Schnelle Rekonstruktion von Geschwindigkeitsfeldern und Theorie der Approximativen Inversen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von

Thomas Schuster

Saarbrücken
1999

Tag des Kolloquiums:	12. November 1999
Dekan:	Univ.-Prof. Dr. Th. Eicher
Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr. A.K. Louis
	Univ.-Prof. Dr. S. Rjasanow
	Univ.-Prof. Dr. P. Maaß

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Mathematik der *Computer–Tomographie* ist in den vergangenen Jahrzehnten Gegenstand intensiver Forschungen gewesen. Dabei interessiert man sich für die Rekonstruktion einer skalaren Größe, wie z.B. der Gewebedichte im menschlichen Körper, aus gemessenen Daten. Mittlerweile existieren effiziente Algorithmen zur Lösung dieses Problems. Es stellt sich die Frage, ob es auch möglich ist, Vektorfelder wie z.B. Geschwindigkeitsfelder von Blut zu rekonstruieren. Schon im Jahre 1977 veröffentlichten WELLS ET AL. [38] eine Arbeit, in der sie erläuterten, inwiefern das Messen von Doppler–Signalen bei der Detektion von bösartigen Tumoren in der weiblichen Brust hilfreich sein kann. SIELSCHOTT [33] wendet die zweidimensionale *Vektor–Tomographie* an, um Geschwindigkeitsfelder von Gasen aus akustischen Messungen zu bestimmen. 1992 erschien die Arbeit von JUHLIN [14], in der das Problem der Vektor–Tomographie mathematisch beschrieben wurde. Er bewies, daß unter zusätzlichen Bedingungen aus den gemessenen Daten eine vollständige Rekonstruktion eines Geschwindigkeitsfeldes möglich ist. Die Angabe eines effizienten Algorithmus blieb er jedoch schuldig.

Die Idee der Vektor–Tomographie ist, mit Hilfe des *Doppler–Effektes* das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{f}$ einer sich bewegenden Flüssigkeit zu rekonstruieren. Dazu werden Ultraschallwellen auf das zu untersuchende Objekt Ω ausgesandt. Durch Messen des Doppler–Shifts der reflektierten Welle ist es mittels einiger Umformungen unter bestimmten Annahmen möglich, die Geschwindigkeitskomponente parallel zum Teststrahl L mit Richtung ω

$$y(L) = \int_{\Omega \cap L} \omega \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\ell$$

zu messen, siehe SPARR ET AL. [34], JUHLIN [14]. Der Meßvorgang wird im ersten Kapitel näher beschrieben. Außerdem beschreiben wir eine Meßgeometrie, indem wir die Geraden L parametrisieren, und formulieren die Vektor–Tomographie als inverses Problem, und zwar als Integralgleichung erster Art. Die gemessenen Daten werden als Anwendung einer Integraltransformation, der sogenannten *Doppler–Transformation* auf das Feld $\mathbf{f}$ erklärt. Das Kapitel schließt mit der Angabe von wesentlichen Eigenschaften dieses Operators. So geben wir den Kern an, zeigen, daß er einen nichtabgeschlossenen Bildraum besitzt, und weisen eine Glättungseigenschaft auf.

Zur Lösung schlecht gestellter Probleme sind *Regularisierungsverfahren* unumgänglich. In Kapitel 2 führen wir die Methode der *approximativen Inversen* ein, die eine ganze Klasse von linearen Regularisierungsverfahren umschließt. Dieses Verfahren wurde auch schon bei anderen inversen Problemen aus den Bereichen der Medizintechnik, oder zerstörungsfreies Prüfen, mit Erfolg eingesetzt. Nach der Definition und der Herleitung einiger Eigenschaften beschäftigen wir uns intensiv mit der Anwendung der approximativen Inversen auf diskrete Operatoren

$$A_n = \Psi_n \, A \, ,$$

die durch Anwendung von Funktionalen Ψ_n auf den kontinuierlichen Operator A entstehen. Dabei unterscheiden wir die beiden Fälle, daß die Beobachtungsoperatoren Ψ_n Elemente aus dem Bildraum Y von A sind, beziehungsweise aus dem Dualraum Y_1^* eines dichten Teilraumes von Y. Der letztere Fall erweist sich als schwieriger zugänglich, er ist bei praktischen Anwendungen in der Computer–Tomographie jedoch eher die Regel. Den Ausführungen dieses Teiles liegt eine gemeinsame Arbeit mit Rieder [28] zugrunde.

Auch bei der Anwendung der approximativen Inversen auf die Doppler–Transformation, die Gegenstand des 3. Kapitels ist, tritt dieser zweite Fall ein. Die Beobachtungsoperatoren Ψ_n sind in diesem Fall nämlich Punktauswertungen, die nur auf einem dichten Teilraum von Y stetig sind. Um das Verfahren anzuwenden, müssen wir es zunächst leicht modifizieren, damit auch Vektorfelder, und nicht nur skalare Größen wie im ursprünglichen Fall, rekonstruiert werden können. Im Unterschied zum skalaren Fall sind nun drei Rekonstruktionskerne zu berechnen. Die Berechnung dieser Kerne stellt das Hauptproblem dar und ist für allgemeine Mollifier nicht möglich. Sie gelingt uns jedoch, wenn wir als Mollifier die Gausssche Glockenfunktion

$$E_\gamma^j(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \, \gamma^{-3} \, \exp(-\|\mathbf{x}\|^2/(2\gamma^2)) \cdot e_j$$

nehmen. Sind die Rekonstruktionskerne für die kontinuierliche Doppler–Transformation bekannt, so kann man mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 2 die approximative Inverse auf die diskrete Doppler–Transformation anwenden. Das Ergebnis ist ein effizientes Verfahren zur Rekonstruktion des divergenzfreien Anteiles des Geschwindigkeitsfeldes. Am Ende des Kapitels wird noch gezeigt, wie es möglich ist, mit demselben Datensatz die Rotation des Vektorfeldes zu rekonstruieren, indem man lediglich den Rekonstruktionskern austauscht.

Im 4. Kapitel werden zum einen numerische Ergebnisse präsentiert, zum anderen einige andere Verfahren kurz vorgestellt. Im ersten Teil wenden wir unseren Algorithmus an, um das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit zu rekonstruieren, die in einem um die x-Achse zentrierten Zylinder fließt. Es wird sowohl mit exakten, als auch mit verrauschten Daten gerechnet. Das Verfahren erweist sich dabei nicht nur als sehr effizient, sondern auch als stabil gegenüber Datenfehlern. Die Rotation des Feldes wird ebenfalls rekonstruiert. Auch die Ergebnisse mit gemessenen Daten im zweidimensionalen Fall sind sehr zufriedenstellend.

Die Anzahl an alternativen Verfahren ist nur gering und zieht fast ausschließlich den zweidimensionalen Fall in Betracht. Das von Stråhlén in [36] angegebene Verfahren beruht auf einer Formel vom Typ *gefilterte Rückprojektion*, wobei aber auch der

Normalfluß des Feldes gemessen werden muß. Das Verfahren läßt sich in dieser Form nur sehr schwer auf drei Dimensionen verallgemeinern. Mit Hilfe eines Projektionssatzes für die Doppler–Transformation erhalten WINTERS, ROUSEFF [40] ein weiteres Verfahren zur Rekonstruktion der Rotation eines zweidimensionalen Feldes. DESBAT [8] überträgt die von der *Radon–Transformation* her bekannten *direkten algebraischen Methoden* auf die zweidimensionale Doppler– Transformation und gibt eine Abtastgeometrie an. WERNSDÖRFER [39] schließlich stellt ein iteratives Verfahren *(ART)* für die dreidimensionale Vektor–Tomographie auf, das allerdings sehr aufwendig ist und an Effizienz der approximativen Inversen nicht gleichkommt.

In der vorliegenden Arbeit wird demnach nicht nur die Theorie der approximativen Inversen vertieft, sondern mit Hilfe dieser auch ein Verfahren zur Rekonstruktion divergenzfreier Vektorfelder hergeleitet. Obwohl es auch noch offene Fragen gibt, die im letzten Abschnitt dieser Arbeit kurz angesprochen werden, ist das Verfahren in dieser Form für den dreidimensionalen Fall völlig neuartig, und setzt im Bezug auf Geschwindigkeit einen neuen Maßstab.

An dieser Stelle möchte ich Herrn G. SPARR danken, der mir die Datensätze für die Rekonstruktionen in Abschnitt 4.1.2 zur Verfügung gestellt hat. Ferner möchte ich diejenigen erwähnen, die an der Messung beteiligt waren. Im einzelnen sind dies M. ALMQUIST, TH. JANSSON, K. LINDSTRÖM und H.W. PERSSON vom Department of Electrical Measurements, Lund, sowie K. STRÅHLÉN und G. SPARR vom Department of Mathematics der Universität von Lund.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr. Alfred. K. Louis, der diese Arbeit stets vorbildlich betreut und mit unermüdlichem Interesse deren Entwicklung verfolgt und gefördert hat.

Danken möchte ich auch meinen Kollegen, insbesondere Herrn Dr. Rainer Dietz. Das freundschaftliche Verhältnis zwischen uns hat sehr zum Gelingen der vorliegenden Arbeit beigetragen. Weite Teile aus Abschnitt 2.2 sind im Zuge einer gemeinsamen Veröffentlichung mit Herrn Univ.-Prof. Dr. Andreas Rieder entstanden, dem ich aus diesem Grund zu Dank verpflichtet bin.

Ich danke auch meinen Eltern ohne deren jahrelange Unterstützung diese Dissertation nicht möglich gewesen wäre.

Nicht zuletzt danke ich meiner lieben Petra für ihr Verständnis und ihre Geduld.

Saarbrücken, im November 1999 Thomas Schuster

Kapitel 1

Grundlagen der Vektor–Tomographie

Wir erläutern zunächst Meßaufbau und Modell der Vektor–Tomographie. 1992 erschien die Arbeit Juhlin [14], in der ein Modell zur Rekonstruktion divergenzfreier Vektorfelder hergeleitet wird. Juhlin gibt auch eine Möglichkeit an, die Rekonstruktion auszuführen. Das daraus entstehende Verfahren wäre jedoch zu aufwendig, um ernsthaft in Frage zu kommen. Wir werden es im zweiten Abschnitt dieses Kapitels kurz beschreiben. Jansson et al. [13] stellen eine Meßapparatur vor, die experimentelle Daten liefert, um zweidimensionale Geschwindigkeitsfelder einer Flüssigkeit zu rekonstruieren. Wir werden im ersten Abschnitt einen Meßaufbau für dreidimensionale Vektorfelder beschreiben, wobei wir uns vorwiegend auf die Arbeit von Sparr et al. [34] stützen werden. Darauf aufbauend leiten wir im zweiten Abschnitt ein mathematisches Modell für die Vektor–Tomographie her. Wir definieren die Doppler–Transformation, mit Hilfe derer wir die Vektor–Tomographie als Operatorgleichung erster Art formulieren können. Die hierfür nötige Vektoranalysis stellen wir in einem weiteren Abschnitt zur Verfügung.

1.1 Fourier–Transformation und Sobolevräume

Wir wollen kurz auf Definition und Eigenschaften der Fouriertransformation eingehen und ausgehend davon Sobolevräume und deren Tensorprodukte einführen, die wichtige Hilfsmittel in den nachfolgenden Kapiteln darstellen. Alle Eigenschaften und Sätze bleiben ohne Beweis, es wird lediglich auf die entsprechende Literatur verwiesen.

1.1.1 Die Fourier–Transformation: Definition und elementare Eigenschaften

Definition 1.1.1 *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine schnell fallende Funktion. Dann heißt*

$$\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-\imath\langle x,\omega\rangle}\, dx$$

die n-dimensionale Fourier-Transformierte *von f.*

Die Fouriertransformation ist stetig als Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sich. Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt, läßt sie sich stetig fortsetzen. Bezüglich der L^2-Norm ist die Fouriertransformation eine Isometrie, es gilt

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Der bezüglich des L^2-Skalarproduktes gegebene adjungierte Operator hat die Form

$$\mathcal{F}^* f(\omega) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{\imath\langle x,\omega\rangle}\, dx\,.$$

Es ist außerdem

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*\,. \tag{1.1}$$

Bezeichnen wir weiter mit

$$D^a f(t) = |a|^{-1/2} f(t/a), \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,,$$

den *Dilatationsoperator* und mit

$$T^y f(x) = f(x-y)$$

den *Translationsoperator*, so erhalten wir folgende Rechenregeln.

