Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes liefert Kneser in [28].

**Proposition 1.5** *Es sei $g := T_{a_0} f$ (bzw. $g := R_a f$). Dann ist der zu $T_{a_0}$ duale Operator $T_{a_0}^\sharp : L_2(Z) \longrightarrow L_2(I\!R^2)$, $Z := S^1 \times I\!R$, (bzw. der zu $R_a$ duale Operator $R_a^\sharp : L_2(Z) \longrightarrow L_2(I\!R^2)$), gegeben durch*

$$\left(T_{a_0}^\sharp g\right)(x) = \int_{S^1} e^{a_0 x\cdot\theta^\perp} g(\theta, x\cdot\theta) d\theta\,, \tag{1.29}$$

$$\left(R_a^\sharp g\right)(x) = \int_{S^1} e^{-Da\left(x,\theta^\perp\right)} g(\theta, x\cdot\theta) d\theta\,. \tag{1.30}$$

**Beweis:**
Da beide Aussagen völlig analog bewiesen werden können, beschränkt sich die Ausführung auf den Beweis von (1.30):

$$\begin{aligned}
\langle R_a f, g\rangle_{L_2(Z)} &= \int_{I\!R}\int_{S^1} R_a f(\theta,s)\, g(\theta,s)\, d\theta\, ds \\
&= \int_{I\!R}\int_{S^1}\int_{x\cdot\theta=s} f(x)\, e^{-Da(x,\theta^\perp)}\, dx\, g(\theta,s)\, d\theta\, ds \\
&= \int_{I\!R^2} f(x) \int_{S^1} e^{-Da(x,\theta^\perp)}\, g(\theta, x\cdot\theta)\, d\theta\, dx \\
&= \int_{I\!R^2} f(x)\, R_a^\sharp g(x)\, dx \\
&= \langle f, R_a^\sharp g\rangle_{L_2(I\!R^2)}\,.
\end{aligned}$$

■

Auf die exponentielle Radontransformation $T_{a_0}$ und den dazugehörigen dualen Operator $T_{a_0}^\sharp$ lassen sich die bekannten Faltungseigenschaften der Radontransformation $R$ übertragen.

**Lemma 1.6** *Für $f, g \in \mathcal{S}(I\!R^2)$ gilt*

$$T_{a_0}(f * g) = T_{a_0} f * T_{a_0} g\,. \tag{1.31}$$

**Beweis:**
Durch Betrachten der eindimensionalen Fouriertransformierten von $T_{a_0}(f*g)(\theta,s)$ bzgl. des zweiten Argumentes ergibt sich mit Hilfe von Lemma 1.4 die Aussage

wie folgt:

$$\begin{aligned}(T_{a_0}(f*g))\hat{}(\theta,\sigma) &= \sqrt{2\pi}\,(f*g)\hat{}\left(\sigma\theta+ia_0\theta^\perp\right)\\ &= (2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\widehat{f}\left(\sigma\theta+ia_0\theta^\perp\right)\widehat{g}\left(\sigma\theta+ia_0\theta^\perp\right)\\ &= \sqrt{2\pi}\,(T_{a_0}f)\hat{}(\theta,\sigma)\,(T_{a_0}g)\hat{}(\theta,\sigma)\\ &= (T_{a_0}f*T_{a_0}g)\hat{}(\theta,\sigma)\,.\end{aligned}$$

■

**Lemma 1.7** *Es sei $T^\sharp_{a_0}$ wie in Proposition 1.5 definiert. Dann gilt für $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und $g\in\mathcal{S}(Z),\ Z:=S^1\times\mathbb{R}$:*

$$\left(T^\sharp_{-a_0}g\right)*f \;=\; T^\sharp_{-a_0}\left(g*T_{a_0}f\right)\;. \tag{1.32}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}\left(\left(T^\sharp_{-a_0}g\right)*f\right)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(T^\sharp_{-a_0}g\right)(x-y)f(y)\,dy\\ &= \int\limits_{S^1}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-a_0(x-y)\,\theta^\perp}\,g\left(\theta,(x-y)\theta\right)\,f(y)\,dy\,d\theta\,.\end{aligned}$$

Wird nun $y$ bzgl. des gedrehten Koordinatensystems $(\theta,\theta^\perp)$ dargestellt, also gemäß $y=s\theta+z\,,\ z\in\theta^\perp$ zerlegt, ergibt sich aus der letzten Gleichung unter Beachtung von $(x-s\theta-z)\theta=x\theta-s$ weiter

$$\begin{aligned}\left(\left(T^\sharp_{-a_0}g\right)*f\right)(x) &= \int\limits_{S^1}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\theta^\perp} e^{-a_0(x-s\theta-z)\theta^\perp}g\left(\theta,(x-s\theta-z)\theta\right)f\left(s\theta+z\right)dz ds d\theta\\ &= \int\limits_{S^1} e^{-a_0x\theta^\perp}\int\limits_{\mathbb{R}} g\left(\theta,x\theta-s\right)\int\limits_{\theta^\perp} e^{a_0z\theta^\perp}f\left(s\theta+z\right)\,dz\,ds\,d\theta\\ &= \int\limits_{S^1} e^{-a_0x\theta^\perp}\int\limits_{\mathbb{R}} g\left(\theta,x\theta-s\right)T_{a_0}f(\theta,s)\,ds\,d\theta\\ &= \int\limits_{S^1} e^{-a_0x\theta^\perp}\left(g*T_{a_0}f\right)(\theta,x\theta)\,d\theta\\ &= T^\sharp_{-a_0}\left(g*T_{a_0}f\right)(x)\,.\end{aligned}$$

■

### 1.3.1 Inversion der exponentiellen Radontransformation

Lemma 1.7 bietet nun einen Zugang zur Inversion der exponentiellen Radontransformation. Die Idee besteht darin, in (1.32) die Funktion $g$ so zu wählen, daß $T^{\sharp}_{-a_0}(g)$ im Wesentlichen die Dirac'sche Deltadistribution $\delta_0$ darstellt, die linke Seite von (1.32) also zur gesuchten Funktion $f$ zusammenfällt. Auf Basis dieses Kerngedankens ergibt sich dann eine Inversionsformel vom Faltungstyp für $T_{a_0} f$.

**Satz 1.8** *Es sei* $g := T_{a_0} f\,,\ f \in C_0^\infty\left(I\!R^2\right)$. *Weiter sei* $T^{\sharp}_{a_0}$ *der zu* $T_{a_0}$ *duale Operator und* $I^{-1}_{a_0}$ *bezeichne das verallgemeinerte Riesz-Potential, welches gemäß*

$$\left(I^{-1}_{a_0} g\right)\hat{}\,(\sigma) \quad := \quad \begin{cases} |\sigma|\,\widehat{g}(\sigma) & , \quad |\sigma| > |a_0| \\ \quad 0 & , \quad sonst \end{cases}$$

*definiert wird. Dann gilt*

$$f \quad = \quad \frac{1}{4\pi}\, T^{\sharp}_{-a_0}\, I^{-1}_{a_0}\, g\ . \tag{1.33}$$

**Beweis:**
In einem ersten Schritt wird gezeigt, daß die Funktion $f_M$ mit

$$\widehat{f_M}(\theta,\sigma) \quad = \quad \begin{cases} |\sigma| & , \quad |a_0| < |\sigma| < M \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

im Grenzfall $M \longrightarrow \infty$ die geforderte Eigenschaft aufweist:

$$\begin{aligned} T^{\sharp}_{-a_0} f_M(x) \quad &= \quad \int\limits_{S^1} e^{-a_0 x\theta^\perp}\, f_M(\theta, x\theta)\, d\theta \\ &= \quad \int\limits_{S^1} e^{-a_0 x\theta^\perp}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{I\!R} e^{i(x\theta)\sigma}\, \widehat{f_M}(\theta,\sigma)\, d\sigma\, d\theta \\ &= \quad \int\limits_{|a_0|<|\sigma|<M} \frac{|\sigma|}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{S^1} e^{-a_0 x\theta^\perp + i(x\theta)\sigma}\, d\theta\, d\sigma \\ &\overset{(A.8)}{=} \quad \int\limits_{|a_0|<|\sigma|<M} \frac{|\sigma|}{\sqrt{2\pi}}\, 2\pi\, J_0\left(|x|\sqrt{\sigma^2 - a_0^2}\right)\, d\sigma \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad 2\sqrt{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{M^2-a_0^2}} \tau J_0\left(|x|\tau\right) d\tau \\
&= \quad 2\sqrt{2\pi}\frac{1}{|x|^2} \int\limits_0^{|x|\sqrt{M^2-a_0^2}} \tau J_0\left(\tau\right) d\tau \\
&\overset{(A.7)}{=} \quad 2\sqrt{2\pi}\frac{1}{|x|} \sqrt{M^2-a_0^2}\, J_1\left(|x|\sqrt{M^2-a_0^2}\right) \\
&= \quad 4\pi\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2\pi\,|x|}\,\sqrt{M^2-a_0^2}\, J_1\left(|x|\sqrt{M^2-a_0^2}\right) \\
&\overset{(A.4)}{=} \quad 4\pi\sqrt{2\pi}\,\delta_0^{\sqrt{M^2-a_0^2}}\left(x\right).
\end{aligned}
$$

Somit erbringt $f_M(x)$ die gewünschte Eigenschaft einer geeigneten Approximation an die Deltadistribution. Diese kann nun in Lemma 1.7 für $g$ eingebracht werden und es folgt im Grenzfall $M \longrightarrow \infty$ für die linke Seite von (1.32):

$$
\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty}\left(T^{\sharp}_{-a_0} f_M\right) * f(x) \quad &= \quad \lim_{M\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(T^{\sharp}_{-a_0} f_M\right)(x-y)\, f(y)\, dy \\
&= \quad 4\pi\sqrt{2\pi}\,\lim_{M\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \delta_0^{\sqrt{M^2-a_0^2}}\,(x-y)\, f(y)\, dy \\
&= \quad 4\pi\sqrt{2\pi}\, f(x)\,.
\end{aligned}
$$

Der Beweis von (1.33) führt sich wie folgt zu Ende:

$$
\begin{aligned}
f(x) \quad &= \quad \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \lim_{M\to\infty} T^{\sharp}_{-a_0}(f_M * T_{a_0} f) \\
&= \quad \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{S_1} e^{-a_0 x\theta^{\perp}} \left(f_M * T_{a_0} f\right)\,(\theta, x\theta)\, d\theta \\
&= \quad \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{S_1} e^{-a_0 x\theta^{\perp}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x\theta} \left(f_M * T_{a_0} f\right)\hat{}\,(\theta,\sigma)\, d\sigma\, d\theta \\
&= \quad \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{S_1} e^{-a_0 x\theta^{\perp}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x\theta}\, \widehat{f}_M(\theta,\sigma)\, \widehat{T_{a_0} f}(\theta,\sigma)\, d\sigma\, d\theta
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{S_1} e^{-a_0 x\theta^\perp} \int\limits_{|\sigma|>|a_0|} e^{i\sigma x\theta} \, |\sigma| \, \widehat{T_{a_0} f}(\theta,\sigma) \, d\sigma \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{S_1} e^{-a_0 x\theta^\perp} \int\limits_{I\!R} e^{i\sigma x\theta} \, \left(I_{a_0}^{-1} T_{a_0} f\right)\widehat{\ }(\theta,\sigma) \, d\sigma \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^1} e^{-a_0 x\theta^\perp} \, \left(I_{a_0}^{-1} T_{a_0} f\right) \, (\theta, x\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi} T^\sharp_{-a_0} I_{a_0}^{-1} T_{a_0} f(x) \, .$$

■

### 1.3.2 Inversion der gedämpften Radontransformation

Der Abschnitt schließt mit der Herleitung einer analytischen Inversionsformel für die gedämpfte Radontransformation $R_a f$. Nachdem in einem Zeitraum von über zwei Jahrzehnten verschiedene Algorithmen zur numerischen Inversion von $R_a$ entwickelt wurden, gelang NOVIKOV [43] im Jahr 2000 erstmals die Herleitung einer analytischen Inversionsformel dieser für die Emissionstomographie so bedeutenden Integraltransformation. Nur kurz darauf gelang auch NATTERER [41] die Invertierung von $R_a$, jedoch mittels einer von der Methode NOVIKOV'S völlig unterschiedlichen Technik. Diese Inversionsformel vom Faltungstyp soll nun vorgestellt werden.

#### Charakterisierung von $\mathcal{R}\,(R_a)$

Ein wesentlicher Baustein in NATTERER'S Herleitung besteht in der Charakterisierung des Bildraumes $\mathcal{R}\,(R_a)$ der gedämpften Radontransformation. Es wird folgendes Ergebnis festgehalten:

**Satz 1.9** *Es sei $\theta = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ und $f, a \in \mathcal{S}(I\!R^2)$. Dann gilt für $k \geq m$ mit $k, m \in I\!N$*

$$\int\limits_{I\!R} \int\limits_0^{2\pi} s^m e^{\pm ik\varphi + \frac{1}{2}(I \pm iH)Ra(\theta,s)} \, R_a f(\theta,s) \, d\varphi \, ds \quad = \quad 0 \, , \tag{1.34}$$

*wobei $H$ die Hilberttransformation bezeichnet:*

$$Hg(x) \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int\limits_{I\!R} \frac{g(t)}{x-t} \, dt \, .$$

**Beweis:**
Es sei abkürzend

$$h_{\pm}(\theta, x\theta) \;:=\; \frac{1}{2}\,(I \pm iH)\,Ra(\theta, x\theta) \tag{1.35}$$

definiert. Dann bestimmen sich die zu $Da\left(x, \theta^{\perp}\right)$ und $h_{\pm}(\theta, x\theta) \in \mathcal{S}(Z)$ zugehörigen Fourierreihen zu

$$Da\left(x, \theta^{\perp}\right) \;=\; \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_l(x) e^{-il\varphi} \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } d_l(x) \;&=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{il\varphi} Da\left(x, \theta^{\perp}\right)\, d\varphi \\
&=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{il\varphi} \int_0^{\infty} a\left(x + t\theta^{\perp}\right)\, dt\, d\varphi \\
&\overset{y:=-t\theta^{\perp}}{=}\; \frac{(-i)^l}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{e^{il\, arg(y)} \frac{1}{|y|}}_{=:v_l(y)}\, a(x-y)\, dy \\
&=\; \frac{(-i)^l}{2\pi}\, (a * v_l)(x)\,.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Aus der Definition (1.35) der Funktionen $h_{\pm} \in \mathcal{S}(Z)$ und unter Berücksichtigung von

$$(Ra)^{\wedge}\,(\theta, \sigma) \;=\; \sqrt{2\pi}\,\widehat{a}(\sigma\theta)\,, \tag{1.38}$$

$$i\,(HRa)^{\wedge}\,(\theta, \sigma) \;=\; \operatorname{sgn}(\sigma)\,\widehat{Ra}(\theta, \sigma) \tag{1.39}$$

ergeben sich ihre Fouriertransformierten zu

$$\widehat{h}_{\pm}(\theta, \sigma) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,\left(1 \pm \operatorname{sgn}(\sigma)\right)\widehat{a}(\sigma\theta)\,. \tag{1.40}$$

Dann aber folgt für die Fourierentwicklungen der Funktionen

$$u_{\pm}(x, \theta) \;:=\; h_{\pm}(\theta, x\theta) - Da\left(x, \theta^{\perp}\right) \tag{1.41}$$

die Darstellung

$$u_{\pm}(x, \theta) \;=\; \sum_{l<0,\, l\, ung.} u_{\pm_l}(x)\, e^{\mp il\varphi}\,. \tag{1.42}$$

Dabei ergibt sich (1.42) folgendermaßen. Werden die Fouriertransformierten der Entwicklungskoeffizienten im Einzelnen betrachtet, so folgt der Reihe nach

- Bezeichnen $\xi := \rho(\cos\psi, \sin\psi)^T$ und $x := r(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$, so berechnet sich

$$
\begin{aligned}
\widehat{v_l}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I\!R^2} e^{-ix\xi}\, v_l(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} e^{-i\rho r\cos(\varphi-\psi)+il\varphi}\, d\varphi\, dr \\
&\overset{\varphi:=\varphi-\psi}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty e^{il\psi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-i\rho r\cos\varphi+il\varphi}\, d\varphi\, dr \\
&\overset{(A.6)}{=} i^{-l}\, e^{il\psi} \int\limits_0^\infty J_{-l}(-r\rho)\, dr \\
&\overset{(A.6)}{=} i^{-l}\, e^{il\psi} \int\limits_0^\infty J_l(r\rho)\, dr \\
&\overset{(A.9)}{=} i^{-l}\, e^{il\psi}\, \frac{1}{\rho}\, \epsilon_l \\
&= i^{-l}\, \epsilon_l\, v_l(\xi)\,. \qquad (1.43)
\end{aligned}
$$

  Wobei abkürzend die Funktion $\epsilon_l := \begin{cases} 1 & , \ l \geq 0 \\ (-1)^l & , \ l < 0 \end{cases}$ eingeführt wurde.

- Dieses Ergebnis kann nun unter Ausnutzung des Faltungssatzes zur Berechnung der Fouriertransformierten $\widehat{d_l}(\xi)$ verwendet werden:

$$
\begin{aligned}
\widehat{d_l}(\xi) &\overset{(1.37)}{=} \left( \frac{(-i)^l}{2\pi} (a * v_l) \right)^\wedge (\xi) \\
&= (-i)^l \widehat{a}(\xi)\, \widehat{v_l}(\xi) \\
&\overset{(1.43)}{=} (-i)^l\, i^{-l}\, \epsilon_l\, v_l(\xi)\, \widehat{a}(\xi) \\
&= \begin{cases} (-1)^l\, v_l(\xi)\, \widehat{a}(\xi) & , \ l \geq 0 \\ v_l(\xi)\, \widehat{a}(\xi) & , \ l < 0 \end{cases} . \qquad (1.44)
\end{aligned}
$$

- Schließlich berechnen sich die noch ausstehenden Fouriertransformierten der Entwicklungskoeffizienten $q_{\pm_l}(x)$ aus

$$h_\pm(\theta, x\theta) \;=\; \sum_{l\in\mathbb{Z}} q_{\pm_l}(x) e^{-il\varphi} \tag{1.45}$$

gemäß:

$$\begin{aligned}
q_{\pm_l}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{il\varphi} h_\pm(\theta, x\theta)\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} R^\sharp \left(e^{il\varphi}\, h_\pm\right)(x) \\
\widehat{q}_{\pm_l}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{|\xi|}\left(\left(e^{il\varphi}\, h_\pm\right)^\wedge\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + \left(e^{il\varphi}\, h_\pm\right)^\wedge\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right)\right) \\
&\overset{(A.10)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{|\xi|}\left(e^{il\psi}\,\widehat{h}_\pm\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + e^{il(\psi+\pi)}\,\widehat{h}_\pm\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{|\xi|}\, e^{il\psi}\left(\widehat{h}_\pm\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + (-1)^l\,\widehat{h}_\pm\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, v_l(\xi)\left(\widehat{h}_\pm\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + (-1)^l\,\widehat{h}_\pm\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right)\right). \qquad (1.46)
\end{aligned}$$

Aus der Definition der Funktionen $h_\pm(\theta, x\theta)$ (1.40) wird

$$\widehat{h}_+\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) \;=\; \widehat{h}_-\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right) \;=\; \sqrt{2\pi}\,\widehat{a}(\xi)\,, \tag{1.47}$$

$$\widehat{h}_-\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) \;=\; \widehat{h}_+\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right) \;=\; 0 \tag{1.48}$$

abgelesen, so daß für die Fouriertransformierten $\widehat{q}_{\pm_l}(\xi)$ aus (1.46) schließlich

$$\widehat{q}_{+_l}(\xi) \;=\; v_l(\xi)\,\widehat{a}(\xi)\,, \tag{1.49}$$

$$\widehat{q}_{-_l}(\xi) \;=\; (-1)^l\, v_l(\xi)\,\widehat{a}(\xi) \tag{1.50}$$

folgt.

- Nun führt das Einsetzen der Zwischenergebnisse (1.44) und (1.49) bzw. (1.50) in (1.41) zur behaupteten Reihendarstellung (1.42) der Funktionen $u_\pm(x,\theta)$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_{\pm_l}(\xi) &= \widehat{q}_{\pm_l}(\xi) - \widehat{d}_l(\xi) \\
&= \begin{cases} v_l(\xi)\,\widehat{a}(\xi) - \begin{cases} (-1)^l\, v_l(\xi)\,\widehat{a}(\xi) & , \; l \geq 0 \\ v_l(\xi)\,\widehat{a}(\xi) & , \; l < 0 \end{cases} & , \; (Index+) \\ (-1)^l\, v_l(\xi)\,\widehat{a}(\xi) - \begin{cases} (-1)^l\, v_l(\xi)\,\widehat{a}(\xi) & , \; l \geq 0 \\ v_l(\xi)\,\widehat{a}(\xi) & , \; l < 0 \end{cases} & , \; (Index-) \end{cases} \\
&= v_l(\xi)\,\widehat{a}(\xi) \begin{cases} \begin{cases} 1-(-1)^l & , \; l \geq 0 \\ 0 & , \; l < 0 \end{cases} & , \; (Index+) \\ \begin{cases} 0 & , \; l \geq 0 \\ (-1)^l - 1 & , \; l < 0 \end{cases} & , \; (Index-) \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Somit ist die Herleitung der Reihendarstellung für $u_\pm(x,\theta)$ abgeschlossen und der Beweis von (1.34) führt sich wie folgt zu Ende.

Aus den Fourierentwicklungen von $u_\pm(x,\theta)$ folgt für die Fourierentwicklung von $e^{u_\pm(x,\theta)}$ die Darstellung

$$
e^{u_\pm(x,\theta)} = \sum_{l \leq 0} c_{\pm_l}(x)\, e^{\mp i l \varphi} . \tag{1.51}
$$

Das Verschwinden der $c_{+_k}(x)$ für $k > 0$ ergibt sich durch Taylorentwicklung der auftretenden Exponentialfunktionen und anschließendem Sortieren nach Potenzen[16]:

[16] Da die Technik für beide Indizes völlig identisch ist, erfolgt die Rechnung lediglich für den positiven Index.

$$
\begin{aligned}
c_{+_k}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\varphi}\, e^{u_+((x,\theta)}\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\varphi}\, e^{\sum\limits_{l<0} u_{+_l}(x)e^{-il\varphi}}\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\varphi} \prod_{l<0} \underbrace{e^{u_{+_l}(x)e^{-il\varphi}}}_{\text{Taylor}}\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\varphi} \prod_{l<0} \left(\sum_{n_l=0}^{\infty} d_{n_l}(x)\, e^{in_l\varphi}\right)_l d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x)\, e^{ij\varphi}\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+j)\varphi}\, d\varphi \\
&\overset{k\geq 0}{=} 0\,.
\end{aligned}
$$

Wird nun noch das Resultat aus Proposition 1.5 herangezogen, liefert die vorangegangene Betrachtung schließlich für $k > m$

$$
\begin{aligned}
\langle s^m\, e^{\pm ik\varphi+\frac{1}{2}(I\pm iH)Ra}\,,\, R_a f\rangle_{L_2(Z)} &= \langle R_a^\sharp \left(s^m\, e^{\pm ik\varphi+\frac{1}{2}\,(I\pm iH)Ra}\right)\,,\, f\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} \\
&\overset{(1.30)}{=} \langle \int\limits_0^{2\pi} s^m e^{\pm ik\varphi}\, e^{u_\pm(\theta,x\theta)}\, d\varphi\,,\, f\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

■

**Inversionsformel für $R_a$**

Die im Beweis von Satz 1.9 verwendeten Rechentechniken gestatten nun unter Beibehaltung der dort eingeführten Bezeichnungen eine recht elegante Herleitung einer Inversionsformel für die gedämpfte Radontransformation, die auf NATTERER [41] zurückgeht. In [41] zeigt NATTERER auch die Äquivalenz dieser Inversionsformel zu der von NOVIKOV in [43] ein Jahr zuvor bewiesenen analytischen Invertierung. Die zunächst nicht offensichtliche Nähe der beiden Herleitungen kommt auch in der Arbeit von KUNYANSKY [29] deutlich zum Ausdruck, insbesondere wenn die dort vorgeschlagene Implementierung der NOVIKOV'schen Inversionsformel mit der vom Typ *gefilterte Rückprojektion* aus [41] verglichen wird.

**Satz 1.10** *Sei $g := R_a f$ und $h_+(\theta, x\theta)$ wie in (1.35) gegeben. Bezeichnet weiter $Hg$ die Hilberttransformierte der Funktion $g$, so gilt*

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{4\pi} \Re\, div \int\limits_{S^1} \theta\, e^{(Da)\left(x,\theta^\perp\right)} \; \left(e^{-h_+}\, H\, e^{h_+}\, g\right)(\theta, x\cdot\theta)\, d\theta\ . \tag{1.52}$$

**Beweis:**
Mit $u_+(x,\theta) = h_+(\theta, x\theta) - Da\left(x, \theta^\perp\right)$ wie in (1.41) und der Definition der Hilberttransformation folgt

$$\begin{aligned}
H\, e^{h_+}\, g(\theta, s) \quad &= \quad \frac{1}{\pi} \int\limits_{I\!R} \frac{e^{h_+(\theta,t)}}{s-t} \int\limits_{y\cdot\theta = t} e^{-(Da)\left(y,\theta^\perp\right)}\, f(y)\, dy\, dt \\
&\overset{y=t\theta+r\theta^\perp}{=} \quad \frac{1}{\pi} \int\limits_{I\!R^2} f(y)\, \frac{1}{s - y\cdot\theta}\, e^{-(Da)\left(y,\theta^\perp\right) + h_+(\theta, y\theta)}\, dy \\
&= \quad \frac{1}{\pi} \int\limits_{I\!R^2} \frac{f(y)}{s - y\cdot\theta}\, e^{u_+(y,\theta)}\, dy\ .
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Einsetzen von (1.53) in die rechte Seite von (1.52) und Ausnutzen der besonderen Struktur der Reihendarstellung (1.42) von $u_+(x,\theta)$ führt schließlich zu

$$\frac{1}{4\pi}\,\Re\,\mathrm{div}\int\limits_{S^1}\theta\, e^{(Da)\left(x,\theta^\perp\right)}\,\left(e^{-h_+}\,H\,e^{h_+}\,g\right)(\theta,x\cdot\theta)\,d\theta$$

$$\overset{x\theta=s}{=}\quad \frac{1}{4\pi^2}\,\Re\,\mathrm{div}\int\limits_{S^1}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\theta}{(x-y)\theta}\,f(y)\,e^{u_+(y,\theta)-u_+(x,\theta)}\,dy\,d\theta$$

$$=\quad \frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{div}\int\limits_{\mathbb{R}^2}f(y)\,\Re\int\limits_{S^1}\frac{\theta}{(x-y)\theta}\,e^{u_+(y,\theta)-u_+(x,\theta)}\,d\theta\,dy$$

$$\overset{(A.14)}{=}\quad \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{div}\int\limits_{\mathbb{R}^2}f(y)\,\frac{x-y}{|x-y|^2}\,dy \tag{1.54}$$

$$\overset{(A.15)}{=}\quad f(x)\,. \tag{1.55}$$

■

**Korollar 1.11** *Wird in $h_+(\theta,x\theta)$ der Dämpfungskoeffizient $a=0$ gesetzt, so reduziert sich (1.52) in offensichtlicher Weise zur Inversionsformel für die Radontransformation $R$.*

Somit liefert Satz 1.10 eine echte Verallgemeinerung dieser Inversionsformel in $\mathbb{R}^2$ und Kunyansky [29] zeigt weiter, daß der zugehörige Rekonstruktionsalgorithmus auch als Erweiterung der Tretiak-Metz-Methode[17] zur Invertierung von $T_{a_0}$ verstanden werden kann.

Da die gedämpfte Radontransformation die der Emissionstomographie zu Grunde liegende Integraltransformation darstellt, bieten die oben genannten Arbeiten von Novikov und Natterer die Basis für eine Fülle von neuen Rekonstruktionsmethoden aus diesem Bereich, was auch an der wachsenden Anzahl der Veröffentlichungen in den letzten beiden Jahren ersichtlich ist (siehe hierzu u.a. [19],[29],[2] oder [21]). Unter diesen bietet insbesondere die Arbeit von Gourion and Noll [19] durch ihre Analyse der *Photonentransportgleichung*

$$\theta\cdot\nabla I_{\theta,E}(x)+\mu_E(x)\,I_{\theta,E}(x)=\int\limits_{S^2}\sigma_{E'\to E,\theta'\to\theta}(x)\,I_{\theta',E'}(x)\,d\theta'+f_E(x) \tag{1.56}$$

[17] Vergleiche mit Tretiak/Metz [50].

einen Einblick in die noch ungelösten Probleme der Modellierung in der Emissionstomographie. Hierbei symbolisieren die Indizes $E$ und $\theta$ die Abhängigkeit der Intensität $I$, des Absorptionskoeffizienten $\mu$, des Streukernes $\sigma$ sowie der gesuchten Aktivität $f$ von der Energie $E$ der Photonen und der Raumrichtung $\theta$. Dieser allgemeine Ansatz legt es nahe, daß auch hier, völlig analog zur mathematischen Formulierung der Rückstreutomographie, die Photonenenergie nicht als konstant betrachtet werden sollte, da der Comptoneffekt den dominierenden Dämpfungseffekt im relevanten Energiespektrum darstellt.

## 1.4 Einordnung der Rückstreutomographie

Ein Vergleich der im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten mathematischen Modelle zur Emissionstomographie und Computertomographie mit der Modellierung der Rückstreutomographie zeigt neben prinzipiellen Gemeinsamkeiten auch charakteristische Unterschiede zwischen den Modellen auf, die zwingend zu einer differenzierten numerischen Behandlung der Probleme führt. Da alle Modelle auf der geradlinigen Ausbreitung von Röntgenstrahlung aufbauen und somit dem Teilchenmodell von Strahlung bei Wechselwirkung mit Materie als zu Grunde liegendem Prinzip gehorchen, also den Wellencharakter der Strahlung unbeachtet lassen, berücksichtigen alle drei Modelle dieselben Absorptionseffekte, die sich nur durch ihre unterschiedliche Gewichtung in Abhängigkeit von der verwendeten Photonenenergie unterscheiden[18].

Eine Gegenüberstellung der Modellierungen legt aber deutlich erkennbare Unterschiede offen. Die mathematischen Modelle zu den genannten tomographischen Methoden sind im Einzelnen gegeben durch:

(a) **3D - Computertomographie $\leftrightarrow$ Röntgentransformation**

$$\mathcal{P}f(\theta, x) = \int_0^\infty f(x + t\theta)\, dt \tag{1.57}$$

Hier bezeichnet $x \in \Gamma$ die Position der Röntgenquelle auf einer geeignet gewählten Abtastkurve $\Gamma$ und $\theta \in S^2$ die Ausbreitungsrichtung des von der Quelle ausgesandten Röntgenstrahles. Die innerhalb eines beschränkten Gebietes $\Omega$ gesuchte Größe $f$ beziffert den materialabhängigen Absorptionskoeffizienten $\mu_t$. Die Rekonstruktion von $f$ aus den Daten $\mathcal{P}f(\theta, x)$ stellt folglich ein lineares Problem dar, welches mit Hilfe der Approximativen Inversen im Falle von vollständigen Daten elegant und schnell gelöst

[18] Siehe hierzu die im Abschnitt 1.2.2 durchgeführte Untersuchung.

werden kann (siehe u.a. [11, 34, 32, 35, 36]). Unter vollständigen Daten wird hierbei eine Abtastgeometrie verstanden, die der Tuy-Kirillov-Bedingung[19] genügt. Im Falle unvollständiger Daten, wie vorliegend zum Beispiel beim Limited-Angle-Problem, ist ohne weitere Vorinformationen keine exakte Rekonstruktion von $f$ mehr erreichbar, jedoch existieren auch hierfür bereits geeignete Approximationsalgorithmen (siehe z.B. [11, 33] oder [13]).

(b) **3D - Emissionstomographie $\leftrightarrow$ gedämpfte Radontransformation**

$$R_a f(\theta, s) \quad = \int\limits_{x\cdot\theta=s} f(x) e^{-Da(x,\theta^{\perp})}\, dx \tag{1.58}$$

In dieser Notation steht $a$ für den linearen Absorptionskoeffizienten $\mu_t$, ist also gleichbedeutend mit $f$ aus (1.57). Dagegen bezeichnet nun $f$, wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, die Verteilung der radioaktiven Quellen. Grundsätzlich sind in der Emissionstomographie zunächst einmal sowohl $a$ als auch $f$ unbekannt. Somit handelt es sich um ein in $a$ nichtlineares Problem. Da jedoch zur Inversion der in $f$ linearen gedämpften Radontransformation $R_a$ der totale Absorptionskoeffizient $a$ in jedem Rekonstruktionspunkt $x \in \Omega$ vorliegen muß, wird dieser entweder durch eine vorangestellte 3D-Computertomographieaufnahme gewonnen, aus der dann geeignete 2D-Schnitte extrahiert werden. Für jeden dieser Schnitte erfolgt dann mit der so gewonnenen Absorptionsmatrix die Invertierung von (1.58) bzgl. $f$. Schließlich können in einem letzten Schritt diese 2D-Schnitte zu einer 3D-Rekonstruktion für $f$ zusammenfügt werden. Oder beide Koeffizienten werden lediglich aus der 3D-Emissionstomographieaufnahme wie folgt gewonnen. In einem vorbereitenden Schritt werden die 3D-Daten in $n$ transaxiale 2D-Schnitte $S_i, i = 1, \ldots, n$, neu gruppiert. Anschließend wird $R_{a_i} f_i = d_i$ für jeden dieser Schnitte $S_i$ gleichzeitig für $a_i$ und $f_i$ numerisch gelöst und die auf diese Weise erhaltenen Absorptionsabbildungen $a_i$ werden zu einer 3D-Absorptionsmatrix zusammengefügt. In einem letzten Schritt wird diese approximative Absorptionsmatrix dann zur Invertierung von (1.58) bzgl. $f$ mit Hilfe der im vorangehenden Abschnitt hergeleiteten Inversionsformel (1.52) benutzt. Eine Übersicht zu den hier skizzierten Vorgehensalternativen bietet Gourion und Noll [19], zur simultanen Rekonstruktion von $f$ und $a$ sei stellvertretend auf die Arbeiten von Dicken [10], Ramlau/Clackdoyle/Noo/Bal [45] und Censor/Gustafson/Lent/Tuy [6] verwiesen.

[19] Siehe hierzu Kirillov [27] und Tuy [51].

(c) **3D - Rückstreutomographie**

$$I_k = I_0 \int\limits_{\mathcal{I}_k} p(\mathbf{x})\, \mu_c(\mathbf{x}, E_{in})\, e^{-\int\limits_{L_q(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{in}) d\xi \,-\, \int\limits_{L_d(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{sc}(\mathbf{x})) d\xi} d\mathbf{x}. \quad (1.59)$$

Wird das in Abschnitt 1.2.3 hergeleitete physikalische Modell (1.22) zur besseren Vergleichbarkeit auf seine mathematisch wesentlichen Bestandteile reduziert und die Notationen der gedämpften Radontransformation übernommen, so schreibt sich (1.59) als

$$g_k(\theta) \;=\; \int\limits_{\mathcal{I}_k} \mu_c(\mathbf{x}, E_{in})\, e^{-(D\mu_t)_{E_{in}}(\mathbf{x}, -\mathbf{n_z}) \,-\, (D\mu_t)_{E_{sc}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}, \theta)}\, d\mathbf{x}\,. \quad (1.60)$$

Dabei symbolisiert die Indizierung $E_{in}$ bzw. $E_{sc}$ der divergenten Strahltransformation $Da(x, \theta)$ die Energieabhängigkeit des totalen Absorptionskoeffizienten und die Richtungsvektoren $\mathbf{n_z}$ und $\theta$ charakterisieren in eindeutiger Weise Quellstrahl und Detektorlage. Die $g_k(\theta)$ stellen dann die aufbereiteten gemessenen Intensitäten dar. Das Modell (1.60) ist demnach ein in $\mu_c$ lineares und in $\mu_t$ nichtlineares inverses Problem, wobei die Nichtlinearität in $\mu_t$ aufgrund des komplizierteren Strahlenganges wesentlich schwieriger als in der Emissionstomographie zu handhaben ist. Rein formal könnte die Idee aufkommen, die Quellverteilung $f$ aus (1.58) mit den *virtuellen Quellen* $\mu_c$ aus (1.60) zu identifizieren. Dies ist jedoch stets mit der Problematik verbunden, daß in (1.58) $a$ und $f$ zwei voneinander völlig unabhängige Größen darstellen, während $\mu_t$ und $\mu_c$ durch die in Abschnitt 1.2 geschilderten Zusammenhänge eng miteinander verknüpft sind. Weiter unten[20] wird auf diesen Ansatz zurückgekommen werden, da er trotz der aufgeführten Mängel interessante Möglichkeiten aufweist und die Nähe zur gedämpften Radontransformation auf ähnliche Methoden wie bei der Behandlung der Emissiontomographie hoffen läßt.