Lemma 1.1.2 *Es gilt:*

a)

$$\mathcal{F}D^a = D^{1/a}\mathcal{F}\,,$$

b)

$$\mathcal{F}T^y = E^y\mathcal{F}\,,$$

wobei E^y für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert ist durch

$$E^y f(x) = e^{-\imath\langle x,y\rangle} f(x)\,,$$

c)

$$\mathcal{F}D^\alpha f(\xi) = \imath^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}f(\xi)\,, \quad \mathcal{F}(x^\alpha f) = \imath^{|\alpha|} D^\alpha f$$

für $f \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dabei ist

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\,.$$

1.1.2 Definition von Sobolevräumen und Tensorprodukten

Wir wollen in diesem Abschnitt kurz verschiedene Arten von Sobolevräumen und deren Tensorprodukte einführen. Die verschiedenen Definitionen und Identifizierungen sind den Büchern von Aubin [3] und Wloka [41] entnommen, auf die auch für eine Vertiefung der Thematik hingewiesen wird.

Für den gesamten Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\alpha \geq 0$ eine reelle Zahl.

Definition 1.1.3 *Wir bezeichnen mit $H_0^\alpha(\Omega)$ den Abschluß von $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, den beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω, bezüglich der Norm*

$$\|f\|^2_{H_0^\alpha(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^\alpha \, |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \,.$$

$H_0^\alpha(\Omega)$ heißt Sobolev-Raum der Ordnung *α.*
Eine zu $\|\cdot\|_{H_0^\alpha(\Omega)}$ äquivalente Norm ist definiert durch

$$\|f\|^2_{H^\alpha(\Omega)} = \sum_{|k|\leq[\alpha]} \int_\Omega |D^k f(x)|^2 \, dx + \sum_{|k|=[\alpha]} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^k f(x) - D^k f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\tau}} \, dx \, dy \,.$$

Dabei ist τ bestimmt durch $\alpha = [\alpha] + \tau$. Wir setzen

$$H^\alpha(\Omega) := \{ f \in L^2(\Omega) : \|f\|_{H^\alpha(\Omega)} < \infty \} \,.$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ besteht $H^\alpha(\Omega)$ offenbar gerade aus allen Funktionen aus $L^2(\Omega)$, deren Ableitungen der Ordnung kleiner gleich α zumindest im schwachen Sinne existieren und wieder aus $L^2(\Omega)$ sind. Weiterhin identifizieren wir $Z = S^1 \times (-1,1)$ mit $\tilde{Z} = (0,2\pi) \times (-1,1)$ mit Hilfe der Parametrisierung $(0,2\pi) \ni \varphi \mapsto \omega(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top \in S^1$ und definieren den Sobolev-Raum der periodischen Funktionen der Ordnung *α durch*

$$H_{\mathrm{p}}^\alpha(\tilde{Z}) := \{ g \in L^2(\tilde{Z}) : \|g\|^2_{\mathrm{p},\alpha} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+k^2+n^2)^\alpha |\hat{g}_{k,n}|^2 < \infty \}$$

mit

$$\hat{g}_{k,n} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{Z}} g(\varphi,s) \, e^{-\imath(\pi\, k\, s + n\, \varphi)} d\varphi \, ds \,.$$

Sei M eine $\mathcal{C}^{k,\kappa}$-Mannigfaltigkeit, $\Xi = (\mathcal{U}_i, \gamma_i)$, $i \in \mathcal{J}$, ein zugeordneter Atlas und $\{\beta_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ eine zugeordnete Partition der Eins. Der Sobolev-Raum auf der Mannigfaltigkeit *M* der Ordnung *α mit $\alpha \leq k+\kappa$, falls $k+\kappa \in \mathbb{N}$ und $\alpha < k+\kappa$ sonst, besteht aus den Funktionen $f : M \to \mathbb{C}$, für die alle Funktionen*

$$(f\cdot\beta_i) \circ \gamma_i^{-1} : \gamma_i(\mathcal{U}_i) \to \mathbb{C} \,, \quad i \in \mathcal{J}$$

zu $H_0^\alpha(\gamma_i(\mathcal{U}_i))$ gehören. Das innere Produkt auf $H^\alpha(M)$ ist erklärt durch

$$\langle f, g \rangle_{H^\alpha(M)} = \sum_{i\in\mathcal{J}} \langle (f\cdot\beta_i)\circ\gamma_i^{-1}, (g\cdot\beta_i)\circ\gamma_i^{-1} \rangle_{H_0^\alpha(\gamma_i(\mathcal{U}_i))} \,.$$

Der Dualraum von $H_0^\alpha(\Omega)$ ist $H^{-\alpha}(\Omega)$, siehe z.B. AUBIN [3].
Sei $\Pi^3 \subset I\!R^3$ der Torus im $I\!R^3$. Durch Übergang zu lokalen Koordinaten kann man den Raum $H_{\mathrm{p}}^\alpha(\tilde{Z})$ identifizieren mit $H^\alpha(\Pi^3)$, dem Sobolev-Raum der Ordnung α auf der kompakten Mannigfaltigkeit Π^3. Mit Hilfe dieser Bezeichnungen sind wir nun in der Lage, Tensorprodukte von Sobolev-Räumen einzuführen. Es seien $\Omega_1 \subset I\!R^{n_1}$, $\Omega_2 \subset I\!R^{n_2}$ beschränkte Gebiete in $I\!R^{n_1}$ bzw. $I\!R^{n_2}$, $\alpha, \beta \geq 0$. Dann ist $H_0^\alpha(\Omega_1, H_0^\beta(\Omega_2))$ der Abschluß von $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_1, H_0^\beta(\Omega_2))$ bezüglich der Norm

$$\|f\|^2_{H_0^\alpha(\Omega_1, H_0^\beta(\Omega_2))} = \int_{I\!R^{n_1}} (1+|\xi|^2)^\alpha \, \|\hat{f}(\xi)\|^2_{H_0^\beta(\Omega_2)} \, d\xi \, .$$

Definition 1.1.4 *Wir bezeichnen mit*

$$H_0^\alpha(\Omega_1)\hat{\otimes} H_0^\beta(\Omega_2) := \mathcal{L}_2((H_0^\alpha(\Omega_1))^*, H_0^\beta(\Omega_2)) = \mathcal{L}_2(H^{-\alpha}(\Omega_1), H_0^\beta(\Omega_2))$$

den Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren von $H^{-\alpha}(\Omega_1)$ nach $H_0^\beta(\Omega_2)$.
$H_0^\alpha(\Omega_1)\hat{\otimes} H_0^\beta(\Omega_2)$ ist das Tensorprodukt *von $H_0^\alpha(\Omega_1)$ und $H_0^\beta(\Omega_2)$.*

Ein dichter Teilraum von $H_0^\alpha(\Omega_1)\hat{\otimes} H_0^\beta(\Omega_2)$ ist der Raum

$$H_0^\alpha(\Omega_1) \otimes H_0^\beta(\Omega_2) = \operatorname{span}\{\varphi \otimes \psi : \varphi \in H_0^\alpha(\Omega_1),\, \psi \in H_0^\beta(\Omega_2)\} \, .$$

Der Raum $H_0^\alpha(\Omega_1, H_0^\beta(\Omega_2))$ ist isometrisch isomorph zu den Räumen $H_0^\alpha(\Omega_1)\hat{\otimes} H_0^\beta(\Omega_2)$ und $H_0^{\alpha,\beta}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, siehe AUBIN [3]. $H_0^{\alpha,\beta}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ bezeichnet dabei in naheliegender Weise den Abschluß von $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ bezüglich der Norm

$$\|f\|^2_{H_0^{\alpha,\beta}(\Omega_1 \times \Omega_2)} = \int_{I\!R^{n_2}} \int_{I\!R^{n_1}} (1+|\xi|^2)^\alpha \, (1+|\zeta|^2)^\beta \, |\hat{f}(\xi,\zeta)|^2 \, d\xi \, d\zeta \, .$$

In analoger Weise definiert man $H_{\mathrm{p}}^\alpha(\tilde{Z}, H_0^\beta(\Omega))$.
Die *vektorwertigen Sobolev-Räume* $H_0^\alpha(\Omega, I\!R^m)$, $H^\alpha(\Omega, I\!R^m)$ und $H^\alpha(M, I\!R^m)$ seien analog zu Definition 1.1.3 erklärt.
Wir können $H_0^{\alpha,\beta}(\Omega_1 \times \Omega_2, I\!R^m)$ und $H_0^\alpha(\Omega_1, H_0^\beta(\Omega_2, I\!R^m))$ identifizieren, da $H_0^\alpha(\Omega)\hat{\otimes} I\!R^m$ und $H_0^\alpha(\Omega, I\!R^m)$ isometrisch isomorph zueinander sind. Zum Beweis dieser Aussage sowie eingehenderen Betrachtungen von Tensorprodukten von Sobolev-Räumen sei auf die Bücher von AUBIN [3] und WEIDMANN [37] verwiesen.

1.2 Vektoranalysis

Wir geben kurz die für diese Arbeit wesentlichen Begriffe und Sätze aus der Vektoranalysis an, unter anderem den klassischen Zerlegungssatz von HELMHOLTZ. Zunächst führen wir zwei Bezeichnungen ein, die zur Klassifikation von Vektorfeldern dienen.

Definition 1.2.1 *Sei $\mathbf{f} \in H^1(\Omega, I\!R^3)$, $\Omega \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet. Wir nennen das Vektorfeld $\mathbf{f}$*
a) divergenzfrei*, falls $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ ist in Ω,*
b) rotationsfrei*, falls $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ ist in Ω.*

Das folgende Lemma ist leicht einzusehen und zeigt, daß sowohl die Klasse der divergenzfreien, wie die der rotationsfreien Vektorfelder recht groß ist.

Lemma 1.2.2 *Seien* $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $p \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. *Dann ist* $\nabla \times \mathbf{f}$ *divergenzfrei, und* ∇p *rotationsfrei.*

Nicht ganz so offensichtlich ist die Tatsache, daß sich jedes divergenzfreie, bzw. rotationsfreie Vektorfeld in dieser Form schreiben läßt.

Lemma 1.2.3 *Ist ein Vektorfeld* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *divergenzfrei, so gibt es ein* $\mathbf{g} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *mit*

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{g}\,.$$

Ist ein Vektorfeld $\mathbf{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *rotationsfrei, so gibt es ein* $p \in H^1(\Omega)$ *mit*

$$\mathbf{f} = \nabla p\,.$$

Beweis: Der Beweis des Lemmas kann in Brand [6] nachgelesen werden.

□

Bevor wir den Zerlegungssatz von Helmholtz formulieren, führen wir noch eine Bezeichnung ein. Es sei für ein $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$\Delta \mathbf{f} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j}{\partial x_i^2} \cdot e_j$$

der n-dimensionale *Laplace-Operator*. Mit

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \quad \text{für } n = 2, \\ E(x) &= -\frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\, |x|^{2-n}, \quad \text{für } n \geq 3\,, \end{aligned}$$

bezeichnen wir die *Fundamentallösung* des Laplace-Operators, d.h. es gilt $E * \Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}$. $|S^{n-1}|$ bedeutet das Maß der n-dimensionalen Einheitssphäre, d.h. es ist $|S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.
Wir geben den Satz von Helmholtz nur für drei Dimensionen an, wie er auch in Chorin, Marsden [7] zu finden ist. Für beliebige Dimensionen $n \geq 2$ kann der Satz in Sparr, Strahlen [35] nachgelesen werden. Dort ist auch der Beweis der Gleichungen (1.2) zu finden.

Theorem 1.2.4 (Zerlegungssatz von Helmholtz) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *ein beschränktes Gebiet mit stückweisem* $\mathcal{C}^1$*-Rand* $\partial\Omega$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *mit* $\mathbf{f}_{|\partial\Omega} \equiv 0$ *und* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \in L^2(\partial\Omega)$. *Hierbei bezeichne* $\mathbf{n}$ *die nach außen gerichtete Normale an* $\partial\Omega$. *Dann kann* $\mathbf{f}$ *eindeutig in einen divergenzfreien Anteil* $\mathbf{u}^s$ *und einen rotationsfreien Anteil* ∇p *zerlegt werden. Es gilt*

$$\mathbf{f} = \mathbf{u}^s + \nabla p\,.$$

Hierbei sind $\mathbf{u}^s, \nabla p \in L^2(\Omega, I\!R^3)$, *wobei* $\mathbf{u}^s$ *die Darstellung* $\mathbf{u}^s = \nabla \times \mathbf{a}$ *besitzt für ein Vektorfeld* $\mathbf{a} \in H_0^1(\Omega, I\!R^3)$. *Die Funktionen* $\mathbf{a}$ *und* p *sind gegeben durch*

$$\mathbf{a} = -E * (\nabla \times \mathbf{f}), \qquad p = E * (\nabla \cdot \mathbf{f})\,. \tag{1.2}$$

Beweis: Der Beweis des Satzes ist in Chorin, Marsden [7] zu finden. Für den Beweis von (1.2) beachte man, daß sich der Laplace-Operator darstellen läßt durch

$$\Delta \mathbf{f} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})\,.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= E * \Delta \mathbf{f} = E * \Big(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})\Big) \\ &= \nabla\Big(E * (\nabla \cdot \mathbf{f})\Big) + \nabla \times \Big(-E * (\nabla \times \mathbf{f})\Big)\,, \end{aligned}$$

was den Beweis vervollständigt.