Der komplizierte Strahlengang in der Rückstreutomographie findet seine Ursache in der Idee, ein Objekt aus der Rekonstruktion der Comptonkoeffizienten zu analysieren und ist somit zunächst einmal auf natürliche Weise durch die beim Streuvorgang auftretenden Streuwinkel vorgegeben. Ein Vorteil des in Abbildung 1.1 skizzierten Meßaufbaues liegt, wie bereits erwähnt, darin, daß ein zu untersuchendes Objekt lediglich von einer Seite zugänglich sein muß. Die hiermit verbundenen Nachteile kommen in den komplizierten Strahlengängen zum Ausdruck, die zu völlig anderen als

[20] Siehe Kapitel 4.

den aus der Computertomographie oder Emissionstomographie bekannten Rekonstruktionsmethoden führen.

# Kapitel 2

# Das direkte Problem der Rückstreutomographie

Auf Basis der im ersten Kapitel beschriebenen Aufnahmegeometrie sowie der dort dargestellten physikalischen Grundlagen wird im zweiten Kapitel ein mathematisch präzisiertes Vorwärtsmodell für die 3D-Rückstreutomographie hergeleitet und analysiert.

Um dieses *direkte Problem*, welches einem vollständig bekannten Objekt seine Meßwerte zuordnet, exakt zu beschreiben, findet zunächst eine ausführliche Analyse der verwendeten Meßgeometrie statt. Dies umfaßt sowohl die Objekt- und Detektorfunktionen als auch die Parametrisierung der auftretenden Strahlengänge. Sind diese vorbereitenden Arbeiten abgeschlossen, läßt sich in Verbindung mit den Ergebnissen aus Kapitel 1 ein Vorwärtsmodell formulieren, welches auf der Annahme eines *idealen, kontinuierlichen* Detektors basiert. Dieses Modell dient dann als Grundlage einer theoretischen Untersuchung der Rückstreutomographie. Da jedoch die Annahme eines Detektors mit beliebig feiner Ortsauflösung im krassen Widerspruch zu realen Detektoren steht, wird anschließend aus diesem kontinuierlichen Vorwärtsmodell ein diskretes Modell entwickelt, welches im Einklang mit den realen Gegebenheiten dann auch die Basis für die im dritten Kapitel entwickelten Rekonstruktionssalgorithmen bildet.

## 2.1 Geometrie der 3D-Rückstreutomographie

Der hier verwendete Meßaufbau simuliert die vom *Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren* (IZFP) in den neunziger Jahren benutzte ComScan-Apparatur[1]

[1] Eine ausführliche Beschreibung dieses Meßapparates ist in GORSHKOV [16] zu finden.

und ist somit als 3D-Erweiterung der von Schmitt in [46] angegebenen 2D-Meßgeometrie zu verstehen.

### 2.1.1 Die Objektfunktionen

Das der Röntgenstrahlung ausgesetzte Objekt stellt in den hier durchgeführten Untersuchungen einen Quader $K := [0, x_{max}] \times [0, y_{max}] \times [0, z_{max}]$ dar. Hierbei sind die Schranken $x_{max}$ und $y_{max}$ durch die Ausmaße der Apparatur begrenzt, wohingegen die Ausdehnung in $z-$Richtung durch die Leistung der verwendeten Röntgenquelle beschränkt ist. Die das Objekt beschreibenden Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ sind auf dieser kompakten Menge $K \in \mathbb{R}^3$ definiert und werden, um mit ihnen unbesorgter rechnen zu können, auf $K^c := \mathbb{R}^3 \backslash K$ durch 0 fortgesetzt. Dies entspricht auch der physikalischen Tatsache, daß Röntgenstrahlen Luft nahezu ungehindert durchdringen, so daß von nun an $\mu_c, \mu_t \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$ angenommen wird. Genauer sind die Objektfunktionen somit gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\mu_c &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow [0, \infty[ \\
\mu_t &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{F} := \{f : [0, E_{in}] \longrightarrow [0, \infty[\,\}
\end{aligned}
$$

Die Objektfunktion $\mu_c$ beschreibt die ortsabhängige Verteilung der Comptonkoeffizienten, $\mu_t$ die der totalen Dämpfungskoeffizienten. Die zusätzliche Einschränkung an $\mu_t$ wird dem infolge des bei der Comptonstreuung erlittenen Energieverlustes der gestreuten Photonen gerecht.

### 2.1.2 3D-Meßgeometrie

Die in Abbildung 1.1 skizzierte Meßanordnung gestattet es, die Röntgenquelle innerhalb des Quellenfeldes frei in der $(x, y)-$Ebene zu verschieben. Ein realer Meßvorgang wird sich jedoch auf endlich viele Quellpositionen beschränken, und die Wahl dieser Quellpositionen ist im Allgemeinen eng verknüpft mit einem an die gegebene Problemstellung angepaßten Rekonstruktionsalgorithmus. In Verbindung mit den im dritten Kapitel gewählten Rekonstruktionstechniken bietet sich eine äquidistante Verteilung der Quellpositionen an, wie sie in Abbildung 2.1 skizziert ist. Die einzelnen $N_{q,x} \cdot N_{q,y}$ Positionen der Röntgenquelle werden somit durch die Punktmenge

$$
\mathcal{Q} \;:=\; \left\{(x_i, y_j, -z_q) \in \mathbb{R}^3 \mid i = 1, \ldots, N_{q,x}\;,\; j = 1, \ldots, N_{q,y}\;,\; z_q \in \mathbb{R}_+\right\}
$$

definiert, wobei $x_i$, $i = 1, \ldots, N_{q,x}$, und $y_j$, $j = 1, \ldots, N_{q,y}$, gegeben sind durch

$$
\begin{aligned}
x_i &= \frac{2i-1}{2N_{q,x}}\, x_{max}\,, \qquad & i = 1, \ldots, N_{q,x}\,, \\
y_j &= \frac{2j-1}{2N_{q,y}}\, y_{max}\,, \qquad & j = 1, \ldots, N_{q,y}\,.
\end{aligned}
$$

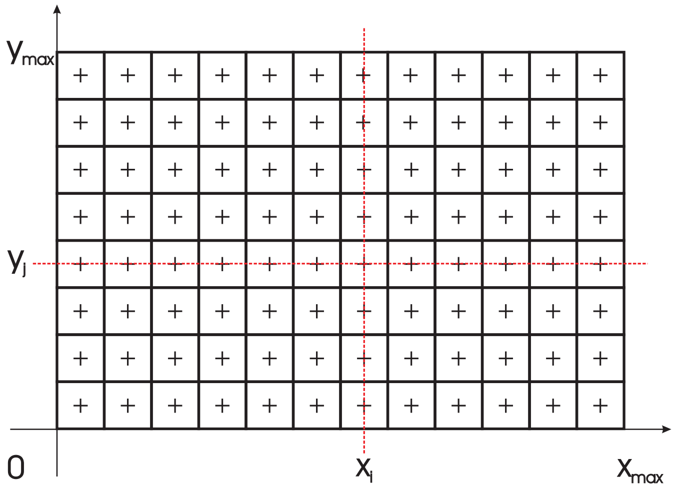


Abbildung 2.1: Quellpositionen in der 3D-Rückstreutomographie

Auf diese Weise erfolgt eine natürliche Zerlegung des Objektes in *Rechtecksäulen* gleicher Grundfläche mit den Zentren $(x_i, y_j)$. Abbildung 1.1 beschreibt weiter die Rotation des Kollimators und, damit fest verbunden, die Rotation des vertikal angeordneten Detektors um eine festgehaltene Position der Röntgenquelle mit der $z$-Achse als Rotationsachse. Wird der gegen die $x$-Achse aufgetragene Rotationswinkel mit $\varphi$ bezeichnet und sind die $N_{c,p}$ Kollimatorpositionen äquidistant auf einem Kreis mit Radius $r_c$ um diese Rotationsachse verteilt, so sind die zur Quellposition $(x_i, y_j)$ auftretenden Kollimatorpositionen definiert durch

$$\mathcal{C}_{i,j} \quad = \quad \{(x_{c,n}(i), y_{c,n}(j), -z_c)\,|z_c \in I\!R_+\,,\ n = 1, \ldots, N_{c,p}\}$$

mit

$$\begin{aligned} x_{c,n}(i) &= x_i + r_c \cos\varphi_n\ , && n = 1, \ldots, N_{c,p}, \\ y_{c,n}(j) &= y_j + r_c \sin\varphi_n\ , && n = 1, \ldots, N_{c,p}, \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \varphi_n = \frac{n-1}{N_{c,p}}\, 2\pi\ . \tag{2.1}$$

Da Röntgenquelle - Kollimator - Detektor eine starr verbundene Einheit bilden, ist die Lage der den Detektor bildenden, $N_d$ vertikal angeordneten Detektorelemente durch Angabe der Quell- und Kollimatorpostionen sowie der Abtasttiefe eindeutig festgelegt. Dieser Zusammenhang ist zur Verdeutlichung für festgehaltene Quellposition und Meßrichtung in Abbildung 2.2 dargestellt. In dieser Abbildung bezeichnen $z_c$ und $z_q$ die vertikalen Abstände der *Kollimatorkreiskurve* und des *Quellenfeldes* zum Objekt, mit $D_k\,, k = 1, \ldots, N_d$, werden die zu den horizontal verlaufenden Schichten $[\,z_{k-1}, z_k\,[$ der Dicke $\Delta$ gehörenden Detektorelemente durchnummeriert.

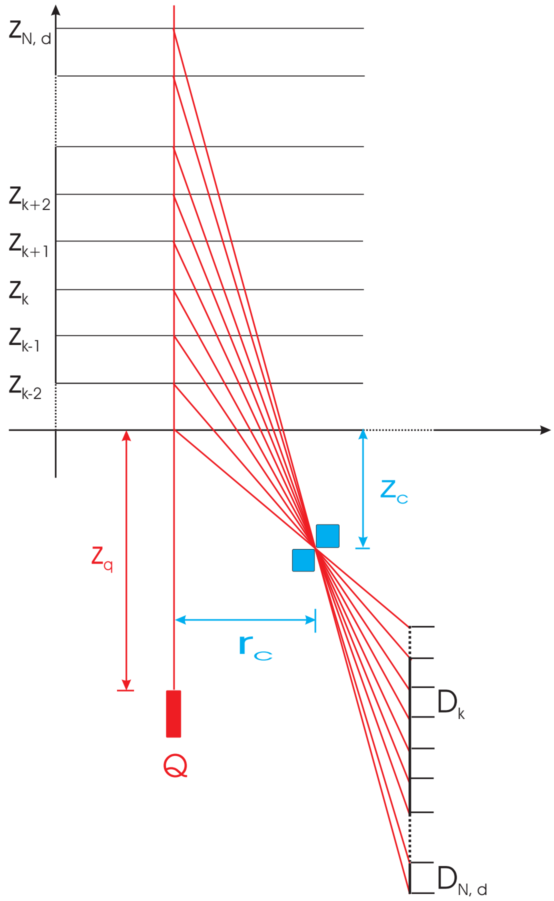


Abbildung 2.2: Zerlegung des Objektes in horizontale Schichten

Zusammen mit der Zerlegung des Quellenfeldes wird das zu untersuchende Objekt auf diese Weise in $N_{q,x} \times N_{q,y} \times N_d$ kleine Quader unterteilt, die von nun an *Voxel* genannt werden. Durch die Rotation von Kollimator und Detektor um den Quellstrahl erfolgen für jeden dieser Voxel $N_{c,p}$ Messungen.

### 2.1.3 Die auftretenden Strahlengänge

Für jeden beliebigen Punkt $\mathbf{x} \in K$ sind die folgenden Strecken definiert:

$$L_q^*(\mathbf{x}) \;:=\; \left\{\xi \in I\!R^3 \,|\, \xi = \tau \pi_q(\mathbf{x}) + (1-\tau)\mathbf{x}\,,\; \tau \in [\,0,1\,]\right\} \tag{2.2}$$

$$L_d^*(\mathbf{x}) \;:=\; \left\{\xi \in I\!R^3 \,|\, \xi = \tau \mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{x}_c(\varphi)\,,\; \tau \in [\,0,1\,]\right\} \tag{2.3}$$

Hier ist mit $\pi_q(\mathbf{x})$ die orthogonale Projektion von $\mathbf{x}$ auf das Quellenfeld $\mathcal{Q}$ bezeichnet, $\mathbf{x}_c(\varphi)$ definiert die Position des Kollimators und somit die Meßrichtung.

Durch die Fortsetzung der Objektfunktionen bietet es sich für das mathematische Modell an, die durch (2.2) und (2.3) definierten Strecken zu von $\mathbf{x}$ ausgehenden Strahlen auszuweiten. Dies führt zu den Strahlen

$$L_q(\mathbf{x}) := \left\{ \xi \in I\!R^3 \,|\, \xi = \mathbf{x} + \tau \mathbf{n}_z \,,\ \tau \in ]-\infty, 0] \right\} \,, \tag{2.4}$$

$$L_d(\mathbf{x}) := \left\{ \xi \in I\!R^3 \,|\, \xi = \mathbf{x} + \tau \omega_\varphi(\mathbf{x}) \,,\ \tau \in [0, \infty[ \right\} \,. \tag{2.5}$$

Hier stellt $\mathbf{n}_z$ den Einheitsvektor in $z$-Richtung dar und

$$\omega_\varphi(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}_c - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}|} \tag{2.6}$$

gibt die Meßrichtung an.

Die Definition (2.4) beschreibt folglich den Quellstrahl bis zum Punkt $\mathbf{x}$, (2.5) steht für den in $\mathbf{x}$ beginnenden und auf dem in Richtung $\omega_\varphi(\mathbf{x})$ liegenden Detektorpunkt auftreffenden Strahl.

### 2.1.4 Die Detektorfunktionen

Ein ideales Detektorelement sollte in jedem seiner Oberflächenelemente gleich empfindlich sein, seine *charakteristische Detektorfunktion* wäre demnach durch die Identität gegeben. Ein reales Detektorelement wird hingegen im Allgemeinen diese vereinfachende Eigenschaft nicht aufweisen. Dieser Mangel kann auf verschiedene Ursachen zurückzuführen sein:

- Die Empfindlichkeit der Detektoroberfläche ist abhängig von dem Auftreffwinkel der einfallenden Strahlung.
- Die Bauart des Kollimators schränkt den Sichtbereich des Detektorelementes ein.
- Konstruktionsfehler können zum Ausfall von Oberflächenelementen führen.

Um dieser Problematik gerecht zu werden, kann die Detektorfunktion experimentiell bestimmt werden. Dazu wird gemäß Abbildung 2.3 eine dünne Platte der Dicke $\epsilon \ll 1$ bekannten Materials einem sehr feinen Röntgenstrahl ausgesetzt. Das Verschieben dieser Platte in vertikaler Richtung über den gesamten Detektorbereich und die Aufnahme einer Messung für jede Abtasttiefe führt dann wie folgt zu der charakteristischen Funktion des Detektors.

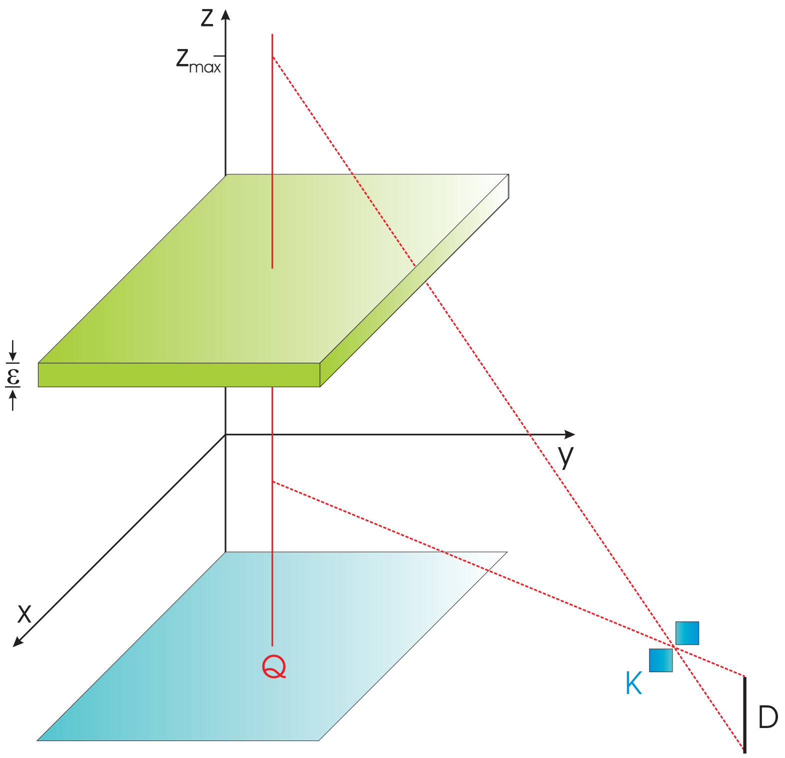


Abbildung 2.3: Experimentelle Bestimmung der Detektorfunktion

Das Modell (1.59) beschreibt die auf ein Detektorelement einfallende Intensität. Hieraus berechnet sich die vom Element tatsächlich gemessene Intensität zu

$$I_{D_k} \;=\; I_0 \int\limits_{\mathcal{I}_k} w(\mathbf{x})\, p(\mathbf{x})\, \mu_c(\mathbf{x}, E_{in})\, e^{-\int\limits_{L_q(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{in}) d\xi \,-\, \int\limits_{L_d(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{sc}(\mathbf{x})) d\xi}\, d\mathbf{x}\,, \tag{2.7}$$

wobei $w(\mathbf{x})$ die charakteristische Funktion des Detektors darstellt. Für eine um die Abtasttiefe $z_0$ zentrierte, beliebig dünne Platte $K_P(z_0)$ der Dicke $\epsilon$ bekannten Materials sind die Objektfunktionen gegeben durch

$$\mu_{c,t}(\mathbf{x}) \;:=\; \begin{cases} \mu^0_{c,t} & , \quad \mathbf{x} \in K_P(z_0) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \,,$$

wobei $K_P(z_0) := [\,0, x_{\max}\,] \times [\,0, y_{\max}\,] \times [\,z_0 - \frac{\epsilon}{2}, z_0 + \frac{\epsilon}{2}\,]$.

Das Einsetzen dieser Objektfunktionen in (2.7) und Berücksichtigung von

$$e^{-\int\limits_{L_q(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{in}) d\xi \,-\, \int\limits_{L_d(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{sc}(\mathbf{x})) d\xi} \;\approx\; 1 \tag{2.8}$$

führt zu

$$I_{D_k}(z_0) \;\approx\; \epsilon\, I_0\, \mu_c^0 \underbrace{w(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_z = z_0)\, p(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_z = z_0)}_{=:\, W(z_0)} = \epsilon\, I_0\, \mu_c^0\, W(z_0)\,. \tag{2.9}$$

Es zeigt sich also, daß für praktische Anwendungen die Auswertungen von $p(\mathbf{x})$ gemäß der Formel von KLEIN-NISHINA-TAMM (1.18) nicht erforderlich sind, sondern diese vielmehr anhand einer Kalibriermessung zusammen mit der Detektorfunktion als eine einzige Funktion $W:\ [0, z_{\max}] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ behandelt werden kann. In dieser Funktion können weiter alle durch den Aufbau des Kollimators verursachten Einwirkungen auf das Meßergebnis als berücksichtigt angesehen werden.[2]

## 2.2 Das kontinuierliche Vorwärtsmodell

Um das mathematische Vorwärtsmodell eines idealisierten Detektors beliebig feiner Ortsauflösung umfassend zu beschreiben, werden noch die passenden Funktionenräume für die Objektfunktionen benötigt, damit die auftretenden Integrale auch existieren. Dieser Forderung wird die folgende Konstruktion gerecht.

### 2.2.1 Funktionenräume und kontinuierlicher Vorwärtsoperator

Den folgenden Betrachtungen liege der Lebesgue - Borelsche Maßraum $(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}^3, \lambda^3)$ zu Grunde. Bezeichnet weiter für $K \in \mathcal{B}^3$ $\lambda_K^d := \lambda^d_{|K\cap\mathcal{B}^3}$, $d \in \{1, 3\}$, die Restriktion von $\lambda^d$ auf $K$, so stellen sich die nun aufgeführten Funktionenräume als geeignet heraus:

**Definition 2.1** *Für $K \in \mathcal{B}^3$, $K$ kompakt, und $1 \le p < \infty$ sei*

$$\mathcal{M} := \left\{ f:\, K \longrightarrow \mathbb{R}\ \lambda_K^3 - int. \right\}\,,$$

$$X := \left\{ f:\, K \longrightarrow \mathbb{R}\,|\, \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in K : [\,0,1\,] \ni \tau \longmapsto f^p\,(\tau\mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y})\ \lambda_K^1 - int. \right\}\,,$$

$$Y_\psi := \{ f:\, K \longrightarrow \mathbb{R}\,|\, (f,E) \longmapsto \psi(f,E) \in X\ \forall\, E \in [\,0, E_{in}\,]\,\}\,,$$

*wobei die auf $X \times [\,0, E_{in}\,]$ definierte Funktion $\psi : (f,E) \longmapsto \psi(f,E)$ bezüglich $E$ von beschränkter Variation ist, $(\psi\circ f)(\mathbf{x}_0,\cdot) \in BV[\,0, E_{in}\,]$, und den Bedingungen $\psi(f, E_{in}) = f$, $\psi(f,E) \ge 0$ für $f \ge 0$ sowie $\psi(0,E) = 0$ genügt.*

[2]Eine detaillierte Untersuchung dieser Fragestellung findet sich bei GORSHKOV [18].

Das *Energiefunktional* $\psi(f,E)$ wird der Tatsache Rechnung tragen, daß die Absorptionskoeffizienten von der Energie der einfallenden Röntgenstrahlung abhängig sind, eine wichtige Folgerung aus den in Kapitel 1.2 durchgeführten Untersuchungen.

Die kanonische Fortsetzung

$$f_K(\mathbf{x}) \quad := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{x} \in K \\ 0 & , \quad \mathbf{x} \in K^c \end{cases} \tag{2.10}$$

sichert für $d \in \{1,3\}$ die $\lambda^d$(-f.ü.)-Integrierbarkeit[3] von $f_K$ und leitet über zu

**Definition 2.2** *Sei $\psi$ das Energiefunktional aus Definition 2.1.Dann bezeichne für $K \in \mathcal{B}^3$, $K$ kompakt,*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* \quad &:= \quad \{f_K : f \in \mathcal{M}\} \, , \\ X^* \quad &:= \quad \{f_K : f \in X\} \, , \\ Y_\psi^* \quad &:= \quad \{f_K : f \in Y_\psi\} \, . \end{aligned}$$

**Satz 2.3** *Für $\mathbf{x} \in K$ sei $\omega_\varphi(\mathbf{x})$ gemäß (2.6) definiert. Dann wird das direkte Problem der Rückstreutomographie für $\mu_t \in Y^*_{\psi,+} := \left\{\mu_t \in Y^*_\psi, \mu_t \geq 0\right\}$ beschrieben durch*

$$\begin{aligned} S^c_\varphi \quad &: \quad \mathcal{M}^* \times Y^*_{\psi,+} \longrightarrow \mathcal{M}^* \, , \\ & \qquad (\mu_c, \mu_t) \longmapsto S^c_\varphi(\mu_c, \mu_t) \quad \textit{mit} \end{aligned}$$

$$S^c_\varphi(\mu_c,\mu_t)(\mathbf{x}) \quad := \quad \mu_c(\mathbf{x})\, e^{-D\mu_t(\mathbf{x},-\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\omega_\varphi(\mathbf{x}))} \, , \tag{2.11}$$

*wobei $Df$ für $f \in Y^*_\psi$, $\mathbf{x} \in K$, $\omega \in S^2$ durch*

$$Df(x,\omega) \quad := \quad \int_0^\infty f(\mathbf{x} + \tau\omega)\, d\tau \tag{2.12}$$

*definiert ist und $\mu_c(\mathbf{x})$, $\mu_t(\mathbf{x})$ abkürzend für $\mu_c(\mathbf{x}, E_{in})$, $\mu_t(\mathbf{x}, E)$ stehen.*

Der in Satz 2.3 eingeführte obere Index $c$ symbolisiert das kontinuierliche Problem, entsprechend wird das weiter unten behandelte diskrete Modell mit dem oberen Index $d$ gekennzeichnet werden.

[3] Zu dieser Problematik siehe z.B Bauer [5], S.73 ff.

**Beweis:**
Die zu $\mathbf{x} \in K$ zugeordnete Quellposition kann durch $\pi_q(\mathbf{x})$ beschrieben werden, die Abtasttiefe durch $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_z$, und $\varphi \in [\,0, 2\pi\,[$ definiert eindeutig die Meßrichtung. Somit sind Quell- und Detektorposition eindeutig durch das Paar $(\mathbf{x}, \varphi)$ festgelegt. Der Strahlengang ist demnach durch $L_q^* \oplus L_d^*$ gegeben und die Fortsetzung von $\mu_c, \mu_t$ auf $K^c$ gestattet die Ausdehnung auf $L_q \oplus L_d$. Weiter ist durch $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_z$ der Energiedefekt der in $\mathbf{x}$ gestreuten Photonen eindeutig durch (1.13) bestimmt und die Änderung des Absorptionskoeffizienten $\mu_t$ wird durch das noch zu bestimmende Energiefunktional $\psi$ definiert.

Zusammen mit (1.2) folgt für die von dem in Meßrichtung $\varphi$ positionierten Detektor in $z := \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_z$ gemessene Intensität

$$I_\varphi^c(\mathbf{x}) \quad = \quad I_0\, w(\mathbf{x})\, p(\mathbf{x})\, \mu_c(\mathbf{x})\, e^{-D\mu_t(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)(\mathbf{x}, \omega_\varphi(\mathbf{x}))}\;.$$

Da weiter $I_0\, w(\mathbf{x})\, p(\mathbf{x}) \neq 0$ einen von den Objektfunktionen völlig unabhängigen Ausdruck darstellt (die Ausgangsintensität $I_0$ entspricht lediglich einer skalierenden Funktion und die apparaturspezifische Größe $W(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_z) := w(\mathbf{x})\, p(\mathbf{x})$ wird gemäß Abschnitt 2.1.4 bestimmt), können die gemessenen Intensitäten $I_\varphi^c(\mathbf{x})$ mit diesem verarbeitet werden und die aufbereiteten Größen

$$g_\varphi^c(\mathbf{x}) \quad = \quad \frac{I_\varphi^c(\mathbf{x})}{I_0\, w(\mathbf{x})\, p(\mathbf{x})}$$

als Daten $S_\varphi^c\,(\mu_c, \mu_t)\,(\mathbf{x})$ des kontinuierlichen Vorwärtsproblems identifiziert werden. Mit $(\psi\mu_t)\,(\mathbf{x}, \omega_\varphi\,(\mathbf{x})) \in I\!R_+$ folgt

$$e^{-D\mu_t(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)(\mathbf{x}, \omega_\varphi(\mathbf{x}))} \quad \leq 1$$

und somit liegt $S_\varphi^c(\mu_c, \mu_t)$ wieder in $\mathcal{M}^*$, womit Satz 2.3 bewiesen ist. ∎

**Bemerkung 2.4** *Ohne Zweifel wird durch die gewählten Räume $\mathcal{M}, X, Y_\psi$ auf eine Reihe angenehmer Eigenschaften der $L^p$-Funktionen verzichtet. Jedoch tragen sie im vollen Umfang den physikalischen Gegebenheiten der Rückstreutomographie Rechnung und sind dennoch so allgemein gehalten, daß zumindest stückweise stetige Funktionen in diesen enthalten sind.*

**Bemerkung 2.5** *Da die auf $\mathcal{B}^3$ bezogenen Räume $\mathcal{M}^*, X^*$ und $Y_\psi^*$ in offensichtlicher Weise mit den entsprechenden, auf $K \cap \mathcal{B}^3$ abgestellten, identifiziert werden können, sollen diese zukünftig ebenfalls mit $\mathcal{M}, X$ und $Y_\psi$ bezeichnet werden. Aus den auftretenden Operationen ist dann jeweils ersichtlich, welche Räume gemeint sind.*

Im Vorgriff auf das nächste Kapitel, in dem das inverse Problem der Rückstreutomographie behandelt wird, sollen die im Vorwärtsproblem auftretenden Operatoren analysiert werden. Da in dem betrachteten Modell mehrere Linienintegrale auftreten und der Operator $S_\varphi^c$ in $\mu_t$ zusätzlich nichtlinear ist, liegt es nahe, die Invertierung als *nichtlineares, schlecht gestelltes Problem* zu klassifizieren. Schließlich wirkt der Operator $S_\varphi^c$ zumindest bezüglich $\mu_t$ glättend und könnte somit ähnlich der Fredholmschen Integralgleichung erster Art oder der Inversion der gedämpften Radontransformation der Klasse schlecht gestellter Probleme zuzuordnen sein. Eine ausführliche Behandlung schlecht gestellter Probleme und deren Theorie wird u.a. in Louis [34] geboten, dort finden sich auch viele praxisrelevante Beispiele und deren Lösungen wieder.

Um den theoretischen Untersuchungen eine Grundlage zu geben, erfolgt zuerst Hadamard's Charakterisierung inverser Probleme:

**Definition 2.6** *Seien $X, Y$ topologische Räume und $A : X \longrightarrow Y$. Dann heißt das Problem $Af = g$ gut gestellt, wenn*

*(i) $Af = g$ für jedes $g \in Y$ eine Lösung besitzt,*

*(ii) diese Lösung eindeutig ist,*

*(iii) die Lösung stetig von den Daten abhängt.*

*Ist eine dieser drei Bedingungen verletzt, so heißt das Problem schlecht gestellt.*

Aus dieser Definition 2.6 folgt für die Rückstreutomographie unmittelbar

**Korollar 2.7** *Das zu (2.11) inverse Problem ist im Sinne Hadamard's schlecht gestellt.*

Da der Definitionsbereich von (2.11) offensichtlich wesentlich größer als dessen Bildbereich ist, wird die Lösung im Allgemeinen nicht eindeutig sein und somit (ii) aus Definition 2.6 nicht erfüllt sein.

Diese Problematik kann umgangen werden, indem Zusatzbedingungen an die Lösung gestellt werden. In früheren Arbeiten[4] findet zum Beispiel der folgende Kunstgriff Verwendung: es wird die Existenz einer Abbildung $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow X$

[4]Siehe Gorshkov [15, 16, 17, 18] und Schmitt [46].

mit der Eigenschaft

$$\mu_t \quad = \quad \phi \circ \mu_c \tag{2.13}$$

angenommen. Obwohl eine solche Abbildung $\phi$ physikalisch nicht existiert (siehe Kapitel 1.2), gibt es in der Praxis der Rückstreutomographie durchaus Situationen, in denen diese Verknüpfung der beiden Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ eine gute Approximation an die Realität liefert. Dies ist dann der Fall, wenn es sich um weitgehend homogene Objekte bekannter Materialien geringer Dichte ($Z \leq 13$) handelt, die auf kleine Störungen (Verunreinigungen oder Risse) hin untersucht werden sollen. In diesen Beispielen führt die Wahl

$$\mu_t(E) \quad = \quad \phi\,(\mu_c)\,(E) := \beta^{-1}\,\mu_c(E_{in})\,, \qquad \beta \in \,]\,0,\,1\,[\,, \tag{2.14}$$

mit geeignetem $\beta$ (meist $\beta \approx 1$) zu akzeptablen Ergebnissen. Die Resultate werden jedoch zunehmend unbefriedigender, wenn von dieser speziellen Situation abgewichen wird und die Energieabhängigkeit der Objektfunktionen nicht mehr vernachlässigbar ist (vergleiche erneut mit Kapitel 1.2 und Schmitt [46]).

Später wird zu dieser Art von Ansätzen zurückgekehrt werden, nun erfolgt die genauere Betrachtung der Struktur der benutzten Räume $\mathcal{M}$ und $Y_\psi$:

Da die bekannten $p-$Normen zu schwach für den in Definition 2.1 eingeführten Raum $Y_\psi$ sind,[5] ist zunächst die Konstruktion einer dem Produktraum $\mathcal{M} \times Y_\psi$ angepaßten Norm erforderlich. Dies gelingt vermöge der üblichen Definition

$$\|f_K\|_p \quad := \quad \left( \int_{I\!R^3} |f_K|^p \, d\lambda^3 \right)^{\frac{1}{p}} \,, \qquad 1 \leq p < \infty\,, \tag{2.15}$$

und der Festlegung

$$|\mu_{t,K}|_p \quad := \quad \int_{S^2} \int_{\theta^\perp} \left(\mathcal{P}|\mu_{t,K}|^p(\theta,\mathbf{x})\right)^{\frac{1}{p}} \, d\mathbf{x}\, d\theta\,, \qquad 1 \leq p < \infty\,, \tag{2.16}$$

wobei

$$\mathcal{P}f(\theta,\mathbf{x}) \quad := \quad \int_{I\!R} f(\mathbf{x}+\tau\theta)\, d\tau$$

[5]Die Unzulänglichkeit der $L^p(\lambda^3)$-Räume ergibt sich einerseits aus der Forderung, daß die uns interessierenden Funktionen entlang beliebiger Strecken $\lambda^1$-integrierbar sein sollen, andererseits Linien und selbst Schnittebenen jedoch $\lambda^3$-Nullmengen darstellen und somit die $\lambda^3$-Integrierbarkeit einer Funktion nicht zwangsläufig zur Integrierbarkeit dieser Funktion entlang einer beliebigen Strecke führt.

die Röntgentransformierte der Funktion $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$ darstellt. Das Verwenden von $\|\cdot\|_p$ und $|\cdot|_p$ in Verbindung mit den Räumen $\mathcal{M}$ und $Y_\psi$ führt für die Objektfunktion $\mu_K := (\mu_{c,K}, \mu_{t,K})$ zu der Halbnorm

$$|\mu_K|_p \;:=\; \|\mu_{c,K}\|_p + |\mu_{t,K}|_p\,, \qquad 1 \leq p < \infty\,. \tag{2.17}$$

Daß (2.17) in der Tat eine Halbnorm darstellt, wird leicht wie folgt eingesehen. Bekanntermaßen ist (2.15) eine Halbnorm und somit beschränkt sich die Untersuchung auf (2.16). Von den zu überprüfenden Eigenschaften

(1) $|\mu_{t,K}|_p \geq 0$,

(2) $|\alpha\mu_{t,K}|_p = |\alpha||\mu_{t,K}|_p$,

(3) $|\mu_{t,K} + \nu_{t,K}|_p \leq |\mu_{t,K}|_p + |\nu_{t,K}|_p$

sind die beiden ersten trivial erfüllt, und die Dreiecksungleichung ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Röntgentransformation und Anwendung der Minkowski-Ungleichung[6]:

$$\begin{aligned}
|\mu_{t,K} + \nu_{t,K}|_p &= \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \left(\mathcal{P}|\mu_{t,K} + \nu_{t,K}|^p(\theta,\mathbf{x})\right)^{\frac{1}{p}}\, d\mathbf{x}\, d\theta \\
&= \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\mu_{t,K} + \nu_{t,K}|^p(\mathbf{x}+\tau\theta)\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}} d\mathbf{x}\, d\theta \\
&\overset{\text{MU}}{\leq} \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \left(\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\mu_{t,K}|^p(\mathbf{x}+\tau\theta) d\tau\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\nu_{t,K}|^p(\mathbf{x}+\tau\theta) d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\right) d\mathbf{x} d\theta \\
&= \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \left(\mathcal{P}|\mu_{t,K}|^p(\theta,\mathbf{x})\right)^{\frac{1}{p}}\, d\mathbf{x} d\theta + \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \left(\mathcal{P}|\nu_{t,K}|^p(\theta,\mathbf{x})\right)^{\frac{1}{p}}\, d\mathbf{x} d\theta \\
&= |\mu_{t,K}|_p + |\nu_{t,K}|_p\,.
\end{aligned}$$

Die durch (2.17) definierte, in der zweiten Komponente der besonderen Struktur von $Y_\psi$ angepaßten, Halbnorm ermöglicht es, dem interessierenden Produktraum $\mathcal{M} \times Y_\psi$ gemäß $(\mathcal{M} \times Y_\psi,\ |\cdot|_p)$ eine topologische Struktur zu verleihen und führt zu dem folgenden

[6] Die Gültigkeit der Minkowski-Ungleichung für die betrachteten Funktionenräume ergibt sich aus dem nachfolgenden Satz 2.8.

**Satz 2.8** *Seien $\mathcal{M}$ und $Y_\psi$ wie in Definition 2.2 gegeben und der Produktraum $\mathcal{M} \times Y_\psi$ mit der Halbnorm $|\cdot|_p$ aus (2.17) versehen. Weiter sei das Energiefunktional $\psi$ stetig und linear im ersten Argument, d.h. es gelte*

$$\alpha\psi(f,E) + \beta\psi(g,E) = \psi(\alpha f + \beta g, E)\ \forall\, E \in [\,0, E_{in}\,],\ \forall \alpha, \beta \in I\!R.$$

*Dann gilt für $1 \le p < \infty$:*

*(i)* $\mathcal{M} \times Y_\psi$ *ist konvex,*

*(ii)* $\mathcal{M}, Y_\psi \subset L^p\left(\lambda_K^3\right)$,

*(iii)* $(\mathcal{M} \times Y_\psi, |\cdot|_p)$ *ist vollständig.*

**Beweis:**

(i) Da die Konvexität des Produktraumes $\mathcal{M} \times Y_\psi$ aus der von $\mathcal{M}$ und $Y_\psi$ folgt, genügt es, diese nachzuweisen. Offensichtlich ist $\mathcal{M}$ konvex.