$\square$

Bemerkung: Die Komponenten $\mathbf{u}^s$ und ∇p der in Theorem 1.2.4 angegebenen Zerlegung sind orthogonal zueinander bezüglich des L^2-Skalarproduktes. Offensichtlich ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \mathbf{u}^s, \nabla p\rangle\, d\mathbf{x} &= \int_\Omega \langle \nabla \times \mathbf{a}, \nabla p\rangle\, d\mathbf{x} \\ &= -\int_\Omega \langle \mathbf{a}, \nabla \times \nabla p\rangle\, d\mathbf{x} = 0\,. \end{aligned}$$

Die nächste Frage ist, ob ein Vektorfeld eindeutig bestimmt ist, wenn man Rotation und Divergenz kennt. Wiederum Helmholtz war es, der diese Frage für Vektorfelder im $I\!R^n$, die im Unendlichen verschwinden, positiv beantwortet hat. Wir geben hier einen Satz für Vektorfelder auf beschränkten Gebieten an.

Theorem 1.2.5 (Rekonstruktionssatz) *Sei* $\Omega \subset I\!R^3$ *ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit stückweisem* $\mathcal{C}^1$*-Rand* $\partial\Omega$. *Seien weiter* $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega, I\!R^3)$, $p \in H_0^1(\Omega)$ *und* $\psi \in L^2(\partial\Omega)$. *Dann hat das folgende Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{f} &= \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega\,, \\ \nabla \cdot \mathbf{f} &= p \quad \text{in } \Omega\,, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} &= \psi \quad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung in $H_0^1(\Omega, I\!R^3)$, *wenn*

$$\int_\Omega p\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \psi\, d\sigma \tag{1.3}$$

gilt. Ansonsten existiert keine Lösung.

BEWEIS: Die Beweisführung folgt der in JUHLIN [14], wir wollen sie aber dennoch angeben, da sie einen konstruktiven Weg angibt, das Vektorfeld aus den gegebenen Daten zu berechnen.
Wir bestimmen zunächst ein $\mathbf{g} \in H_0^1(\Omega, I\!R^3)$, das den folgenden beiden Gleichungen genügt:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{g} &= \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega\,, & (1.4)\\ \nabla \cdot \mathbf{g} &= p \quad \text{in } \Omega\,. & (1.5) \end{aligned}$$

Indem wir wiederum die Identität $\Delta\mathbf{g} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{g})$ ausnutzen, sehen wir, daß

$$\mathbf{g} = E * (\nabla p - \nabla \times \mathbf{u})$$

die Gleichungen (1.4) und (1.5) erfüllt und aus $H_0^1(\Omega, I\!R^3)$ ist. Die Randbedingung ist jedoch verletzt. Wir erzwingen diese Randbedingung, indem wir zu $\mathbf{g}$ ein Feld $\mathbf{h}$ addieren, das das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{h} &= 0 \quad \text{in } \Omega\,,\\ \nabla \cdot \mathbf{h} &= 0 \quad \text{in } \Omega\,, \qquad (1.6)\\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} &= \check{\psi} \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

löst, wobei $\check{\psi} = \psi - \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$ ist. Es bleibt noch das Feld $\mathbf{h}$ zu bestimmen. Offensichtlich ist $\Delta\mathbf{h} = 0$ in Ω und somit $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, I\!R^3)$ nach dem WEYLschen Lemma. Da $\nabla \times \mathbf{h} = 0$ in Ω ist, gibt es nach Lemma 1.2.3 eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mit $\mathbf{h} = \nabla\phi$. Wenden wir dies auf das Randwertproblem (1.6) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla\phi) &= 0 \quad \text{in } \Omega\,,\\ \mathbf{n} \cdot \nabla\phi &= \check{\psi} \quad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

oder gleichbedeutend

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \quad \text{in } \Omega\,,\\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} &= \check{\psi} \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Da $\int \check{\psi}\, d\sigma = 0$ ist, was sich durch einfaches Nachrechnen aus (1.3) ergibt, ist dieses Neumann Randwertproblem bis auf eine additive Konstante eindeutig lösbar, und damit $\mathbf{h}$ eindeutig bestimmt.

□

Bemerkung: Der Beweis des vorangegangenen Theorems liefert den Ansatz eines Verfahrens, um den divergenzfreien Anteil $\mathbf{u}^s$ eines Vektorfeldes zu bestimmen, wir kommen darauf später kurz zu sprechen.

Wir haben uns bislang stets darauf beschränkt, Vektorfelder zu betrachten, die Nullrandbedingungen haben. Bei Vektorfeldern mit beliebigen Randwerten ist die in Theorem 1.2.4 angegebene Zerlegung nicht mehr eindeutig. Vielmehr lassen sich solche Felder in der Form

$$\mathbf{f} = \mathbf{u}^s + \nabla p + \mathbf{u}^h$$

schreiben, wobei $\mathbf{u}^h$ ein *harmonisches* Vektorfeld ist, d.h. es ist divergenz- und rotationsfrei. Osman, Prince [26] untersuchen in ihrer Arbeit diese Situation und geben auch Inversionsformeln an. Allerdings benutzen sie als Modell den Normalfluß des Vektorfeldes, siehe Stråhlen [36] und Abschnitt 1.4.2.2. Wir wollen diesem Fall nicht weiter nachgehen.

1.3 Meßaufbau und Modellierung

Die Idee der Vektor–Tomographie ist, mit Hilfe des Doppler-Effektes das Geschwindigkeitsfeld einer sich bewegenden Flüssigkeit zu rekonstruieren. Nehmen wir dazu an, unsere zu untersuchende Flüssigkeit bewege sich in einem Objekt Ω. Als Beispiel einer solchen Flüssigkeit können wir Blut im menschlichen Körper betrachten. Werden auf das Objekt Ω Ultraschallwellen ausgesandt, so wird ein Teil der Wellen, wenn sie auf ein Hindernis treffen, reflektiert, der andere Teil wird transmittiert. Abbildung 1.3.1 zeigt einen Versuchsaufbau für ein zweidimensionales Objekt. Dabei umkreist eine Ultraschallquelle das Objekt und sendet an endlich vielen Positionen eine gewisse Anzahl von Signalen entlang von Geraden L aus. In der Abbildung sind 8 Positionen dargestellt. Die Anordnung ist vergleichbar mit der parallelen Geometrie bei der 2D–Computer–Tomographie. Allerdings sind Quelle und Detektor unmittelbar nebeneinander angeordnet, und nicht gegenüber wie bei der Computer–Tomographie. Der Detektor mißt die reflektierten Anteile der Signale. Die Frequenz η der reflektierten Welle unterscheidet sich, verursacht durch den Doppler–Effekt, um den sogenannten Doppler–Shift gegenüber der Frequenz η_0 der ausgesandten Welle. Dieser ist positiv, wenn sich die Flüssigkeit auf die Quelle zubewegt, oder negativ, wenn sie sich von der Quelle wegbewegt. Der Doppler-Shift $\Delta\eta$ berechnet sich dabei folgendermaßen, wenn man relativistische Effekte vernachlässigt:

$$\Delta\eta = \eta - \eta_0 = \frac{2\,c\,\nu\,\eta_0}{c^2 - \nu^2}\,.$$

Dabei ist η_0 die Ausgangsfrequenz des Signales, c die Geschwindigkeit der Schallwellen innerhalb des Körpers und ν die Geschwindigkeit, mit der der Partikel, der den Doppler-Shift verursacht, sich der Quelle nähert, bzw. sich von ihr entfernt. Im Falle des Blutes sind die Partikel, die den Doppler-Shift verursachen, die roten Blutkörperchen, da ihre akustische Impedanz sich von der des Blutplasmas und des umliegenden Gewebes unterscheidet.

Im allgemeinen ist $\nu \ll c$, so daß sich der Doppler-Shift annähernd berechnen läßt als

$$\Delta\eta = \frac{2\,\nu\,\eta_0}{c} = k\,\nu\,, \tag{1.7}$$

wobei $k = 2\eta_0/c$ eine Konstante ist. Das bedeutet, daß der Doppler-Shift annähernd proportional zur Geschwindigkeit ν des Partikels ist.

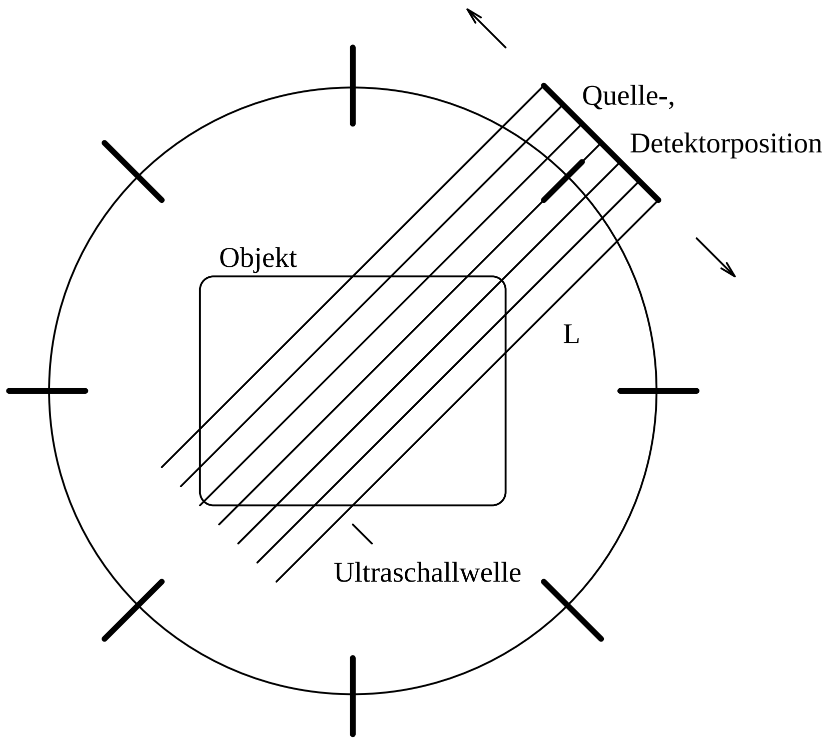

Abbildung 1.3.1 Meßanordnung für ein zweidimensionales Objekt

Wir beschränken uns zunächst noch auf den zweidimensionalen Fall. Sei $\Omega \subset I\!\!R^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet. Mit L bezeichnen wir die Gerade, entlang derer ein Signal der Form $e^{\imath\eta_0 t}$ ausgesandt wird. Im Gegensatz zum skalaren Fall müssen wir im vektorwertigen Fall die Gerade L mit einer Orientierung versehen, die durch einen Einheitsvektor e_L, der parallel zu L verläuft, beschrieben wird. Es sei $\mathcal{G}_n$ die Menge aller orientierten Geraden im $I\!\!R^n$. Sei weiter $\mathbf{u} : I\!\!R^2 \to I\!\!R^2$ ein Vektorfeld. Das reflektierte Signal ist wegen des Teilchenflusses eine Überlagerung aus verschiedenen Frequenzen. Es hat die Form

$$\begin{aligned} \sigma(t; \mathbf{u}, L) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\eta t}\, dS(\mathbf{u}, L, \eta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\imath(\eta_0 + k\nu)t}\, dS(\mathbf{u}, L, \nu)\,. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Gleichung (1.7) verwendet. Das nichtnegative Radon-Maß dS wird mit Hilfe des Lebesguemaßes λ charakterisiert durch

$$dS(\mathbf{u}, L, \nu) = \lambda(\{x \in L : \nu \le e_L \cdot \mathbf{u}(x) < \nu + d\nu\})\,. \tag{1.8}$$

Wir können dS interpretieren als die Anzahl der Partikel mit Teilgeschwindigkeit ν entlang L. Der Satz von Radon-Nikodym (siehe z.B. Bauer [5]) besagt, daß dS eine

Dichte S' bezüglich des Lebesguemaßes λ besitzt, d.h. wir können

$$dS(\mathbf{u}, L, \nu) = S'(\mathbf{u}, L, \nu)\, d\lambda(\nu)$$

schreiben. Unser gemessenes Signal ergibt sich somit zu

$$\sigma(t; \mathbf{u}, L) = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\nu t}\, S'\left(\mathbf{u}, L, \frac{\nu - \eta_0}{k}\right)\, d\lambda(\nu)\,. \tag{1.9}$$

Definition 1.3.1 *Sei $\mathcal{T}_+(I\!R)$ der Vektorraum der Radon-Maße auf der σ-Algebra der Borelmengen von $I\!R$, $L \in \mathcal{G}_2$. Die* Doppler–Spektral–Transformation *ist definiert durch*

$$\mathcal{C}(\overline{\Omega}, I\!R^2) \ni \mathbf{u} \longmapsto dS(\mathbf{u}, L, \cdot) \in \mathcal{T}_+(I\!R)\,.$$

Wir nennen $S'(\mathbf{u}, L, \nu)$ das Geschwindigkeitsspektrum *von $\mathbf{u}$ entlang L.*

Es zeigt sich, daß das Geschwindigkeitsspektrum S' leicht aus dem reflektierten Signal σ zu berechnen ist, indem man auf (1.9) die Fourier–Transformation anwendet.

Lemma 1.3.2 *Es gilt*

$$D^{1/k} T^{-\eta_0} \mathcal{F}\sigma(\xi; \mathbf{u}, L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\, S'(\mathbf{u}, L, \xi)\,.$$

Die Fourier–Transformation wird hier bezüglich ν vorgenommen.

Beweis: Mit Hilfe der Gleichungen (1.9), (1.1) und Lemma 1.1.2 ist die Behauptung direkt ersichtlich.

□

Verwendet man die Doppler–Spektral–Transformation von $\mathbf{u}$ als Meßdaten, so sieht man sich zwei wesentlichen Schwierigkeiten gegenüber: zum einen handelt es sich bei der Doppler–Spektral–Transformation um eine nichtlineare Transformation, zum anderen ist der Raum $\mathcal{T}_+(I\!R)$ zwar vollständig metrisierbar bezüglich der vagen Topologie (siehe Bauer [5]), aber nicht normierbar. Man berechnet daher das erste Moment über L bezüglich des Radon-Maßes dS, was zu einer linearen Transformation führt. Offenbar ist nämlich

$$\int_L \nu\, dS(\mathbf{u}, L, \nu) = \int_L e_L \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x})\,, \tag{1.10}$$

wie aus Gleichung (1.8) hervorgeht. Das erste Integral in Gleichung (1.10) kann man mit Hilfe des Lemmas 1.3.2 berechnen. Dies führt uns letztendlich zu folgender

Definition 1.3.3 *Für jede orientierte Gerade $L \in \mathcal{G}_2$ und $u \in L^1(\Omega, I\!R^2)$ ist die* zweidimensionale Doppler-Transformation *definiert durch*

$$\mathcal{D}^2\mathbf{u}(L) = \int_L e_L \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x})\,.$$

Wir sind somit in der Lage, im zweidimensionalen Fall die gemessenen Signale σ in die Daten $\mathcal{D}^2\mathbf{u}$ zu transformieren.
Im dreidimensionalen Fall gehen wir folgendermaßen vor. Es sei $\Omega \subset I\!R^3$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet, $\mathbf{u} \in L^1(\Omega, I\!R^3)$ ein integrierbares Vektorfeld. Wir betrachten den Schnitt von Ω mit der Ebene $\{\mathbf{x} = (x, y, z)^\top \in I\!R^3 | z = a\}$ für $a \in I\!R$, welche wir mit $\{z = a\}$ abkürzen wollen. Der Schnitt $\Omega \cap \{z = a\}$ ist ein zweidimensionales Gebiet, auf das wir alle oben gemachten Überlegungen übertragen können. Unsere Meßanordnung umkreist das Gebiet $\Omega \cap \{z = a\}$ und sendet an endlich vielen Positionen eine Anzahl Ultraschallwellen aus. Daraufhin geht die Anordnung über zur nächsten Ebene $\{z = a'\}$. Nachdem die Ebenen der Form $\{z = a\}$ alle durchlaufen sind, wird die Anordnung um 90 Grad gedreht, und die gesamte Prozedur für die Schnitte $\Omega \cap \{x = a\}$ und $\Omega \cap \{y = a\}$ wiederholt. Auch hier werden wieder mit Hilfe von Lemma 1.3.2 jeweils die ersten Momente der Geschwindigkeitsspektren berechnet. Die so ermittelten Daten sind die dreidimensionale Dopplertransformierte unseres Feldes u, die wir wie folgt definieren.

Definition 1.3.4 *Für ein integrierbares Vektorfeld* $\mathbf{u} \in L^1(\Omega, I\!R^3)$ *ist die* dreidimensionale Doppler-Transformation $\mathcal{D}^3\mathbf{u} = (\mathcal{D}^3_1\mathbf{u}, \mathcal{D}^3_2\mathbf{u}, \mathcal{D}^3_3\mathbf{u})$ *gegeben durch*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^3_1\mathbf{u}(L) &= \int_L e_L \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) \quad \textit{für alle} \quad L \in \mathcal{G}_3 \cap \{z = a\}\,, \\
\mathcal{D}^3_2\mathbf{u}(L) &= \int_L e_L \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) \quad \textit{für alle} \quad L \in \mathcal{G}_3 \cap \{x = a\}\,, \\
\mathcal{D}^3_3\mathbf{u}(L) &= \int_L e_L \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) \quad \textit{für alle} \quad L \in \mathcal{G}_3 \cap \{y = a\}\,.
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Definition von SHARAFUTDINOV [32, Abschnitt 2.1], betrachten wir nur Geraden L, die parallel sind zu einer der drei Koordinatenebenen. Somit ist $\mathcal{D}^3$ eigentlich eine 'eingeschränkte' Doppler–Transformation, die unsere spezielle Meßanordnung wiederspiegelt.
Im nächsten Abschnitt werden wir die dreidimensionale Doppler–Transformation geeignet parametrisieren. Der Übersicht halber lassen wir den Index bei $\mathcal{D}^3$ weg. Für eingehendere Untersuchungen der Doppler–Spektral–Transformation sei auf die Arbeiten von SPARR ET AL. [34, 35] verwiesen.

1.4 Die Mathematik der Vektor–Tomographie

Wir beschäftigen uns im folgenden mit den mathematischen Eigenschaften der Doppler-Transformation, sowie mit den Möglichkeiten, aus der Kenntnis der Dopplertransformierten eines Vektorfeldes dieses selbst zu rekonstruieren. Hierzu werden wir zunächst im Abschnitt 1.4.1 die im vorangegangen Kapitel vorgestellte Doppler–Transformation geeignet parametrisieren, um sie als lineare Abbildung zwischen ganz bestimmten Funktionenräumen zu beschreiben. Wir weisen die Stetigkeit der Transformation nach, sowie einige andere elementare Eigenschaften. Dabei wird die enge Verwandtschaft zur *Radon–Transformation* deutlich. Eine Darstellung des adjungierten Operators wird ebenfalls angegeben. In Abschnitt 1.4.2 wird nachbewiesen, daß der Bildraum der Doppler–Transformation nicht abgeschlossen ist, und daß diese einen nichttrivialen Nullraum besitzt, der durch rotationsfreie Vektorfelder repräsentiert wird. Abschließend zeigen wir eine Glättungseigenschaft, die derjenigen der Radon–Transformation ähnlich ist.

1.4.1 Parametrisierung und elementare Eigenschaften

Viele Probleme in Physik und Mathematik lassen sich darstellen als Operatorgleichung erster Art, also in der Form

$$Af = g \tag{1.11}$$

Hierbei ist A gewöhnlich ein stetiger Integral-, oder Differentialoperator zwischen Banachräumen, der das Problem beschreibt, g sind gegebene Daten, und f ist die gesuchte Lösung der Gleichung. Ist A ein Operator mit nicht abgeschlossenem Bildbereich, so kann die Inverse A^{-1}, falls sie überhaupt existiert, nicht stetig sein. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn A ein kompakter Operator mit nichtdegeneriertem Bildraum ist. Das Problem ist demnach im Sinne von HADAMARD schlecht gestellt. Zur Lösung von (1.11) wird ein Regularisierungsverfahren nötig sein, worauf wir in Kapitel 2 eingehen wollen.

Bei der Vektor–Tomographie ist der Operator A durch die Doppler–Transformation $\mathcal{D}$ gegeben, g sind unsere Meßdaten, die wir, wie in Abschnitt 1.3 beschrieben, erhalten. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die Doppler–Transformation $\mathcal{D}$ definiert, ohne jedoch irgendwelche Räume angegeben zu haben, zwischen denen $\mathcal{D}$ agiert. Dies ist jedoch notwendig, um mit $\mathcal{D}$ als mathematischer Abbildung rechnen zu können und um später unser Rekonstruktionsverfahren anzugeben. Dazu parametrisieren wir die Geraden $L \in \mathcal{G}_3$ in geeigneter Weise. Vorher müssen wir noch ein paar Bezeichnungen einführen.

Wir permutieren in Anlehnung an die Definition 1.3.4 die Standard-Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= e_z\,, \\ \tilde{e}_2 &= e_x\,, \\ \tilde{e}_3 &= e_y\,. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir die Abbildungen $\tau_j^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\tau_j^*(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \tilde{e}_j \rangle_2\,.$$

Dabei sei $j \in \{1, 2, 3\}$. Dies wird in allen nachfolgenden Definitionen und Sätzen stets angenommen und der Einfachheit halber nicht mehr explizit angeführt. Mit jeder Abbildung τ_j wird ein Raum $\mathcal{X}_j$ in folgender Weise assoziiert:

$$\mathcal{X}_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \tau_j^*(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Es ist offensichtlich $\dim \mathcal{X}_j = 2$, und somit $\mathcal{X}_j \cong \mathbb{R}^2$. Es bezeichne daher

$$\pi_j : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{X}_j \subset \mathbb{R}^3$$

den in kanonischer Weise gegebenen Isomorphismus. Für $x = (x_1, x_2)^\top$ ist z.B. $\pi_1(x) = (x_1, x_2, 0)^\top$. Bemerkt sei noch, daß die Abbildungen τ_j und π_j komplementär sind, in dem Sinne, daß

$$\mathbf{x} = \pi_j \pi_j^* \mathbf{x} + \tau_j \tau_j^* \mathbf{x}$$

ist. Die Definition 1.3.4 beruhte darauf, daß das dreidimensionale Objekt Ω mit Ebenen der Form $\{z = a\}$ geschnitten wurde. Die Ebene $\{z = a\}$ läßt sich beschreiben durch $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \tau_1^*(\mathbf{x}) = a\}$. Mit Hilfe der Abbildungen π_j und τ_j sind wir in der Lage, die orientierten Geraden $L_j \in \mathcal{G}_3 \cap \{\tau_j^*(\mathbf{x}) = a\}$ geeignet zu parametrisieren. Es ist nämlich

$$L_j = L_j(\omega, s, a) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (\pi_j^* \mathbf{x})^\top \omega = s, \tau_j^* \mathbf{x} = a\}$$

für einen Richtungsvektor $\omega = (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top \in S^1$, wobei $S^{n-1} = \{\theta \in \mathbb{R}^n | \|\theta\|_2 = 1\}$ die n-dimensionale Einheitssphäre ist, und $s, a \in \mathbb{R}$. Die Orientierung ist durch den Einheitsvektor

$$e_{L_j} = \tilde{e}_j \times \pi_j \omega =: \theta_j(\omega) \in S^2,$$

gegeben. Übertragen wir diese Parametrisierung auf die Definition von $\mathcal{D}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_j \mathbf{f}(\omega, s, a) &= \int_{L_j(\omega,s,a)} \langle \theta_j(\omega), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \, dl(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\substack{(\pi_j^* \mathbf{x})^\top \omega = s \\ \tau_j^* \mathbf{x} = a}} \langle \theta_j(\omega), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x} \qquad (1.12) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \theta_j(\omega), \mathbf{f}\Big(\pi_j(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_j a\Big) \rangle \, dt
\end{aligned}$$

mit $\omega^\perp(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)^\top$. Die Parametrisierung ist zur Verdeutlichung in Abbildung 1.4.1 für $j = 1$ dargestellt.
Was noch fehlt, ist die Definition der Räume, auf denen die Doppler–Transformation operieren soll. Der Ausgangsraum muß so beschaffen sein, daß die Existenz des uneigentlichen Integrales in der Definition (1.12) gewährleistet ist. Bislang haben wir unser Objekt Ω nur als einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet angenommen. Konkret wählen wir für dieses Gebiet die offene Einheitskugel Ω^3 im $\mathbb{R}^3$. Allgemein sei

$$\Omega^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 < 1\}.$$

Es ist nun naheliegend als Definitionsbereich für $\mathcal{D}$ den Funktionenraum $L^2(\Omega^3, I\!R^3)$ zu nehmen. Aus mathematischer Sicht ist es jedoch sinnvoller, den Raum

$$\mathcal{H} := \overline{L^2(K_1^3, I\!R^3) \cap \mathcal{C}_c^\infty(\Omega^3, I\!R^3)} = \{\mathbf{f} \in L^2(K_1^3, I\!R^3) : \mathbf{f} \equiv 0 \text{ in } K_1^3 \backslash \Omega^3\}$$

als Definitionsbereich zu nehmen. Dabei ist $K_1^3 = \{\mathbf{x} \in I\!R^3 | \|\mathbf{x}\|_\infty < 1\}$ der offene Einheitswürfel im $I\!R^3$ und

$$L^2(K_1^3, I\!R^3) = \{\mathbf{f} : K_1^3 \to I\!R^3 : \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(K_1^3, I\!R^3)} = \int_{K_1^3} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 \, d\mathbf{x} < \infty\}$$

der Raum der über K_1^3 quadratintegrierbaren Vektorfelder. Der Abschluß in der Definition von $\mathcal{H}$ wird bezüglich dieser L^2-Norm genommen.