Die Konvexität von $Y_\psi$ ergibt sich wie folgt. Angenommen, $Y_\psi$ sei nicht konvex. Dann existieren $f_1, f_2 \in Y_\psi$, $E_0 \in [\,0, E_{in}\,]$ und $t \in (0,1)$ mit $tf_1 + (1-t)f_2 \notin Y_\psi$, d.h. $\psi\,(tf_1 + (1-t)f_2,\, E_0) \notin X$. Folglich existieren Ausnahmepunkte $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in K$ mit

$$[\,0,1\,] \ni \tau \quad\longmapsto\quad \psi\,(tf_1 + (1-t)f_2,\, E_0)\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0) \quad \text{nicht } \lambda_K^1\text{-int.}$$

Da aber nach Voraussetzung $f_1, f_2 \in Y_\psi$, gilt:

$$[\,0,1\,] \ni \tau \quad\longmapsto\quad \psi\,(f_1,\, E_0)\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0) \quad \lambda_K^1\text{-int.}$$

und

$$[\,0,1\,] \ni \tau \quad\longmapsto\quad \psi\,(f_2,\, E_0)\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0) \quad \lambda_K^1\text{-int.}$$

Damit ist aber auch $\forall t \in [\,0,1\,]$

$$[\,0,1\,] \ni \tau \longmapsto (t\psi\,(f_1,\, E_0) + (1-t)\psi\,(f_2,\, E_0))\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0) \quad \lambda_K^1\text{-int.}$$

Dann liefert die Identifikation $\alpha := t,\ \beta := 1-t$ weiter

$$[\,0,1\,] \ni \tau \quad\longmapsto\quad \psi\,(tf_1 + (1-t)f_2,\, E_0)\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0) \quad \lambda_K^1\text{-int.}\,,$$

im Widerspruch zur Annahme.

(ii) Für $\mathcal{M}$ ist nichts zu zeigen.

Für $Y_\psi$ ergibt sich die Aussage leicht aus der Definition des Produktmaßes $\lambda_K^3 := \lambda_K^1 \otimes \lambda_K^1 \otimes \lambda_K^1$. Sei dazu $f \in Y_\psi$. Dann ist $\psi(f, E) \in X \, \forall E \in [\,0, E_{in}\,]$ gemäß der Definition von $Y_\psi$, es existieren also alle Linienintegrale über $|\psi(f, E)|^p$ und somit insbesondere auch alle achsenparallelle Linienintegrale. Hieraus folgt nach dem Satz von FUBINI die Behauptung.

(iii) Da $L^p\left(\lambda_K^3\right)$ vollständig ist, genügt es, zusammen mit Teil (i), die Abgeschlossenheit von $(\mathcal{M} \times Y_\psi, |\cdot|_p)$ zu zeigen. Diese ist vermöge der Definition (2.17) sicher dann gewährleistet, wenn $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_p)$ und $(Y_\psi, |\cdot|_p)$ abgeschlossen sind. Dazu sei nun $(f_n)_{n\in I\!N} := (f_{c,n}, f_{t,n})_{n\in I\!N}$ eine Folge in $\mathcal{M} \times Y_\psi$ mit $\|f_{c,n} - f_c\|_p \to 0$ und $|f_{t,n} - f_t|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Dann ist zu zeigen: $f_c \in \mathcal{M}, \; f_t \in Y_\psi$. Wieder ist für $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_p)$ die Forderung offensichtlich erfüllt.

Der Beweis führt sich zu Ende, indem die Annahme $f_t \notin Y_\psi$ zum Widerspruch geführt wird. Sei also $(f_{t,n})_{n\in I\!N}$ eine Folge in $Y_\psi$ mit $|f_{t,n} - f_t|_p \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. Es stehe weiter die Annahme: $f_t \notin Y_\psi$. Dann existieren $E_0 \in [\,0, E_{in}\,]$ und $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in K$ mit einerseits

$$\tau \quad \longmapsto \quad |\psi\,(f_t, E_0)\,|^p\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0) \;\; \text{nicht} \;\; \lambda_K^1\text{-int.},$$

aber andererseits

$$\tau \quad \longmapsto \quad |\psi\,(f_{t,n}, E_0)\,|^p\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0) \;\; \lambda_K^1\text{-int. } \forall n \in I\!N.$$

Es folgt für die „Ausnahmeenergie“ $E_0$ und die „Ausnahmepunkte“ $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |\psi(f_t, E_0)|^p\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0)\,d\tau \\
=&\int_0^1 |\psi(f_t - f_{t,n} + f_{t,n}, E_0)|^p\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0)\,d\tau \\
=&\int_0^1 |\psi(f_t - f_{t,n}, E_0) + \psi(f_{t,n}, E_0)|^p\,(\tau\mathbf{x}_0 + (1-\tau)\mathbf{y}_0)\,d\tau
\end{aligned}$$

$$\overset{\theta_0:=\frac{\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0\|_2}}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |\psi(f_t - f_{t,n}, E_0) + \psi(f_{t,n}, E_0)|^p \, (\mathbf{x}_0 + \tau\theta_0) \, d\tau$$

$$\overset{\text{MU}}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |\psi(f_t - f_{t,n}, E_0)|^p \, (\mathbf{x}_0 + \tau\theta_0) \, d\tau + \int_{\mathbb{R}} |\psi(f_{t,n}, E_0)|^p \, (\mathbf{x}_0 + \tau\theta_0) \, d\tau.$$

Aufgrund der Voraussetzung existiert von diesen beiden Integralen das zweite, so daß die weitere Untersuchung auf das erste Integral eingeschränkt werden kann.

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} |\psi(f_t - f_{t,n}, E_0)|^p \, (\mathbf{x}_0 + \tau\theta_0) \, d\tau \\
\overset{\psi \in BV\,[0,E_{in}\,]}{\leq} \quad & const.^p \int_{\mathbb{R}} |\psi(f_t - f_{t,n}, E_{in})|^p \, (\mathbf{x}_0 + \tau\theta_0) \, d\tau \\
\overset{(*)}{=} \quad & const.^p \int_{\mathbb{R}} |f_t - f_{t,n}|^p \, (\mathbf{x}_0 + \tau\theta_0) \, d\tau \\
= \quad & const.^p \, \mathcal{P}|\mu_t - f_{t,n}|^p \, (\mathbf{x}_0, \theta_0) \\
\leq \quad & const.^p \, |f_t - f_{t,n}|_p^p \, .
\end{aligned}$$

Hierbei gilt $(*)$ wegen der Stetigkeit von $\psi$ im ersten Argument. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ führt nun die letzte Ungleichung zum Widerspruch zur Annahme, womit die Aussagen des Satzes vollständig bewiesen sind.

■

### 2.2.2 Stetigkeit des Vorwärtsoperators

Bevor nun das komplexe Problem der Stetigkeit des Vorwärtsoperators $S_\varphi^c$ angegangen wird, erfolgt in einem vorbereitenden Schritt zunächst eine Analyse des in Satz 2.3 in Erscheinung getretenen Dämpfungsoperators

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\psi^\varphi \quad &: \quad (Y_\psi, |\cdot|_p) \longrightarrow (Y_\psi, |\cdot|_p) \, , \\
\mathcal{D}_\psi^\varphi \mu_t \, (\mathbf{x}, \omega_\varphi \, (\mathbf{x})) \quad &:= \quad D\mu_t(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z) + D(\psi\mu_t)(\mathbf{x}, \omega_\varphi(\mathbf{x})) \, .
\end{aligned} \tag{2.18}$$

**Lemma 2.9** *Sei $\psi$ entsprechend den Einschränkungen aus Satz 2.3 gegeben. Dann ist der durch (2.18) gegebene Operator $\mathcal{D}_\psi^\varphi$ stetig, genauer: es existiert eine Konstante $k > 0$, so daß*

$$|\mathcal{D}_\psi^\varphi \mu_t|_p \ \leq k|\mu_t|_p\,, \qquad 1 \leq p < \infty, \tag{2.19}$$

*für alle $\mu_t \in Y_{\psi,+}$ gilt.*

**Beweis:**
Die Aussage des Lemma ist nachgewiesen, wenn sich sowohl $D\mu_t(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z)$ als auch $D(\psi\mu_t)(\mathbf{x}, \omega_\varphi(\mathbf{x}))$ als stetig herausstellen. Die Stetigkeit des ersten Operators ergibt sich aber direkt aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}
|D\mu_t|_p &= \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \left(\mathcal{P}|D\mu_t(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z)|^p\right)^{\frac{1}{p}}(\theta, \mathbf{x})\, d\mathbf{x}\, d\theta \\
&\leq \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \left(\mathcal{P}\left(c_1^p|\mu_t|_p^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} d\mathbf{x}\, d\theta \\
&\leq c_1\,|\mu_t|_p \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \sqrt{x_{max}^2 + y_{max}^2 + z_{max}^2}\, d\mathbf{x}\, d\theta \\
&\leq 4\pi k_1 c_1\,|\mu_t|_p\,.
\end{aligned}$$

Die hier auftretenden Konstanten $k_1$ und $c_1$ kontrollieren der Reihe nach den maximalen Diameter von $K$ und die größtmögliche Schnittebene durch $K$ sowie das Volumen von $K$.
Folglich gilt mit $m := \min\{x_{max}, y_{max}, z_{max}\}$ und $M := \max\{x_{max}, y_{max}, z_{max}\}$: $k_1 \leq \sqrt{6}\, m\, M^2$ und $c_1 \leq \max\left\{1, \left(\lambda^3(K)\right)^{-1}\right\}$.

Ähnlich ergibt sich die Stetigkeitsaussage durch Ausnutzen der Struktur von $Y_\psi$ für den noch fehlenden Operator $D(\psi\mu_t)(\mathbf{x}, \omega_\varphi(\mathbf{x}))$. Da aus der Definition des Energiefunktionals $\psi(0, E) = 0$ folgt und in diesem Fall somit nichts zu zeigen ist, muß lediglich der nichttriviale Fall $|\mu_t|_p > 0$ betrachtet werden.

$$\begin{aligned}
|D(\psi\mu_t)|_p &= \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \left(\mathcal{P}|D(\psi\mu_t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\, d\mathbf{x}\, d\theta \\
&\leq \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \left(\mathcal{P}\left(\tilde{c}_2^p\,|\psi\mu_t|_p^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\, d\mathbf{x}\, d\theta \\
&\overset{(*)}{\leq} c_2 \int\limits_{S^2}\int\limits_{\theta^\perp} \sqrt{x_{max}^2 + y_{max}^2 + z_{max}^2}\, |\mu_t|_p\, d\mathbf{x}\, d\theta \\
&\leq 4\pi k_2\, c_2\, |\mu_t|_p\,.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $(*)$ folgt aus $\psi\mu_t \in X$, so daß $\tilde{c}_2^p\,|\psi\mu_t|_p^p \leq C^p = c_2^p\,|\mu_t|_p^p$ gilt, wobei durch die letzte Gleichung die Konstante $c_2$ definiert wird. ∎

Da der lineare Operator $\mathcal{D}_\psi^\varphi$ als Argument der Exponentialfunktion in $S_\varphi^c$ enthalten ist, dient weiter folgendes Lemma der Vorbereitung einer Stetigkeitsaussage für $S_\varphi^c$.

**Lemma 2.10** *Für alle $\mu_t, \nu_t \in Y_{\psi,+}$ gilt*

$$\left| e^{-\mathcal{D}_\psi^\varphi\,\mu_t(\mathbf{x},\omega)} - e^{-\mathcal{D}_\psi^\varphi\,\nu_t(\mathbf{x},\omega)} \right| \leq \left|\mathcal{D}_\psi^\varphi\,\mu_t(\mathbf{x},\omega) - \mathcal{D}_\psi^\varphi\,\nu_t(\mathbf{x},\omega)\right|. \tag{2.20}$$

**Beweis:**
Aus der Definition (2.18) ergibt sich für $\mathcal{D}_\psi^\varphi$ unmittelbar

$$-\mathcal{D}_\psi^\varphi\mu_t\,(\mathbf{x},\omega) = -\left(D\mu_t(\mathbf{x},-\mathbf{n}_z) + D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\omega_\varphi(\mathbf{x}))\right) \leq 0$$

und somit folgt mit den abkürzenden Bezeichnungen $0 \geq x := -\mathcal{D}_\psi^\varphi\mu_t\,(\mathbf{x},\omega)$ und $0 \geq y := -\mathcal{D}_\psi^\varphi\nu_t\,(\mathbf{x},\omega)$ sowie der Konvexität der Exponentialfunktion

$$|e^x - e^y| \leq |x-y| \max_{t\in[\min\{x,y\},\max\{x,y\}]} e^t \leq |x-y|e^{\max\{x,y\}} \leq |x-y|\,.$$

∎

Mit Hilfe der jetzt zur Verfügung stehenden beiden Lemmata gelingt die Formulierung der eingangs des Abschnittes als Ziel deklarierten Stetigkeitsaussage für den nichtlinearen, kontinuierlichen Vorwärtsoperator $S_\varphi^c$.

**Satz 2.11** *Der nichtlineare Operator $S_\varphi^c : \mathcal{M} \times Y_{\psi,+} \longrightarrow \mathcal{M}$ ist stetig.*

**Beweis:**
Sei $(\mu_n)_{n\in I\!N} := (\mu_{c,n}, \mu_{t,n})_{n\in I\!N}$ eine gegen $\mu$ konvergierende Folge in $\mathcal{M} \times Y_{\psi,+}$, es gelte also $|\mu_n - \mu|_2 \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. Dann ist die Existenz einer Konstanten $k \in I\!R$ mit

$$\left\|S^c_\varphi\mu - S^c_\varphi\mu_n\right\|_2 \;\; \leq \;\; k\,|\mu - \mu_n|_2 \tag{2.21}$$

zu zeigen. Dieser Nachweis gelingt wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left\|S^c_\varphi\mu - S^c_\varphi\mu_n\right\|_2 &= \left(\int\limits_{I\!R^3} \left|\mu_c(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)} - \mu_{c,n}(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_{t,n}(\mathbf{x},\omega)}\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int\limits_{I\!R^3} \left|\mu_c(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)} - \mu_{c,n}(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +\;\; \mu_{c,n}(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)} - \mu_{c,n}(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_{t,n}(\mathbf{x},\omega)}\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{MU}}{\leq} \left(\int\limits_{I\!R^3} \left|\mu_c(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)} - \mu_{c,n}(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)}\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \left(\int\limits_{I\!R^3} \left|\mu_{c,n}(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)} - \mu_{c,n}(\mathbf{x})\, e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_{t,n}(\mathbf{x},\omega)}\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int\limits_{I\!R^3} |\mu_c(\mathbf{x}) - \mu_{c,n}(\mathbf{x})|^2 \underbrace{e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)\cdot 2}}_{\leq 1} d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + \left(\int\limits_{I\!R^3} |\mu_{c,n}(\mathbf{x})|^2 \left|e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)} - e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_{t,n}(\mathbf{x},\omega)}\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\mu_c - \mu_{c,n}\|_2 + M \left(\int\limits_{I\!R^3} \left|e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega)} - e^{-\mathcal{D}^\varphi_\psi\mu_{t,n}(\mathbf{x},\omega)}\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\overset{2.10}{\leq} \|\mu_c - \mu_{c,n}\|_2 + M \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left| \mathcal{D}_\psi^\varphi \mu_t(\mathbf{x},\omega) - \mathcal{D}_\psi^\varphi \mu_{t,n}(\mathbf{x},\omega) \right|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{2.9,(*)}{\leq} \|\mu_c - \mu_{c,n}\|_2 + M\widetilde{k}\, |\mu_t - \mu_{t,n}|_2$$

$$\leq \underbrace{\max\{1, M\widetilde{k}\}}_{=:k} \left( \|\mu_c - \mu_{c,n}\|_2 + |\mu_t - \mu_{t,n}|_2 \right)$$

$$= k\, |\mu - \mu_n|_2 \, .$$

In $(*)$ geht dabei zusätzlich die Linearität von $\mathcal{D}_\psi^\varphi$ und damit die von $D$ und $\psi$ bzgl. des ersten Argumentes ein. ■

### 2.2.3 Schlechtgestelltheit des inversen Problems

Die theoretischen Untersuchungen des kontinuierlichen Operators $S_\varphi^c$ werden nun mit einer über die unbefriedigende Aussage von Korollar 2.7 hinausreichenden Analyse der in Kapitel 2.2.1 aufgeworfenen Frage zur Schlechtgestellheit des inversen Problems abgerundet. Während SCHMITT in [46] durch die *a-priori*-Annahme $\mu_t := \beta^{-1}\mu_c$ recht schnell zu einer Abschätzung der Lösung $|\mu_c^*|$ von $S_c^\beta\left(\mu_c, \beta^{-1}\mu_c\right) = g$ des inversen Problems durch die Norm der Daten $g$ gelangt, soll an dieser Stelle konsequent auf eine derartige Vorabinformation verzichtet werden. Damit einhergehend muß aber auch automatisch auf Grund der Struktur von $S_\varphi^c$ eine Beschränkung der Lösung $\mu := (\mu_c, \mu_t) \in \mathcal{M} \times Y_\psi$ durch die Norm der Daten $g_\varphi$ ohne weitere Informationen aufgegeben werden.

Wird für einen Moment der nichtlineare Operator $S_\varphi^c$ vom physikalischen Hintergrund abstrahiert und die Unabhängigkeit der Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ ins Licht der Betrachtungen gehoben, so bietet sich die folgende Fragestellung an. Läßt sich eine der beiden gesuchten Objektfunktionen durch die Norm der Daten $g_\varphi$ abschätzen, wenn die andere als bekannt vorausgesetzt wird? Die Untersuchung dieser Fragestellung führt zu den folgenden Aussagen:

**Proposition 2.12** *Sei* $(\mu_c, \mu_t) \in \mathcal{M} \times Y_{\psi,+}$*, dann gilt:*

$$|\mu_c(\mathbf{x})| \quad \leq \quad |g_\varphi(\mathbf{x})|\, e^{k_c} \, . \tag{2.22}$$

**Beweis:**
Allein die Voraussetzung $\mu_t \in Y_{\psi,+}$ sichert die Existenz von $\mathcal{D}_\psi^\varphi$, also gilt

$$D\mu_t(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z) + D(\psi\mu_t(\mathbf{x}, \omega_\phi(\mathbf{x}))) \quad \leq \quad k_c$$

und somit folgt aus (2.11) die Abschätzung

$$|\mu_c(\mathbf{x})| \;=\; \left|g_\varphi(\mathbf{x})\, e^{D\mu_t(\mathbf{x},-\mathbf{n}_z)+D(\psi\mu_t(\mathbf{x},\omega_\phi(\mathbf{x})))}\right| \;\le\; |g_\varphi(\mathbf{x})|\; e^{k_c}\;.$$

■

**Bemerkung 2.13** *Für praktische Anwendungen ist es natürlich wünschenswert, genauere Informationen über den Wert der Konstanten $k_c$ zu erhalten oder zumindest deren Größenordnung angeben zu können. Da $k_c$ sowohl von geometrischen Kenngrößen wie den Objektausmaßen und der Meßgeometrie als auch von der Objektfunktion $\mu_t$ selbst abhängig ist, bietet sich in der Praxis eine Zerlegung der Form $k_c := k_{c,M} \cdot k_{c,O}$ an, wobei der geometrieabhängige Faktor $k_{c,M}$ leicht bei gegebener Meßanordnung berechnet, während der objektabhängige Faktor $k_{c,O}$ lediglich durch weitere a priori-Informationen abgeschätzt werden kann.*

**Proposition 2.14** *Sei $(\mu_c, \mu_t) \in \mathcal{M} \times Y_{\psi,+}$, wobei die $\mathcal{M}$ definierende obere Schranke $M$ explizit vorgegeben sei. Dann ist die unabhängige Lösungskomponente $\mu_t$ von $S^c_\varphi(\mu_c, \mu_t) = g_\varphi$ durch die aufbereiteten reziproken Daten $\dfrac{\mu_c(\mathbf{x})}{g_\varphi(\mathbf{x})}$ im Mittel beschränkt, genauer gilt mit $k_t := \max\limits_{\mathbf{x}\in K} \dfrac{\mu_c(\mathbf{x})}{g_\varphi(\mathbf{x})}$:*

$$\|\mu_t\|_1 \;\le\; x_{max}\, y_{max}\, \ln k_t\,. \tag{2.23}$$

Vor dem Beweis dieser Aussage soll der Kerngedanke von 2.14 herausgearbeitet werden. Die Zusammenfassung findet sich in der folgenden

**Bemerkung 2.15** *In der Situation von Proposition 2.14 kann ohne Einschränkung $k_t > 1$ angenommen werden, da gemäß der Definition von $S^c_\varphi$ in Verbindung mit der grundsätzlichen Eigenschaft $\mu_c(\mathbf{x}) \le \mu_t(\mathbf{x})$ stets $\mu_c(\mathbf{x}) > g_\varphi(\mathbf{x})$ gilt. Hierbei soll natürlich von der Trivialität $\mu_t \equiv \mu_c \equiv g_\varphi \equiv 0$ absehen werden. In diesem Kontext liefert Proposition 2.14 im Einklang mit den formulierten Funktionenräumen $X$ und $Y_\psi$ eine schwache Abschätzung der Lösungskomponente $\mu_t$ bei gegebener Komponente $\mu_c$.*

**Beweis:**
Die den kontinuierlichen Vorwärtsoperator $S^c_\varphi$ definierende Gleichung (2.11) ist für $g(\mathbf{x}) \neq 0$ äquivalent zu

$$\ln\left(\frac{\mu_c(\mathbf{x})}{g_\varphi(\mathbf{x})}\right) \;=\; D\mu_t\,(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z) + D\,(\psi\mu_t)\,(\mathbf{x}, \omega_\varphi(\mathbf{x}))\;.$$

Aus dieser Gleichung folgt zusammen mit der Definition von $k_t$ die zwar recht grobe, aber für alle $\mathbf{x} \in K$ gültige Abschätzung

$$D\mu_t\,(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z) \quad \leq \quad \ln k_t\,.$$

Letztere Ungleichung gilt also insbesondere auch für solche $\mathbf{x}_0 \in K$, die der Forderung $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{n}_z = z_{max}$ genügen, und für diese gilt die Identität

$$D\mu_t\,(\mathbf{x}_0, -\mathbf{n}_z) \quad = \quad \mathcal{P}\mu_t\,(\pi_z(\mathbf{x}_0), \mathbf{n}_z)\;,$$

wobei $\pi_z(\mathbf{x})$ die orthogonale Projektion von $\mathbf{x}$ in die $x, y$-Ebene bezeichnet. Gemäß der Definition von $X$ existieren weiter sämtliche Linienintegrale über $|\mu_t|^p$, somit spielt nach dem Satz von FUBINI die Integrationsreihenfolge keine Rolle und es folgt die Abschätzung

$$\|\mu_t\|_1 \quad = \quad \int\limits_{I\!R^3} |\mu_t|\,d\mathbf{x} \quad = \quad \int\limits_{I\!R^2} \mathcal{P}\,|\mu_t|\,(\pi_z(\mathbf{x}), \mathbf{n}_z)\;dxdy \;\leq\; x_{max}\,y_{max}\,\ln k_t\,.$$

■

Mit diesen Abschätzungen für die beiden unabhängigen Lösungskomponenten sind die theoretischen Untersuchungen zum kontinuierlichen Vorwärtsproblem abgeschlossen. Da $S^c_\varphi$ bezüglich $\mu_t$ stark glättend wirkt, ist für diese Lösungskomponente ohne weitergehende Informationen auch keine schärfere Abschätzung zu erwarten.

## 2.3 Das diskrete Vorwärtsmodell

Wie eingangs des Kapitels erwähnt, diente das kontinuierliche Vorwärtsmodell lediglich theoretischen Zwecken, in der Praxis läßt sich der dafür erforderliche *ideale Detektor* nicht realisieren. Aus dem oben beschriebenen Modell läßt sich jedoch rasch eine diskrete Version für die 3D-Rückstreutomographie herleiten. Dies stellt den Inhalt dieses Abschnittes dar. Da das diskrete Vorwärtsmodell gleichzeitig die Basis für die Bereitstellung der für die Rekonstruktionsalgorithmen erforderlichen synthetischen Daten bildet, finden sich an dieser Stelle auch Hinweise auf die Implementierung dieses Modells. Somit wird in diesem Kapitel ersichtlich werden, welche der im ersten Kapitel aufgeführten physikalischen Effekte in der Simulation tatsächlich berücksichtigt wurden und welche nicht in dieses Modell eingegangen sind.

### 2.3.1 Funktionenräume und diskreter Vorwärtsoperator

Grundlage des im Folgenden beschriebenen diskreten Vorwärtsmodells bildet die in Kapitel 2.1 dargelegte 3D-Meßgeometrie. Zusammen mit den dort getroffenen

Vereinbarungen ergibt sich aus dem im ersten Kapitel hergeleiteten physikalischen Modell für jeden Quellpunkt $\mathbf{x}_q := (x_i, y_j, -z_q) \in \mathcal{Q}$ und jede durch die Kollimatorposition $\mathbf{x}_c \in \mathcal{C}_{i,j}$ vorgegebene Meßrichtung $\varphi_n$ für die vom Detektorelement $D_k$ gemäß Abbildung 2.2 gemessene Intensität $I(\mathbf{x}_q, \varphi_n, D_k)$:

$$I_{\varphi_n}(\mathbf{x}_q, D_k) \quad = \quad I_0 \int\limits_{\mathcal{I}_k} W(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_z)\, \mu_c(\mathbf{x})\, e^{-D\mu_t(\mathbf{x},-\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\omega_{\varphi_n}(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x}\,.$$

Ein Vergleich mit dem kontinuierlichen Modell zeigt, daß dieses diskrete Modell aus (2.11) durch Aufsummieren aller Linienintegrale über $\mathcal{I}_k$ erfolgt. Dies hat zur Folge, daß die Voraussetzungen an $\mu_c$ abgeschwächt werden können. Die prinzipiell mögliche Abschwächung soll jedoch hier zu Gunsten einer übersichtlichen Darstellung nicht völlig ausgereizt werden. Daher fällt bei der Behandlung des diskreten Problems die Wahl für den $\mu_c$ zugrunde liegenden Raum auf den bereits eingeführten Funktionenraum $X$. Zusammenfassend steht somit der folgende, das diskrete Problem der 3D-Rückstreutomographie vollständig beschreibende,

**Satz 2.16** *Seien die geometriespezifischen Kenngrößen $\mathcal{Q}$ (Quellenfeld), $\mathcal{C}_{i,j}$, $i = 1, \ldots, N_{q,x}, j = 1, \ldots, N_{q,y}$, (Kollimatorpositionen) und $D_k, k = 1, \ldots, N_d$, (Detektorelemente) wie in Kapitel 2.1.2 definiert. Weiter seien $\mathbf{x}_q \in \mathcal{Q}$ und $\omega_{\varphi_n}(\mathbf{x}), n = 1, \ldots, N_{c,p}$, für $\mathbf{x} \in K$ durch (2.6) beschrieben, wobei $\varphi_n$ gemäß (2.1) definiert ist. Dann wird das diskrete Problem der Rückstreutomographie beschrieben durch*

$$S^d_{\varphi_n} \; : \; X \times Y_{\psi,+} \longrightarrow X\,,$$

$$(\mu_c, \mu_t) \longmapsto S^d_{\varphi_n}(\mu_c, \mu_t)\;,$$

$$S^d_{\varphi_n}(\mu_c, \mu_t)(\mathbf{x}_q, D_k) = \int\limits_{\mathcal{I}_k} W(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\, \mu_c(\mathbf{x})\, e^{-D\mu_t(\mathbf{x},-\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\omega_{\varphi_n}(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x}, \quad (2.24)$$

*wobei $Df$ für $f \in Y_\psi$, $\mathbf{x} \in K$, $\omega \in S^2$ durch*

$$Df(x, \omega) \quad = \quad \int\limits_0^\infty f(\mathbf{x} + \tau\omega)\, d\tau \qquad (2.25)$$

*definiert ist und $\mu_c(\mathbf{x})$, $\mu_t(\mathbf{x})$ abkürzend für $\mu_c(\mathbf{x}, E_{in})$, $\mu_t(\mathbf{x}, E)$ stehen.*

**Beweis:**
Mit der leichten Abwandlung der aufbereiteten Größen

$$g^d_{\varphi_n}(\mathbf{x}_q, D_k) \quad := \quad \frac{I_{\varphi_n}(\mathbf{x}_q, D_k)}{I_0}$$

als Daten $S^d_{\varphi_n}(\mu_c, \mu_t)(\mathbf{x}_q, D_k)$ des diskreten Vorwärtsproblems kann der Beweis von Satz 2.3 der Form nach übernommen werden. ∎

In dem in Satz 2.16 dargestellten Modell sind alle für die Rückstreutomographie wesentlichen physikalischen Effekte, wie sie im ersten Kapitel behandelt wurden, berücksichtigt: die Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ werden als unabhängige Größen behandelt, ihre Energieabhängigkeit geht in dem Energiefunktional $\psi$ auf und Charakteristiken der Meßgeometrie oder der Detektorelemente werden durch die Funktion $W(z)$ beschrieben.

Jedoch stellt auch das diskrete Modell 2.16 seinem Wesen als Modellierung nach lediglich einen kleinen Auszug der realen Gegebenheiten dar und erhebt, wie es allen Abbildungen zu eigen ist, keinen Anspruch auf Vollständigkeit. So finden zum Beispiel die in der nun folgenden Bemerkung zusammengefaßten Sachverhalte in diesem diskreten Modell aus unterschiedlichen Gründen keine Berücksichtigung.

**Bemerkung 2.17** *Idealisierungen im diskreten Modell* [7]*:*

*(i) Der Strahlverlauf, wie er in (2.4),(2.5) dargestellt ist, entspricht einer dahingehenden Idealisierung, daß von Mehrfachstreuungen abgesehen wird. Dies wird durch die Tatsache gerechtfertigt, daß mit jedem Streuvorgang vom Comptontyp ein Energieverlust der gestreuten Photonen einhergeht und mit stark abnehmender Photonenenergie die Wahrscheinlichkeit einer weiteren Streuung stark reduziert ist.*

*(ii) Ebenso sind die in der Praxis verwendeten Röntgenröhren nicht strikt monochromatisch, sondern liefern ein für die jeweilige Röhre charakteristisches Frequenzspektrum, dessen Breite bei qualitativ hochwertigen Röntgenquellen jedoch so gering ist, daß die Objektfunktionen über dieses Spektrum hin als konstant angesehen werden können.*

*(iii) Schließlich wurde zum Beispiel in der vom Fraunhoferinstitut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren verwendeten Comscanapparatur ein Überlappen der einzelnen Detektorelemente festgestellt. Dieser Mangel kann jedoch zumindest im konkreten Fall durch eine Ausdehnung des Trägers für die charakteristischen Funktionen der Detektorelemente behoben werden.*

### 2.3.2 Erzeugung synthetischer Daten

Da zur Zeit leider keine Möglichkeit besteht, real gemessene Daten zum Testen der in den beiden folgenden Kapiteln dargestellten Rekonstruktionsverfahren zur

[7] Zu den hier aufgeführten Einschränkungen sei insbesondere auf Gorshkov [15] und Schmitt [46], für weiterführende Probleme auf die Studien von Gorshkov [18] verwiesen.

3D-Rückstreutomographie zu gewinnen, wird an dieser Stelle auf die Erzeugung simulierter Daten mit Hilfe des diskreten Vorwärtsmodells zurückgegriffen. Daher sollen nun die technischen Einzelheiten dieser Datengewinnung vorgestellt werden.

### Die simulierte Röntgenquelle

Für die unterschiedlichen Anwendungsgebiete werden im Einzelnen die folgenden Röntgenquellen verwendet. Die quellpunktorientierten Rekonstruktionsverfahren des folgenden Kapitels erfordern eine monochromatische, einen feinen Strahl aussendende Quelle. Die verwendete Photonenenergie hängt dabei stark von den Anwendungsgebieten ab: für Simulationsbeispiele aus dem Bereich des *zerstörungsfreien Prüfens* ist eine Photonenenergie von 160keV angenommen, für Anwendungen auf dem Gebiet der Minendetektion hingegen erfolgt die synthetische Datengewinnung mit einer simulierten Photonenenergie von 450keV.

### Testobjekte

Zum Testen der Rekonstruktionsalgorithmen werden Datensätze zu verschiedenen Objekten erzeugt. Diese bestehen im Einzelnen aus:

(i) Einem Betonwürfel, in dem verschiedene Eisensegmente eingelassen sind. Diese Art von Testobjekten dient der Kontrolle, ob die verwendeten Algorithmen auch tatsächlich auf Materialien hoher Dichtewerte angewendet werden können.

(ii) Einem Betonwürfel, in dem statt der Eisensegmente Einschlüsse aus Aluminium enthalten sind. Hier wird überprüft, ob Materialien ähnlicher Dichtewerte unterschieden werden können.

(iii) In einer weiteren Reihe werden die quaderförmigen Gebilde der vorhergehenden Punkte durch Kugeln ersetzt. Diese Beispiele demonstrieren, daß die Rekonstruktionsverfahren auch in solchen Fällen zu guten Ergebnissen führen, in denen die Geometrie der Testobjekte nicht der Diskretisierung des Verfahrens angepaßt ist.

(iv) Simulation von regulär vergrabenen Antipanzer- und Antipersonenminen.

Die Absorptions- und Comptonkoeffizienten $\mu_t(E)$ und $\mu_c(E)$ für die verschiedenen Materialien wurden durch Interpolation mittels kubischer Splines gewonnen, dabei stammen die in den Tabellen B.3 sowie B.4 und B.5 auszugsweise aufgelisteten Stützwerte aus der online auf der Internetseite „*http://physics.nist.gov/*“ zur

Verfügung stehenden Datenbank des *National Institute of Standards and Technology* [8].

### Auflösung der Daten

Die synthetisch erzeugte Datenmenge richtet sich nach der gewünschten Auflösung der Rekonstruktionen. Die Verfahren des folgenden Kapitels basieren auf einem quaderförmigen, in $128^3$ Voxel zerlegten, Rekonstruktionsgebiet. Dabei wurden 72 gleichmäßig über $S^1$ verteilte Meßrichtungen aufgenommen. Pro Meßrichtung und Voxel wurden zur Berechnung der Integrale über $\mathcal{I}_k$ mittels einer adaptiven Newton-Cotes-Quadraturformel fünf Stützstellen ausgewertet.

### Berechnung der Dämpfungsterme

Für die auf der Basis von (2.24) erzeugten Daten gestattet die Zerlegung der Testobjekte in Voxel eine exakte Auswertung (sehen wir einmal von der Splineinterpolation der Objektfunktionen für die verschiedenen Streuenergien ab) des Dämpfungsoperators

$$\mathcal{D}_{\psi}^{\varphi_n}(\mathbf{x}) \;:=\; D\mu_t(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z) + D(\psi\mu_t)(\mathbf{x}, \omega_{\varphi_n}(\mathbf{x})) \,. \tag{2.26}$$

Jedoch müssen dazu alle auftretenden Schnitte der Strahlengänge mit dem Voxelgitter berechnet werden. Um den dabei aufzuwendenden Speicherbedarf nicht unnötig groß werden zu lassen, werden diese Schnitte lediglich für einen Quellstrahl und den Meßwinkelbereich $[\,0, \frac{\pi}{4}\,]$ berechnet, alle übrigen Schnittlängen können aus diesen unter Ausnutzen von Verschiebungs- und Rotationsinvarianzen bestimmt werden.

### Die charakteristische Funktion $W(z)$

Die in Abschnitt 2.1.4 eingeführte Funktion $W(z)$ entspricht der von Gorshkov in [18] untersuchten *Transmissionsfunktion* und beschreibt die Sensibilität der Meßanordnung. In der Praxis kann $W(z)$ durch das in 2.1.4 beschriebene Verfahren experimentell bestimmt werden. Werden die Meßdaten jedoch synthetisch gewonnen, muß die charakteristische Funktion ebenfalls simuliert werden. Dies kann unter der Annahme geschehen, daß die einzelnen Detektorelemente ein identisches Sensibilitätsverhalten aufweisen und dieses anhand der Stützwerte in Tabelle B.6 definiert ist.

[8] Das *National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg MD 20899-8400,* stellt in der hier angegebenen Datenbank nahezu alle wichtigen physikalischen Materialkoeffizienten zur Verfügung. Für eine gedruckte, die Streuquerschnitte und Absorptionskoeffizienten beinhaltende Version sei auf [3] verwiesen.

# Kapitel 3

# Das inverse Problem der Rückstreutomographie

Ausgehend von dem im vorangehenden Kapitel hergeleiteten diskreten Modell der 3D-Rückstreutomographie werden nun numerische Verfahren zur Lösung des inversen Problems präsentiert. Ziel ist es, aus den auf Basis von (2.24) erzeugten synthetischen Daten die Objektfunktionen $\mu_t$ und $\mu_c$ zurückzugewinnen. Angegangen wird dieses Problem, indem in einem ersten Schritt bekannte Verfahren für die zweidimensionale Geometrie aus den bereits erwähnten Arbeiten von Gorshkov und Schmitt auf das dreidimensionale Problem übertragen werden. Sukzessive erfolgt dann in weiteren Schritten eine Anpassung der Rekonstruktionsverfahren an das verbesserte physikalische Modell. Zunächst findet die Energieabhängigkeit der Koeffizienten $\mu_c$ und $\mu_t$ Berücksichtigung, schließlich werden beide Objektfunktionen als eigenständige Funktionen rekonstruiert.