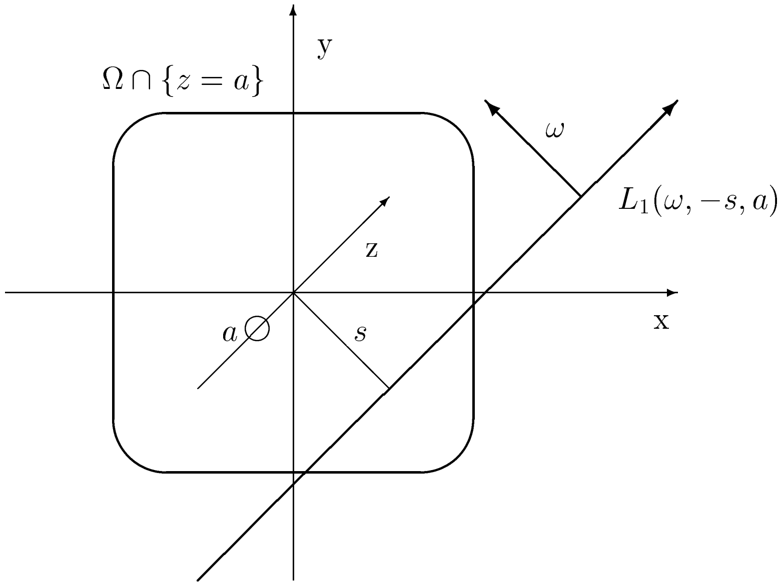

Abbildung 1.4.1. Parametrisierung von $\mathcal{D}_1$

Definition 1.4.1 *Die* dreidimensionale Doppler–Transformation $\mathcal{D}$ *wird als Operator definiert durch:*

$$\mathcal{D} : \mathcal{H} \to \oplus_{j=1}^3 L^2(S^1 \times [-1,1]^2) =: \mathcal{K}\,,$$

mit

$$(\mathcal{D}\,\mathbf{f})_j(\omega, s, a) = (\mathcal{D}_j \mathbf{f})(\omega, s, a)\,,$$

wobei $\mathcal{D}_j$ wie in (1.12) definiert ist. Das Skalarprodukt auf $\mathcal{K}$ ist gerade

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}} = \sum_{j=1}^{3} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(S^1 \times [-1,1]^2)}\,.$$

Wir sind nun in der Lage, die Vektor–Tomographie als Operatorgleichung erster Art zu formulieren. Wir suchen zu unseren Meßdaten $\mathbf{g} \in \mathcal{K}$ eine Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ der Gleichung

$$\mathcal{D}\mathbf{u} = \mathbf{g}\,. \tag{1.13}$$

Wie sich im nächsten Abschnitt herausstellen wird, hat $\mathcal{D}$ einen nicht abgeschlossenen Bildraum. Somit ist unser Problem schlecht gestellt.
Ein weiterer Grund, die Räume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ wie vorstehend zu definieren, besteht in der engen Verflechtung der Doppler–Transformation mit der zweidimensionalen Radon–Transformation. In der Tat haben wir ein zweidimensionales Problem, indem wir unser Objekt Ω wie beschrieben mit einer Ebene der Form $\{z = a\}$ schneiden. Da sie für alle weiteren Betrachtungen von großer Bedeutung ist, geben wir die Definition der Radon–Transformation an.

Definition 1.4.2 *Die* zweidimensionale Radon–Transformation *ordnet einer Funktion $f \in L^2(\Omega^2)$ deren Linienintegrale zu. Genauer ist $\mathcal{R} : L^2(\Omega^2) \to L^2(S^1 \times [-1,1])$ gegeben durch*

$$(\mathcal{R}f)(\omega, s) = \int_{L(\omega,s)\cap\Omega} f(x)\, d\ell(x)\,.$$

Die Gerade $L(\omega, s)$ ist parametrisiert durch

$$L(\omega, s) = \{s\omega + \tau\omega^\perp : \tau \in I\!R\}\,.$$

Bekanntermaßen ist die zweidimensionale Radon–Transformation das mathematische Modell der 2D–Computer–Tomographie (siehe z.B. Louis [19], Natterer [25], u.a.), ihre Eigenschaften wurden daher schon eingehend untersucht (siehe z.B. Radon [27], Natterer [25], Louis [19, 18], Helgason [12], u.a.). Einige dieser Eigenschaften werden im Laufe dieser Arbeit sehr von Bedeutung sein, wir geben sie in Lemma 1.4.3 an.

Lemma 1.4.3 *a) Die Radon–Transformation ist ein linearer, injektiver, stetiger und kompakter Operator zwischen den Räumen $L^2(\Omega^2)$ und $L^2(S^1 \times [-1,1])$.*
b) Es sei $f \in \mathcal{S}(I\!R^2)$ aus dem Raum der schnell fallenden Funktionen in $I\!R^2$. Für alle Multiindizes $\alpha \in I\!N_0^2$ gilt

$$\left(\mathcal{R}\,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f\right)(\omega, s) = \omega^\alpha\, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial s^{|\alpha|}}\,(\mathcal{R}f)(\omega, s)\,.$$

c) Der adjungierte Operator $\mathcal{R}^* : L^2(S^1 \times [-1,1]) \to L^2(I\!R^2)$ ist gegeben durch

$$(\mathcal{R}^*g)(x) = \int_{S^1} g(\omega, \langle x, \omega\rangle)\, d\omega\,.$$

d) Für $f \in L^2(I\!R^2)$, $g \in L^2(S^1 \times I\!R)$ gilt

$$(\mathcal{R}^*g) * f = \mathcal{R}^*(g * \mathcal{R}f)\,.$$

Die Faltung auf der rechten Seite wird bezüglich der Variablen s verstanden.

Die letzte Darstellung von $\mathcal{D}_j$ in (1.12) weist große Ähnlichkeit mit der Radon–Transformation auf. Der Unterschied ist jedoch, daß der Integrand in $\mathcal{D}_j$ von der Richtung ω abhängt. Das ist auch einleuchtend, da wir die Geraden im Gegensatz zum skalaren Fall hier mit einer Orientierung versehen haben. Bei der Computer–Tomographie liefern Röntgenstrahlen entlang der Geraden L dieselben Daten wie die Strahlen entlang $-L$. Dies ist bei der Vektor–Tomographie nicht mehr der Fall. Differenzieren wir aber $\mathcal{D}_j\mathbf{f}$ bezüglich s, so fällt diese Abhängigkeit weg und wir erkennen einen wichtigen Zusammenhang mit der Radon–Transformation.

Lemma 1.4.4 *Sei* $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(K_1^3, \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H}$*, dann gilt für* $j \in \{1,2,3\}$

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j\mathbf{f}(\omega, s, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{e}_j, \nabla \times \mathbf{f}(\pi_j(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_j a)\rangle \, dt\,.$$

Beweis: Ein Beweis dieser Behauptung ist z.B. in Juhlin [14], oder Sparr et. al. [34] zu finden. Hierbei wird stets der Satz von Stokes ausgenutzt. Eine einfachere Variante verwendet die in Lemma 1.4.3 angegebenen Rechenregeln für die Ableitung der Radon–Transformierten.
Es sei $j = 1$, dann ist $\tilde{e}_j = e_z$. Weiter definieren wir $\check{f}_k^a(x) = \mathbf{f}_k(\pi_1 x + \tau_1 a)$ für $k = 1, 2$. Die Behauptung ergibt sich aus Lemma 1.4.3 und folgender Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \langle e_z, \nabla \times \mathbf{f}(\pi_1(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_1 a)\rangle \, dt \\
= \; & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_2}\right)(\pi_1(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_1 a) \, dt \\
= \; & \mathcal{R}\left(\frac{\partial \check{f}_2^a}{\partial x_1} - \frac{\partial \check{f}_1^a}{\partial x_2}\right)(\omega, s) \\
= \; & \cos\varphi \, \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{R}\check{f}_2^a)(\omega, s) - \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{R}\check{f}_1^a)(\omega, s) \\
= \; & \frac{\partial}{\partial s}(\cos\varphi \, (\mathcal{R}\check{f}_2^a) - \sin\varphi \, (\mathcal{R}\check{f}_1^a))(\omega, s) \\
= \; & \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{D}_1\mathbf{f})(\omega, s, a)\,.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Wegen $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ ist $\nabla \times \mathbf{f} \equiv 0$ in $K_1^3 \backslash \Omega^3$. Die Integration über ganz $\mathbb{R}$ ist daher gerechtfertigt, indem wir $\nabla \times \mathbf{f}$ außerhalb von K_1^3 durch 0 fortsetzen. Diese Fortsetzung bezeichnen wir der Einfachheit halber wieder mit $\nabla \times \mathbf{f}$. Ein analoges Vorgehen wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht mehr ausdrücklich erwähnt.

Das vorangegangene Lemma motiviert die Definition eines neuen Operators d_j, der in engem Zusammenhang zur Doppler–Transformation steht:

$$d_j : H^1(K_1^3, \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H} \;\; \to \;\; L^2(\Omega^2 \times [-1,1])\,,$$

$$d_j\mathbf{f}(x,a) \quad = \quad \tilde{e}_j \cdot \nabla \times \mathbf{f}(\pi_j x + \tau_j a)\,. \tag{1.14}$$

Die Abbildung d_j ordnet einem schwach differenzierbaren Vektorfeld $\mathbf{f}$ eine Komponente der Rotation von $\mathbf{f}$ zu. Lemma 1.4.4 besagt, daß Differentiation von $\mathcal{D}_j$ nach s gerade die Radon–Transformierte von $d_j\mathbf{f}$ bezüglich der Variablen x ergibt.

Wir führen einige Formalismen ein, die für die weiteren Betrachtungen nötig sind. Für $g, h \in L^2(S^1 \times I\!R \times [-1,1])$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(I\!R^2 \times [-1,1], I\!R^3)$ sind die Faltungen $*_1, *_2$ definiert durch

$$\begin{aligned} g *_1 h(\omega,s,a) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, s-t, a) h(\omega, t, a)\, dt\,, \\ \mathbf{f} *_2 \mathbf{g}(x,a) &= \int_{I\!R^2} \mathbf{f}(x-y,a)\mathbf{g}(y,a)\, dy\,. \end{aligned}$$

Desweiteren führen wir das Tensorprodukt von Operatoren auf L^2-Räumen ein. Seien dazu G_k Gebiete im $I\!R^n$ und H_k Gebiete im $I\!R^m$, $k = 1,2$. Es ist $L^2(G_1)\hat{\otimes}L^2(G_2) \cong L^2(G_1 \times G_2)$, siehe Weidmann [37]. Für zwei lineare Operatoren

$$\begin{aligned} A : L^2(G_1) &\to L^2(H_1)\,, \\ B : L^2(G_2) &\to L^2(H_2) \end{aligned}$$

ist das Tensorprodukt $A \otimes B$ zunächst definiert auf dem algebraischen Tensorprodukt $L^2(G_1) \otimes L^2(G_2)$ durch

$$(A \otimes B) \left(\sum_{i=1}^m c_i\, f_i \otimes g_i \right) = \sum_{i=1}^m c_i\, Af_i \otimes Bg_i \in L^2(H_1) \otimes L^2(H_2)\,.$$

Man zeigt leicht, indem man ausnutzt, daß $L^2(G_1) \otimes L^2(G_2)$ in $L^2(G_1 \times G_2)$ dicht liegt, daß $A \otimes B$ als Operator auf $L^2(G_1 \times G_2)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} A \otimes B : L^2(G_1 \times G_2) &\to L^2(H_1 \times H_2)\,, \\ ((A \otimes B)f)(h_1,h_2) &= (A_{g_1} B_{g_2} f)(h_1,h_2) = (B_{g_2} A_{g_1} f)(h_1,h_2)\,. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten die Indizes g_1 und g_2, daß A auf der g_1-Variable und B auf der g_2-Variable von $f = f(g_1,g_2) \in L^2(G_1 \times G_2)$ wirken. Offensichtlich ist $A \otimes B$ stetig, wenn A und B stetig sind. Genauer gilt dann

$$\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|\,.$$

Außerdem ist $A \otimes B$ kompakt, wenn A *und* B kompakt sind. Die Kompaktheit von einem der beiden Operatoren reicht im allgemeinen nicht aus für die Kompaktheit von $A \otimes B$. Als Beispiel betrachten wir die Operatoren $A = \mathcal{R}$ als Abbildung von $L^2(\Omega^2)$ nach $L^2(S^1 \times [-1,1])$ und $B = I$, die Identität auf $L^2([-1,1])$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \otimes I : L^2(\Omega^2 \times [-1,1]) &\to L^2(S^1 \times [-1,1]^2) \\ ((\mathcal{R} \otimes I)f)(\omega,s,a) &= \int_{I\!R} f(s\omega + t\omega^\perp, a)\, dt \end{aligned}$$

ein stetiger Operator mit $\|\mathcal{R} \otimes I\| = \|\mathcal{R}\|$. Jedoch ist $\mathcal{R} \otimes I$ nicht kompakt.

Mit diesen Bezeichnungen ist es nun ein Leichtes, ein Analogon zur Formel d) aus Lemma 1.4.3 zu formulieren und damit den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1.4.5 *Es seien* $\mathbf{f} \in H^1(K_1^3, \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H}$, $g \in H_0^1(\mathbb{R}) \hat{\otimes} L^2(S^1 \times [-1,1])$ *und* $\mathbf{G} = (\mathcal{R}^* \otimes I)g$. *Dann gilt*

$$\mathbf{G} *_2 d_j \mathbf{f} = (\mathcal{R}^* \otimes I) \left(\frac{\partial}{\partial s} g *_1 \mathcal{D}_j \mathbf{f} \right) . \tag{1.15}$$

Beweis: Mit Hilfe von Teil d) aus Lemma 1.4.3, Lemma 1.4.4 und partieller Integration folgt die Behauptung direkt aus der Gleichheit

$$\begin{aligned} \mathbf{G} *_2 d_j \mathbf{f} &= (\mathcal{R}^* \otimes I) \left(g *_1 \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}_j \mathbf{f} \right) \\ &= (\mathcal{R}^* \otimes I) \left(\frac{\partial}{\partial s} g *_1 \mathcal{D}_j \mathbf{f} \right) . \end{aligned}$$

Man beachte dabei, daß $\mathcal{D}_j \mathbf{f} \equiv 0$ ist für $|s| \geq 1$.

□

Bemerkung: Strahlen [36] beweist die Aussage für den zweidimensionalen Fall. Er gewinnt einen Algorithmus vom Typ der gefilterten Rückprojektion zur Rekonstruktion der Rotation. Mit Hilfe von Satz 1.4.5 ist solch ein Algorithmus leicht auf den dreidimensionalen Fall zu übertragen. Vorausgesetzt, daß $\mathbf{G}$ in einem gewissen Sinne die Delta–Distribution approximiert, liefert eine Diskretisierung der Gleichung (1.15) ein Verfahren für die Rekonstruktion der jeweiligen Komponente $d_j \mathbf{f}$ der Rotation von $\mathbf{f}$. Die Differentiation der Daten wird durch partielle Integration auf g verschoben. Wesentlich schwieriger ist es jedoch, $\mathbf{f}$ selbst zu rekonstruieren.

Es werden im folgenden noch einige elementare Eigenschaften der Operatoren $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}_j$ hergeleitet. Im Hinblick auf eine Lösung der Gleichung (1.13) ist es zunächst einmal wichtig, die Stetigkeit der Doppler–Transformation nachzuweisen.

Satz 1.4.6 *Der Operator* $\mathcal{D} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, *sowie die Operatoren* $\mathcal{D}_j : \mathcal{H} \to L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$ *sind lineare, stetige Abbildungen. Für die Normen gilt*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_j\|_{\mathcal{H} \to L^2(S^1 \times [-1,1]^2)} &\leq 2\sqrt{\pi} , \\ \|\mathcal{D}\|_{\mathcal{H} \to \mathcal{K}} &\leq 6\sqrt{\pi} . \end{aligned}$$

Beweis: Die Stetigkeit von $\mathcal{D}$ folgt aus der von $\mathcal{D}_j$. Beim Beweis der Stetigkeit der Operatoren $\mathcal{D}_j$ gehen wir im wesentlichen wie Natterer [25] beim Beweis der Stetigkeit der Radon–Transformation vor.

Wir bezeichnen mit $\{\omega^\perp\} := \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle v, \omega \rangle = 0\}$ den Orthogonalraum von ω. Es ist weiter

$$Z_j := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \pi_j \vartheta + \tau_j a, \ \vartheta \in \Omega^2, \ a \in [-1,1]\} \cong \Omega^2 \times [-1,1]$$

der Einheitszylinder, der jeweils zentriert auf einer der drei Koordinatenachsen liegt. Offenbar ist $\Omega^3 \subset Z_j \subset K_1^3$, so daß $\mathcal{H} \ni \mathbf{f} \equiv 0$ ist in $K_1^3 \backslash Z_j$. Da für $y \in \{\omega^\perp\}$ mit $|y| \leq (1-s^2)^{1/2}$ und $a \in [-1,1]$ gilt, daß $\pi_j(s\omega + y) + \tau_j a \in Z_j$ ist, sieht man mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_j \mathbf{f}(\omega, s, a)|^2 &= \Big| \int_{\substack{y \in \omega^\perp \\ |y| \leq (1-s^2)^{1/2}}} \langle \theta_j(\omega), \mathbf{f}(\pi_j(s\omega + y) + \tau_j a) \rangle \, dy \Big|^2 \\ &\leq 2\,(1-s^2)^{1/2} \int_{\{\omega^\perp\}} \|\mathbf{f}(\pi_j(s\omega + y) + \tau_j a)\|_2^2 \, dy \,. \end{aligned}$$

Es bezeichne $w(s) = (1-s^2)^{1/2}$ ein Gewicht und $L^2(S^1 \times [-1,1]^2, w^{-1})$ den Raum der über $S^1 \times [-1,1]^2$ quadratintegrierbaren Funktionen bezüglich des Gewichtes w, versehen mit dem entsprechenden Skalarprodukt. Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von $\mathcal{D}_j$ als Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $L^2(S^1 \times [-1,1]^2, w^{-1})$. Mit Hilfe der obigen Ungleichung ergibt sich diese aber sofort aus der folgenden Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_j \mathbf{f}\|^2_{L^2(S^1 \times [-1,1]^2, w^{-1})} &= \int_{S^1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |\mathcal{D}_j \mathbf{f}(\omega, s, a)|^2 \, w^{-1}(s) \, da \, ds \, d\omega \\ &\leq 2 \int_{S^1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{\{\omega^\perp\}} \|\mathbf{f}(\pi_j(s\omega + y) + \tau_j a)\|_2^2 \, dy \, da \, ds \, d\omega \\ &\leq 2 \int_{S^1} \int_{K_1^3} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 \, d\mathbf{x} \, d\omega \\ &= 4\pi \, \|\mathbf{f}\|^2_{\mathcal{H}} \,. \end{aligned}$$

Die Inklusionsabbildung

$$\iota : L^2(S^1 \times [-1,1]^2, w^{-1}) \hookrightarrow L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$$

ist offensichtlich stetig mit $\|\iota\| \leq 1$. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

□

In Lemma 1.4.4 haben wir festgestellt, daß bei der Ableitung der Doppler-Transformation bezüglich der Variablen s der Differentialoperator (1.14) auftaucht. Die Darstellung des Operators $d_j d_j^*$ ist verblüffend einfach.

Lemma 1.4.7 *Ist $g \in \mathcal{C}^2(\Omega^2 \times [-1,1]) \cap L^2(\Omega^2 \times [-1,1]) =: \mathcal{U}$, so gilt*

$$d_j d_j^* \, g = (-\Delta \otimes I) g \,. \tag{1.16}$$

Hierbei bedeutet $\Delta : L^2(\Omega^2) \cap \mathcal{C}^2(\Omega^2) \to L^2(\Omega^2)$ der zweidimensionale Laplace-Operator.

Beweis: Bei der Bildung des adjungierten Operators d_j^* ist folgendes zu beachten: d_j ist ein unbeschränkter Operator auf $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich

$$\mathsf{D}(d_j) = \{\mathbf{f} \in H^1(K_1^3, I\!R^3) : \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ in } K_1^3 \backslash \Omega^3\} \,.$$

Das Definitionsgebiet von d_j^* ist demnach, siehe RUDIN [29],

$$\mathsf{D}(d_j^*) = \{g \in L^2(\Omega^2 \times [-1,1]) : \mathbf{f} \mapsto \langle d_j \mathbf{f}, g \rangle_{L^2(\Omega^2 \times [-1,1])} \text{ ist stetig } \forall \mathbf{f} \in \mathsf{D}(d_j)\} \,.$$

Dies ist ein Teilraum von $L^2(\Omega^2 \times [-1,1])$. Zur Herleitung einer Darstellung für d_j^* führen wir zunächst neue Abbildungen ϖ_j ein. Es sei $i_1 = i_3 = 1$, $i_2 = 2$ und $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 3$. Die Abbildungen $\varpi_j : \mathcal{H} \to L^2(\Omega^2 \times [-1,1], I\!\!R^2)$ sind dann definiert durch

$$\varpi_j \mathbf{f}(x,a) = \Big(f_{i_j}(\pi_j x + \tau_j a), f_{k_j}(\pi_j x + \tau_j a) \Big) \,.$$

Der Operator d_j hat dann die einfache Darstellung

$$d_j \mathbf{f}(x,a) = \varepsilon_j \left(\frac{\partial (\varpi_j \mathbf{f})_2}{\partial x_1}(x,a) - \frac{\partial (\varpi_j \mathbf{f})_1}{\partial x_2}(x,a) \right) \,.$$

Hierbei sind $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ und $\varepsilon_3 = -1$. Für ein $g \in L^2(\Omega^2 \times [-1,1])$ definieren wir eine Fortsetzung $\breve{g} \in L^2(K_1^3) = L^2(K_1^2 \times [-1,1])$ durch

$$\breve{g}(x,a) = \begin{cases} g(x,a) & , \quad (x,a) \in \Omega^2 \times [-1,1] \,, \\ 0 & , \quad (x,a) \in K_1^3 \backslash (\Omega^2 \times [-1,1]) \,. \end{cases}$$