Die numerische Rekonstruktion der Objektfunktionen erfordert natürlich eine Diskretisierung des Objektes. In den Verfahren dieses Kapitels findet die in Abschnitt 2.1.2 vorgestellte Zerlegung Verwendung, unabhängig davon, ob die Erzeugung der synthetischen Daten auf einem solchen Zerlegungsgitter erfolgt ist oder nicht, wie dies in den kugelförmigen Beispielen der Fall sein wird.

Wie bereits von Schmitt in der zweidimensionalen Problemstellung erfolgreich angewendet, werden auch hier die sogenannten *Strippingverfahren* einen zentralen Baustein für die Rekonstruktionsalgorithmen darstellen. Unmittelbar im Anschluß an diese einführenden Worte wird die diesen Verfahren zugrunde liegende Idee dargestellt. Danach erfolgt die Erläuterung der einzelnen Verfahren, das Testen ihrer prinzipiellen Anwendbarkeit anhand der synthetisch erzeugten Daten und die Analyse ihrer Stärken und Schwächen. Nach der theoretischen Untersuchung eines die charakteristische Detektorfunktion $W(z)$ berücksichtigenden Verfahrens[1] werden einzelne *Strippingverfahren* unter der Annahme $W(z) \equiv 1$ hergeleitet. Eine Stabilitätsuntersuchung der vorgestellten Verfahren und ein weiteres Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Kampfmittelerkennung runden dieses Kapitel ab. Real gemessene Daten sind immer systematischen bzw. zufälligen Meßfehlern unterworfen, zumindest Fehler der zweiten Art können bei synthetisch erzeugten Daten so natürlich nicht auftreten. Daher wird den berechneten Daten eine normalverteilte Rauschfunktion überlagert, um auf diese Weise die zufälligen Meßfehler zu simulieren.

## 3.1 Idee der Strippingverfahren

Ziel der *Strippingverfahren* ist, die zu untersuchenden Objekte schichtweise aus den vorhandenen Meßwerten zu rekonstruieren. Dieses Vorgehen ist in Abbildung 3.1 skizziert: demnach wird das Rekonstruktionsgebiet in horizontal verlaufende Schichten, sogenannte *layer*, unterteilt. Nun werden die gesuchten Objektfunktionen sukzessive Schicht für Schicht berechnet, indem zur Berechnung des k-ten *layers* $L_k$ lediglich die Informationen über diese Objektfunktionen aus den bereits rekonstruierten Schichten $L_1 \dots L_{k-1}$ sowie die zur Schicht $L_k$ gehörenden Meßwerte berücksichtigt werden.

Für die 3D-Rückstreutomographie hat dieser Leitgedanke die Konsequenz, die auftretenden Linienintegrale so zu zerlegen, daß Anteile mit bekannten Objektfunktionen von denen der aktuell zu berechnenden Schicht separiert werden. Wie dies im Detail erfolgt, wird bei der Vorstellung der einzelnen Verfahren ersichtlich werden. Die zum Starten des *Strippingverfahrens* erforderliche erste Schicht, die im Allgemeinen an die Oberfläche des zu rekonstruierenden Objektes anschließt, wird als gegeben vorausgesetzt.

## 3.2 Rekonstruktionsverfahren

Die hier vorgestellten Verfahren beruhen sämtlich auf der Invertierung des in Satz 2.16 beschriebenen diskreten Vorwärtsproblems. Daher steht zu Beginn dieses Abschnittes die Darstellung dieser Invertierung.

[1] Auf ein numerisches Beispiel zu diesem Verfahren wird verzichtet, da die experimentelle Bestimmung von $W(z)$ von Gorshkov nur für den zweidimensionalen Fall durchgeführt wurde. Prinzipiell könnte dieses Rekonstruktionsverfahren mit den von ihm bestimmten (siehe [18]) und in Tabelle B.6 aufgeführten Werten implementiert werden. Jedoch müßte in praktisch relevanten Anwendungsbeispielen die lediglich eindimensionale Detektorfunktion durch eine zweidimensionale ersetzt werden.

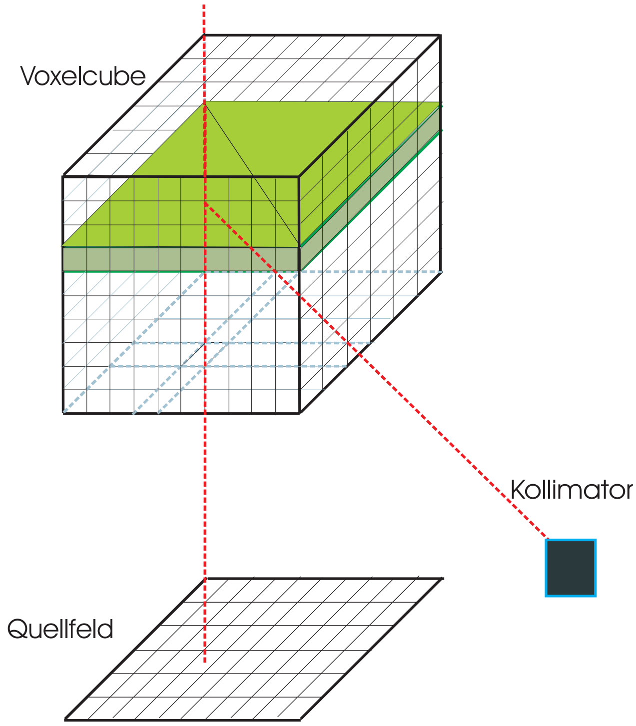


Abbildung 3.1: Idee der Strippingverfahren

### 3.2.1 Approximative Invertierung von $S^d_{\varphi_n}$

Wie in Kapitel 2.2 beschrieben, ist eine exakte analytische Invertierung von $S^d_{\varphi_n}$ nicht zu erwarten. Daher rückt die Frage nach einer approximativen Invertierung in den Mittelpunkt der Betrachtungen.

Ausgangspunkt ist Gleichung (2.24), die anhand $\varphi_n$ gegebene Meßrichtung sei zunächst fest. Bezeichnet weiter $g_{\varphi_n}(\mathbf{x}_q, k)$ die vom $k$-ten Detektorelement gemessenen, aufbereiteten Daten, dann folgt mit der vorgegebenen Diskretisierung für jede Quellposition $\mathbf{x}_q \in \mathcal{Q}$:

$$g_{\varphi_n}(\mathbf{x}_q, k) \quad := \quad \int_{\mathcal{I}_k} W(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_z)\, \mu_c(\mathbf{x})\, e^{-D\mu_t(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)(\mathbf{x}, \omega_{\varphi_n}(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x}\,. \tag{3.1}$$

Gemäß der beschriebenen Diskretisierung erfolgt die Rekonstruktion der gesuchten Objektfunktionen $\mu_t$ und $\mu_c$ auf einem Voxelgitter, so daß $\mu_t$ und $\mu_c$ innerhalb der einzelnen Voxel als konstant angenommen werden.

Die Indizierung des Voxelcubes geschieht wie folgt: bezeichnet

$$\mathbf{n} \quad \in \quad \{1, \ldots, N_{q,x}\} \times \{1, \ldots, N_{q,y}\} \times \{1, \ldots, N_d\}$$

ein natürliches Zahlentripel, wird durch $\mathbf{n} := (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ eindeutig der Voxel

$$\left[x_{\eta_1} - \frac{\delta_x}{2}\,,\, x_{\eta_1} + \frac{\delta_x}{2}\right[ \;\times\; \left[y_{\eta_2} - \frac{\delta_y}{2}\,,\, y_{\eta_2} + \frac{\delta_y}{2}\right[ \;\times\; [z_{\eta_3 - 1}, z_{\eta_3}[$$

beschrieben, wobei $(x_{\eta_1}, y_{\eta_2}, -z_q) \in \mathcal{Q}$ die zugehörige Position der Röntgenquelle und $\pi_z\,(\mathcal{I}_{\eta_3}) := [z_{\eta_3-1}, z_{\eta_3}[$ den vom Detektorelement $D_{\eta_3}$ gescannten *layer* $L_{\eta_3}$ darstellen. Mit $\delta_x, \delta_y$ werden die Auflösungen entlang der $x$- und $y$-Achse bezeichnet.

Durch Verwenden dieser Vereinbarungen läßt sich (3.1) auch folgendermaßen formulieren:

$$g_{\varphi_n}(\mathbf{n}) \;=\; \int\limits_{\mathcal{I}_k} W(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_z)\,\mu_c(\mathbf{x})\, e^{-D\mu_t(\mathbf{x},-\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\omega_{\varphi_n}(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x}\,.$$

Unter der Annahme, daß die einzelnen *layer* alle die gleiche vertikale Mächtigkeit $\Delta$ aufweisen, folgt mit Hilfe der oben angegebenen Diskretisierung und der Festlegung

$$\nu \;=\; \nu\,(\mathbf{n}) := (x_{\eta_1},\, y_{\eta_2},\, z_{\eta_3-1})$$

mittels Approximation der im Integral auftretenden Dämpfungsterme durch die Linienintegrale über die *virtuellen Streupunkte* $\nu + \dfrac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z$ weiter

$$\begin{aligned}
g_{\varphi_n}(\mathbf{n}) \;&=\; \mu_c(\mathbf{n})\, e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z)} \int\limits_{\mathcal{I}_k} W\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_z)\; e^{-\|\mathbf{x}-\nu\|_2\mu_t(\mathbf{n}) - D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\omega_{\varphi_n}(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x} \\
&\approx\; \mu_c\,(\mathbf{n})\, e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)}\; e^{-\frac{\Delta}{4}\mu_t(\mathbf{n})} \underbrace{\int\limits_{\mathcal{I}_k} W\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_z)\, d\mathbf{x}}_{=:V(\mathbf{n})} \\
&\approx\; \mu_c\,(\mathbf{n}) \underbrace{e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)\big|_\nu}}_{=:A(\mathbf{n})}\; e^{-\frac{\Delta}{4}\mu_t(\mathbf{n})}\, V\,(\mathbf{n}) \\
&=\; A\,(\mathbf{n})\; V\,(\mathbf{n})\;\, \mu_c\,(\mathbf{n})\, e^{-\frac{\Delta}{4}\,\mu_t(\mathbf{n})}\,. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $(\ldots)|_\nu$ die Einschränkung der divergenten Strahltransformation auf die bereits rekonstruierten Schichten.

Einbringen der für hinreichend hohe Photonenenergien sehr guten Approximation $\mu_c(\mathbf{x}, E_{in}) := \beta\mu_t(\mathbf{x}, E_{in})$, $\beta \in [1-\epsilon, 1[$, $\epsilon \ll 1, \epsilon > 0$ überführt diese Abschätzung zu einer nichtlinearen Gleichung der Form

$$\mu_t(\mathbf{n})\, e^{-\lambda\,\mu_t(\mathbf{n})} \;=\; \alpha(\mathbf{n})\,, \quad \lambda > 0\,, \tag{3.3}$$

aus welcher die Objektfunktion $\mu_t(\mathbf{n})$ bestimmt werden soll.

Die Lösung von (3.3) kann mit Hilfe der *Lambertschen $\mathcal{W}$-Funktion*[2] beschrieben werden, diese ist definiert durch den folgenden

**Satz 3.1** *Es existiert genau eine analytische Abbildung* $\mathcal{W} : \left[-\frac{1}{e}, \infty\right[ \longrightarrow [0, \infty[$, *welche der Funktionalgleichung*

$$\mathcal{W}(x)\, e^{\mathcal{W}(x)} = x \tag{3.4}$$

*genügt.*

In [7] ist eine Vielzahl an Anwendungsmöglichkeiten der *Lambertschen $\mathcal{W}$-Funktion* präsentiert, insbesondere auf dem Gebiet der Strömungsmechanik. Hier hingegen eröffnet Satz 3.1 umgehend eine Möglichkeit, die Lösung der nichtlinearen Gleichung (3.3) zu gewinnen. Dies ist Inhalt des nächsten

**Korollar 3.2** *Es sei die zu (3.3) äquivalente Gleichung*

$$x\, e^{-\lambda x} \;=\; y \tag{3.5}$$

*vorgelegt. Dann ist die Lösung von (3.5) für* $y < \dfrac{1}{e\,\lambda}$ *eindeutig durch*

$$x \;=\; -\frac{1}{\lambda}\,\mathcal{W}(-\lambda y) \tag{3.6}$$

*gegeben.*

**Beweis:**
Für $y < \dfrac{1}{e\,\lambda}$ folgt $-\lambda y > -\dfrac{1}{e}$ und somit gilt $-\lambda y \in D(\mathcal{W})$. Folglich führt das

[2] Eine ausführliche Abhandlung über diese Funktion wird in [7] geboten. Dort findet sich auch der Beweis von Satz 3.1.

Einsetzen von $x := -\frac{1}{\lambda}\mathcal{W}(-\lambda y)$ in die linke Seite von (3.5) unter Berücksichtigung von Satz 3.1 zu

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda}\mathcal{W}(-\lambda y)\; e^{-\lambda \frac{1}{-\lambda}\mathcal{W}(-\lambda y)} &= -\frac{1}{\lambda}\,\mathcal{W}(-\lambda y)\; e^{\mathcal{W}(-\lambda y)} \\ &= -\frac{1}{\lambda}\,(-\lambda y) = y\,. \end{aligned}$$

Das Beachten der strikten Monotonie der Funktion $x \longmapsto f(x) := x\,e^{-\lambda x}$ für $x \in \left]-\infty, \frac{1}{\lambda}\right]$ liefert dann die geforderte Eindeutigkeit der Lösung, und somit ist das Korollar vollständig bewiesen. ■

Einbringen der Ergebnisse des letzten Satzes und des ihm folgenden Korollars in (3.2) führt dann zusammenfassend zu folgendem approximativen Invertierungsverfahren für das in Satz 2.16 beschriebene diskrete Vorwärtsmodell.

**Satz 3.3** *Für eine feste Meßrichtung $\varphi_n$ seien $g_{\varphi_n}(\mathbf{n})$ die durch (2.24) gegebenen Meßdaten. Weiter sei $\mu_t|_{L_1}$ gegeben. Dann ergibt sich unter Verwendung der in diesem Abschnitt beschriebenen Näherungen die folgende Approximation an die gesuchten Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$:*

*für $k = 2, \ldots, N_d$:*

$\mathbf{n} = (\eta_1, \eta_2, k)\ ,\ (\eta_1, \eta_2) \in \{1, \ldots, N_{q,x}\} \times \{1, \ldots, N_{q,y}\}$,

$$V(\mathbf{n}) = \int\limits_{\mathcal{I}_k} W(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_z)\; d\mathbf{x}\,, \tag{3.7}$$

$$A(\mathbf{n}) = e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z) - D(\psi\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)\Big|_\nu}\,, \tag{3.8}$$

$$\mu_t(\mathbf{n}) = -\frac{4}{\Delta}\,\mathcal{W}\left(-\frac{\Delta\, g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{4\beta\, A(\mathbf{n})\; V(\mathbf{n})}\right)\,, \tag{3.9}$$

$$\mu_c(\mathbf{n}) = \beta\,\mu_t(\mathbf{n})\,. \tag{3.10}$$

Zu der hier beschriebenen Invertierung, deren Ziel die möglichst umfassende Berücksichtigung aller im Vorwärtsmodell 2.16 angesprochenen physikalischen Aspekte ist, sollen nun noch einige erläuternde Bemerkungen angeführt werden. Zunächst zu der Auswertung der *Lambertschen $\mathcal{W}$-Fuktion*:

**Bemerkung 3.4** *Der in Satz 3.3 angegebene Invertierungsalgorithmus erfordert die Auswertung der durch (3.4) implizit gegebenen Lambertschen $\mathcal{W}$-Funktion. Da* *die diese Funktion definierende Gleichung nichtlinear ist, bietet es sich an, die Auswertung der Funktion an einigen Stützstellen* $x_k, k = 1, \dots, N_{\mathcal{W}}$*, vorzunehmen und die Auswertung mit Hilfe eines Newtonverfahrens durchzuführen. Dazu kann die Newtoniteration*

$$\mathcal{W}^{n+1}(x_k) \;=\; \mathcal{W}^n(x) - \frac{\mathcal{W}^n(x_k)\, e^{\mathcal{W}^n(x_k)} - x_k}{\left(1 + \mathcal{W}^n(x_k)\right) e^{\mathcal{W}^n(x_k)}}\,, \qquad n \in I\!N_0\,, \tag{3.11}$$

*mit den Startwerten*

$$\mathcal{W}^0(x_k) \;:=\; \begin{cases} x_k & , \;\; \textit{für } \; x_k \ll 1 \\ \log(x_k) & , \;\; \textit{sonst} \end{cases}$$

*verwendet werden. Zusätzliche Kenntnis der Größenordnung der auftretenden Argumente ermöglicht die entsprechende Wahl der Stützwerte. Diese können dann unabhängig vom Invertierungsverfahren vorberechnet werden.*

Zu der Approximationsgüte der durch (3.7), (3.8) und (3.10) definierten Größen $V(\mathbf{n})$, $A(\mathbf{n})$ sowie der Objektfunktion $\mu_c(\mathbf{n})$ gibt die folgende Bemerkung Aufschluß:

**Bemerkung 3.5** *Die Approximationsgüte der in Satz 3.3 angegebenen Größen wird im Einzelnen durch die unten aufgeführten Faktoren bestimmt:*

*(a) Der Aufbau einer realen Meßapparatur verlangt die Kenntnis der charakteristischen Funktion* $W(t)$ *für die einzelnen Detektorelemente. Da diese nach dem in Kapitel 2.1.4 beschriebenen Verfahren gewonnen wird, bestimmt die vertikale Abtastrate die Anzahl der Stützstellen zur numerischen Berechnung des Integrals* $V(\mathbf{n})$ *und somit die Genauigkeit dieser Approximation.*

*(b) In (3.8) sind gleich zwei Approximationen enthalten: zum einen werden die Dämpfungsfaktoren des Integrals (3.1) durch einen stellvertretenden Strahlengang mit dem virtuellen Streupunkt* $\nu + \frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z$ *angenähert, zum anderen sind in* $A(\mathbf{n})$ *nur die Dämpfungsanteile berücksichtigt, die ihre Ursache durch Absorption in den bereits rekonstruierten layern* $L_1, \dots, L_{k-1}$ *finden. Da*

$$\lambda^1\left(L_k \cap \left(L_q\left(\nu + \frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right) \oplus L_d\left(\nu + \frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)\right) \;\approx\; 0$$

*für* $\Delta \ll 1$ *und* $\mu_t \in Y_\psi$*, ist die letztere Approximation sicher unbedenklich, wohingegen Erstere nur dann angebracht ist, wenn die zu rekonstruierenden Details nicht an die Größenordnung der verwendeten Auflösung heranreichen.*

(c) *Die Zusatzannahme $\mu_c = \beta\mu_t$, $\beta$ geeignet, stellt, wie die Untersuchungen des ersten Kapitels zeigen, dagegen lediglich in speziellen Anwendungsgebieten der Rückstreutomographie eine vertretbare Modellierung der realen Gegebenheiten dar. Ist die Energie der emittierten Photonen ausreichend hoch, so ist diese Zusatzannahme zumindest in ihrer abgeschwächten Form $\mu_c(E_{in}) = \beta\mu_t(E_{in})$ haltbar, wie in den Tabellen B.3 - B.5 zum Ausdruck kommt.*

Nachdem nun eine grundsätzliche approximative Invertierungsmöglichkeit von (2.24) vorgestellt wurde, werden in den nun folgenden Abschnitten anwendungsorientierte Rekonstruktionsverfahren explizit angeben.

### 3.2.2 Parameter-Verfahren für ideale Detektoren

Unter einem idealen Detektor wird eine vertikale Anordnung von $N_D$ identischen Detektorelementen verstanden, deren jeweilige charakteristische Funktionen $W_k(t)$, $k = 1, \ldots, N_D$, gegeben sind durch

$$W_k(t) \quad = \quad \chi_{[\,z_{k-1}, z_k\,[}\,.$$

Die einzelnen Elemente überlappen demnach nicht, ihre Sensibilität ist nicht von dem Einfallswinkel der auftreffenden Strahlung abhängig und die einzelnen *layer* des Rekonstruktionsgebietes können eindeutig mit dem entsprechenden Detektorelement identifiziert werden.

Unter dieser Voraussetzung vereinfacht sich das im letzten Kapitel hergeleitete diskrete Vorwärtsmodell 2.16 zu

$$g_{\varphi_n}(\mathbf{n}) \quad = \quad \int\limits_{\mathcal{I}_k} \mu_c(\mathbf{x})\, e^{-D\mu_t(\mathbf{x},-\mathbf{n}_z)-D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\omega_{\varphi_n}(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x}\,. \tag{3.12}$$

Eine approximative Invertierung dieses vereinfachten Modells wurde für eine zweidimensionale Meßgeometrie von Schmitt in [46] vorgenommen. Diese wird nun auf den dreidimensionalen Fall erweitert. Mit den Notationen des vorangehenden Abschnittes folgt

$$\begin{aligned}
g_{\varphi_n}(\mathbf{n}) &= \mu_c(\mathbf{n})\ e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z)} \int\limits_{\mathcal{I}_k} e^{-\|\mathbf{x}-\nu\|_2\mu_t(\mathbf{n})-D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\omega_{\varphi_n}(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x} \\
&\approx \mu_c(\mathbf{n})\ e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z)}\ e^{-D(\psi\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)} \int\limits_{\mathcal{I}_k} e^{-\|\mathbf{x}-\nu\|_2\mu_t(\mathbf{n})}\, d\mathbf{x} \\
&= \frac{\mu_c(\mathbf{n})}{\mu_t(\mathbf{n})}\, e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z)}\ e^{-D(\psi\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)}\ \left(1-e^{-\Delta\mu_t(\mathbf{n})}\right) \\
&= \frac{\mu_c(\mathbf{n})}{\mu_t(\mathbf{n})}\, \underbrace{e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z)}}_{=:A^{in}(\mathbf{n})}\ \underbrace{e^{-\lambda^1\left(L_d\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\cap L_k\right)(\psi\mu_t)(\mathbf{n})}}_{\approx 1}\ \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots\ \underbrace{e^{-D(\psi\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)\chi_{L_k^c}}}_{=:A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\ \left(1-e^{-\Delta\mu_t(\mathbf{n})}\right) \\
&\approx \frac{\mu_c(\mathbf{n})}{\mu_t(\mathbf{n})}\, A^{in}(\mathbf{n})\ A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})\ \left(1-e^{-\Delta\mu_t(\mathbf{n})}\right).
\end{aligned}$$

Ausnutzen des Prinzips der Strippingmethoden und sukzessives Rekonstruieren der Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ Schicht für Schicht führt dazu, daß bei der Berechnung des $k$-ten *layer* die Dämpfungsterme $A^{in}(\mathbf{n})$ und $A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})$ bei bekannter Funktion $\psi$ explizit bestimmbar sind.

Auf diese Weise vereinfacht sich die gestellte Aufgabe dahingehend, daß die unbequemen Nichtlinearitäten nicht mehr innerhalb der Integration auftreten. Es handelt sich jedoch immer noch um ein in der Objektfunktion $\mu_t$ nichtlineares Problem, welches über den Quotienten $\mu_c/\mu_t$ mit der zweiten zu bestimmenden Objektfunktion $\mu_c$ gekoppelt ist. Bei nur einer einzigen berücksichtigten Meßrichtung kann daher im Allgemeinen aufgrund der Unterbestimmtheit des Gleichungssystems für $\mu_c$ und $\mu_t$ keine eindeutige Lösung erwartet werden.

Die oben beschriebene abgeschwächte Form der für Materialien geringer Kernladungszahl gültigen Zusatzinformation $\mu_c(\mathbf{n}, E_{in}) = \beta\mu_t(\mathbf{n}, E_{in})$ gestattet es, dem Problem der Unterbestimmtheit zu entgehen und führt zu der als Ausgangspunkt der hier beschriebenen Rekonstruktionsverfahren dienenden Gleichung

$$g_{\varphi_n}(\mathbf{n}) \doteq \beta A^{in}(\mathbf{n})\ A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})\ \left(1-e^{-\Delta\mu_t(\mathbf{n})}\right). \tag{3.13}$$

Aus (3.13) ergibt sich unmittelbar für die im $k$-ten *layer* zu rekonstruierenden Objektfunktionen

$$\mu_t(\mathbf{n}) = -\frac{1}{\Delta}\log\left(1 - \frac{g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{\beta A^{in}(\mathbf{n})\, A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\right), \tag{3.14}$$

$$\mu_c(\mathbf{n}) := \beta\mu_t(\mathbf{n})\,. \tag{3.15}$$

Die oben dargestellte approximative Invertierung der *3D-Rückstreutomographie* führt somit zu einem ersten einfachen Rekonstruktionsalgorithmus, der sich wie folgt formulieren läßt.

**Parameter-Rekonstruktionsverfahren (PRV):**
Die Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ seien für den ersten *layer* $L_1$ als Vorinformation gegeben. Dann bestimmen sich $\mu_c$ und $\mu_t$ innerhalb $L_2, \ldots, L_{N_d}$ für die feste Meßrichtung $\varphi_n$ aus den gemessenen Daten $g_{\varphi_n}$ gemäß der Vorschrift

für $k = 2, \ldots, L_{N_d}$:

(1) $\forall \mathbf{n} := (\eta_1, \eta_2, k) \in L_k$:

(2) Berechnung der Dämpfungsterme $A^{in}(\mathbf{n})$ und $A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})$:

$$\begin{aligned} A^{in}(\mathbf{n}) &= e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z)} \\ A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n}) &= e^{-D(I\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)\chi_{L_k^c}} \end{aligned}$$

(3) Bestimmung von $\mu_t(\mathbf{n})$ im aktuellen *layer*:

$$\mu_t(\mathbf{n}) = -\frac{1}{\Delta}\log\left(1 - \frac{g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{\beta A^{in}(\mathbf{n})\, A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\right)$$

(4) Übertragung auf $\mu_c(\mathbf{n})$:

$$\mu_c(\mathbf{n}) := \beta\mu_t(\mathbf{n})$$

In diesem parameterabhängigen Rekonstruktionsverfahren (PRV) ist die Energieabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten $\mu_t$ vernachlässigt, also $\psi$ durch die

Identität ersetzt. Somit stellt (PRV) im Wesentlichen das von SCHMITT in [46] für den zweidimensionalen Fall beschriebene *Gorshkov-Verfahren* dar.

Des Weiteren blieb bisher die Frage nach der Wahl des Parameters $\beta$ unbeantwortet. Diese Fragestellung soll nun untersucht werden. Während sowohl GORSHKOV (siehe [18]) als auch SCHMITT (siehe [46]) $\beta \approx 1$ wählen, eine Annahme, die nur für hohe Photonenenergien und Materialien geringer Kernladungszahl zutreffend ist, wird dieser Parameter hier in Abhängigkeit des Anwendungsgebietes gewählt. Dies ist in sofern sinnvoll, als daß der Anwender solcher Rekonstruktionsverfahren zum Beispiel in der Praxis des *zerstörungsfreien Prüfens* über die Zusammensetzung der zu untersuchenden Objekte in der Regel a-priori Informationen besitzt. So ist es oft Ziel der Prüfverfahren, weitestgehend bekannte Objekte auf Verunreinigungen oder Defekte hin zu untersuchen. Dies bedeutet, daß zumindest die Größenordnung sowohl des Absorptionskoeffizienten als auch des Comptonkoeffizienten bekannt sind und mit diesen der Parameter $\beta$ geschätzt werden kann. Eine einfache Schätzung des Parameters $\beta$ für das Anwendungsgebiet des *zerstörungsfreien Prüfens* beinhaltet die

**Bemerkung 3.6** *Das zu analysierende Objekt bestehe aus einer Komposition der Materialien $m_1, \ldots, m_{N_m}$, $N_m \in I\!N$, geringer Kernladungszahlen ($Z \leq 13$), welche durch die Materialkoeffizienten $\mu_{c,1}, \ldots, \mu_{c,N_m}$ und $\mu_{t,1}, \ldots, \mu_{t,N_m}$ beschrieben seien. Bezeichnen weiter*

$$0 < p_i \quad i = 1, \ldots, N_m, \qquad \sum_{i=1}^{N_m} p_i = 1,$$

*die Anteile der Materialien $m_i$ im Objekt, so liefert die Lösung des quadratischen Minimierungsproblems*

$$\sum_{i=1}^{N_m} p_i^2 \left(\beta \mu_{t,i} - \mu_{c,i}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad \min$$

*bezüglich $\beta$ eine geeignete Näherung für den festen Parameter $\beta$.*

Wie schon SCHMITT [46] in seinen Untersuchungen anhand von Beispielen aus der 2D-Rückstreutomographie zeigte, versagt eine solche feste Parameterwahl völlig, wenn Materialien höherer Kernladungszahl in den zu untersuchenden Objekten einen nicht zu vernachlässigenden Anteil einnehmen. Da der Parameter $\beta$ für Materialien unterschiedlicher Kernladungszahlen $Z$ stark variieren kann, für ein bestimmtes Material $m_i$ bei fixierter Photonenenergie $E_0$ jedoch sicher den eindeutig bestimmten Wert $\beta_i := \mu_{c,i}\left(E_0\right) / \mu_{t,i}\left(E_0\right)$ annimmt, stellt sich die Frage, ob ein Rekonstruktionsverfahren nicht auch auf einer variablen Parameterwahl basieren kann. Ein solches Verfahren entspräche seiner Natur nach dann auch der Forderung, daß die zu rekonstruierenden Objektfunktionen nicht über einen

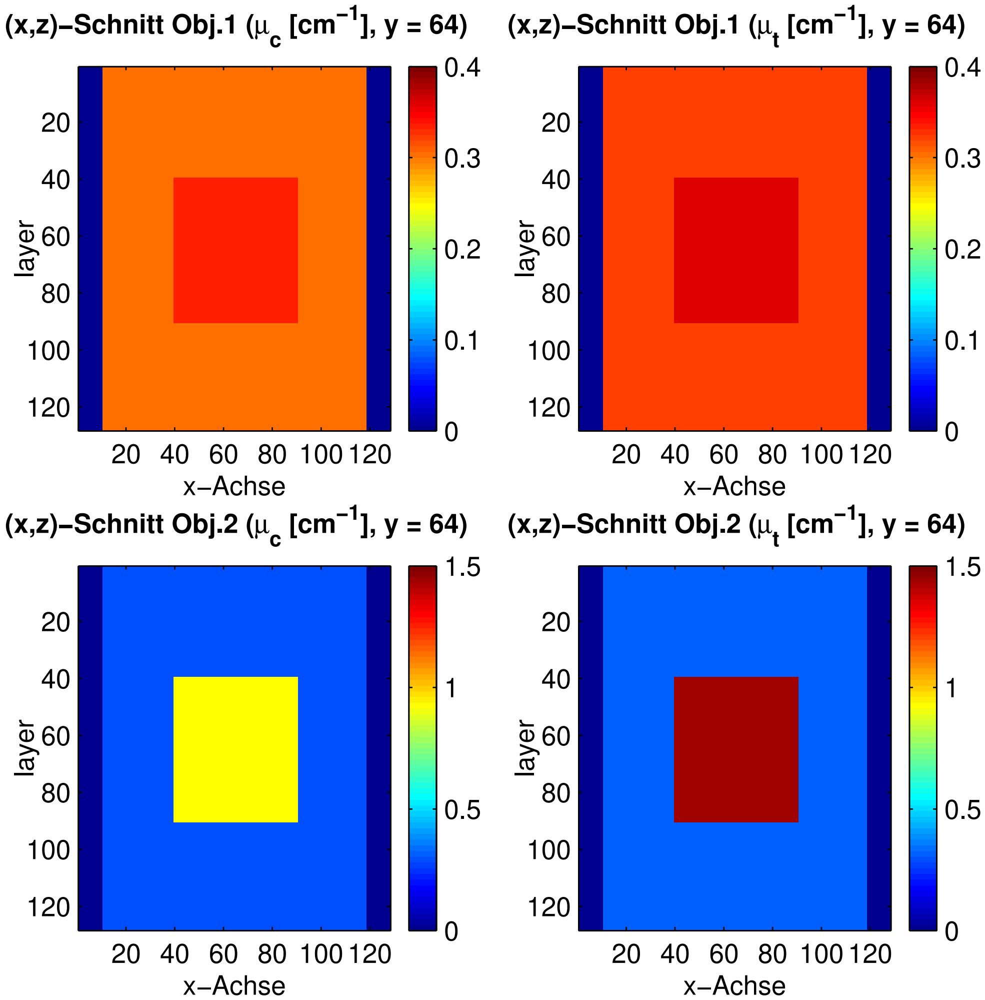


Abbildung 3.2: Binäre Testobjekte mit Al- bzw. Fe-Kern

festen funktionalen Zusammenhang gekoppelt sind. Weiter unten wird ein entsprechendes Verfahren mit einer adaptiven Parameterwahl vorstellt werden. Nun aber erfolgt die Angabe vergleichender Rekonstruktionsbeispiele für die Familie des oben hergeleiteten Verfahrens.

Das Rekonstruktionsverfahren (PRV) wird an einfachen binären Objekten getestet. Ein Schnitt dieser Objekte ist in Abbildung 3.2 zu sehen. Das erste Testobjekt besteht aus einem Betonquader, in dem ein Aluminiumeinschluß eingelassen ist, im zweiten Testobjekt ist dieser Aluminiumeinschluß durch einen Eisenkern ersetzt. Während die zu rekonstruierenden Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ des ersten Objekts zwar sehr dicht zusammenliegen (siehe Tabelle B.3 des Anhangs), dafür jedoch relativ gering sind[3], ist der Eisenkern des zweiten Objekts für eine sehr hohe Absorption der Röntgenstrahlen verantwortlich. Dies führt dazu, daß die Detektorelemente mit zunehmender Schichttiefe immer weniger einfallende Strahlung registrieren, folglich die Information über das Objekt immer schwächer ausfällt. Diese Situation ist vergleichbar mit dem Problem von Metallplomben in der Tomosynthese. Daher bietet dieses zweite Testobjekt Aufschluß über die Leistungsfähigkeit der Rekonstruktionsalgorithmen, aus sehr geringen Dateninformationen noch brauchbare Rekonstruktionsergebnisse zu liefern.

Anhand dieser beiden Testobjekte wird die Leistungsfähigkeit des Gorshkovverfahrens für verschiedene Parameterwerte von $\beta$ überprüft. Abbildung 3.3 zeigt in den oberen vier Bildern einen Schnitt der rekonstruierten Objektfunktionen für das erste Testobjekt: links für das ursprüngliche Gorshkovverfahren mit $\mu_c \equiv \mu_t$, rechts für die Parameterwahl $\beta = 0.939$. Die unteren Fehlerplots stellen den relativen Rekonstruktionsfehler der Verfahren für $\mu_c$ (rote(—) Linie) und $\mu_t$ (schwarze(—) Linie) bezüglich der $L_2$-Norm in Abhängigkeit der Schichttiefe dar.

Beide Verfahren sind demnach geeignet, den Aluminiumkern qualitativ zu beschreiben, zumindest dessen erste Schichten heben sich deutlich vom Betonhintergrund ab. Dies gilt für beide Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$. Problematisch erweist sich hingegen eine korrekte quantitative Beschreibung der Objektfunktionen mit Hilfe der hier dargestellten Verfahren. Wie diese Rekonstruktionsbeispiele deutlich erkennen lassen, nimmt die Rekonstruktionsqualität von Schicht zu Schicht immer mehr ab. Grundsätzlich fallen die rekonstruierten Werte in beiden Verfahren zu gering aus. Diese Qualitätsabnahme ist für das parameterabhängige Verfahren (PRV) zumindest für die ersten, dem Detektor zugewandten, *layer* nicht so dramatisch wie im vereinfachten Verfahren (GRV). So ergibt sich zum Beispiel für die erste rekonstruierte Schicht $L_2$ durch (PRV) lediglich ein relativer Fehler von $\Delta_{r,2}^{prv}(\mu_t) = 0.009$, während (GRV) einen Fehler der Größe $\Delta_{r,2}^{grv}(\mu_t) = 0.07$ produziert. Selbst für $L_{40}$, der ersten Schicht mit Aluminiumeinschluß, ist der Qualitätsunterschied mit $\Delta_{r,40}^{prv}(\mu_t) = 0.223$ zu $\Delta_{r,40}^{grv}(\mu_t) = 0.328$ noch deutlich sichtbar. Allerdings können beide Rekonstruktionsverfahren offensichtlich nicht mehr das ursprüngliche Testobjekt zurückgewinnen. Ohne eine Art von Kalibriermessung kann keine Aussage darüber getroffen werden, um welche Materialien es sich bei den Rekonstruktionen handelt.

[3]Es liegt damit die Situation vor, daß die Kernladungszahlen der Materialien recht gering sind und somit die Annahme $\mu_c = \beta\mu_t$ einer angemessenen Modellierung entspricht.