Wir berechnen zunächst den zu d_j adjungierten Operator d_j^*. Seien dazu $g \in \mathsf{D}(d_j^*)$, $\mathbf{f} \in \mathsf{D}(d_j) \cap \mathcal{H}$. Es ergibt sich die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
\langle g, d_j \mathbf{f} \rangle_{L^2(\Omega^2 \times [-1,1])} &= \varepsilon_j \int_{\Omega^2} \int_{-1}^{1} g(x,a) \left(\frac{\partial (\varpi_j \mathbf{f})_2}{\partial x_1}(x,a) - \frac{\partial (\varpi_j \mathbf{f})_1}{\partial x_2}(x,a) \right) da\, dx \\
&= \varepsilon_j \int_{\Omega^2} \int_{-1}^{1} \frac{\partial g}{\partial x_2}(x,a)\, (\varpi_j \mathbf{f})_1(x,a)\, da\, dx \\
&\quad - \varepsilon_j \int_{\Omega^2} \int_{-1}^{1} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x,a)\, (\varpi_j \mathbf{f})_2(x,a)\, da\, dx \\
&= \varepsilon_j \int_{\Omega^2} \int_{-1}^{1} \frac{\partial g}{\partial x_2}(x,a)\, \mathbf{f}_{i_j}(\pi_j x + \tau_j a)\, da\, dx \\
&\quad - \varepsilon_j \int_{\Omega^2} \int_{-1}^{1} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x,a)\, \mathbf{f}_{k_j}(\pi_j x + \tau_j a)\, da\, dx \\
&= \varepsilon_j \int_{K_1^3} \frac{\partial}{\partial x_2} \breve{g}(\pi_j^* \mathbf{x}, \tau_j^* \mathbf{x})\, f_{i_j}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\
&\quad - \varepsilon_j \int_{K_1^3} \frac{\partial}{\partial x_1} \breve{g}(\pi_j^* \mathbf{x}, \tau_j^* \mathbf{x})\, f_{k_j}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\
&= \langle d_j^* g, \mathbf{f} \rangle_{\mathcal{H}} \,,
\end{aligned}$$

mit
$$d_j^* g(\mathbf{x}) = \varepsilon_j \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \breve{g}(\pi_j^* \mathbf{x}, \tau_j^* \mathbf{x}) \cdot e_{i_j} - \frac{\partial}{\partial x_1} \breve{g}(\pi_j^* \mathbf{x}, \tau_j^* \mathbf{x}) \cdot e_{k_j} \right) .$$
Folglich ist
$$d_j d_j^* g(x,a) = \varepsilon_j \left(\frac{\partial (\varpi_j d_j^* g)_2}{\partial x_1} - \frac{\partial (\varpi_j d_j^* g)_1}{\partial x_2} \right) (x,a) .$$
Die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß
$$\begin{aligned} (\varpi_j d_j^* g)_1(x,a) &= \varepsilon_j \frac{\partial}{\partial x_2} g(x,a) , \\ (\varpi_j d_j^* g)_2(x,a) &= -\varepsilon_j \frac{\partial}{\partial x_1} g(x,a) \end{aligned}$$
ist.

□

Bemerkenswert ist, daß die rechte Seite von Gleichung (1.16) nicht mehr von j abhängt. Anhand der Berechnung von d_j^* sieht man, daß $\mathsf{D}(d_j^*) = H^1(\Omega^2) \hat{\otimes} L^2([-1,1])$ ist.

Das nachfolgende Lemma faßt einige fundamentale Eigenschaften und Rechenregeln der Doppler–Transformation zusammen, die wir für kommende Rechnungen benötigen werden. Unter anderem werden auch die Adjungierten der Operatoren $\mathcal{D}_j$ angegeben, die nach Satz 1.4.6 existieren und stetig sind.

Satz 1.4.8 *a) Für $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(K_1^3, I\!R^3) \cap \mathcal{H}$ gilt*
$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}_j \mathbf{f} = (\mathcal{R} \otimes I) d_j \, \mathbf{f} .$$
b) Der zu $\mathcal{D}_j$ adjungierte Operator $\mathcal{D}_j^* : L^2(S^1 \times [-1,1]^2) \to \mathcal{H}$ hat die Darstellung
$$\mathcal{D}_j^* g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \pi_j \Big(\varepsilon_j \int\limits_0^{2\pi} g(\omega(\varphi), \langle \pi_j^* \mathbf{x}, \omega(\varphi) \rangle, \tau_j^* \mathbf{x}) \, \sin\varphi \, d\varphi , & \\ -\varepsilon_j \int\limits_0^{2\pi} g(\omega(\varphi), \langle \pi_j^* \mathbf{x}, \omega(\varphi) \rangle, \tau_j^* \mathbf{x}) \, \cos\varphi \, d\varphi \Big) , & \mathbf{x} \in \Omega^3 , \\ 0 , & \text{sonst} . \end{cases}$$
Dabei sind $S^1 \ni \omega(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, und $\varepsilon_3 = 1$.
c) Für den stetigen Operator $\mathcal{D}^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ gilt
$$\mathcal{D}^* \mathbf{g} = \sum_{j=1}^{3} \mathcal{D}_j^* \mathbf{g}_j .$$
d) Für $g \in L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$ ist
$$\mathcal{D}_j \mathcal{D}_j^* g(\vartheta, s, a) = \int_{I\!R} \int_{S^1} \mathbf{g}(\omega, \langle s\vartheta + t\vartheta^\perp, \omega \rangle, a) \, \langle \vartheta, \omega \rangle \, d\omega \, dt .$$

e) Sei $g \in L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$ und bezüglich s und a mindestens einmal stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$$\nabla \cdot \mathcal{D}_j^* g = 0\,.$$

f) Sei $\mathcal{C}_s^1(S^1 \times [-1,1]^2)$ der Raum der bezüglich s einmal stetig differenzierbaren Funktionen auf $S^1 \times [-1,1]^2$ und $g \in L^2(S^1 \times [-1,1]^2) \cap \mathcal{C}_s^1(S^1 \times [-1,1]^2)$. Dann gilt die Identität

$$\mathcal{D}_j \mathcal{D}_j^* \frac{\partial}{\partial s} g = \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{R} \otimes I)(\mathcal{R}^* \otimes I) g = \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{R}\mathcal{R}^* \otimes I) g\,.$$

Beweis: Wir rechnen alle Behauptungen nur für $j = 1$ nach, für $j = 2, 3$ ergeben sich die Beweise analog.
zu a): Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 1.4.4 und der Definition von d_j (1.14).
zu b): Seien $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$, $g \in L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$. Dann gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned}
&\langle g, \mathcal{D}_1 \mathbf{f} \rangle_{L^2(S^1 \times [-1,1]^2)} \\
= &\int_{S^1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} g(\omega, s, a) \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \cos(\varphi)\, \mathbf{f}_2(\pi_1(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_1 a) - \\
&\qquad \sin(\varphi)\, \mathbf{f}_1(\pi_1(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_1 a)\, dt\, ds\, da\, d\omega \\
= &\int_{-1}^{1} \int_{\Omega^2} \int_{S^1} g(\omega, \langle x, \omega \rangle, a)(\cos(\varphi)\, \mathbf{f}_2(\pi_1(x) + \tau_1 a) - \sin(\varphi)\, \mathbf{f}_1(\pi_1(x) + \tau_1 a))\, d\omega\, d^2x\, da \\
= &\int_{K_1^3} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathcal{D}_1^* g(\mathbf{x}) \rangle_{L^2(K_1^3, \mathbb{R}^3)}\, d^3\mathbf{x}\,,
\end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{D}_1^* g(\mathbf{x}) = \Big(-\int_{S^1} g(\omega, \langle \pi_1^* \mathbf{x}, \omega \rangle, \tau_1^* \mathbf{x})\, \sin(\varphi)\, d\varphi, \int_{S^1} g(\omega, \langle \pi_1^* \mathbf{x}, \omega \rangle, \tau_1^* \mathbf{x})\, \cos(\varphi)\, d\varphi, 0 \Big)^\top$$

für $\mathbf{x} \in \Omega^3$, und 0 in $K_1^3 \backslash \Omega^3$ ist. Es wurde ausgenutzt, daß $\mathbf{f} \equiv 0$ in $K_1^3 \backslash (\Omega^2 \times [-1,1])$ ist. Die Aussage b) ist damit bewiesen.
zu c): Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}_j$.
zu d): Die Darstellung von $\mathcal{D}_j \mathcal{D}_j^*$ rechnet man mit Hilfe von Teil b) und der Definition von $\mathcal{D}_j$ einfach nach.
zu e): Sei g wie in der Voraussetzung gegeben. Da wir Differentiation und Integration in diesem Fall vertauschen dürfen (siehe z.B. Forster [10]), ergibt sich

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathcal{D}_1^* g(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{D}_1^* g)_i(\mathbf{x}) \\
&= -\int_{S^1} \frac{\partial}{\partial s} g(\omega, \langle \pi_1^* \mathbf{x}, \omega \rangle, \tau_1^* \mathbf{x})\, \sin(\varphi) \cos(\varphi)\, d\varphi + \\
&\quad + \int_{S^1} \frac{\partial}{\partial s} g(\omega, \langle \pi_1^* \mathbf{x}, \omega \rangle, \tau_1^* \mathbf{x})\, \sin(\varphi) \cos(\varphi)\, d\varphi \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

zu f): Dieser Teil folgt aus Teil d) und der Tatsache, daß für ein die Voraussetzung erfüllendes g die Gleichheit

$$\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{R}\mathcal{R}^* \otimes I)g(\vartheta, s, a) = \int_{I\!R}\int_{S^1} \frac{\partial}{\partial s} g(\omega, \langle s\vartheta + t\vartheta^\perp, \omega\rangle, a)\,\langle \vartheta, \omega\rangle\, d\omega\, dt$$

gilt. Wir haben dabei ausgenutzt, daß $\mathcal{R}^*$ die in Lemma 1.4.3 angegebene Darstellung besitzt.

□

1.4.2 Abbildungs– und Glättungseigenschaften

Wir betrachten einige Eigenschaften der Doppler–Transformation, die für die Anwendungen von großem Interesse sind. Zunächst zeigen wir, daß es sich bei dem Problem der Vektor–Tomographie um ein schlecht gestelltes Problem handelt. Bei Anwendungen sind demnach Regularisierungsverfahren unumgänglich. Weiterhin charakterisieren wir den Nullraum von $\mathcal{D}$, um zu sehen welche Anteile eines Feldes aus der Kenntnis der Dopplertransformierten rekonstruiert werden können. Abschließend diskutieren wir eine Glättungseigenschaft, die für die Konvergenz unseres später entwickelten Verfahrens von Bedeutung sind.

1.4.2.1 Die Schlechtgestelltheit der Vektor–Tomographie

Wie im letzten Abschnitt angedeutet wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob es sich bei der Vektor–Tomographie um ein schlecht gestelltes Problem handelt. Wir bezeichnen ein Problem der Form (1.11), wobei $f \in X$, $g \in Y$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sind, kurz mit (A, X, Y). X und Y seien generell Hilberträume. Das folgende Lemma ist leicht zu beweisen.

Lemma 1.4.9 *Ist das Problem (A, X, Y) schlecht gestellt, so ist auch das duale Problem (A^*, Y, X) schlecht gestellt.*

Beweis: Wir nehmen an, (A^*, Y, X) ist gut gestellt. Dann existiert die Inverse $(A^*)^{-1}$ und ist stetig. Hieraus wiederum folgt die Stetigkeit von $[(A^*)^{-1}]^*$. Für $x \in X$, $y \in Y$ gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned}\langle \left[(A^*)^{-1}\right]^* Ax, y\rangle_X &= \langle x, A^*(A^*)^{-1}y\rangle_X \\ &= \langle x, y\rangle_X\,.\end{aligned}$$

Es ist demnach $[(A^*)^{-1}]^* = A^{-1}$. Die Inverse A^{-1} existiert und ist stetig, was im Widerspruch zur Schlechtgestelltheit von (A, X, Y) steht.

□

Offensichtlich ist (A, X, Y) schlecht gestellt, falls der Bildraum $\mathsf{R}(A) := \{y \in Y | \exists x \in$

$X \;:\; Ax = y\}$ von A nicht abgeschlossen ist, da in diesem Falle A^{-1} niemals stetig sein kann. Ziel ist es, zu beweisen, daß $(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{K})$ schlecht gestellt ist. Mit Hilfe von Lemma 1.4.9 ergibt sich diese Behauptung aus dem folgenden Satz.