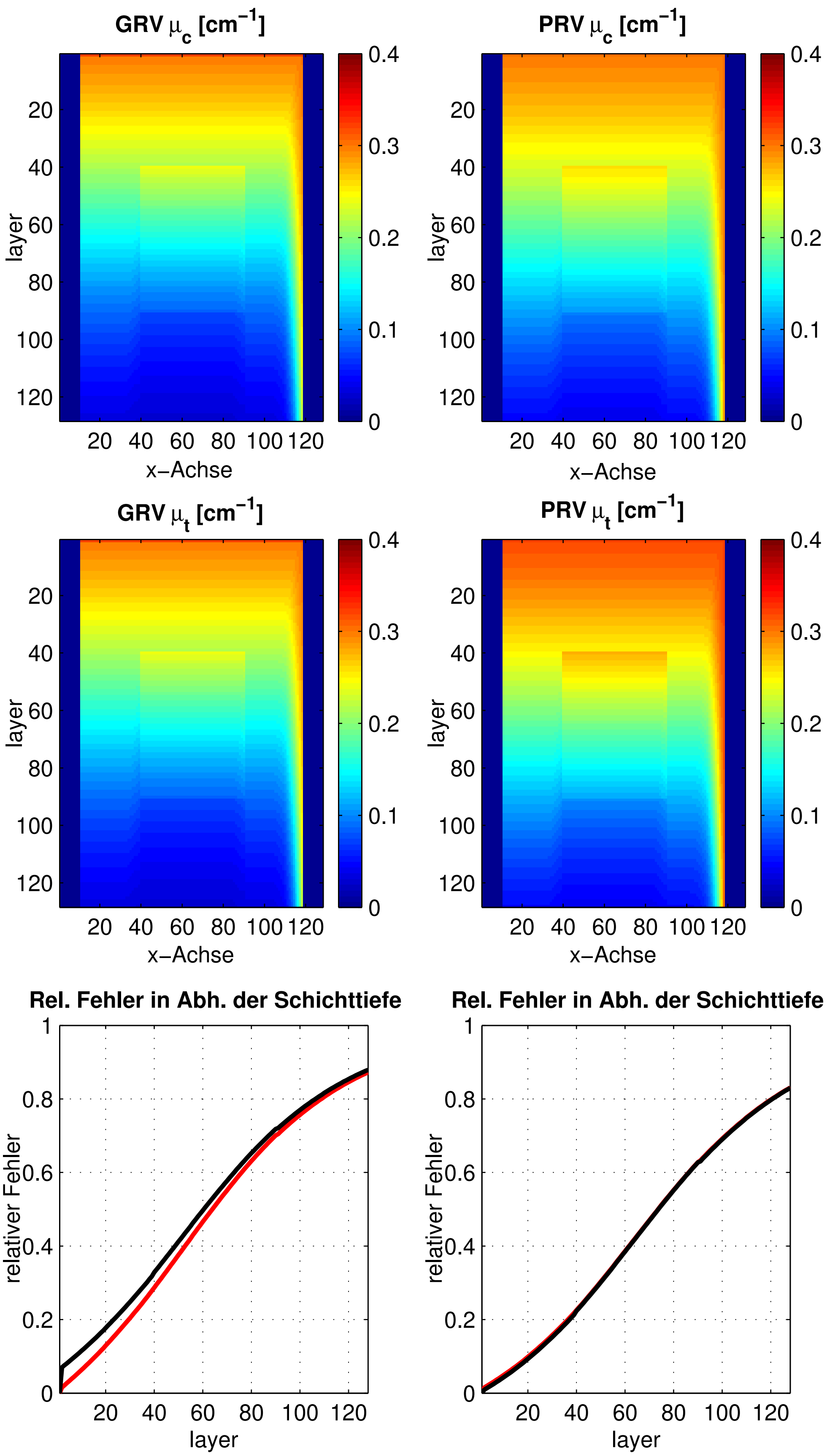


Abbildung 3.3: Rekonstruktionen mit GRV und PRV für $Z \leq 13$

Daß die rekonstruierten Objektfunktionen zu gering berechnet werden, gründet auf den folgenden Gegebenheiten: zum einen wird die Absorption der Röntgenstrahlung beim Durchlaufen der aktuell zu berechnenden Schicht nicht berücksichtigt. Dies führt dazu, daß der approximierende Term $A^{sc}_{\varphi_n}$ etwas zu groß ausfällt, wodurch die Logarithmusfunktion für ein ebenfalls zu groß bestimmtes Argument auszuwerten ist. Die Beachtung der Tatsache, daß die Argumente des Logarithmus durch den gegebenen Meßaufbau ohnehin schon sehr nahe bei 0 liegen, erklärt, daß selbst kleinste Schwankungen zu relativ großen Fehlern führen. Eine vollständige Vermeidung dieses Approximationsfehlers würde gleichzeitig zu einer Verwerfung der den *Strippingverfahren* zu Grunde liegenden Idee führen, ein Weg, der hier nicht eingeschlagen werden soll. Es wird sich aber herausstellen, daß dieser Fehler auf andere Art abgefangen werden kann.

Die von Gorshkov und Schmitt beschriebenen Verfahren (GRV) und (PRV) beinhalten jedoch eine grundsätzliche Modellierungsschwäche, die ihre Ursache in der Annahme findet, daß die Objektfunktionen als energieunabhängig rekonstruiert werden. Diese Problematik beschreibt Schmitt bereits in [46], jedoch analysiert er dort lediglich die Leistungsfähigkeit der Rekonstruktionsverfahren bezüglich synthetischer Daten, die bereits unter den verschiedenen Annahmen $\mu_c = \mu_t$, $\mu_c = \beta\mu_t$ und $\mu_c(E) = \beta\mu_t(E)$ erzeugt wurden. Die Ausführungen des Abschnittes 1.2 führen jedoch unmittelbar zu der Einsicht, daß sowohl $\mu_c$ als auch $\mu_t$ als energieabhängige Objektfunktionen angesehen werden müssen. Dies gilt auch für Materialien geringerer Kernladungszahl. Qualitativ kann mit dem Hintergrund der in Kapitel 1.2 dargestellten Absorptions- und Comptonkoeffizienten an dieser Stelle festgehalten werden, daß beide Koeffizienten mit abnehmender Photonenenergie steigende Werte aufweisen. Da durch den Streuvorgang beim Comptonstoß die gestreuten Photonen gemäß Kapitel 1.2 einen Teil ihrer Energie verlieren, führt dies dazu, daß die durch $\mu_t$ beschriebene Absorption, gleiches Material vorausgesetzt, für die gestreuten Strahlen größer als für die einfallenden Strahlen ist. Die Konsequenz aus dieser Beobachtung wird festgehalten in dem

**Korollar 3.7** *Es seien $g_{\varphi_n}(\mathbf{n}) := S^d_{\varphi_n}\left(\mu^0_c, \mu^0_t\right)(\mathbf{n})$ die durch das in Satz 2.16 beschriebene Vorwärtsmodell synthetisch erzeugten Daten, wobei dort für das Energiefunktional $\psi\mu_t(\mathbf{x}, E) > \mu_t(\mathbf{x}, E_{in}) \,\forall\; E_0 \leq E < E_{in}$ gelte. Dann führt die in den Rekonstruktionsverfahren (PRV) realisierte Wahl $\widetilde{\psi} \equiv I$ bei konstantem Material zu einer rekonstruierten Objektfunktion $\widetilde{\mu}_t(\mathbf{n}) < \mu^0_t(\mathbf{n})$.*

**Beweis:**
Der Nachweis dieser Aussage erfolgt mittels vollständiger Induktion über die Schichttiefe: für $L_2$, dem ersten zu rekonstruierenden *layer*, ergibt sich die Aussage bei exakt vorgegebener Oberfläche $L_1$ wie folgt. Mit $\mathbf{n} := (\eta_1, \eta_2, 2)$ folgt aus

$\psi\mu_t(\mathbf{x}, E) > \mu_t(\mathbf{x}, E_{in}) \,\forall\, E_0 \leq E < E_{in}$

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n}) &:= e^{-D(I\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)\chi_{L^c_k}} \\ &> e^{-D(\psi\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)\chi_{L^c_k}} =: A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})\end{aligned}$$

und somit unter Berücksichtigung der oben gemachten Ausführungen weiter

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}_t(\mathbf{n}) &= -\frac{1}{\Delta}\log\left(1 - \frac{g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{\beta A^{in}(\mathbf{n})\,\widetilde{A}^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\right) \\ &< -\frac{1}{\Delta}\log\left(1 - \frac{g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{\beta A^{in}(\mathbf{n})\,A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\right) \\ &= \mu_t(\mathbf{n}) < \mu_t^0 .\end{aligned}$$

Für die folgenden Schichten $L_3, \ldots, L_{N_d}$ kann nun folgendermaßen argumentiert werden: sei $3 \leq k_0 < N_d$ und $\widetilde{\mu}_t(\eta_1, \eta_2, k) < \mu_t^0(\eta_1, \eta_2, k) \,\forall k \leq k_0$ gegeben. Dann gilt für $L_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^{in}(\eta_1, \eta_2, k+1) &< A^{in}(\eta_1, \eta_2, k+1) , \\ \widetilde{A}^{sc}_{\varphi_n}(\eta_1, \eta_2, k+1) &< A^{sc}_{\varphi_n}(\eta_1, \eta_2, k+1) .\end{aligned}$$

Mit $0 < \beta \leq 1$ folgt hieraus wie oben unmittelbar

$$\widetilde{\mu}_t(\eta_1, \eta_2, k+1) < \mu_t^0(\eta_1, \eta_2, k+1) .$$

■

Wie groß der Defekt in den anhand der Verfahren (GRV) und (PRV) rekonstruierten Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ im Einzelnen ist, hängt stark von den konkret zu analysierenden Objekten ab. So zeigt die in Abbildung 3.4 dargestellte Simulation für das zweite Testobjekt, wie sehr die Qualität der Rekonstruktionsergebnisse abnimmt, wenn die Dichte der Materialien und die hiermit verbundene Energieabhängigkeit der Koeffizienten zunimmt und an der Approximation $\beta \approx 1$ nicht mehr festgehalten werden kann.

Wie zu erwarten, werden auch in diesem Rekonstruktionsbeispiel die den Detektorelementen zugewandten Schichten recht gut bestimmt, auch der erste *layer* mit Eiseneinschluß hebt sich deutlich vom Hintergrund ab. Allerdings machen sich in diesem Beispiel sowohl die nicht berücksichtigte Energieabhängigkeit als auch die schlechte Approximation des Verhältnisses

$$\beta_{fe} := \frac{\mu_{c,fe}(E_{in})}{\mu_{t,fe}(E_{in})} = 0.648$$

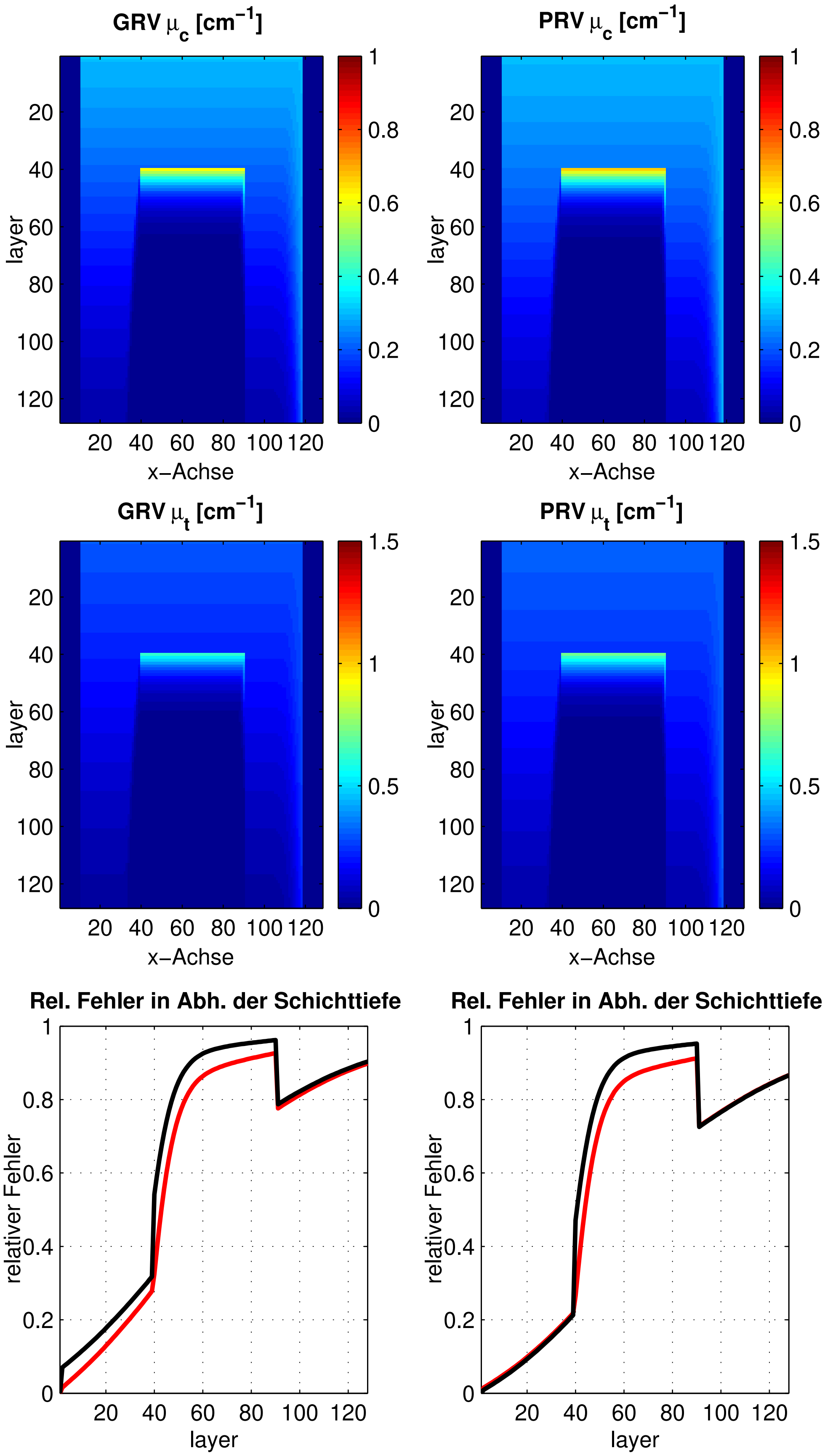


Abbildung 3.4: Rekonstruktionen mit GRV und PRV für $Z > 13$

durch die gemäß Bemerkung 3.6 getroffene Parameterwahl $\beta = 0.920$ deutlich bemerkbar, wodurch die rekonstruierten Werte stark von den ursprünglichen Objektfunktionen $\mu_{c,fe}(E_{in}) = 0.929$ und $\mu_{t,fe}(E_{in}) = 1.433$ differieren. Dies führt auch dazu, daß die Tiefe des Kernes in den Rekonstruktionen nicht mehr erkennbar ist. Desweiteren wird auf der linken Seite des Eiseneinschlusses ein Schatten erkennbar, der Aufschluß über die verwendete Meßrichtung gibt. In diesem Fall befindet sich der Kollimator in der Meßposition $\varphi_0 = 0$ und der Schatten entsteht durch die fehlerhaft berechnete Abschwächung der gestreuten Strahlen innerhalb des Eisenkernes. SCHMITT stellt in [46] Projektionsverfahren vor, mit denen die schlechten Ergebnisse dieser parameterabhängigen Verfahren (PRV) bei weitestgehend bekannten Objekten verbessert werden. Diese Verfahren nutzen die relativ gute Rekonstruktion der ersten neu berechneten Schicht und projizieren die numerisch bestimmten Objektfunktionen auf passende Funktionen bekannten Materials. Diese Strategie funktioniert dann besonders gut, wenn die Rekonstruktionsfehler klein sind und somit die Projektionsintervalle hinreichend klein gewählt werden können. Auf diese Verfahren wird weiter unten noch einmal zurückgegriffen werden.

### 3.2.3 Energieabhängige Rekonstruktionsverfahren

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die Bedeutung der Energieabhängigkeit der Objektfunktionen für die Rekonstruktionsverfahren herausgestellt wurde, ist es nun Ziel, diese zu berücksichtigen und in die Invertierungsalgorithmen zu integrieren. Anschließend erfolgt wieder die Überprüfung der Leistungsfähigkeit der erhaltenen energieabhängigen Verfahren (ERV) und der Vergleich dieser an weiteren Testobjekten mit den oben beschriebenen Verfahren (PRV).

Eine Betrachtung der in Kapitel 1.2 graphisch dargestellten und in Tabelle B.3 aufgeführten Werte von $\mu_{t,m_i}(E)$ in Abhängigkeit der Photonenenergie $E$ legt es nahe, die Energieabhängigkeit für einzelne Materialien $m_i$ gemäß

$$\mu_{t,m_i}(E) \;=\; \mu_{t,m_i}(E_0)\, e^{-\gamma_i(E-E_0)}, \qquad i = 1, \ldots, N_m, \tag{3.16}$$

mit noch zu bestimmenden Parameterwerten $\gamma_i, i = 1, \ldots, N_m$, und geeignetem $E_0$ zu modellieren. Da die Berechnung der Parameter $\gamma_i, i = 1, \ldots, N_m$, durch die auftretenden Streuenergien $E_{sc}$ gesteuert wird, bestimmen wir diese in Abhängigkeit des Anwendungsgebietes. Für die vorliegende Meßgeometrie liegen die Streuenergien in dem Energieintervall $\mathcal{I}_E := [\,98.4keV, 104.2keV\,]$, so daß die Wahl $E_0 \in \mathcal{I}_E$ auf eine gute Approximation der energieabhängigen Objektfunktion $\mu_t(E)$ gemäß (3.16) hoffen läßt. Die Bestimmung der $\gamma_i, i = 1, \ldots, N_m$, führt dann zu dem Minimierungsproblem

$$\int\limits_{\mathcal{I}_E} \left(\mu_{t,m_i} - \mu_{t,m_i}(E_0)\, e^{-\gamma_i(E-E_0)}\right)^2 dE \;\longrightarrow\; \min, \quad i = 1, \ldots, N_m, \tag{3.17}$$

bzgl. der $\gamma_i, i = 1, \ldots, N_m$. Dies ermöglicht, die Objektfunktionen $\mu_{t,m_i}(E)$ mit der Wahl $E_0 := 104.2keV$ bis auf einen relativen Fehler der Größenordnung $3 \cdot 10^{-3}$ in der Maximumnorm durch (3.16) zu beschreiben. Jedoch birgt dieser Ansatz das Problem in sich, bei der Rekonstruktion von $\mu_c(E_{in})$ und $\mu_t(E_{in})$ nun zusätzlich die eingeführte Größe $\mu_t(E_0)$ mitzuberechnen. Dieses Problem vermeidet die *schlechtere* Wahl $E_0 := E_{in}$. Der relative Fehler vergrößert sich hierdurch zwar zu $1.1 \cdot 10^{-2}$, aber neben der Annehmlichkeit, in dieser Situation nicht mehr auf die unbekannte Größe $\mu_t(E_0), E_0 \in \mathcal{I}_E$, zurückgreifen zu müssen, erweisen sich die gewonnen $\gamma_i$ für Materialien geringer Kernladungszahl ($Z \leq 13$) als nahezu konstant (z.B. $\gamma_{be} = 0.0042, \gamma_{Al} = 0.0040$). Mit diesem Resultat kann das Energiefunktional $\psi$ mit Hilfe von (3.16) modelliert werden. Dies führt zu dem nun beschriebenen Rekonstruktionsverfahren (ERV).

**Energieabhängiges Rekonstruktionsverfahren (ERV):**
Die Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ seien für den ersten *layer* $L_1$ als Vorinformation gegeben. Dann bestimmen sich $\mu_c$ und $\mu_t$ innerhalb $L_2, \ldots, L_{N_d}$ für die feste Meßrichtung $\varphi_n$ aus den gemessenen Daten $g_{\varphi_n}$ gemäß der Vorschrift

für $k = 2, \ldots, L_{N_d}$:

(1) $\forall \mathbf{n} := (\eta_1, \eta_2, k) \in L_k$:

(2) Berechnung der Dämpfungsterme $A^{in}(\mathbf{n})$ und $A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})$:

$$\begin{aligned}
A^{in}(\mathbf{n}) &= e^{-D\mu_t(\nu,-\mathbf{n}_z)} \\
A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n}) &= e^{-f_{E_{sc}}(k)D\mu_t\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)\chi_{L_k^c}} \\
&\quad \text{wobei } f_{E_{sc}}(k) := e^{-\gamma(E_{sc}(k)-E_{in})}
\end{aligned}$$

(3) Bestimmung von $\mu_t(\mathbf{n})$ im aktuellen *layer*:

$$\mu_t(\mathbf{n}) = -\frac{1}{\Delta}\log\left(1 - \frac{g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{\beta A^{in}(\mathbf{n})\, A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\right)$$

(4) Übertragung auf $\mu_c(\mathbf{n})$:

$$\mu_c(\mathbf{n}) := \beta\mu_t(\mathbf{n})$$

**Bemerkung 3.8**

*(i) Die in (2) angegebene Form für $A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})$ ergibt sich unmittelbar aus der Linearität der Integraltransformation $Df(\mathbf{x},\theta)$.*

*(ii) In der numerischen Realisierung des Verfahrens (ERV) können die Energiefaktoren $f_E(k)$ genau wie der Parameter $\beta$ außerhalb des eigentlichen Rekonstruktionsverfahrens vorberechnet werden, so daß sich der Mehraufwand pro rekonstruiertem Voxel auf eine Skalarmultiplikation beschränkt.*

Es folgt die Überprüfung der Leistungsfähigkeit dieses neuen Verfahrens anhand eines neuen Rekonstruktionsbeispieles: das zu rekonstruierende Objekt besteht wieder aus einem Betonquader, $(\mu_c, \mu_t)(E_{in}) = (0.3029, 0.3207)$, in den zwei Aluminiumkerne, $(\mu_c, \mu_t)(E_{in}) = (0.3374, 0.3617)$, eingelassen sind. Die Rekonstruktion der Objektfunktionen erfolgte mit den festen Parametern[4] $\gamma = 0.0042$ und $\beta = 0.939$. Ein Schnitt der unter Verwendung des Verfahrens (ERV) rekonstruierten Objektfunktionen ist auf der linken Seite der Abbildung 3.5 zu sehen, auf der rechten Seite dieser Abbildung sind die mittels (PRV) gewonnen Rekonstruktionen zum Vergleich dargestellt.

Während das Verfahren (PRV) lediglich eine qualitative Analyse des Objektes ermöglicht, liefert das energieabhängige Verfahren (ERV) darüber hinaus weitestgehend auch eine quantitativ richtige Beschreibung der Objektfunktionen. So betragen die relativen Fehler der ersten mit Aluminiumeinschluß rekonstruierten Schicht $L_{20}$ in der $L_2$-Norm gerade einmal $\Delta^{erv}_{r,20}(\mu_c) = 0.0031$ (zum Vergleich: $\Delta^{prv}_{r,20}(\mu_c) = 0.0992$) und $\Delta^{erv}_{r,20}(\mu_t) = 0.0062$ ($\Delta^{prv}_{r,20}(\mu_t) = 0.0967$). Wie die in Abbildung 3.5 unten dargestellten Fehlerentwicklungen in Abhängigkeit von der Schichttiefe veranschaulichen, werden die qualitativen Unterschiede der beiden Verfahren mit zunehmender Schichttiefe umso deutlicher. Für den letzten *layer* mit Aluminiumeinschluß liefert (ERV) immer noch Ergebnisse mit annehmbaren Fehlern $\Delta^{erv}_{r,110}(\mu_c) = 0.0442$ und $\Delta^{erv}_{r,110}(\mu_t) = 0.0458$, dagegen liegen die Fehler $\Delta^{prv}_{r,110}(\mu_c) = 0.7486$ und $\Delta^{prv}_{r,110}(\mu_t) = 0.7472$ bereits in der Größenordnung der zu rekonstruierenden Objektfunktionen. Die Artefakte, die überwiegend im *Schatten* der Aluminiumkerne auftreten, finden ihren Ursprung in der ungenauen Approximation der Dämfungsterme innerhalb der Aluminiumeinschlüsse, da die beiden Parameter $\gamma$ und $\beta$ im Wesentlichen durch das dominierende Material Beton bestimmt sind. Wie dieses Beispiel zeigt, führt die Berücksichtigung der Energieabhängigkeit der Objektfunktion $\mu_t$ zu deutlich verbesserten Rekonstruktionsergebnissen bei Objekten, die aus Materialien geringer Kernladungszahl $(Z \leq 13)$ bestehen. Durch die mögliche Vorberechnung des Energiefaktors $f_E$ ist

[4]Der Energieparameter $\gamma$ kann analog zu den Betrachtungen für $\beta$ gemäß Bemerkung 3.6 bestimmt werden.

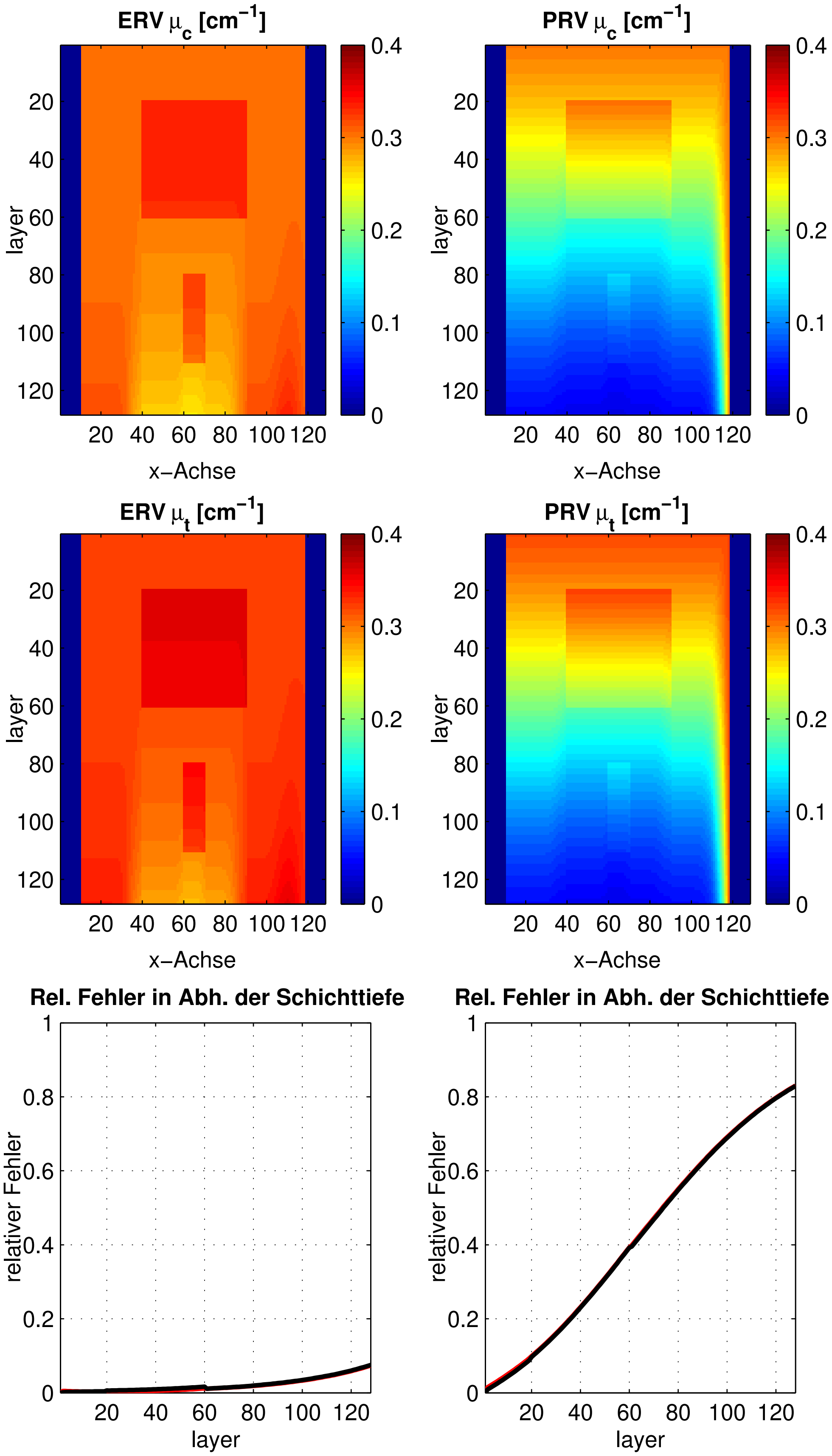


Abbildung 3.5: Rekonstruktionen mit ERV und PRV für $Z \leq 13$

der dazu erforderliche Mehraufwand an Rechenzeit in den hier durchgeführten Rekonstruktionen auf einem $128^3$-Voxelcube vernachlässigbar.

### 3.2.4 Rekonstruktionsverfahren für unabhängige $\mu_c$, $\mu_t$

Wie das letzte Rekonstruktionsbeispiel zeigt, können Objekte, die aus Materialien *ähnlicher* Energieabhängigkeit bestehen, mit Hilfe des Verfahrens (ERV) auf befriedigende Art analysiert werden. Dieser Abschnitt behandelt nun das noch ausstehende Problem der Rekonstruktion von Objekten, für die diese Annahme nicht zutreffend ist.

In Abschnitt 3.2.2 wurde bereits angedeutet, daß die abgeschwächte Kopplung der Objektfunktionen

$$\beta_i \;:=\; \frac{\mu_{c,i}\left(E_{in}\right)}{\mu_{t,i}\left(E_{in}\right)}, \qquad i = 1, \ldots, N_m,$$

weitestgehend der Forderung entspricht, daß $\mu_c$ und $\mu_t$ als voneinander unabhängige, eigenständige Funktionen betrachtet werden. Jedoch wurde dort noch nicht berücksichtigt, daß verschiedene Materialien eine unterschiedliche Energieabhängigkeit aufweisen. Sind die einzelnen Bestandteile des Objektes bekannt, so bietet (3.17) eine Möglichkeit, das unterschiedliche Verhalten der einzelnen Absorptionskoeffizienten approximativ zu modellieren. Allerdings werden in der Praxis des *zerstörungsfreien Prüfens* oft auch Werkstücke auf Verunreinigungen hin zu untersuchen sein, und es kann nicht a-priori angenommen werden, daß die Art der Verunreinigung bekannt ist. Dies hat einerseits zur Folge, daß weder das entsprechende $\beta_{i_0}$ noch der dazugehörige Energieparameter $\gamma_{i_0}$ vorberechnet werden können. Andererseits zeigt das vorangehende Rekonstruktionsbeispiel, daß die absoluten Parameter nicht notwendigerweise für eine gute Rekonstruktion erforderlich sind, sondern durchaus geeignete Approximationen $\widetilde{\beta}_i, \widetilde{\gamma}_i, i = 1, \ldots, N_m$, ausreichen.

Da die in der Praxis unvermeidlichen Meßfehler des Weiteren zwangsläufig auch zu Ungenauigkeiten dieser Parameter führen und die gemäß (3.17) modellierte Energieabhängigkeit ohnehin nur eine Approximation dieser darstellt, wird der Ansatz verfolgt, Materialien in Klassen $\mathcal{K}_j, j = 1, \ldots, N_{\mathcal{K}_m}$, zu gruppieren, und diesen Klassen jeweils ein Parameterpaar $\left(\beta_{\mathcal{K}_j}, \gamma_{\mathcal{K}_j}\right), j = 1, \ldots, N_{\mathcal{K}_m}$, stellvertretend zuzuordnen. Dabei ist die vorgenommene Klasseneinteilung von dem jeweiligen Anwendungsgebiet abhängig und wird als Vorberechnung zum eigentlichen Rekonstruktionverfahren durchgeführt.

Dieser Ansatz erfordert von dem Rekonstruktionsalgorithmus bei der Berechnung der Objektfunktionen für jeden Voxel eine Schätzung des zu verwendenden Parameterpaares $\left(\beta_{\mathcal{K}_{j_0}}, \gamma_{\mathcal{K}_{j_0}}\right)$. Die Schätzung erfolgt in dem nachstehend vorgestellten Verfahren (URV) durch eine *Anlaufrechnung.*

**Rekonstruktionsverfahren (URV):**
Die Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ seien für den ersten *layer* $L_1$ als Vorinformation gegeben. Dann bestimmen sich $\mu_c$ und $\mu_t$ innerhalb $L_2, \ldots, L_{N_d}$ für die feste Meßrichtung $\varphi_n$ aus den gemessenen Daten $g_{\varphi_n}$ gemäß der Vorschrift

für $k = 2, \ldots, L_{N_d}$:

(1) $\forall \mathbf{n} := (\eta_1, \eta_2, k) \in L_k$:

(2) Berechnung der Dämpfungsterme $A^{in}(\mathbf{n})$ und $\widetilde{A}^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})$:

$$\begin{aligned} A^{in}(\mathbf{n}) &= e^{-D\mu_t(\nu, -\mathbf{n}_z)} \\ \widetilde{A}^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n}) &= e^{-D(\psi\mu_t)\left(\nu + \frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z, \omega_{\varphi_n}\left(\nu + \frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)\chi_{L_k^c}} \end{aligned}$$

wobei

$$(\psi\mu_t)(\mathbf{x}, E_{sc}) := \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{K}_m}} \mu_t(\mathbf{x}, E_{in})\, e^{-\gamma_{\mathcal{K}_j}(E_{sc}(k) - E_{in})}\, \chi_{\mathcal{K}_j}(\mu_t(\mathbf{x}, E_{in}))$$

(3) Bestimmung von $\mu_t(\mathbf{n})$ im aktuellen *layer*:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_t(\mathbf{n}) &= -\frac{1}{\Delta}\log\left(1 - \frac{g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{\bar{\beta} A^{in}(\mathbf{n})\,\widetilde{A}^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\right) \\ \mu_t(\mathbf{n}) &= -\frac{1}{\Delta}\log\left(1 - \frac{g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{\widehat{\beta}(\widetilde{\mu}_t(\mathbf{n}))\, A^{in}(\mathbf{n})\, A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\right) \end{aligned}$$

(4) Übertragung auf $\mu_c(\mathbf{n})$:

$$\mu_c(\mathbf{n}) := \widehat{\beta}\mu_t(\mathbf{n})$$

**Bemerkung 3.9** *In dem oben beschriebenen Verfahren bestimmen sich die im Zuge der Anlaufrechnung auftretenden und noch nicht näher definierten Parameter und Dämpfungsterme wie folgt:*

*(i)* *Der gemittelte Parameter* $\bar{\beta}$ *ergibt sich anlog zu dem aus dem Verfahren (PRV) bekannten Parameter* $\beta$ *als Lösung des Minimierungsproblems aus Bemerkung 3.6. Da das Verfahren sehr stabil bzgl. Änderungen in* $\bar{\beta}$ *ist, genügt bereits eine grobe Schätzung für dessen Wert.*

*(ii)* *Der Schätzwert* $\widehat{\beta}\left(\widetilde{\mu}_t\left(\mathbf{n}\right)\right)$ *für das Verhältnis* $\mu_c\left(\mathbf{n}\right)/\mu_t\left(\mathbf{n}\right)$ *des aktuell zu berechnenden Voxels erfolgt anhand der Anlaufrechnung durch die Klasseneinteilung* $\mathcal{K}_j, j = 1, \ldots, N_m$.

*(iii)* *In dem Dämpfungsterm* $A^{sc}_{\varphi_n}$ *kann in Folge der Schätzung* $\widetilde{\mu}_t\left(\mathbf{n}\right)$ *die Absorption innerhalb des aktuell zu bestimmenden Voxels berücksichtigt werden, dieser ergibt sich daher zu*

$$A^{sc}_{\varphi_n}\left(\mathbf{n}\right) \quad = \quad e^{-D(\psi\mu_t)\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z,\omega_{\varphi_n}\left(\nu+\frac{\Delta}{4}\mathbf{n}_z\right)\right)}\,.$$

Dieses Verfahren wird nun an einem weiteren Objekt getestet. Dabei bestehen die in den Betonquader des letzten Beispiels eingelassenen Kerne aus Eisen. Das zu rekonstruierende Testobjekt setzt sich somit aus Materialien zusammen, deren Energieabhängigkeit stark differiert (siehe Tabelle B.3). Die mit Hilfe des Verfahrens (ERV) erzielten und zum Vergleich auf der linken Seite der Abbildung 3.6 dargestellten Rekonstruktionsergebnisse belegen, daß die Energieabhängigkeit in der Tat für Rekonstruktionszwecke nicht ausreichend anhand (3.16) modelliert werden kann.

Auf der rechten Seite dieser Abbildung ist das Ergebnis für die mittels (URV) rekonstruierten Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ dargestellt. Deutlich sind die Ränder des dem Detektor zugewandten Eiseneinschlusses zu erkennen. Weiter werden beide Objektfunktionen auch innerhalb der ersten *layer* mit Eiseneinschluß quantitativ richtig bestimmt. So betragen die Fehler der ersten Schicht mit Eiseneinschluß gerade einmal $\Delta^{urv}_{r,20}\left(\mu_t\right) = 0.0013$ und $\Delta^{urv}_{r,20}\left(\mu_c\right) = 0.0018$ (im Vergleich: $\Delta^{erv}_{r,20}\left(\mu_t\right) = 0.3260$, $\Delta^{erv}_{r,20}\left(\mu_c\right) = 0.0546$). Selbst für tiefer liegende Schichten werden noch akzeptable Rekonstruktionsergebnisse erzielt $\left(\Delta^{urv}_{r,50}\left(\mu_t\right) = 0.2815,\right.$ $\left.\Delta^{urv}_{r,50}\left(\mu_c\right) = 0.2608\right)$, und sogar die Umrisse des im *Schatten* des ersten Eisenkernes liegenden zweiten Einschlusses sind noch auszumachen. In diesem Rekonstruktionsbereich versagt das Verfahren (ERV) gänzlich, zu stark differieren bereits die rekonstruierten Objektfunktionen im Bereich des größeren Eisenkernes: $\Delta^{erv}_{r,50}\left(\mu_t\right) = 0.9144, \Delta^{erv}_{r,50}\left(\mu_c\right) = 0.8441$, womit in Folge der Betrachtungen zur Fehlerentwicklung in Abschnitt 3.2.2 keine brauchbaren Ergebnisse für die nachfolgenden Schichten mehr zu erwarten sind.

### 3.2.5 Projektionsverfahren

In praktischen Anwendungen *schlecht gestellter Probleme* stellt das Einbringen von Zusatzinformationen eine häufig verwendete Methode zur Stabilisierung von

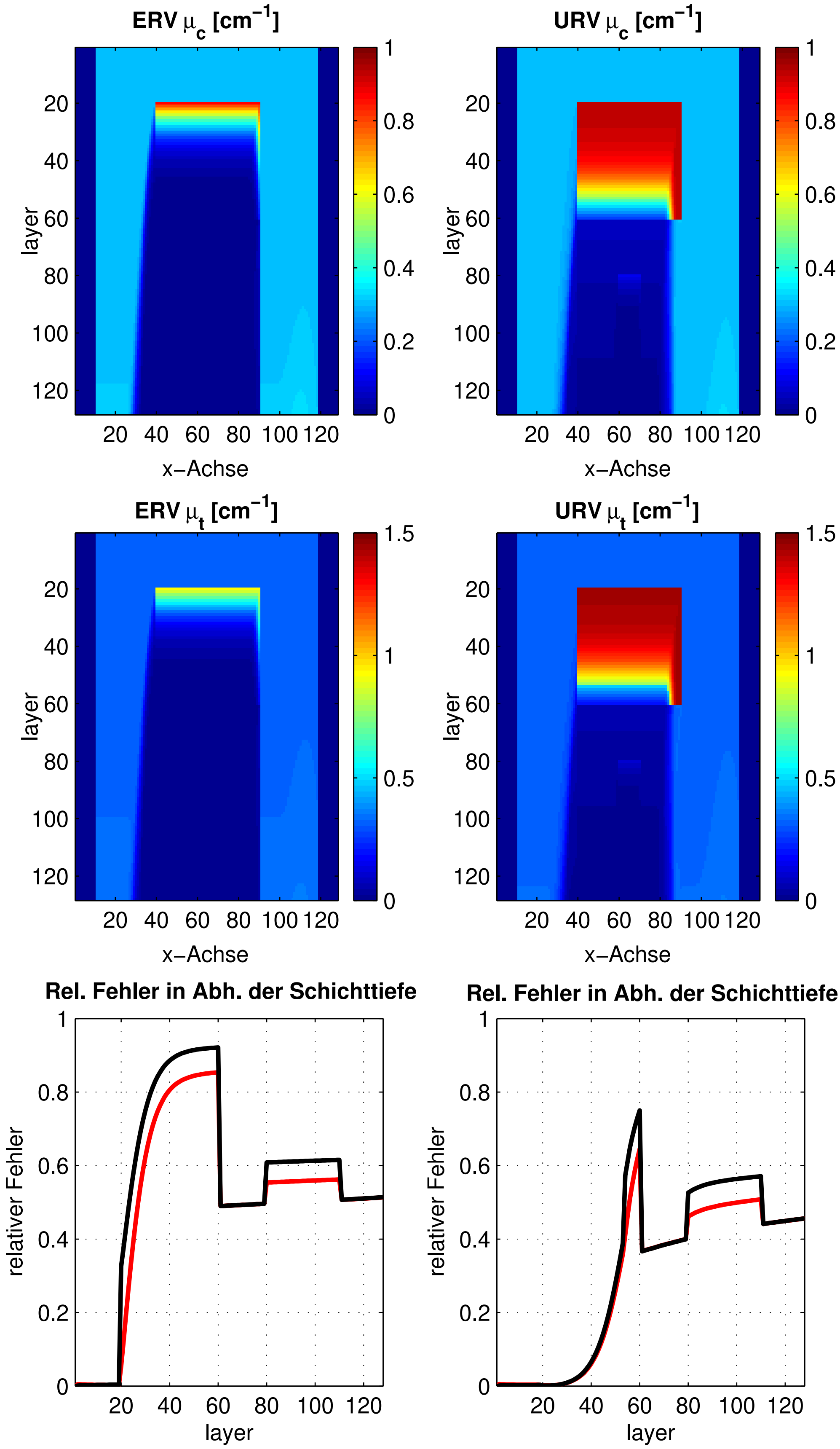


Abbildung 3.6: Rekonstruktionen mit ERV und URV für $Z > 13$

Rekonstruktionsverfahren dar. Solche Zusatzinformationen wurden teilweise bereits in den Abschnitten 3.2.1 bis 3.2.4 zur Bestimmung der verschiedenen Parameter verwendet.

Wie sich für den Anwendungsbereich des *zerstörungsfreien Prüfens* stärkere Zusatzinformationen in die dargestellten Rekonstruktionsalgorithmen einbringen lassen, wird im Folgenden beschrieben.

**Bemerkung 3.10** *Das zu untersuchende Objekt bestehe im Wesentlichen aus den Materialien* $m_1, \ldots, m_{N_m}$, *denen die Objektfunktionen* $\mu_{c,1}, \ldots, \mu_{c,N_m}$ *und* $\mu_{t,1}, \ldots, \mu_{t,N_m}$ *zugeordnet sind. Bezeichnen* $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_{N_m}$ *die Objektklassen mit Repräsentanten* $(\mu_{c,j}, \mu_{t,j})$, $j = 1, \ldots, N_m$, *so kann eine einzelne Objektklasse* $\mathcal{K}_{j_0}$, $j_0 \in \{1, \ldots, N_m\}$, *durch die abgeschlossene Menge*

$$M_{\mathcal{K}_{j_0}} \;:=\; \left\{(\mu_c, \mu_t) : |\mu_c - \mu_{c,j_0}| \le \delta_{\mu_{c,j_0}},\ |\mu_t - \mu_{t,j_0}| \le \delta_{\mu_{t,j_0}} \right\}$$

*beschrieben werden. Unter der Annahme, daß* $\bigcup_{j=1}^{N_m} M_{\mathcal{K}_j}$ *eine disjunkte Überdeckung der diskreten Punkte* $\left(\mu_{c_j}, \mu_{t,j}\right)$, $j = 1, \ldots, N_m$, *darstellt, kann diese durch Hinzufügen weiterer Objektklassen zu einer endlichen, disjunkten vollständigen Überdeckung von* $[\,0, M_c\,] \times [\,0, M_t\,]$ *ausgeweitet werden. Hierbei beziffern* $M_c$ *und* $M_t$ *obere Schranken der Objektfunktionen* $\mu_c$ *und* $\mu_t$ *für das betrachtete Objekt. Diese Überdeckung läßt sich formal schreiben als*

$$M_{\mathcal{K}} := [\,0, M_c\,] \times [\,0, M_t\,] \;=\; \left(\bigcup_{j=1}^{N_m} M_{\mathcal{K}_j}\right) \dot{\cup} \left(\dot{\bigcup_{j \in \mathcal{J}_N}} N_{\mathcal{K}_j}\right).$$

Die in der Bemerkung 3.10 eingeführten zusätzlichen Objektklassen $N_{\mathcal{K}_j}, j \in \mathcal{J}_N$, dienen lediglich einer vereinfachten Formulierung der unten vorgestellten Projektionsverfahren. In der Praxis erscheint ihre *künstliche* Einführung nur in Fällen sinnvoll, in denen die bekannten Materialien des Objektes zueinander zu große Abstände in den ihnen zugeordneten Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ aufweisen. Dies kann dazu führen, daß a-priori unbekannte Materialien des Objektes, wie zum Beispiel Verunreinigungen, in ihrer Energieabhängigkeit zu ungenau modelliert werden.

Die vollständige Beschreibung der Projektionsverfahren erfordert noch die Einführung eines geeigneten Projektionsoperators. Dies leistet die

**Definition 3.11** *Für* $\mu_t \in Y_\psi$ *und* $\mathbf{x} \in K$ *ist der Projektionsoperator* $P$ *definiert gemäß*

$$\begin{aligned} P \;&:\; I\!\!R \longrightarrow M_{\mathcal{K}}\,, \\ &\mu_t(\mathbf{x}, E_{in}) \longmapsto (P_c, P_t) := (\mu_{c,j_0}, \mu_{t,j_0})\,, \\ &\textit{wobei } j_0 \in \{1, \ldots, N_m\} \cup \mathcal{J}_N,\ |\mu_t - \mu_{t,j_0}|(\mathbf{x}, E_{in}) \le \delta_{t,j_0}\,. \end{aligned}$$

Mittels $P$ können nun die in den Abschnitten 3.2.1 bis 3.2.4 angegebenen Verfahren zu Projektionsverfahren erweitert werden. Hier erfolgt lediglich die Darstellung für das Verfahren (URV), die Übertragung auf die übrigen Verfahren ist dann offensichtlich.

**Rekonstruktionsverfahren (URV$_P$):**
Die Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ seien für den ersten *layer* $L_1$ als Vorinformation gegeben. Dann bestimmen sich $\mu_c$ und $\mu_t$ innerhalb $L_2, \ldots, L_{N_d}$ für die feste Meßrichtung $\varphi_n$ aus den gemessenen Daten $g_{\varphi_n}$ gemäß der Vorschrift

für $k = 2, \ldots, L_{N_d}$:

(1) $\forall \mathbf{n} := (\eta_1, \eta_2, k) \in L_k$:

(2) Berechnung der Dämpfungsterme $A^{in}(\mathbf{n})$ und $\widetilde{A}^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})$ wie in (2) von (URV).

(3) Bestimmung des projizierten $\mu_t(\mathbf{n})$ im aktuellen *layer*:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_t(\mathbf{n}) &= -\frac{1}{\Delta} \log\left(1 - \frac{g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{\bar{\beta} A^{in}(\mathbf{n})\, \widetilde{A}^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\right) \\
\mu_t(\mathbf{n}) &= P_t\left(-\frac{1}{\Delta} \log\left(1 - \frac{g_{\varphi_n}(\mathbf{n})}{P(\widetilde{\mu}_t(\mathbf{n}))(\beta)\, A^{in}(\mathbf{n})\, A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})}\right)\right)
\end{aligned}$$

(4) Übertragung auf $\mu_c(\mathbf{n})$:

$$\mu_c(\mathbf{n}) := P_c(\mu_t(\mathbf{n}))$$

**Bemerkung 3.12** *Die in (URV$_P$) benötigten Größen $\bar{\beta}$ und $A^{sc}_{\varphi_n}(\mathbf{n})$ bestimmen sich gemäß den Ausführungen in der Bemerkung 3.9. Ein (teilweiser) Verzicht auf die Einführung der Objektklassen $N_{\mathcal{K}_j}, j \in \mathcal{I}_N$, führt zu einem modifizierten Projektionsoperator $\widetilde{P} : I\!R \longrightarrow M_{\mathcal{K}} \cup M^c_{\mathcal{K}}$,*

$$\mu_t(\mathbf{x}, E_{in}) \longmapsto \begin{cases} P(\mu_t(\mathbf{x}, E_{in})) & , \ \exists j_0 \in \{1, \ldots, N_m\}, |\mu_t - \mu_{t,j_0}|(\mathbf{x}, E_{in}) \le \delta_{t,j_0} \\ \left(\widehat{\beta}\mu_t, \mu_t\right) & , \ \textit{sonst} \end{cases} .$$

Die mit Hilfe der Projektionsverfahren erzielten Ergebnisse sind in der Abbildung 3.7 dargestellt. Es handelt sich wieder um das Objekt aus dem vorangegangenen Rekonstruktionsbeispiel. Dabei wurden zur Verdeutlichung der unterschiedlichen Leistungsfähigkeit der Verfahren (ERV) und (URV) verschiedene Projektoren gewählt. Für ($\mathrm{ERV}_P$) wurden die Fehlerschranken $\delta_{t,fe} = 0.8$ und $\delta_{t,beton} = 0.2$ gewählt, in ($\mathrm{URV}_P$) die *schärferen* Schranken $\delta_{t,fe} = 0.07$ und $\delta_{t,beton} = 0.015$. In Abbildung 3.7 sind dabei nur die projizierten Absorptionskoeffizienten $\mu_t(\mathbf{n})$ dargestellt, die Comptonkoeffizienten $\mu_c(\mathbf{n})$ wurden keiner Projektion unterworfen. Trotz der *großzügigen* Projektion in ($\mathrm{ERV}_P$), ist dieses Verfahren lediglich in der Lage, die ersten Schichten mit Eiseneinschluß quantitativ zu erfassen, die tiefer liegenden Schichten können jedoch nicht rekonstruiert werden. Dagegen führt die unabhängige Betrachtung der Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ des Verfahrens ($\mathrm{URV}_P$) bereits mit relativen Fehlertoleranzen $\delta^{rel}_{t,(fe,beton)} < 0.05$ zu den dargestellten Rekonstruktionen.

Abbildung 3.7 verleiht demnach der Forderung Nachdruck, daß im Falle stark inhomogener Objekte die unterschiedliche Energieabhängigkeit der Objektfunktionen berücksichtigt werden muß, daß eine solche Berücksichtigung aber gleichzeitig zu sehr guten Rekonstruktionsergebnissen führt.

### 3.2.6 Rekonstruktion aus gestörten Daten

Die bisher betrachteten Rekonstruktionsbeispiele unterliegen der Annahme, daß den Berechnungen *exakte Daten* $g_{\varphi_n}(\mathbf{n})$ als Ausgangslage zur Verfügung stehen. Wie eingangs dieses Kapitels erwähnt, muß in praktischen Anwendungen von diesem *Idealfall* abgesehen werden. Dies führt zwangsläufig zu dem alle inverse und schlecht gestellten Probleme kennzeichnenden Problem, daß kleine Störungen in den Daten beliebig große Auswirkungen auf die Lösung mit sich führen können.[5] Daher sollen nun die in den Abschnitten 3.2.5 hergeleiteten Rekonstruktionsverfahren ($\mathrm{ERV}_P$) und ($\mathrm{URV}_P$) auf ihre Stabilität bzgl. fehlerbehafteten Daten hin analysiert werden.

Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in Abbildung 3.8 zusammenfassend dargestellt. Da in diesen Verfahren die Comptonkoeffizienten $\mu_c(\mathbf{n})$ aus den projizierten Absorptionskoeffizienten $\mu_t(\mathbf{n})$ gewonnen werden, sind in der Abbildung lediglich letztere aufgeführt. Die Rekonstruktionen erfolgten bzgl. verschiedener Fehlerniveaus in den gestörten Daten, die Störungen entsprechen dabei einem

[5] Zu einer ausführlichen Behandlung dieser Problematik sei insbesondere auf LOUIS [34] verwiesen.

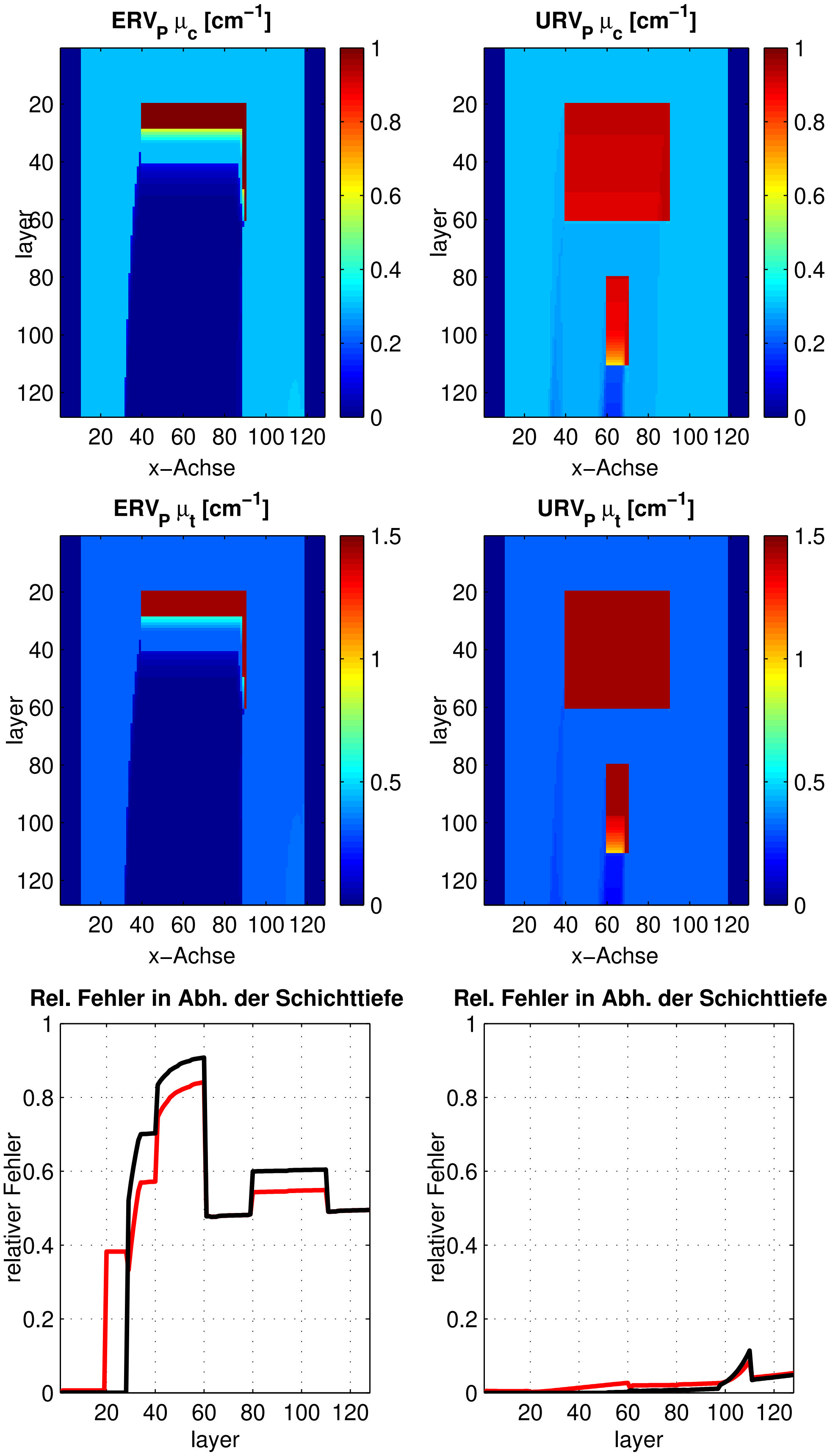


Abbildung 3.7: Rekonstruktionen mit ERV$_P$ und URV$_P$ für $Z > 13$

normalverteilten Rauschen mit den exakten Daten als Erwartungswert. Auf der linken Seite sind die Ergebnisse des Verfahrens ($\text{ERV}_P$) für das Beispiel aus Abschnitt 3.2.3 abgebildet, die rechte Seite zeigt die Resultate des Verfahrens ($\text{URV}_P$) für das Beispiel aus Abschnitt 3.2.4.

Im oberen Drittel der Abbildung 3.8 sind die Rekonstruktionen zu Ausgangsdaten zu sehen, die mit einem normalverteilten Rauschen $N\left(0, 0.03 g_{\varphi_n}\right)$ überlagert wurden. Im mittleren Teil der Abbildung ist dieses Rauschen $N\left(0, 0.10 g_{\varphi_n}\right)$-verteilt. Im unteren Drittel sind die relativen Fehler bzgl. der $L_2$-Norm aufgetragen: die rote Linie bezieht sich auf das $N\left(0, 0.03 g_{\varphi_n}\right)$-verteilte Rauschen, die schwarze Linie auf das $N\left(0, 0.10 g_{\varphi_n}\right)$-verteilte Rauschen. Die relativen Fehlertoleranzen betragen für das Verfahren ($\text{ERV}_P$) $\delta_{t,al}^{rel} < 0.06$, $\delta_{t,beton}^{rel} < 0.04$, für das Verfahren ($\text{URV}_P$) $\delta_{t,fe}^{rel} < 0.1, \delta_{t,beton}^{rel} < 0.05$ im Falle $N\left(0, 0.03 g_{\varphi_n}\right)$-verteilten Rauschens und $\delta_{t,fe}^{rel} < 0.25, \delta_{t,beton}^{rel} < 0.2$ im Falle $N\left(0, 0.10 g_{\varphi_n}\right)$-verteilten Rauschens. Die gestörten Daten wurden nicht vorbearbeitet, die berechneten Rekonstruktionen nicht nachträglich geglättet.

Offensichtlich arbeiten beide Verfahren stabil, wenn die Störungen in den Daten nicht zu gravierend sind. Problematisch erweist sich das $N\left(0, 0.10 g_{\varphi_n}\right)$-verteilte Rauschen für die Rekonstruktion des Betonquaders mit den Aluminiumeinschlüssen. Dies ist nicht überraschend, da in diesem Fall die Differenzen in den zu bestimmenden Objektfunktionen mit $|\mu_{t,Beton} - \mu_{t,Al}| < 0.4$ nur noch in der Größenordnung der Standardabweichung der überlagerten Rauschfunktion liegen und somit eine entsprechende Auflösung nicht mehr erfolgen kann. Diese Problematik kommt in dem zweiten Beispiel nicht in diesem Ausmaß zum tragen, da die Koeffizienten für Eisen und Beton mit $\mu_{t,fe} = 1.4331[cm]^{-1}$ zu $\mu_{t,beton} = 0.3207[cm]^{-1}$ deutlich differieren. Dies hat zur Folge, daß die Projektionsintervalle hinreichend groß gewählt werden können.

### 3.2.7 Berücksichtigung mehrerer Meßrichtungen

Die bisher dargestellten Verfahren machen lediglich von einer festgehaltenen Meßrichtung Gebrauch, lassen sich jedoch auch für verschiedene Meßrichtungen $\varphi_n$, $n = 1, \ldots, N_p$, formulieren. Dies führt zu einem überbestimmten Gleichungssystem zur Bestimmung der Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$, welches bei den hier verwendeten Verfahren vollständig entkoppelt ist.

So kann die Berechnung der Objektfunktionen $\mu_{c,\varphi_n}(\mathbf{n}), \mu_{t,\varphi_n}(\mathbf{n}),\ n = 1, \ldots, N_p$, für jeden Voxel parallel für die verschiedenen Meßrichtungen $\varphi_n, n = 1, \ldots, N_p$, durchgeführt werden. Anschließend folgt eine gewichtete Mittelung der rekonstruierten Werte. Wie diese Mittelung durchzuführen ist, hängt stark von den zugrunde liegenden Daten $g_{\varphi_n}(\mathbf{n})$ ab. Handelt es sich um *exakte Daten*, so liefert

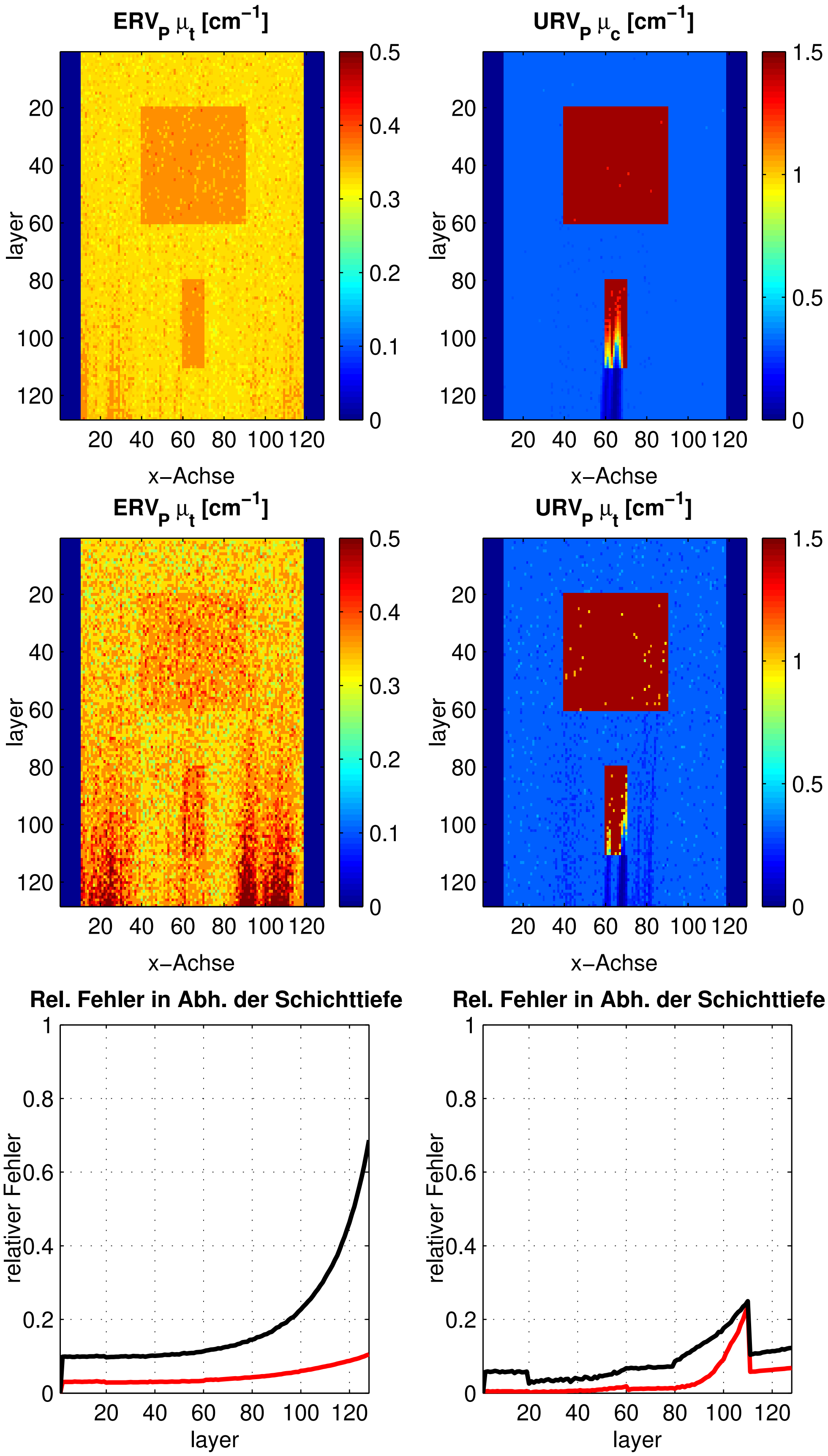


Abbildung 3.8: Rekonstruktionen mit ERV$_P$ und URV$_P$ aus gestörten Daten

analog zum Beweis des Korollars 3.7 die *Gewichtung*

$$\mu_t(\mathbf{n}) \;:=\; \max_{n=1,\ldots,N_p} \mu_{t,\varphi_n}(\mathbf{n})$$

eine größtmögliche Information, im Falle *gestörter Daten* kann eine Approximation an $\mu_t(\mathbf{n})$ als Lösung des Minimierungsproblem

$$\sum_{n=1}^{N_p} \alpha_n^2 \left(\mu_{t,\varphi_n}(\mathbf{n}) - \widehat{\mu}_t(\mathbf{n})\right)^2 \;\longrightarrow\; \min$$

gewonnen werden. Hierbei beziffert

$$\widehat{\mu}_t(\mathbf{n}) \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{N_p} \mu_{t,\varphi_n}(\mathbf{n}) \;.$$

In der Abbildung 3.9 sind entsprechende Rekonstruktionsbeispiele für einen Betonquader mit einer eingeschlossenen Eisenkugel zu sehen, die Rekonstruktion auf der linken Seite erfolgte aus $N(0, 0.03g_{\varphi_n})$-verteilten *gestörten Daten* für vier äquidistant verteilte Meßrichtungen, dem Ergebnis auf der rechten Seite liegen $N(0, 0.10g_{\varphi_n})$-verteilte *gestörte Daten* zugrunde. Beide Ergebnisse wurden mit dem Verfahren (URV$_P$) erzielt, die Fehlertoleranzen betrugen $\delta_{t,beton}^{rel} < 0.05$ und $\delta_{t,fe}^{rel} < 0.05$.

Die Artefakte im Schatten des Eisenkernes entstehen durch die dem Verfahren zugrunde liegende Diskretisierung des Rekonstruktionsgebietes. Dadurch müssen Randvoxel des kugelförmigen Eiseneinschlusses interpoliert werden. Infolge dieser Interpolation kommt es dann zu den beobachteten Oszillationen. Diese können aber entweder direkt durch Verwendung mehrerer Meßrichtungen oder durch eine nachträgliche Bildbearbeitung gedämpft werden.

Dieses Rekonstruktionsbeispiel zeigt, daß auch Objekte, die nicht der Diskretisierung des Verfahrens entgegenkommen, rekonstruiert werden können. Es offenbart aber auch, daß die verwendete Auflösung genügend hoch gewählt werden muß, damit die auftretenden Diskretisierungsfehler beherrschbar bleiben.

## 3.3 Anwendung: Landminendetektion

Neben der bisher betrachteten Einsatzmöglichkeit der Rückstreutomographie im Bereich der *zerstörungsfreien Prüfverfahren* eröffnet die hier verwendete Technik auch auf dem Gebiet der Kampfmittelerkennung neue vielversprechende Möglichkeiten. Insbesondere deren gefahrloser Einsatz zum Aufspüren und Identifizierung von Landminen erscheint äußerst interessant. Auch wurden bereits erste Tests

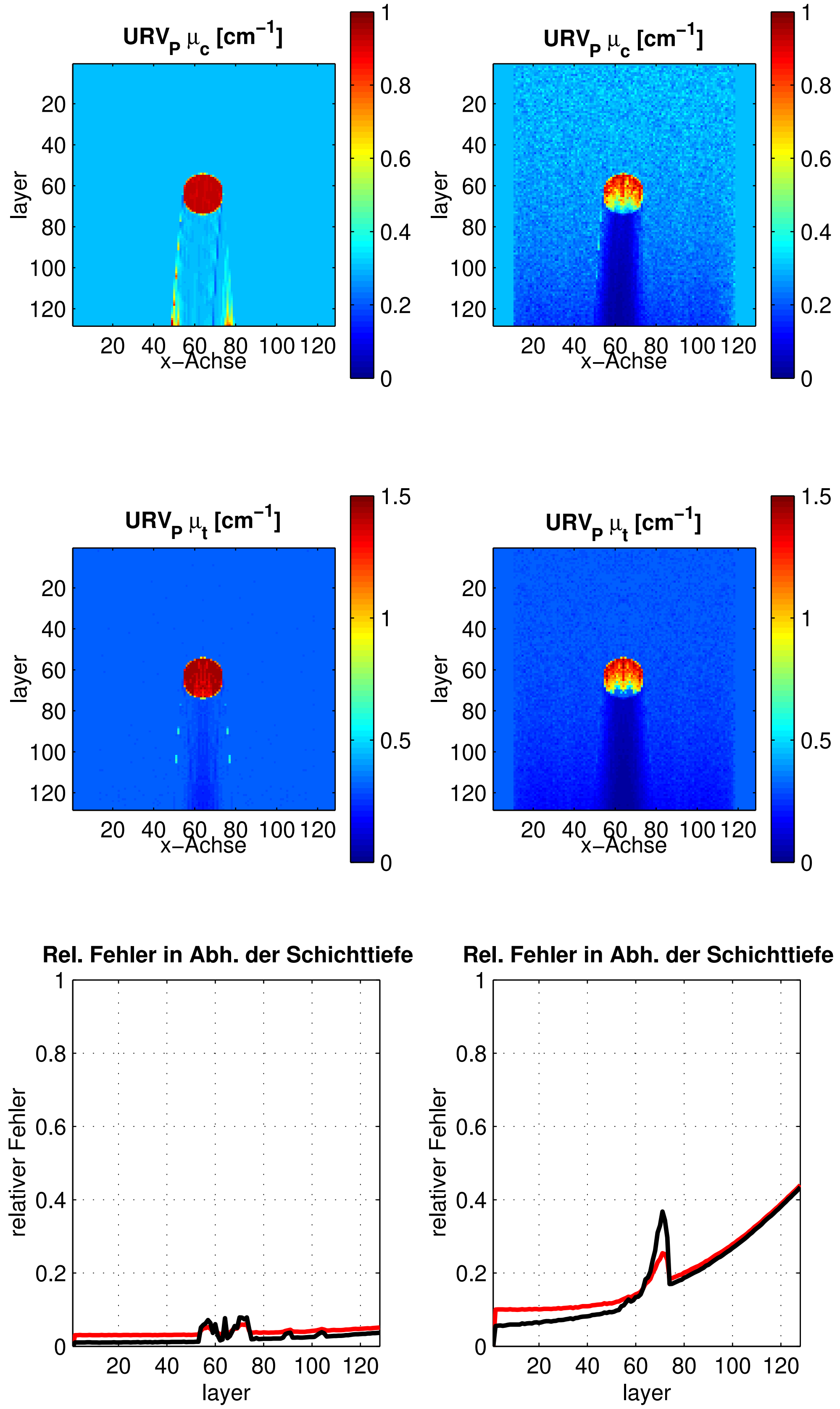


Abbildung 3.9: Rekonstruktionen mit URV$_P$ aus gestörten Daten mehrerer Meßrichtungen

mit einem Prototyp eines mobilen Scanners durchgeführt und auf der *DGZfP*[6]-*Jahrestagung 2002* vorgestellt. Der Aufbau der Meßtechnik entspricht im Wesentlichen dem in Kapitel 2, wobei der Scanner mit einer 450keV-Röntgenröhre ausgestattet ist[7] und lediglich eine Meßrichtung Berücksichtigung findet.

Nach Schätzungen von Experten existieren zur Zeit ungefähr 100 Millionen vergrabene Landminen, von denen der größte Teil regulär vergrabene Antipersonen- und Antipanzerminen (APM, ATM) sind. Diese befinden sich nur wenige Zentimeter unter der Erdoberfläche und stellen daher eine enorme Gefahr für die Bevölkerung dar. Alle bisher existierenden Minensuchverfahren, angefangen bei der primitiven Minensuchnadel, über Metalldetektoren bis hin zu technisch anspruchsvollen Detektionsverfahren wie Bodenradar, thermische Neutronenaktivierung oder nukleare Quadrupolresonanz, haftet neben individuellen Nachteilen wie hohem Gefahrenpotential, hoher Falschdetektionsrate oder zusätzlich erforderlicher Signalverarbeitung der gemeinsame Makel an, nicht alle Arten von Minen richtig detektieren zu können. Daher existiert die Nachfrage nach einem benutzerfreundlichen, bildgebenden Verfahren, welches in der Lage ist, möglichst alle Arten von Minen richtig zu erkennen.

Für diesen Zweck scheint die Rückstreutomographie aus den folgenden Gründen besonders geeignet. Sie stellt ein bildgebendes Verfahren dar, der Zugang zu den zu detektierenden Minen erfolgt nur von einer Seite, das Gefahrenpotential ist für den Benutzer minimal und das Rekonstruktionsverfahren arbeitet für alle Arten von Landminen völlig unabhängig von den jeweiligen Materialeigenschaften.

Zum Testen der Anwendbarkeit der in diesem Kapitel vorgestellten Rekonstruktionsverfahren wurde eine APM simuliert, die aus einem Hartplastikgehäuse besteht, zwölf radial angeordneten, mit TNT gefüllten Sprengkapseln und einem metallfreien Zünder auf der Zylinderachse. Der Innenraum der Mine besteht aus Füllmaterial. Lockerer Boden stellt das Hintergrundmedium dar. Die verwendeten Materialkonstanten können den Tabellen B.4 und B.5 entnommen werden.

[6]Deutsche Gesellschaft für Zerstörungsfreie Prüfung e.V.

[7]Aufbau und Ergebnisse der durchgeführten Untersuchung sind in [42] dargestellt.

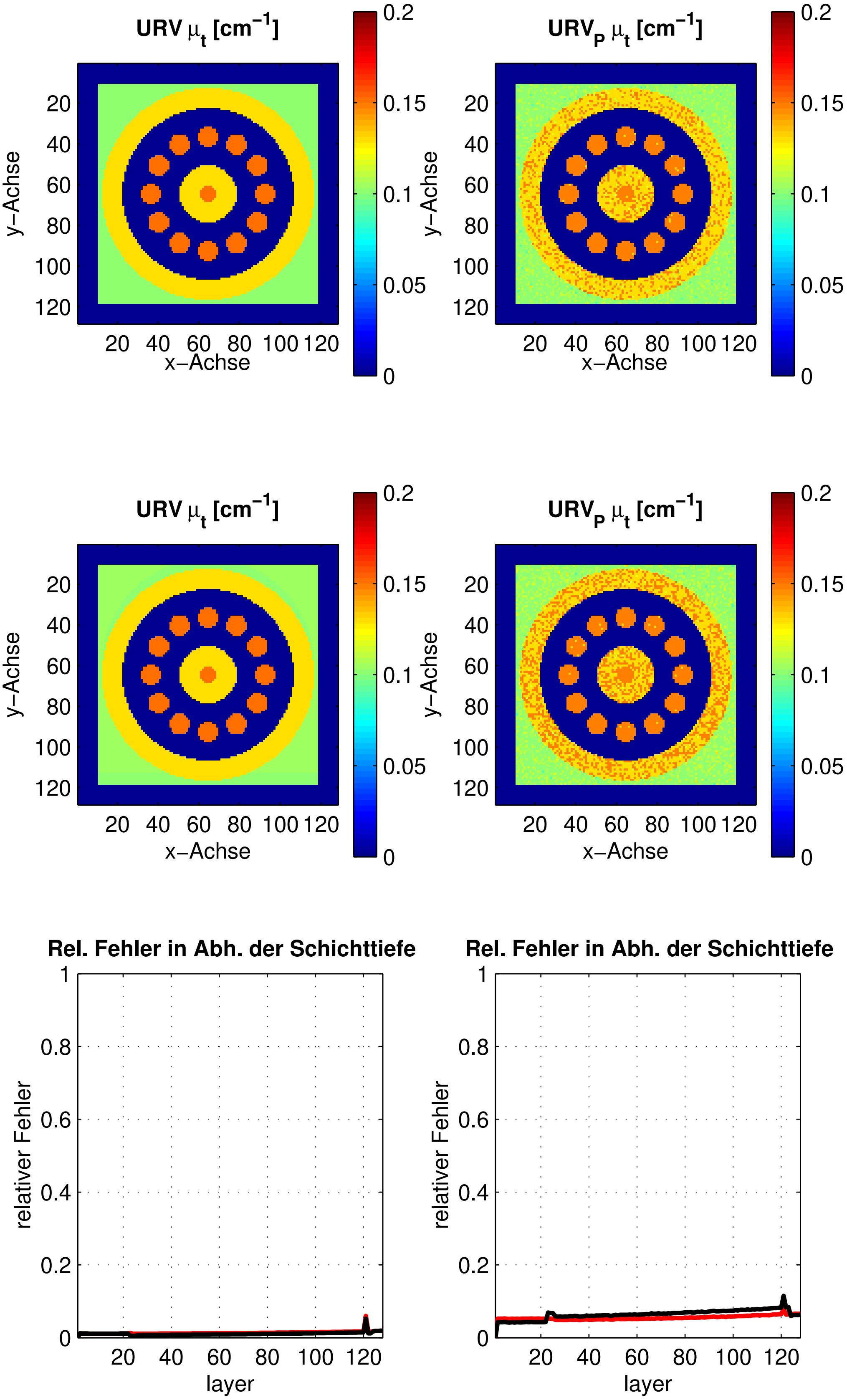


Abbildung 3.10: Landminenerkennung aus exakten und gestörten Daten

Die Rekonstruktionsergebnisse sind in Abbildung 3.10 zusammengestellt. Dort sind vier Schichtaufnahmen zu sehen, die oberen entsprechen einer *Abtasttiefe* von 2 cm, die unteren von 4 cm. Die Aufnahmen auf der linken Seite wurden mit dem Verfahren (URV) aus exakten Daten gewonnen, die rechten wurden aus $N\left(0, 0.05 g_{\varphi_n}\right)$- verteilten gestörten Daten mittels (URV$_P$) erzielt. Die relativen Fehlertoleranzen wurden in diesem Fall zu $\delta_t^{rel} < 0.05$ bestimmt.

Auch in diesem Beispiel wurden die gestörten Daten nicht vorbearbeitet, die Rekonstruktionen sind keiner nachträglichen Glättung unterzogen. Eine Betrachtung der in Abbildung 3.10 unten aufgeführten relativen Fehler in der $L_2$-Norm verdeutlicht die gute quantitative Analyse der Testobjekte. Dies gilt auch für die nicht projizierten Werte der Comptonkoeffizienten $\mu_c$. Insbesondere betragen die Fehler der abgebildeten Schichten $\Delta_{r,50}^{urv}\left(\mu_c\right) = 0.0118$ und $\Delta_{r,100}^{urv}\left(\mu_c\right) = 0.0152$ sowie $\Delta_{r,50}^{urv_p}\left(\mu_c\right) = 0.0497$ und $\Delta_{r,100}^{urv_p}\left(\mu_c\right) = 0.0584$.

# Kapitel 4

# Ein detektororientiertes Modell zur Rückstreutomographie

In diesem Kapitel soll ein grundlegend neuer Meßaufbau beschrieben werden, der gegenüber dem bisher verwendeten Modell mit einigen nicht zu vernachlässigenden Vorteilen aufwartet. So wird sich unter anderem zeigen, daß der detektororientierte Aufbau aufgrund der geometrischen Anordnung ohne die Abhängigkeit der gemessenen Intensität vom Auftreffwinkel der Röntgenstrahlen auskommt und der Strippingansatz auch ohne die Annahme eines funktionalen Zusammenhangs von Comptonkoeffizienten $\mu_c$ und Absorptionskoeffizienten $\mu_t$ zu akzeptablen Rekonstruktionsergebnissen führt.

Analog zu den Betrachtungen des quellpunktorientierten Ansatzes erfolgt zuerst die mathematische Formulierung des direkten Problems in seiner kontinuierlichen und diskreten Form. Anschließend findet die Untersuchung des inversen Problems statt. Hierbei wird erneut eine Lösungsmethode mit Hilfe von Strippingverfahren vorgestellt.

## 4.1 Meßaufbau und Modellierungsansatz

Die Idee des detektororientierten Ansatzes kann in gewisser Weise als Inversion des in den Kapiteln 1 bis 4 vorgestellten quellpunktorientierten Modells der Rückstreutomographie interpretiert werden. Dies wird aus der Beschreibung des Meßaufbaus ersichtlich, die nun erfolgt.

Der Kegelstrahl einer punktförmigen, monochromatischen Röntgenquelle überdecke wie in Abbildung 4.1 angedeutet vollständig das zu analysierende Objekt. Der Detektor bildet in diesem Fall die Mantelinnenfläche eines Kreiskegels mit der Röntgenquelle als Kegelspitze. Beim Durchlauf der Strahlen durch das Objekt kommt es zu den in Kapitel 1 dargelegten Interaktionen von Röntgenstrahlen

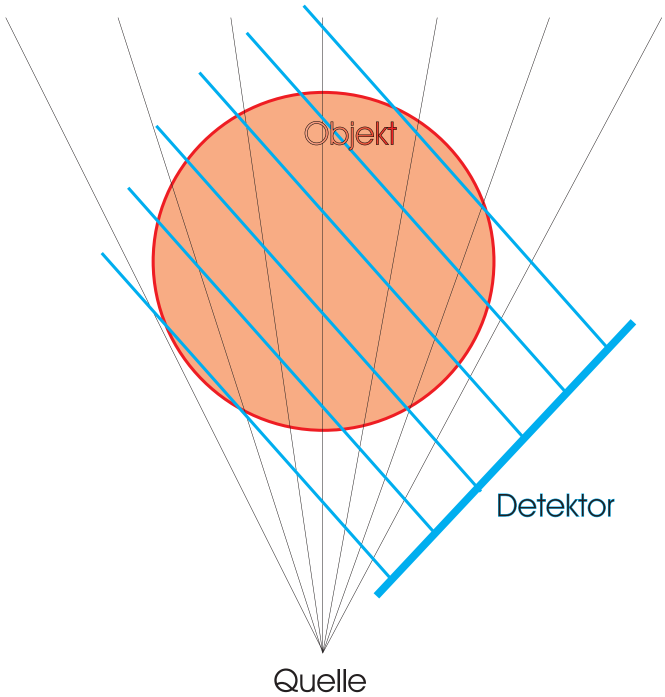


Abbildung 4.1: 2D-Schnitt des Meßaufbaus

mit Materie, unter anderem auch zum Effekt der Comptonstreuung. Unter all den gestreuten Strahlen sollen nur diejenigen Berücksichtigung finden, die senkrecht auf der Detektoroberfläche auftreffen. Dies könnte z.B. durch Einbringen eines entsprechenden Kollimators in den Strahlengang sichergestellt werden. Somit werden in einem einzelnen Detektorpunkt $\mathbf{s}_d$ nur Photonen registriert, die virtuellen Quellen entlang der orthogonalen Rückprojektion von $\mathbf{s}_d$ innerhalb des Objektes entspringen. Ein Vergleich dieses Meßaufbaus mit dem der Emissionstomographie bzgl. der gemessenen Intensitäten legt mit den Identifizierungen aus Abschnitt 1.4 erneut die Nähe der Rückstreutomographie zur 3D-Emissionstomographie offen. Dies gestattet den Ausblick auf die Behandlung der Rückstreutomographie mit den Methoden der Emissionstomographie oder auch hier eine Verknüpfung mit der Computertomographie durch einen zusätzlichen CT-Scan.[1]

Der Abbildung 4.1 zufolge bestimmt sich die im Detektorpunkt $\mathbf{s}_d$ auftreffende

[1]Einen solchen Ansatz verfogen z.B. Khettabi und Hussein in [26].

Intensität zu

$$I(\mathbf{s}_d) = \int\limits_{L^{-1}_{\mathbf{s}_d}} f((\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{s}_d))\, e^{-\int\limits_{L_{\mathbf{s}_d}(\mathbf{x})} a(\xi)\, d\xi} d\mathbf{x}\,, \tag{4.1}$$

wobei $L^{-1}_{\mathbf{s}_d}$ den vom Detektorpunkt $\mathbf{s}_d$ in Richtung der negativen Detektornormalen $-\mathbf{n}(\mathbf{s}_d)$ ausgehenden Halbstrahl bezeichnet und $L_{\mathbf{s}_d}(\mathbf{x})$ die Strecke vom Punkt $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{s}_d$ darstellt. Die Größe $f$ beschreibt eine virtuelle Quelle und $a$ den Dämpfungskoeffizienten.

Die virtuelle Quelle $f(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{s}_d))$ bezeichnet die in Folge von Comptonstreuung im Punkt $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{n}(\mathbf{s}_d)$ abgestrahlte Intensität. Sie stellt denjenigen Anteil der von der Röntgenquelle ausgesendeten und beim Durchgang durch das Objekt bis zum Punkt $\mathbf{x}$ abgeminderten Intensität $I_0$ dar, der in $\mathbf{x}$ in Richtung von $\mathbf{s}_d$ gestreut wird. Die virtuelle Quelle $f(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{s}_d))$ bestimmt sich demnach zu

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{s}_d)) = I_0\, \mu_c(\mathbf{x}, E_{in})\; p(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{s}_d))\; e^{-\int\limits_{L_q(\mathbf{x})} a(\xi)\, d\xi}\,, \tag{4.2}$$

wobei $p(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{s}_d))$ ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Comptonstreuung in $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{n}(\mathbf{s}_d)$ angibt und $L_q(\mathbf{x})$ für die Strecke von der Röntgenquelle bis zum Streupunkt $\mathbf{x}$ steht.

Ersetzen des allgemeinen Abminderungskoeffizienten $a$ durch den in der Röntgenstrahlung gebräuchlicheren Ausdruck des totalen Absorptionkoeffizienten $\mu_t$ führt zusammenfassend für die auf den Detektor im Punkt $\mathbf{s}_d$ auftreffende Intensität zu

$$I(\mathbf{s}_d) = I_0 \int\limits_{L^{-1}_{\mathbf{s}_d}} \mu_c(\mathbf{x}, E_{in})\; p(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{s}_d))\; e^{-\int\limits_{L_q(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{in})\, d\xi - \int\limits_{L_{\mathbf{s}_d}(\mathbf{x})} \mu_t(\xi, E_{sc})\, d\xi} d\mathbf{x}\,. \tag{4.3}$$

Dabei kommt in (4.3) die Energieabhängigkeit der Koeffizienten $\mu_c, \mu_t$ wieder durch die Angabe der Parameter $E_{in}, E_{sc}$ zum Ausdruck.

## 4.2 Geometrie des detektorientierten Modells

Analog zum Vorgehen bei der Analyse des quellpunktorientierten Modells erfolgt auch hier nach dieser heuristischen Herleitung die exakte mathematische Formulierung des Meßaufbaus. Um der besonderen Anordnung von Röntgenquelle, Objekt und Detektor Rechnung zu tragen, finden im Folgenden durchgehend Kugelkoordinaten $(r, \varphi, \vartheta)$ Verwendung.

### 4.2.1 Die Objektfunktionen

Da das zu untersuchende Objekt von dem Kegelstrahl der fixierten Röntgenquelle $Q$ vollständig erfaßt werden soll, liegt es innerhalb des Kugelsegmentes

$$K_S \;:=\; [\,0, r_{max}\,[\,\times\,[\,0, 2\pi\,[\,\times\,[\,0, \vartheta_{max}\,]\,, \qquad r_{max} > 0,\ \vartheta_{max} < \frac{\pi}{2}\,. \tag{4.4}$$

Der Träger der zugeordneten Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ beschränkt sich somit auf $K_S$ und wird analog zum Vorgehen in Abschnitt 2.1 auf $K_S \cap H_+$ durch 0 fortgesetzt. Hierbei bezeichnet $H_+ := \left\{(r, \varphi, \vartheta) \,|\, \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$ den oberen Halbraum. Demnach gilt

$$\begin{aligned}
\mu_c \;&:\; H_+ \longrightarrow [\,0, \infty\,[\,,\\
\mu_t \;&:\; H_+ \longrightarrow \mathcal{F} := \{f : [\,0, E_{in}\,] \longrightarrow [\,0, \infty\,[\,\}\,.
\end{aligned}$$

### 4.2.2 3D-Meßgeometrie

In diesem Ansatz ist die Röntgenquelle $Q$ fest im Ursprung des Koordinatensystems verankert. Diskrete Punkte $\mathbf{s}_d$ des einen Kegelmantel mit Spitze in $Q$ und Öffnungswinkel $\vartheta_d$ bildenden Detektors liegen demnach in der Menge

$$\mathcal{D} \;:=\; \{(s_i, \varphi_j, \vartheta_d) \in H_+ |\, i = 1, \ldots, N_{d,s},\ j = 1, \ldots, N_{d,\varphi}\}\,.$$

Eine vollständige Gitterdarstellung von $K_S$ läßt sich nun durch eine Diskretisierung des Winkels $\vartheta$ erreichen. Nimmt dieser die diskreten Werte $\vartheta_k$, $k = 1, \ldots N_\vartheta$, an und sind die diskretisierten Kugelkoordinaten jeweils äquidistant mit

$$r_1 = 0, r_{N_{d,r}} = r_{max}, \varphi_1 = 0, \varphi_{N_{d,\varphi}} = 2\pi, \vartheta_1 = \vartheta_{max}, \vartheta_{N_\vartheta} = 0,$$

verteilt, läßt sich $K_S$ darstellen als

$$K_S \;:=\; \bigcup_{i=1,\ldots,N_{d,r}-1, j=1,\ldots,N_{d,\varphi}-1, k=1,\ldots,N_\vartheta-1} K_S^{i,j,k}\,,$$

wobei $K_S^{i,j,k} := [\,r_i, r_{i+1}\,[\,\times\,[\,\varphi_j, \varphi_{j+1}\,[\,\times\,[\,\vartheta_k, \vartheta_{k+1}\,[$. Dabei übernehmen die $K_S^{i,j,k}$ die Funktion der in Abschnitt 2.1.1 eingeführten Voxel. Analog zu den Betrachtungen zum quellpunktorientierten Modell kann hier vereinfachend $\vartheta_d = \vartheta_{max}$ gesetzt werden.

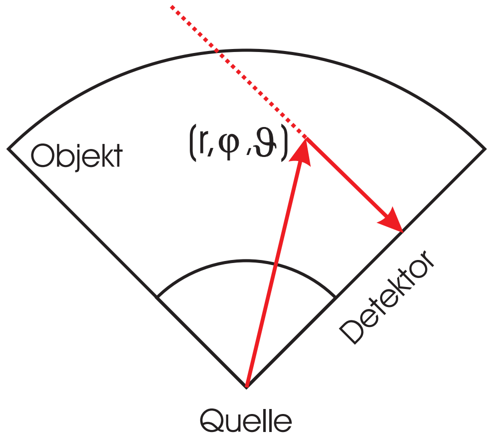


Abbildung 4.2: Skizzierter Strahlengang für einen festen Polarwinkel $\varphi$

### 4.2.3 Die auftretenden Strahlengänge

Die in diesem Modell relevanten Strahlen lassen sich für $\mathbf{x} \in K_S \cap L_{\mathbf{s}_d}^{-1}$ und $\mathbf{s}_d \in \partial K_S$ wie folgt angeben:

$$
\begin{aligned}
L_q(\mathbf{x}) &:= \{\xi \in K_S | \, \xi = \tau \mathbf{x}, \, 0 < \tau \leq 1\}, \\
L_{\mathbf{s}_d}(\mathbf{x}) &:= \{\xi \in K_S | \, \xi = \mathbf{x} + \tau \mathbf{n}(\mathbf{s}_d), \, \tau \geq 0\}.
\end{aligned}
$$

In der Abbildung 4.2 ist die hier beschriebene Situation exemplarisch für einen solchen Strahlengang dargestellt.

### 4.2.4 Die Detektorfunktionen

Auch in diesem Meßaufbau können diese völlig analog zu Abschnitt 2.1.4 bestimmt werden. Da in dem beschriebenen Modell jedoch durch das Einbringen eines Filters nur Photonen registriert werden, die senkrecht auf den Detektor einfallen, muß für die Detektorfunktion keine Abhängigkeit mehr vom Einfallswinkel berücksichtigt werden. In der hier vorliegenden Meßgeometrie muß die in Abschnitt 2.1.4 beschriebene homogene Platte für jede durch $\varphi_j, j = 1, \ldots, N_{d,\varphi}$, definierte Detektorrichtung senkrecht zu $\mathbf{s}_d := (r, \varphi_j)$ ausgerichtet werden, die Verschiebung erfolgt nun entlang wachsender Radien.

## 4.3 Das kontinuierliche Vorwärtsmodell $\widetilde{S}^c$

Da die Physik der Rückstreutomographie nicht von der verwendeten Meßgeometrie beeinflußt wird, können die in Abschnitt 2.2.1 eingeführten Funktionenräume in leicht modifizierter Form übernommen werden.

**Definition 4.1** *Sei $K_S$ das durch (4.4) definierte Kugelsegment und sei weiter $1 \leq p < \infty$. Dann bezeichnet*

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \left\{ f : K_S \longrightarrow [\,0, M\,]\ \lambda^3_{K_S} - f.\ddot{u}.,\ M > 0 \right\} ,$$

$$\widetilde{X} := \left\{ f : K_S \longrightarrow I\!R_+ |\, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K_S : [0,1] \ni \tau \longmapsto f^p\,(\tau \mathbf{x} + (1-\tau)\mathbf{y})\ \lambda^1_{K_S} - int. \right\} ,$$

$$\widetilde{Y}_\psi := \left\{ f : K_S \longrightarrow I\!R_+ |\, f \longmapsto \psi(f, E) \in \widetilde{X}\ \forall\, E \in [\,0, E_{in}\,] \right\} ,$$

*wobei die auf $\widetilde{X} \times [\,0, E_{in}\,]$ definierte Funktion $\psi : (f, E) \longmapsto \psi(f, E)$ bezüglich $E$ von beschränkter Variation ist, $(\psi \circ f)(\mathbf{x}_0, \cdot) \in BV[\,0, E_{in}\,]$ und den Bedingungen $\psi(f, E_{in}) = f$ sowie $\psi(0, E) = 0$ genügt.*

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.2 läßt sich nun das detektororientierte Modell der Rückstreutomographie wie folgt beschreiben:

**Satz 4.2** *Für $\mathbf{s}_d \in \partial K_S$ sei $\mathbf{n}\,(\mathbf{s}_d)$ die Normale an $\partial K_S$ in $\mathbf{s}_d$, wie in Abschnitt 4.1 definiert. Dann wird das direkte Problem der Rückstreutomographie für den in Abschnitt 4.1 vorgestellten detektororientierten Ansatz beschrieben durch*

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^c : \widetilde{X} \times \widetilde{Y}_\psi &\longrightarrow \widetilde{X} \\ (\mu_c, \mu_t) &\longmapsto \widetilde{S}^c(\mu_c, \mu_t) \\ \widetilde{S}^c(\mu_c, \mu_t)\,(\mathbf{s}_d) &:= \int_{L^{-1}_{\mathbf{s}_d}} p(\mathbf{x})\,\mu_c(\mathbf{x})\,e^{-D\mu_t(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})) - D(\psi\mu_t)(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{s}_d))} d\mathbf{x} \qquad (4.5) \\ \textit{mit } \mathbf{n}\,(\mathbf{x}) &:= -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\,. \end{aligned}$$

Formal muß in Satz 4.2 der Integraloperator $D$ auf $H_+$ eingeschränkt werden. Mit dieser unwesentlichen Einschränkung können alle in Kapitel 2 durchgeführten Untersuchungen auf diesen detektororientierten Ansatz übertragen werden. Alle dort erzielten Aussagen behalten ihre Gültigkeit, wobei natürlich die geometriespezifischen Konstanten entsprechend modifiziert werden müssen.

## 4.4 Das inverse Problem

Obwohl das detektororientierte Modell seinem Wesen nach lediglich die Strahlumkehrung des quellpunktorientierten Modells darstellt, ist es auf Grund der verwendeten Geometrie nun nicht mehr ohne vorbereitende Arbeit möglich, die in

Kapitel 3 verwendete Technik zur approximativen Invertierung von $\widetilde{S}^c$ heranzuziehen. In dem hier vorliegenden Ansatz gelingt es nicht, einzelne Rekonstruktionsschichten zu separieren, die in Abschnitt 4.1 vorgestellte Diskretisierung führt bei naivem Anwenden der Strippingmethoden aus Kapitel 3 zu einem unterbestimmten nichtlinearen Gleichungssystem für die zu rekonstruierenden Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$.

### 4.4.1 Das Frequenzfiltermodell $\widetilde{S}^c_{E_{sc}}$

Eine Möglichkeit, dieser Problematik zu entgehen, besteht darin, den Kegelstrahl der Röntgenquelle durch einzelne Strahlen der Röntgenquelle zu ersetzen, indem die Quelle hierfür in die einzelnen Richtungen gedreht wird. Dies führt auf dem Detektor zu einer Reihe von Einzelaufnahmen anstelle einer Gesamtaufnahme und somit könnten $\mu_c$ und $\mu_t$ mittels eines Strippingansatzes sukzessive Kegelschale für Kegelschale in Richtung aufsteigender Radien rekonstruiert werden.

Eine derartige Ortsinformation liefert aber auch die folgende Überlegung. Die Untersuchungen des ersten Kapitels zeigen, daß die Energie der gestreuten Photonen - und damit auch deren Frequenz - lediglich vom Streuwinkel $\theta$ der Comptonstreuung in $\mathbf{x} \in K_S$ abhängig ist. Für den hier verwendeten Meßaufbau hat dies zur Folge, daß $\theta$ für einen fest vorgegebenen Detektorpunkt $\mathbf{s}_d$ und fixierter Streuenergie $E_{sc}$ eindeutig mit einem $\vartheta\,(\mathbf{s}_d, E_{sc}) \in [\,0, \vartheta_{max}\,]$ identifiziert werden kann. Zu fixiertem $(\mathbf{s}_d, E_{sc})$ existiert folglich ein eindeutig bestimmtes $\mathbf{x} \in K_S$, so daß die in $\mathbf{s}_d$ mit der Energie $E_{sc}$ einfallenden Photonen in $\mathbf{x}$ durch einen Comptonstoß gestreut wurden. Dabei könnte das Herausgreifen einer festen Photonenenergie $E_{sc}$ durch Vorschalten eines Frequenzfilters vor den Detektor realisiert werden. Diese Überlegungen führen zu dem vereinfachten *Frequenzfiltermodell* des detektororientierten Ansatzes.

**Satz 4.3** *Für $\partial K_S \ni \mathbf{s}_d = (s, \varphi_d, \vartheta_d)$ sei $\mathbf{n}\,(\mathbf{s}_d)$ die Normale an $\partial K_S$ in $\mathbf{s}_d$ und $E_{sc} \in [\,E_{min}, E_{max}\,]$. Dann wird das Frequenzfiltermodell beschrieben durch*

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}^c_{E_{sc}} : \widetilde{\mathcal{M}} \times \widetilde{Y}_\psi &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}} \\
(\mu_c, \mu_t) &\longmapsto \widetilde{S}^c_{E_{sc}}(\mu_c, \mu_t) \\
\widetilde{S}^c_{E_{sc}}\,(\mu_c, \mu_t)\,(\mathbf{s}_d) &:= p\,(\vartheta_{d,E_{sc}})\;\mu_c\,(\mathbf{x})\;e^{-D\mu_t(\mathbf{x},\mathbf{n}(\mathbf{x}))-D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\mathbf{n}(\mathbf{s}_d))} \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathit{mit}\ \mathbf{x} &= \left(r\,(s, \vartheta_{d,E_{sc}})\,, \varphi_d, \vartheta_{d,E_{sc}}\right)\,, \\
\mathbf{n}\,(\mathbf{x}) &= -\tfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.
\end{aligned}$$

**Beweis:**
Aus Satz 4.2 und (1.13) ergibt sich unmittelbar folgender Beitrag von Photonen der Energie $E_{sc}$ zu $g(\mathbf{s}_d) := \widetilde{S}^c(\mu_c, \mu_t)(\mathbf{s}_d)$:

$$g(\mathbf{s}_d, E_{sc}) = \int\limits_{L^{-1}_{\mathbf{s}_d}} p(\mathbf{x})\delta_{E_{sc}}(\mathbf{x})\,\mu_c(\mathbf{x})\,e^{-D\mu_t(\mathbf{x},\mathbf{n}(\mathbf{x}))-D(\psi\mu_t)(\mathbf{x},\mathbf{n}(\mathbf{s}_d))}d\mathbf{x}\,,$$

$$\text{mit } \delta_{E_{sc}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & , \quad \mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{s}_d) = \frac{m_0c^2(E_{in}-E_{sc})}{E_{sc}\,E_{in}} - 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

In Verbindung mit der Forderung $\mathbf{x} \in L^{-1}_{\mathbf{s}_d}$ gilt dann für die Kugelkoordinatendarstellung von $\mathbf{x}$ notwendig

$$\vartheta_{d,E_{sc}} = \vartheta_d + \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{E_{in}-E_{sc}}{E_{sc}}\,\frac{m_0c^2}{E_{in}} - 1\right)$$

$$r(s, \vartheta_{d,E_{sc}}) = \frac{s}{\cos\vartheta_{d,E_{sc}}}\,.$$

Da außerdem $p(\mathbf{x})$ lediglich vom Streuwinkel $\theta$ abhängig ist und dieser über die Beziehung $\vartheta_{d,E_{sc}} = \vartheta_d - \theta + \frac{\pi}{2}$ eindeutig mit $\vartheta_{d,E_{sc}}$ verknüpft ist, kann auch die Schreibweise $p(\vartheta_{d,E_{sc}})$ verwendet werden. Somit hat (4.6) Bestand. ∎

### 4.4.2 Eine diskrete Version von $\widetilde{S}^c_{E_{sc}}$

Mit Hilfe der in Abschnitt 4.2.2 angegebenen Diskretisierung des Rekonstruktionsgebietes $K_{\underset{\sim}{S}}$ gelingt ohne großen Aufwand die Formulierung einer diskreten Variante von $\widetilde{S}^c_{E_{sc}}$, die dann durch Verwenden einer geometrieangepaßten Strippingtechnik analog zu dem Vorgehen in Kapitel 3 approximativ invertiert werden kann. Zur Darstellung dieses diskreten Modells des detektororientierten Ansatzes sind noch einige vereinfachende Bezeichnungen von Vorteil. Diese sind zusammengefaßt in der

**Definition 4.4** *Es bezeichnen*

*(a)* $\mathbf{s}_{d,(n,j)} := \left(s_n, \varphi_j, \frac{\pi}{4}\right)$ *mit*

$$s_n := n\,\Delta_s, \quad \Delta_s := \frac{s_{max}}{N_{d,s}}, \quad n = 1, \ldots, N_{d,s},$$

$$\varphi_j := (j-1)\,\Delta_\varphi, \quad \Delta_\varphi := \frac{2\pi}{N_{d,\varphi}-1}, \quad j = 1, \ldots, N_{d,\varphi},$$

*diskrete Detektorpunkte,*

*(b)* $\vartheta_k := \vartheta_k\left(E_{sc,k}\right),\quad k = 1, \dots, N_\vartheta$, *mit*

$$E_{sc,k} \;:=\; E_{sc,max} - (k-1)\,\Delta_{E_{sc}}, \quad \Delta_{E_{sc}} := \frac{E_{sc,max} - E_{sc,min}}{N_\vartheta - 1},$$

*die den diskreten Streuenergien* $E_{sc,k}$ *zugeordneten Werte für* $\vartheta$,

*(c)* $\omega_{in,n}\left(K_S^{i,j,k}\right) := \lambda^1\left(L_q\left(\mathbf{x}_{n,j,k}\right) \cap K_S^{i,j,k}\right)$.

Mittels dieser Festlegungen ergibt sich aus der Diskretisierung von $K_S$ das folgende diskrete Vorwärtsmodell zum detektororientierten Ansatz der 3D-Rückstreutomographie.

**Satz 4.5** *Für* $n = 1, \dots, N_{d,s},\ j = 1, \dots, N_{d,\varphi},\ k = 1, \dots, N_\vartheta$ *bezeichne abkürzend* $g(n,j,k) := \widetilde{S}^c_{E_{sc,k}}\left(\mu_c, \mu_t\right)\left(\mathbf{s}_{d,(n,j)}\right)$. *Weiter sei für ein fixiertes Paar* $(n,k)$ *der Index* $i := \left[s_n / \cos\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta_k\right)\right]$. *Sind dann* $\mu_c, \mu_t$ *konstant innerhalb der einzelnen Voxel, so folgt mit den Bezeichnungen aus Definition 4.4:*

$$g(n,j,k) \;=\; p\left(\vartheta_k\right)\mu_c\left(K_S^{i,j,k}\right)\, e^{-\omega_{in,n}\left(K_S^{i,j,k}\right)\mu_t\left(K_S^{i,j,k}\right)}\, A^{in}_{n,j,k}\, A^{sc}_{n,j,k} \tag{4.7}$$

$$\textit{wobei}\quad A^{in}_{n,j,k} := e^{-D\mu_t(\mathbf{x},\mathbf{n}(\mathbf{x}))\chi_{\left(K_S^{i,j,k}\right)^c}}$$

$$A^{sc}_{n,j,k} := e^{-D(\psi\mu_t)\left(\mathbf{x},\mathbf{n}\left(\mathbf{s}_{d,(n,j)}\right)\right)}$$

Satz 4.5 folgt unmittelbar aus Satz 4.3 durch Einsetzen der Bezeichnungen aus Definition 4.4 und Beachten von $\lambda^1\left(L_{\mathbf{s}_{d,(i,j)}}\left(\mathbf{x}_{n,j,k}\right) \cap K_S^{i,j,k}\right) = 0$.

### 4.4.3 Invertierung von $\widetilde{S}^d_{E_{sc}}$

Sind die *Daten* $g(n,j,k)$ in Satz 4.5 gegeben und sollen hieraus die Objektfunktionen $\mu_c, \mu_t$ zurückgewonnen werden, so liefert (4.7) bei einer hinreichend feinen Detektorauflösung für jeden zu rekonstruierenden Voxel ein überbestimmtes, nichtlineares Gleichungssystem. Aufgrund des äquidistant gewählten Detektoraufbaus kann der Grad der Überbestimmtheit von Voxel zu Voxel variieren. Eine einfache Rekonstruktionsmöglichkeit besteht nun darin, eine geeignete Auswahl von Daten zu treffen, so daß die nichtlinearen Gleichungssysteme eine Lösung besitzen. Diese können dann analytisch bestimmt werden.

Auch hier erfolgt die Rekonstruktion der Objektfunktionen mit Hilfe von Strippingverfahren. Zur Bestimmung von $\mu_c$ und $\mu_t$ eines fixierten Voxels werden lediglich Informationen herangezogen, die aus bereits berechneten Rekonstruktionsgebieten sowie Detektordaten zum zu rekonstruierenden Voxel stammen. Aus dieser Familie von Daten kann ein *charakteristisches Datenpaar* $(g_1(i,j,k), g_2(i,j,k))$ gewählt werden. Dies führt zu folgendem nichtlinearen Gleichungssystem zur Bestimmung von

$$(\mu_c(i,j,k), \mu_t(i,j,k)) \quad := \quad \left(\mu_c\left(K_S^{i,j,k}\right), \mu_t\left(K_S^{i,j,k}\right)\right) .$$

**Proposition 4.6** *Für einen fest gewählten Voxel $K_S^{i,j,k}$ sei $(g_1, g_2)$ das charakteristische Datenpaar zur Rekonstruktion von $(\mu_c(i,j,k), \mu_t(i,j,k))$. Dann ist $(\mu_c(i,j,k), \mu_t(i,j,k))$ Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems der Form*

$$f_1(\mu_c, \mu_t) := a_1 \mu_c e^{-b_1 \mu_t} - g_1 \quad = \quad 0 , \tag{4.8}$$

$$f_2(\mu_c, \mu_t) := a_2 \mu_c e^{-b_2 \mu_t} - g_2 \quad = \quad 0 . \tag{4.9}$$

**Beweis:** Mit der Wahl

$$a_l \quad := \quad p(\vartheta_k)\, A^{in}_{n_l,j,k}\, A^{sc}_{n_l,j,k}, \qquad l = 1, 2 ,$$

$$b_l \quad := \quad \omega_{in,n_l}\left(K_S^{i,j,k}\right), \qquad l = 1, 2 ,$$

ergibt sich die Struktur der Gleichungen sofort aus Satz 4.5. ∎

Die aus dem Frequenzfiltermodell entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme zur Bestimmung der Objektfunktionen $\mu_c$ und $\mu_t$ für die einzelnen Voxel $K_S^{i,j,k}$ können offensichtlich analytisch gelöst werden. Dies ist festgehalten in dem folgenden

**Satz 4.7** *Seien $b_1, b_2$ die Spuren der Quellstrahlen $L_q(\mathbf{x}_{n_1,j,k}), L_q(\mathbf{x}_{n_2,j,k})$ zu den charakteristischen Streupunkten $\mathbf{x}_{n_1,j,k}, \mathbf{x}_{n_2,j,k}$, eingeschränkt auf den zu rekonstruierenden Voxel $K_S^{i,j,k}$. Außerdem sei $(g_1, g_2)$ das zugehörige charakteristische Datenpaar sowie $a_1, a_2$ die totalen Dämpfungsterme entlang der Strahlengänge im Komplement des zu rekonstruierenden Voxels. Dann gilt für das gesuchte Lösungspaar $(\mu_c^*, \mu_t^*)$ des Gleichungssystems (4.8), (4.9):*

$$\mu_t^* \quad = \quad \frac{1}{b_2 - b_1} \log\left(\frac{g_1\, a_2}{g_2\, a_1}\right) , \tag{4.10}$$

$$\mu_c^* \quad = \quad \frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{g_1}{a_1}\, b_2\, e^{b_1 \mu_t^*} - \frac{g_2}{a_2}\, b_1\, e^{b_2 \mu_t^*}\right) . \tag{4.11}$$

**Beweis:**
Durch Eliminierung der Objektfunktion $\mu_c$ ergibt sich eine nichtlineare, auflösbare Bestimmungsgleichung für $\mu_t$. Wie die folgende Überprüfung zeigt, stellt das angegebene Paar $(\mu_c^*, \mu_t^*)$ in der Tat die eindeutige Lösung des Gleichungssystems dar.

$$
\begin{aligned}
(\alpha) \qquad f_1(\mu_c^*, \mu_t^*) &\overset{(4.8)}{=} a_1\, \mu_c^*\, e^{-b_1\, \mu_t^*} \;-\; g_1 \\
&\overset{(4.11)}{=} \frac{a_1}{b_2 - b_1} \left( \frac{g_1}{a_1}\, b_2\, e^{b_1\, \mu_t^*} \;-\; \frac{g_2}{a_2}\, b_1\, e^{b_2\, \mu_t^*} \right) e^{-b_1\, \mu_t^*} \;-\; g_1 \\
&= \frac{g_1\, b_1}{b_2 - b_1} \;-\; \frac{a_1\, g_2\, b_1}{a_2\,(b_2 - b_1)}\, e^{(b_2 - b_1)\, \mu_t^*} \\
&\overset{(4.10)}{=} \frac{g_1\, b_1}{b_2 - b_1} \;-\; \frac{a_1\, g_2\, b_1}{a_2\,(b_2 - b_1)}\, e^{(b_2 - b_1)\, \frac{1}{b_2 - b_1}\, \log\left(\frac{g_1\, a_2}{g_2\, a_1}\right)} \\
&= \frac{g_1\, b_1}{b_2 - b_1} \;-\; \frac{a_1\, g_2\, b_1}{a_2\,(b_2 - b_1)}\, \frac{g_1\, a_2}{g_2\, a_1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\beta) \qquad f_2(\mu_c^*, \mu_t^*) &\overset{(4.9)}{=} a_2\, \mu_c^*\, e^{-b_2\, \mu_t^*} \;-\; g_2 \\
&\overset{(4.11)}{=} \frac{a_2}{b_2 - b_1} \left( \frac{g_1}{a_1}\, b_2\, e^{b_1\, \mu_t^*} \;-\; \frac{g_2}{a_2}\, b_1\, e^{b_2\, \mu_t^*} \right) e^{-b_2\, \mu_t^*} \;-\; g_2 \\
&= -\frac{g_2\, b_2}{b_2 - b_1} \;+\; \frac{a_2\, g_1\, b_2}{a_1\,(b_2 - b_1)}\, e^{(b_1 - b_2)\, \mu_t^*} \\
&\overset{(4.10)}{=} -\frac{g_2\, b_2}{b_2 - b_1} \;+\; \frac{a_2\, g_1\, b_2}{a_1\,(b_2 - b_1)}\, e^{(b_1 - b_2)\, \frac{1}{b_2 - b_1}\, \log\left(\frac{g_1\, a_2}{g_2\, a_1}\right)} \\
&= -\frac{g_2\, b_2}{b_2 - b_1} \;+\; \frac{a_2\, g_1\, b_2}{a_1\,(b_2 - b_1)}\, \frac{g_2\, a_1}{g_1\, a_2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

**Bemerkung 4.8** *Es mag auf den ersten Blick verwundern, daß die gesuchten Größen $\mu_c^*, \mu_t^*$ in (4.10), (4.11) dem Anschein nach vollständig entkoppelt sind.*

*Dem ist jedoch nicht so, wie eine genauere Betrachtung der Terme* $a_1, a_2$ *zu Tage fördert. Wohl aber kann* $\mu_t^*$ *des aktuell zu rekonstruierenden Voxels völlig unabhängig von* $\mu_c^*$ *desselben Voxels bestimmt werden.*

Auch hier stellt der verwendete Frequenzfilter natürlich eine starke Idealisierung der tatsächlichen Gegebenheiten dar. In der Praxis ist dieser durch eine glatte Approximation an die Deltadistribution zu ersetzen. Dies führt dann zu einem diskreten Modell analog zu dem des quellpunktorientierten Ansatzes. Daher können die dort präsentierten Rekonstruktionsverfahren auch für diesen Meßaufbau in modifizierter Form übernommen werden.

Dieser neue Ansatz zeigt, daß analog zu neuen 3D-Meßgeometrien in der Computertomographie auch in der Rückstreutomographie schnellere Aufnahmeverfahren entwickelt werden können und diese zu qualitativ gleichwertigen Rekonstruktionsverfahren führen. Ebenso veranschaulicht dieses detektororientierte Modell der Rückstreutomographie die Nähe zum Modell der Emissionstomographie, auch wenn die Daten nur für einen eingeschränkten Winkelbereich zugänglich sind.

# Anhang A

# Mathematische Hilfsmittel

In diesem Anhang werden solche mathematische Aussagen zusammengestellt und teilweise bewiesen, die für das grundsätzliche Verständnis der dargestellten Sätze eine untergeordnete Rolle einnehmen. Jedoch sollte die hier gebotene Darstellung dem Leser ein unnötiges Suchen in Formelsammlungen beim Nachrechnen der Beweise ersparen.

## A.1 Integraldarstellung der Deltadistribution

Die Fouriertransformierte der Diracschen Deltadistribution $\delta_x f = f(x)$ ergibt sich gemäß

$$\widehat{\delta}_x f \ := \ \delta_x \widehat{f} \ = \ \widehat{f}(x) \ = \ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{I\!R^n} e^{-ix\cdot\xi} \, f(\xi) \, d\xi$$

zu

$$\widehat{\delta}_x(\xi) \ = \ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \ e^{-ix\cdot\xi} \ . \tag{A.1}$$

Mittels der inversen Fouriertransformation folgt somit formal

$$\delta_0(y) \ = \ (2\pi)^{-n} \int\limits_{I\!R^n} e^{iy\cdot\xi} \, d\xi \ . \tag{A.2}$$

Da die Exponentialfunktion bekanntlich nicht integrierbar ist, kann diese Integraldarstellung natürlich nur rein formalen Charakter haben. Jedoch ergibt sich für $f \in \mathcal{S}(I\!R^n)$ durch die Beschränkung des Integrationsbereiches folgende, im distributiven Sinne punktweise gegen $\delta_x$ konvergierende, Approximation

$$\delta_0^M(y) \ = \ (2\pi)^{-n} \int\limits_{|\xi|<M} e^{iy\cdot\xi} \, d\xi \ , \tag{A.3}$$

so daß gilt:

$$f(0) \quad = \quad \lim_{M\to\infty} \int\limits_{I\!R^n} \delta_0^M(y)\, f(y)\, dy\,.$$

Diese Approximation an die Deltadistribution kann auch durch Besselfunktionen beschrieben werden, genauer gilt

$$\delta_0^M(x) \quad = \quad (2\pi\,|x|)^{-\frac{n}{2}}\, M^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}\left(M\,|x|\right)\,. \tag{A.4}$$

Da (A.4) zur Inversion von $T_{a_0}f$ benötigt wird, soll sie im Folgenden bewiesen werden:

$$\begin{aligned}
\delta_0^M(x) \quad &= \quad (2\pi)^{-n} \int\limits_{|\xi|<M} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \\
&= \quad (2\pi)^{-n} \int\limits_0^M \sigma^{n-1} \int\limits_{S^{n-1}} e^{i\,\sigma|x|\,\omega\,\theta}\, d\theta\, d\sigma \\
&\overset{(A.8)}{=} \quad (2\pi)^{-n} \int\limits_0^M \sigma^{n-1}\ (2\pi)^{\frac{n}{2}}\ (\sigma\,|x|)^{1-\frac{n}{2}}\ J_{\frac{n}{2}-1}(\sigma|x|)\, d\sigma \\
&= \quad (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_0^M \sigma^{\frac{n}{2}}\, |x|^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(\sigma|x|)\, d\sigma \\
&= \quad (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ |x|^{-n} \int\limits_0^{M|x|} \tau^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(\tau)\, d\tau \\
&\overset{(A.7)}{=} \quad (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ |x|^{-n}\, (M|x|)^{\frac{n}{2}}\ J_{\frac{n}{2}}\,(M|x|) \\
&= \quad (2\pi\,|x|)^{-\frac{n}{2}}\, M^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}\left(M\,|x|\right)\,.
\end{aligned}$$

■

## A.2 Spezielle Funktionen

Die Anfänge dieses Teilgebietes der Mathematik gehen auf die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts zurück und ihre Bedeutung für die moderne angewandte Mathematik, aber auch für die Quantenphysik, also zwei relativ junge Wissenschaften, ist so enorm, daß sich beide Disziplinen ohne die Ergebnisse von Gauß, Euler, Fourier, Legendre und Bessel wohl kaum in dieser Art hätten entfalten können.

Viele Ideen aus dem Bereich der *Speziellen Funktionen* werden in Hochstadt [24] ausführlich dargestellt. Wer jedoch lediglich an Ergebnissen interessiert ist, wird sich sicherlich an Nachschlagewerken wie Abramowitz/Stegun [1] oder Gradshteyn/Ryzhik [20] orientieren.

Zur Herleitung der Integraldarstellung der Deltadistribution mittels Besselfunktionen wurden folgende Formeln, nachzulesen in Abramowitz/Stegun [1], Kapitel 9 und Kapitel 11, benutzt:

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\sin\varphi - ik\varphi}\, d\varphi \tag{A.5}$$

$$= \frac{1}{2\pi i^k} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi - ik\varphi}\, d\varphi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{A.6}$$

Für $\Re(\nu) > 0,\ x > 0$ gilt folgende Rekursionsformel für $J_\nu(x)$:

$$x^\nu J_\nu(x) = \int_0^x \tau^\nu J_{\nu-1}(\tau)\, d\tau\,. \tag{A.7}$$

(A.6) kann für $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinert werden zu

$$J_{\frac{n}{2}-1}(\sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, \sigma^{\frac{n}{2}-1} \int_{S^{n-1}} e^{i\sigma\theta\cdot\omega}\, d\omega\,. \tag{A.8}$$

Zur Charakterisierung des Bildraumes $\mathcal{R}(R_a)$ der gedämpften Radontransformation wurde für $l \in \mathbb{Z}$ weiter die folgende Formel benutzt, welche sich unmittelbar aus Abramowitz/Stegun [1], (11.4.17) und (9.1.5), ergibt:

$$\int_0^\infty J_\nu(bx)\, dx = \begin{cases} \frac{1}{b} & , \quad \nu \geq 0 \\ (-1)^\nu \frac{1}{b} & , \quad \nu < 0 \end{cases} \qquad \text{für } \nu \in \mathbb{Z},\ b > 0\,. \tag{A.9}$$

Benötigt wurde außerdem für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformierte von $R^\sharp g$, die sich zu

$$\left(R^\sharp g\right)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\, |\xi|^{1-n} \left(\widehat{g}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + \widehat{g}\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right)\right) \tag{A.10}$$

ergibt.

## A.3 Hilfsaussagen zur Invertierung von $R_a$

Um die Herleitung einer Inversionsformel für $R_a$ möglichst übersichtlich zu gestalten, wurde bewußt im dargestellten Beweis auf einige Details technischer Natur verzichtet. Diese sollen nun nachgereicht werden.

**Lemma A.1** *Für* $S^1 \ni \theta := (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ *und* $\dfrac{x^\perp}{|x|} := (\cos\psi, \sin\psi)^T$ *gilt*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\theta}{x\cdot\theta}\, e^{il\varphi}\, d\varphi \;=\; \begin{cases} 0 & ,\; l \text{ ungerade} \\ 2\pi\,\frac{x}{|x|^2} & ,\; l = 0 \\ -2\pi i\, e^{il\psi}\,\frac{x^\perp}{|x|^2} & ,\; l > 0,\; l \text{ gerade} \end{cases} \quad . \tag{A.11}$$

**Beweis:**
Aus der Definition der aufgeführten Größen folgt $x\cdot\theta = -|x|\,\sin(\varphi-\psi)$ und daher

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{x\cdot\theta}\, e^{il\varphi}\, d\varphi \quad &= \quad -\frac{1}{|x|}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \frac{e^{il\varphi}}{\sin(\varphi-\psi)}\, d\varphi \\ &\overset{\varphi:=\varphi-\psi}{=} \quad -\frac{e^{il\psi}}{|x|}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) \end{pmatrix} \frac{e^{il\varphi}}{\sin\varphi}\, d\varphi \\ &= \quad \ldots \end{aligned}$$

- $l = 0$:

$$\begin{aligned} \ldots \quad &= \quad -\frac{1}{|x|}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cot\varphi\,\cos\psi - \sin\psi \\ \cos\psi + \cot\varphi\,\sin\psi \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \quad \frac{2\pi}{|x|} \begin{pmatrix} \sin\psi \\ -\cos\psi \end{pmatrix} \\ &= \quad \frac{2\pi}{|x|^2}\, x\,, \end{aligned} \tag{A.12}$$

- $l \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\ldots &= -\frac{e^{il\psi}}{|x|} \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi \\ \sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi \end{pmatrix} \frac{e^{il\varphi}}{\sin\varphi}\,d\varphi \\
&= -\frac{e^{il\psi}}{|x|} \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\,\frac{e^{il\varphi}}{\sin\varphi}\,d\varphi \\
&= -\frac{e^{il\psi}}{|x|} \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \left( \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\,\frac{\cos(l\varphi)}{\sin\varphi}\,d\varphi}_{=0} + i \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\,\frac{\sin(l\varphi)}{\sin\varphi}\,d\varphi \right) \\
&= -i\,\frac{e^{il\psi}}{|x|} \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\left((l+1)\varphi\right)}{\sin\varphi}\,d\varphi \\
&= -i\,\frac{e^{il\psi}}{|x|} \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\left((l-1)\varphi\right)}{\sin\varphi}\,d\varphi \\
&= -i\,\frac{e^{il\psi}}{|x|} \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi & , \quad l \text{ gerade} \\ \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi & , \quad l \text{ ungerade} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad l \text{ ungerade} \\ -\frac{2\pi i}{|x|}\,e^{il\psi}\,\frac{x^\perp}{|x|} & , \quad l \text{ gerade} \end{cases} \quad . \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}$$

■

**Lemma A.2** *Sei $u_+(x,\theta)$ die durch (1.41) definierte Funktion. Dann gilt mit den Voraussetzungen von Lemma A.1*

$$\Re \int\limits_{S^1} \frac{\theta}{(x-y)\theta}\,e^{u_+(y,\theta)-u_+(x,\theta)}\,d\theta \quad = \quad 2\pi\,\frac{x-y}{|x-y|^2}\,. \qquad \text{(A.14)}$$

**Beweis:**
Eine Aufspaltung der Exponentialfunktion in gerade und ungerade Anteile führt zusammen mit der Aussage des vorangegangenen Lemma A.1 zu (A.14):

$$
\begin{aligned}
& \Re \int\limits_{S^1} \frac{\theta}{(x-y)\theta}\, e^{u_+(y,\theta)-u_+(x,\theta)}\, d\theta \\
= \quad & \Re \int\limits_{S^1} \frac{\theta}{(x-y)\theta}\, \left(\cosh(u_+(y,\theta)-u_+(x,\theta)) + \sinh(u_+(y,\theta)-u_+(x,\theta))\right)\, d\theta \\
= \quad & \Re \int\limits_{S^1} \frac{\theta}{(x-y)\theta} \left( 1 + \sum_{\substack{l>0,\\ l \text{ gerade}}} u_{+_l}(x,y)\, e^{il\varphi} + \sum_{\substack{l>0,\\ l \text{ ungerade}}} u_{+_l}(x,y)\, e^{il\varphi} \right) d\theta \\
= \quad & \Re \left( \int\limits_{S^1} \frac{\theta\, d\theta}{(x-y)\theta} + \sum_{\substack{l>0,\\ l \text{ gerade}}} u_{+_l}(x,y) \int\limits_{S^1} \frac{\theta\, e^{il\varphi}\, d\theta}{(x-y)\theta} + \sum_{\substack{l>0,\\ l \text{ ungerade}}} u_{+_l}(x,y) \int\limits_{S^1} \frac{\theta\, e^{il\varphi}\, d\theta}{(x-y)\theta} \right) \\
\overset{(A.11)}{=} \quad & \Re \left( 2\pi \frac{x-y}{|x-y|^2} - 2\pi i (\cosh(\underbrace{u(y,\omega)-u(x,\omega)}_{=-\int_y^x a\, ds \in I\!R}) - 1)\, \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \right) \\
= \quad & 2\pi \frac{x-y}{|x-y|^2} \, .
\end{aligned}
$$

■

**Lemma A.3** *Es bezeichne $\delta_0$ die Diracsche Deltadistribution. Dann gilt für beliebiges $x \in I\!R^2$*

$$
-\, div \, \frac{x}{|x|^2} \quad = \quad 2\pi\delta_0(x) \, . \qquad \text{(A.15)}
$$

**Beweis:**
Für $x \neq 0$ folgt direkt div $\dfrac{x}{|x|^2} = 0$ und somit gilt für beliebiges $f \in \mathcal{S}\,(I\!R^2)$:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{|x|^2} \cdot \nabla f(x)\, dx &= \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\epsilon} \frac{x}{|x|^2} \cdot \nabla f(x)\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left( \int\limits_{|x|=\epsilon} \frac{x}{|x|^2}\, f \;\cdot \mathbf{n}\, dx - \int\limits_{|x|\geq\epsilon} f \;\mathrm{div}\, \frac{x}{|x|^2}\, dx \right) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x|=\epsilon} \frac{x}{|x|^2}\, f \;\cdot \mathbf{n}\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int\limits_{|x|=\epsilon} f(x)\, dx \\
&= 2\pi\, f(0)\,.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

# Anhang B

# Physikalische Tabellen

In diesem physikalischen Teil des Anhangs sind die zur numerischen Simulation notwendigen Naturkonstanten und die verwendeten Materialkonstanten aufgelistet. Die in Tabelle B.1 aufgeführten Werte entstammen [52], die in den Tabellen B.2 sowie B.3 und B.4, B.5 aufgeführten Materialkonstanten, also die Dichtewerte, sowie die energieabhängigen Absorptionskoeffizienten und Comptonkoeffizienten, sind der Datenbank des *National Institute of Standards and Technology* entnommen.

| **physik. Größe** | **Symbol** | **Wert** |
|---|---|---|
| klassischer Elektronenradius | $r_e$ | $2.81794 \cdot 10^{-15}\mathrm{m}$ |
| Lichtgeschwindigkeit im Vakuum | $c$ | $2.99792458\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ |
| Planck-Konstante | $h$ | $6.626 \cdot 10^{-34}\mathrm{J\ s}$ |
| Ruheenergie des Elektrons | $m_e c^2$ | $0.511\mathrm{MeV}$ |
| Ruhemasse des Elektrons | $m_e$ | $9.10939 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$ |

Tabelle B.1: Physikalische Naturkonstanten

| **Material** | **Dichte** | **Material** | **Dichte** |
|---|---|---|---|
| Aluminium | $2.699\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ | Beton | $2.300\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ |
| Eisen | $7.874\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ | Kupfer | $8.940\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ |
| Hartplastik | $1.380\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ | Schaumstoff | $0.015\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ |
| TNT | $1.600\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ | Wasser | $1.000\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ |

Tabelle B.2: Dichtewerte der untersuchten Materialien

| | **Aluminium** | | **Eisen** | | **Beton**[a] | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Energie** | $\mu_c$ | $\mu_t$ | $\mu_c$ | $\mu_t$ | $\mu_c$ | $\mu_t$ |
| keV | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $cm^{-1}$ | $cm^{-1}$ |
| 80 | 0.144 | 0.202 | 0.133 | 0.595 | 0.359 | 0.460 |
| 82 | 0.143 | 0.197 | 0.133 | 0.563 | 0.357 | 0.456 |
| 84 | 0.143 | 0.194 | 0.133 | 0.482 | 0.345 | 0.450 |
| 86 | 0.142 | 0.190 | 0.132 | 0.457 | 0.353 | 0.444 |
| 88 | 0.142 | 0.186 | 0.132 | 0.482 | 0.351 | 0.439 |
| 90 | 0.141 | 0.183 | 0.131 | 0.460 | 0.349 | 0.435 |
| 92 | 0.141 | 0.180 | 0.131 | 0.439 | 0.347 | 0.430 |
| 94 | 0.140 | 0.178 | 0.131 | 0.420 | 0.346 | 0.425 |
| 96 | 0.140 | 0.175 | 0.130 | 0.403 | 0.344 | 0.421 |
| 98 | 0.139 | 0.173 | 0.130 | 0.387 | 0.342 | 0.416 |
| 100 | 0.139 | 0.170 | 0.130 | 0.372 | 0.340 | 0.412 |
| 105 | 0.138 | 0.165 | 0.129 | 0.339 | 0.336 | 0.401 |
| 110 | 0.136 | 0.161 | 0.128 | 0.312 | 0.333 | 0.391 |
| 115 | 0.135 | 0.157 | 0.127 | 0.289 | 0.329 | 0.382 |
| 120 | 0.134 | 0.153 | 0.126 | 0.269 | 0.326 | 0.373 |
| 125 | 0.133 | 0.150 | 0.125 | 0.253 | 0.323 | 0.365 |
| 130 | 0.131 | 0.147 | 0.124 | 0.238 | 0.320 | 0.357 |
| 135 | 0.130 | 0.145 | 0.123 | 0.226 | 0.317 | 0.350 |
| 140 | 0.129 | 0.142 | 0.122 | 0.215 | 0.314 | 0.343 |
| 145 | 0.128 | 0.140 | 0.121 | 0.205 | 0.311 | 0.337 |
| 150 | 0.127 | 0.138 | 0.120 | 0.196 | 0.308 | 0.331 |
| 155 | 0.126 | 0.136 | 0.119 | 0.189 | 0.306 | 0.326 |
| 160 | 0.125 | 0.134 | 0.118 | 0.182 | 0.303 | 0.321 |

[a] Da die NIST-Datenbank für Beton die Koeffizienten lediglich für wenige Photonenenergien zur Verfüging stellt, wurden die hier dargestellten Werte mittels Interpolation mit kubischen Splines gewonnen.

Tabelle B.3: Absorptions- und Comptonkoeffizienten für Anwendungen mit 160keV-Röntgenröhre

| | **Hartplastik** | | **Schaumstoff** | | **TNT** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Energie** | $\mu_\mathbf{c}$ | $\mu_\mathbf{t}$ | $\mu_\mathbf{c}$ | $\mu_\mathbf{t}$ | $\mu_\mathbf{c}$ | $\mu_\mathbf{t}$ |
| keV | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ |
| 100 | 0.148 | 0.189 | 0.148 | 0.183 | 0.150 | 0.156 |
| 105 | 0.146 | 0.183 | 0.146 | 0.177 | 0.148 | 0.154 |
| 110 | 0.145 | 0.177 | 0.145 | 0.172 | 0.147 | 0.152 |
| 115 | 0.144 | 0.172 | 0.144 | 0.168 | 0.145 | 0.150 |
| 120 | 0.142 | 0.167 | 0.142 | 0.164 | 0.144 | 0.148 |
| 125 | 0.141 | 0.163 | 0.141 | 0.160 | 0.142 | 0.146 |
| 130 | 0.140 | 0.160 | 0.140 | 0.157 | 0.141 | 0.145 |
| 135 | 0.138 | 0.157 | 0.138 | 0.154 | 0.139 | 0.143 |
| 140 | 0.137 | 0.154 | 0.137 | 0.151 | 0.138 | 0.141 |
| 145 | 0.136 | 0.151 | 0.136 | 0.149 | 0.137 | 0.140 |
| 150 | 0.135 | 0.149 | 0.135 | 0.146 | 0.136 | 0.138 |
| 155 | 0.133 | 0.146 | 0.133 | 0.144 | 0.134 | 0.137 |
| 160 | 0.132 | 0.144 | 0.132 | 0.142 | 0.133 | 0.135 |
| 165 | 0.131 | 0.142 | 0.131 | 0.140 | 0.132 | 0.134 |
| 170 | 0.130 | 0.140 | 0.130 | 0.139 | 0.131 | 0.133 |
| 175 | 0.129 | 0.138 | 0.129 | 0.137 | 0.130 | 0.132 |
| 180 | 0.128 | 0.137 | 0.128 | 0.135 | 0.129 | 0.130 |
| 185 | 0.127 | 0.135 | 0.127 | 0.134 | 0.128 | 0.129 |
| 190 | 0.126 | 0.134 | 0.126 | 0.132 | 0.127 | 0.128 |
| 195 | 0.125 | 0.132 | 0.125 | 0.131 | 0.126 | 0.127 |
| 200 | 0.124 | 0.131 | 0.124 | 0.130 | 0.125 | 0.126 |
| 250 | 0.115 | 0.119 | 0.115 | 0.118 | 0.116 | 0.117 |
| 300 | 0.108 | 0.111 | 0.108 | 0.110 | 0.109 | 0.109 |
| 350 | 0.102 | 0.104 | 0.102 | 0.104 | 0.102 | 0.103 |
| 400 | 0.097 | 0.099 | 0.097 | 0.098 | 0.097 | 0.098 |
| 450 | 0.093 | 0.094 | 0.093 | 0.093 | 0.093 | 0.093 |

Tabelle B.4: Absorptions- und Comptonkoeffizienten für Anwendungen mit 450keV-Röntgenröhre - Teil 1

| | **Kupfer** | | **Wasser** | | **Luft** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Energie** | $\mu_\mathbf{c}$ | $\mu_\mathbf{t}$ | $\mu_\mathbf{c}$ | $\mu_\mathbf{t}$ | $\mu_\mathbf{c}$ | $\mu_\mathbf{t}$ |
| keV | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $cm^2g^{-1}$ | $10^{-3}\,cm^2g^{-1}$ | $10^{-3}\,cm^2g^{-1}$ |
| 100 | 0.126 | 0.458 | 0.148 | 0.183 | 0.179 | 0.186 |
| 105 | 0.125 | 0.414 | 0.146 | 0.177 | 0.178 | 0.183 |
| 110 | 0.124 | 0.377 | 0.145 | 0.172 | 0.176 | 0.180 |
| 115 | 0.124 | 0.346 | 0.144 | 0.168 | 0.174 | 0.178 |
| 120 | 0.123 | 0.319 | 0.142 | 0.164 | 0.172 | 0.175 |
| 125 | 0.122 | 0.297 | 0.141 | 0.160 | 0.170 | 0.173 |
| 130 | 0.121 | 0.277 | 0.140 | 0.157 | 0.168 | 0.171 |
| 135 | 0.120 | 0.261 | 0.138 | 0.154 | 0.167 | 0.170 |
| 140 | 0.119 | 0.246 | 0.137 | 0.151 | 0.165 | 0.168 |
| 145 | 0.118 | 0.233 | 0.136 | 0.149 | 0.163 | 0.166 |
| 150 | 0.117 | 0.222 | 0.135 | 0.146 | 0.162 | 0.164 |
| 155 | 0.116 | 0.212 | 0.133 | 0.144 | 0.160 | 0.162 |
| 160 | 0.115 | 0.203 | 0.132 | 0.142 | 0.159 | 0.161 |
| 165 | 0.114 | 0.195 | 0.131 | 0.140 | 0.157 | 0.159 |
| 170 | 0.114 | 0.187 | 0.130 | 0.139 | 0.155 | 0.157 |
| 175 | 0.113 | 0.181 | 0.129 | 0.137 | 0.153 | 0.156 |
| 180 | 0.112 | 0.175 | 0.128 | 0.135 | 0.152 | 0.154 |
| 185 | 0.111 | 0.170 | 0.127 | 0.134 | 0.151 | 0.153 |
| 190 | 0.110 | 0.165 | 0.126 | 0.132 | 0.149 | 0.151 |
| 195 | 0.110 | 0.160 | 0.125 | 0.131 | 0.148 | 0.150 |
| 200 | 0.109 | 0.156 | 0.124 | 0.130 | 0.147 | 0.148 |
| 250 | 0.102 | 0.128 | 0.115 | 0.118 | 0.136 | 0.137 |
| 300 | 0.096 | 0.112 | 0.108 | 0.110 | 0.128 | 0.129 |
| 350 | 0.091 | 0.102 | 0.102 | 0.104 | 0.121 | 0.121 |
| 400 | 0.086 | 0.094 | 0.097 | 0.098 | 0.115 | 0.115 |
| 450 | 0.082 | 0.088 | 0.093 | 0.093 | 0.109 | 0.109 |

Tabelle B.5: Absorptions- und Comptonkoeffizienten für Anwendungen mit 450keV-Röntgenröhre - Teil 2

| $\mathbf{k}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{t_k}$ | 0 | $\frac{1}{12}\Delta$ | $\frac{2}{12}\Delta$ | $\frac{3}{12}\Delta$ | $\frac{4}{12}\Delta$ | $\frac{5}{12}\Delta$ | $\frac{6}{12}\Delta$ |
| $\mathbf{W_n}(\mathbf{t_k})$ | 0.010 | 0.040 | 0.125 | 0.230 | 0.250 | 0.250 | 0.230 |

| $\mathbf{k}$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{t_k}$ | $\frac{7}{12}\Delta$ | $\frac{8}{12}\Delta$ | $\frac{9}{12}\Delta$ | $\frac{10}{12}\Delta$ | $\frac{11}{12}\Delta$ | $\frac{12}{12}\Delta$ |
| $\mathbf{W_n}(\mathbf{t_k})$ | 0.215 | 0.180 | 0.135 | 0.090 | 0.040 | 0.010 |

Tabelle B.6: Charakteristische Funktion der Detektorelemente

# Abbildungsverzeichnis


1.1 Meßaufbau der Rückstreutomographie . . . . . . . . . . . . . . . . 10
1.2 Abminderung von Röntgenstrahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
1.3 Photoeffekt als Absorption von Photonen . . . . . . . . . . . . . . . 16
1.4 Comptoneffekt als elastischer Stoß . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
1.5 Comptoneffekt an schwach gebundenen Elektronen . . . . . . . . 18
1.6 Paarbildung im Coulombfeld eines Atoms . . . . . . . . . . . . . . . 20
1.7 Absorptionskoeffizienten für Aluminium . . . . . . . . . . . . . . . . 22
1.8 Absorptionskoeffizienten für Eisen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22
1.9 Absorptionskoeffizienten für Wasser . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
1.10 Absorptionskoeffizienten für Blei . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
1.11 Modell der Radontransformation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

2.1 Quellpositionen in der 3D-Rückstreutomographie . . . . . . . . . . 47
2.2 Zerlegung des Objektes in horizontale Schichten . . . . . . . . . . . 48
2.3 Experimentelle Bestimmung der Detektorfunktion . . . . . . . . . . 50

3.1 Idee der Strippingverfahren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73
3.2 Binäre Testobjekte mit Al- bzw. Fe-Kern . . . . . . . . . . . . . . . . 82
3.3 Rekonstruktionen mit GRV und PRV für $Z \leq 13$ . . . . . . . . . . 84
3.4 Rekonstruktionen mit GRV und PRV für $Z > 13$ . . . . . . . . . . 87
3.5 Rekonstruktionen mit ERV und PRV für $Z \leq 13$ . . . . . . . . . . . 91
3.6 Rekonstruktionen mit ERV und URV für $Z > 13$ . . . . . . . . . . . 95
3.7 Rekonstruktionen mit ERV$_P$ und URV$_P$ für $Z > 13$ . . . . . . . . 99
3.8 Rekonstruktionen mit ERV$_P$ und URV$_P$ aus gestörten Daten . . . 101
3.9 Rekonstruktionen mit URV$_P$ aus gestörten Daten mehrerer Meßrichtungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103
3.10 Landminenerkennung aus exakten und gestörten Daten . . . . . . 105

4.1 2D-Schnitt des Meßaufbaus . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
4.2 Skizzierter Strahlengang für einen festen Polarwinkel $\varphi$ . . . . . . 111

# Tabellenverzeichnis

B.1 Physikalische Naturkonstanten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127
B.2 Dichtewerte der untersuchten Materialien . . . . . . . . . . . . . . . . 127
B.3 Absorptions- und Comptonkoeffizienten für Anwendungen mit 160keV-Röntgenröhre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128
B.4 Absorptions- und Comptonkoeffizienten für Anwendungen mit 450keV-Röntgenröhre - Teil 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 129
B.5 Absorptions- und Comptonkoeffizienten für Anwendungen mit 450keV-Röntgenröhre - Teil 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130
B.6 Charakteristische Funktion der Detektorelemente . . . . . . . . . . 131

# Literaturverzeichnis


[1] Abramowitz, M., and Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, New York, 1972.

[2] Als-Nielsen, J., and Mc Morrow, D. *Elements of Modern X-Ray Physics.* John Wiley, New York, 2001.

[3] Astin, A.V., D. Nsrds-nbs 29: Photon cross sections, attenuation coefficients, and energie absorption coefficients from 10kev to 100gev. Tech. rep., United States Departement of Commerce, National Bureau of Standards, 1969.

[4] Authier, A. *Dynamical Theory of X-Ray Diffraction.* Oxford University Press, New York, 2001.

[5] Bauer, H. *Maß- und Integrationstheorie.* de Gruyter, Berlin,New York, 1990.

[6] Censor, Y., Gustafson, D., Lent, A., and Tuy, H. A new approach to the emission computerized tomography problem: simultaneous calculation of attenuation and activity coefficients. *IEEE Trans. Nucl. Sci. 26* (1979), 2275–2279.

[7] Corless, R., Gonnet, G., Hare, D., Jeffrey, D., and Knuth, D. On the Lambert W Funktion. *Department of Applied Mathematics, University of Western Ontario, Canada, N6A 5B7* (1993).

[8] Demtröder, W. *Experimentalphysik 4: Kern-, Teilchen- und Atomphysik.* Springer, Berlin, 1998.

[9] Demtröder, W. *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper.* Springer, Berlin, 2000.

[10] Dicken, V. A new approach towards simultaneous activity and attenuation reconstruction in emission tomography. *Inverse Problems 15* (1999), 931–960.

[11] Dietz, R. *Die Approximative Inverse als Rekonstruktionsmethode in der Röntgen-Computertomographie. Dissertation.* Saarbrücken, 1999.

[12] Elstrodt, J. *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, Berlin, 1996.

[13] Feldkamp, L., Davis, L., and Kress, J. Practical Cone Beam algorithm. *J. Opt. Soc. Am. 1* (1985), 612–619.

[14] Fliessbach, T. *Quantenmechanik.* B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1991.

[15] Gorshkov, V. Algorithm of simulating and reconstruction (2d-geometry) with real energy spectrum. Tech. rep., Fraunhofer Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren, Saarbrücken, 1994.

[16] Gorshkov, V. Investigation of backscatter radiation for determination density of materials. Tech. rep., Fraunhofer Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren, Saarbrücken, 1994.

[17] Gorshkov, V. Reconstruction of images measured in backscattering geometry. Tech. rep., Fraunhofer Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren, Saarbrücken, 1994.

[18] Gorshkov, V. 3d-reconstruction in backscatter tomography. Tech. rep., Fraunhofer Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren, Saarbrücken, 1996.

[19] Gourion, D., and Noll, D. The inverse problem of emission tomography. *Inverse Problems 18* (2002), 1435–1460.

[20] Gradshteyn, I., and Ryzhik, I. *Table of Integrals, Series and Products*, sixth ed. Academic Press, San Diego.

[21] Guillement, J.-P., Jauberteau, F., Kunyansky, L., Novikov, R., and Trebossen, R. On single-photon emission computed tomography imaging based on an exact formula for the nonuniform attenuation correction. *Inverse Problems 18* (2002), L11–L19.

[22] Heitler, W. *The Quantum Theory of Radiation.* Oxford, 1984.

[23] Heuser, H. *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1986.

[24] Hochstadt, H. *The Functions of Mathematical Physics.* John Wiley, New York, 1971.

[25] Hochstadt, H. *Integral Equations.* John Wiley, New York, 1973.

[26] Khettabi, F. E., and Hussein, E. M. A. An inverse problem for three-dimensional x-ray scatter/transmission imaging. *Inverse Problems 19* (2003), 477–495.

[27] Kirillov, A. On a problem of I.M. Gel'fand. *Soviet Math. Dokl., 2*.

[28] Kneser, H. *Funktionentheorie.* Vandenhoeck und Rupprecht, Göttingen, 1958.

[29] Kunyansky, L. A. A new SPECT reconstruction algorithm based on the Novikov explicit inversion formula. *Inverse Problems 17* (2001), 293–306.

[30] Landau, L., and Lifschitz, E. *Quantenmechanik.* Akademieverlag Berlin, Berlin, 1979.

[31] Louis, A. K. *Analytische Methoden in der Computer-Tomographie.* Habilitationsschrift, Fachbereich Mathematik der Universität Münster.

[32] Louis, A. K. Approximative inversion of the 3D Radon transform. *Math. Meth. in the Appl. Sci. 5* (1983), 176–185.

[33] Louis, A. K. Incomplete Data Problems in X-ray Computerized Tomography, I. Singular Value Decomposition of the Limited Angle Transform. *Numer. Math. 48* (1986), 251–262.

[34] Louis, A. K. *Inverse und schlecht gestellte Probleme.* Teubner, Stuttgart, 1989.

[35] Louis, A. K. Medical Imaging: state of the art and future developments. *Inverse Problems 8* (1992), 709–738.

[36] Louis, A. K. Approximative inverse for linear and some nonlinear problems. *Inverse Problems 12* (1996), 175–190.

[37] Messiah, x. *Quantenmechanik.* Springer, Berlin, 2000.

[38] Natterer, F. On the inversion of the attenuated Radon transform.

[39] Natterer, F. Computerized tomography with unknown sources. *SIAM J. Appl. Math. 43* (1983), 1201–1212.

[40] Natterer, F. *The Mathematics of Computerized Tomography.* John Wiley, Chichester and New York, 1986.

[41] Natterer, F. Inversion of the attenuated Radon transform. *Inverse Problems 17* (2001), 113–119.

[42] Niemann, W., Olesinski, S., Thiele, T., Martens, G., and Carlsen, I.-C. *Kampfmittelerkennung mit der Röntgenrückstreutechnik - Ein neues Verfahren weckt neue Hoffnungen.* 2002.

[43] Novikov, R. G. An inversion formula for the attenuated x-ray transform. Tech. rep., Departément de Mathematiques, Université de Nantes, 2000.

[44] Radon, J. *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, vol. 69. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss., 1917.

[45] Ramlau, R., Clackdoyle, R., Noo, F., and Bal, G. Accurate Attenuation Correction in SPECT Imaging using Optimization of Bilinear Functions and Assuming an Unknown Spatially-Varying Attenuation Distribution. Tech. rep., Departement of Radiology, University of Utah, 1999.

[46] Schmitt, U. *Numerische Verfahren in der Rückstreutomographie.* Diplomarbeit an der Universität des Saarlandes, August 1997.

[47] Schuster, T. *Schnelle Rekonstruktion von Geschwindigkeitsfeldern und Theorie der Approximativen Inversen.* Dissertation, Saarbrücken, 1999.

[48] Sommerfeld, A. *Atombau und Spektrallinien, Bd. 1.* Harri Deutsch, Frankfurt/M., 1978.

[49] Sommerfeld, A. *Atombau und Spektrallinien, Bd. 2.* Harri Deutsch, Frankfurt/M., 1978.

[50] Tretiak, O., and Metz, C. The Exponential Radon Transform. *SIAM J. Appl. Math. 39* (1980), 341–354.

[51] Tuy, H. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM J. Appl. Math. 43* (1983), 546–552.

[52] Vogel, H. *Gerthsen Physik.* Springer, Berlin, 1995.