Satz 1.4.10 $\mathsf{R}(\mathcal{D}^*)$ *ist nicht abgeschlossen in* $\mathcal{H}$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die Operatoren $\mathcal{D}_j^*$ nicht abgeschlossene Bildräume haben. Nehmen wir nämlich an, daß $\mathsf{R}(\mathcal{D}^*)$ abgeschlossen ist, so folgt die Abgeschlossenheit der Räume $\mathsf{R}(\mathcal{D}_j^*)$ aus der Mengenbeziehung

$$\begin{aligned} \oplus_{j=1}^3 \mathsf{R}(\mathcal{D}_j^*) &= \mathsf{R}(\mathcal{D}^*) = \overline{\mathsf{R}(\mathcal{D}^*)} = \overline{\oplus_{j=1}^3 \mathsf{R}(\mathcal{D}_j^*)} \\ &\supset \oplus_{j=1}^3 \overline{\mathsf{R}(\mathcal{D}_j^*)}\,. \end{aligned}$$

Wir nehmen also an, die Bildräume $\mathsf{R}(\mathcal{D}_j^*)$ seien abgeschlossen, und führen diese Aussage zu einem Widerspruch. Wir geben den Beweis nur für $j = 1$ an, die Fälle $j = 2$ und $j = 3$ ergeben sich in analoger Weise. Es ist $\mathcal{D}_1^* g = ([\mathcal{D}_1^* g]_1, [\mathcal{D}_1^* g]_2, 0)^\top$ und damit $\mathsf{R}(\mathcal{D}_1^*) = \mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_1) \times \mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_2) \times \{0\}$. Dabei bezeichne $[\mathcal{D}_1^*]_k\, g = [\mathcal{D}_1^* g]_k$ für $k = 1, 2$. Wir haben daher die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_1) \times \mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_2) \times \{0\} &= \mathsf{R}(\mathcal{D}_1^*) = \overline{\mathsf{R}(\mathcal{D}_1^*)} \\ &= \overline{\mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_1) \times \mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_2) \times \{0\}} \\ &\supset \overline{\mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_1)} \times \overline{\mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_2)} \times \{0\}\,. \end{aligned}$$

Folglich sind auch die Räume $\mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_k)$ abgeschlossen. Offenbar ist $L^2(S^1 \times [-1,1]) \subset L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$ mittels der Inklusion

$$\begin{aligned} L^2(S^1 \times [-1,1]) &\overset{\iota}{\hookrightarrow} L^2(S^1 \times [-1,1]^2)\,, \\ (\iota g)(\omega, s, a) &= g(\omega, s)\,. \end{aligned}$$

Weiterhin sei der Multiplikationsoperator $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(L^2(S^1 \times [-1,1]))$ definiert durch

$$(\mathcal{M}g)(\omega(\varphi), s) = g(\omega(\varphi), s)\, \cos\varphi\,.$$

Es sei g_n, $n \in I\!N$, eine Folge von Funktionen aus $L^2(S^1 \times [-1,1])$ mit

$$\mathcal{R}^*\mathcal{M}g_n \to f \in L^2(\Omega^2)\,.$$

Wir wollen zeigen, daß f im Bildraum von $\mathcal{R}^*\mathcal{M}$ liegt. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}^*\mathcal{M}g_n - f\|_{L^2(\Omega^2)}^2 &= \int_{\Omega^2} |\mathcal{R}^*\mathcal{M}g_n(x) - f(x)|^2\, d^2x \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^2 \times [-1,1]} |[\mathcal{D}_1^* g_n]_2(\mathbf{x}) - \check{f}(\mathbf{x})|^2\, d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{K_1^3} |[\mathcal{D}_1^* g_n]_2(\mathbf{x}) - \check{f}(\mathbf{x})|^2\, d^3\mathbf{x}\,, \end{aligned}$$

wobei $\check{f}(\mathbf{x}) = f(\pi_1^*\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \Omega^3$ und 0 in $K_1^3 \backslash \Omega^3$ ist. Da $\mathsf{R}([\mathcal{D}_1^*]_2)$ abgeschlossen ist, existiert ein $g \in L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$ mit

$$[\mathcal{D}_1^* g]_2 = \check{f}\,.$$

Man überlegt sich leicht, daß dieses g sogar in $L^2(S^1 \times [-1,1])$ enthalten sein muß. Dann ist aber

$$[\mathcal{D}_1^* g]_2(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^*\mathcal{M}g(\pi_1^*\mathbf{x})$$

in Ω^3 und wir haben

$$\mathcal{R}^*\mathcal{M}g = f\,.$$

Es ist demnach $\mathsf{R}(\mathcal{R}^*\mathcal{M})$ abgeschlossen. Da $\mathcal{R}^*\mathcal{M}$ kompakt ist, muß

$$\dim \mathsf{R}(\mathcal{R}^*\mathcal{M}) < \infty \tag{1.17}$$

gelten. Da $\mathcal{R}$ injektiv ist, ist $\mathsf{R}(\mathcal{R}^*)$ dicht in $L^2(\Omega^2)$. Der Widerspruch zu (1.17) ist erbracht, wenn gezeigt ist, daß $\mathsf{R}(\mathcal{M})$ dicht in $L^2(S^1 \times [-1,1])$ liegt. Es sei hierzu $\psi \in L^2(S^1 \times [-1,1])$ mit

$$\langle \mathcal{M}g, \psi \rangle_{L^2(S^1\times[-1,1])} = 0$$

für alle $g \in L^2(S^1 \times [-1,1])$. Mit $\check{\psi} = \mathcal{M}\psi$ ist dann auch

$$\langle g, \check{\psi} \rangle_{L^2(S^1\times[-1,1])} = 0$$

für alle $g \in L^2(S^1 \times [-1,1])$. Hieraus folgt $\check{\psi} = 0$ und damit $\psi = 0$, was den Beweis des Satzes komplettiert.

□

Korollar 1.4.11 *Das Problem $(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{K})$ ist schlecht gestellt.*

Beweis: Nach Satz 1.4.10 ist der Bildraum $\mathsf{R}(\mathcal{D}^*)$ nicht abgeschlossen, folglich ist $(\mathcal{D}^*, \mathcal{K}, \mathcal{H})$ schlecht gestellt. Die Behauptung ergibt sich dann aus Lemma 1.4.9.

□

Korollar 1.4.11 besagt, daß wir bei der Lösung des Problems $(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{K})$ ein Regularisierungsverfahren anwenden müssen, da die verallgemeinerte Inverse $\mathcal{D}^\dagger$ nicht stetig ist.

1.4.2.2 Der Nullraum der Doppler–Transformation

Aus praktischer Sicht ist auch die folgende Frage von Bedeutung: Können wir aus der Dopplertransformierten das gesamte Feld $\mathbf{f}$ rekonstruieren? Mathematisch heißt das: Wie sieht der Nullraum der Dopplertransformation aus?

Satz 1.4.12 *Bezeichnen wir mit $\mathsf{N}(\mathcal{D})$ den Nullraum der Dopplertransformation, so gilt*

$$\mathsf{N}(\mathcal{D}) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{H} : \mathbf{f} = \nabla p \in \mathcal{H},\ p \text{ konstant in } \pi_j(S^1),\ j \in \{1,2,3\}\}\,.$$

BEWEIS: Wir bezeichnen mit N die Menge $\{\mathbf{f} \in \mathcal{H} | \mathbf{f} = \nabla p \in \mathcal{H}, p$ konstant in $\pi_j(S^1)$, $j \in \{1,2,3\}\}$, und zeigen zunächst $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{N}(\mathcal{D})$.
Sei $\mathbf{f} = \nabla p \in \mathcal{H}$. Dann gilt mit $w(s) = \sqrt{1-s^2}$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_1 \mathbf{f}(\omega, s, a) \\
= & \int_{-w(s)}^{w(s)} \cos\varphi \, \frac{\partial p}{\partial x_2}(\pi_1(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_1 a) - \sin\varphi \, \frac{\partial p}{\partial x_1}(\pi_1(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_1 a) \, dt \\
= & \int_{-w(s)}^{w(s)} \frac{\partial}{\partial t} p(\pi_1(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_1 a) \, dt \\
= & \, p(\pi_1(s\omega + w(s)\omega^\perp) + \tau_1 a) - p(\pi_1(s\omega - w(s)\omega^\perp) + \tau_1 a) \\
= & \, 0 \, .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß $\nabla p \in \mathsf{N}$ ist, und somit p konstant in $K_1^3 \backslash \overline{\Omega^3}$ und $\pi_j(S^1)$ ist. Analog zeigt man $\mathcal{D}_2 \mathbf{f} = \mathcal{D}_3 \mathbf{f} = 0$.
Zum Beweis von $\mathsf{N}(\mathcal{D}) \subseteq \mathsf{N}$ betrachten wir die Zerlegung des Vektorfeldes $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ nach Theorem 1.2.4 in einen rotationsfreien und einen divergenzfreien Anteil. Es ist demnach $\mathbf{f} = \mathbf{u}^s + \nabla p$ und $\mathcal{D}\mathbf{f} = 0$. Folglich ist auch $\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}_j \mathbf{f} = 0$ für $j \in \{1,2,3\}$ und aus Lemma 1.4.4 folgt

$$(\mathcal{R} \otimes I) d_j \, \mathbf{f} = 0 \, .$$

Wegen der Injektivität von $\mathcal{R} \otimes I$ haben wir somit

$$d_j \, \mathbf{f} = 0 \, , \quad \text{für } j \in \{1,2,3\} \, ,$$

was gleichbedeutend mit

$$\nabla \times \mathbf{f} = 0$$

in Ω^3 ist. Es ist aber

$$\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{u}^s$$

und folglich $\nabla \times \mathbf{u}^s = 0$ in Ω^3. Um die Eindeutigkeit der Zerlegung zu garantieren, haben wir in Theorem 1.2.4 gefordert, daß $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^s = 0$ auf $\partial\Omega^3$ ist, wobei $\mathbf{n}$ die nach außen gerichtete Normale an $\partial\Omega^3$ ist. Da $\mathbf{u}^s$ der divergenzfreie Anteil von $\mathbf{f}$ ist, gilt $\nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0$ in Ω^3. Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{u}^s &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega^3 \, , \\
\nabla \cdot \mathbf{u}^s &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega^3 \, , \\
n \cdot \mathbf{u}^s &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega^3
\end{aligned}$$

hat $\mathbf{u}^s = 0$ als Lösung, was nach Theorem 1.2.5 auch die eindeutige Lösung ist. Daraus folgt $\mathbf{f} = \nabla p \in \mathcal{H}$ und aus der obigen Gleichungskette, daß p konstant sein muß in $\pi_j(S^1)$. Hiermit ist der Satz vollständig bewiesen.

□

Bemerkung: Der Kern der Dopplertransformation besteht also gerade aus den Feldern, die in $\mathcal{H}$ liegen und Gradient einer Funktion sind, die konstant ist auf den drei

Meridianen der dreidimensionalen Einheitssphäre. Insbesondere liegen alle rotationsfreien Vektorfelder mit kompaktem Träger in der Einheitskugel im Nullraum. Unser Modell eignet sich daher nur zur Rekonstruktion von divergenzfreien Vektorfeldern. Das ist jedoch keine große Einschränkung, da wir bei unseren Anwendungen stets Geschwindigkeitsfelder von inkompressiblen Flüssigkeiten betrachten wollen, für deren rotationsfreien Anteil sowieso $\nabla p = 0$ gilt. Ist man dennoch auch an den rotationsfreien Anteilen von Vektorfeldern interessiert, so bieten sich zwei Möglichkeiten an.
a) Kennt man a priori die Divergenz von $\mathbf{f}$ und die Normalkomponente $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$ auf dem Rand des Gebites $\partial\Omega$, so erhält man den rotationsfreien Anteil des Feldes ∇p durch Lösen einer Potentialgleichung mit Neumann - Randbedingungen. Ist nämlich $\nabla \cdot \mathbf{f} = g$ und $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = \phi$, so gilt wegen $\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \nabla p = \Delta p$ und $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot \nabla p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} p$

$$\begin{aligned} \Delta p &= g \quad \text{in} \quad \Omega\,, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} p &= \phi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Durch Übergang zu ∇p ist der rotationsfreie Anteil eindeutig gegeben. Daraus geht auch hervor, daß im Falle inkompressibler Flüssigkeiten ($g = 0$), wobei keine Flüssigkeit aus dem Objekt austritt ($\phi = 0$), dieser Anteil gleich 0 sein muß.
b) Strahlen [36] zeigt, daß sich der rotationsfreie Anteil bestimmen läßt, wenn man außer der Dopplertransformierten auch den Normalfluß von $\mathcal{D}^\perp \mathbf{f}$ kennt, der durch folgendes Integral gegeben ist

$$\mathcal{D}^\perp(\Theta, s) = \int_{\mathbf{x}^\top \Theta = s} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \Theta \, d\mathbf{x}\,,$$

$\Theta \in S^2$. Es ist jedoch nicht klar, wie man dieses Ebenenintegral physikalisch bestimmen kann.

Wir wollen weiterhin nur die Dopplertransformierte von $\mathbf{f}$ betrachten, was im Falle inkompressibler Flüssigkeiten, wie oben erwähnt, auch ausreicht.

Im zweidimensionalen Fall besteht der Kern der Doppler–Transformation aus allen Vektorfeldern der Form $\mathbf{f} = \nabla p$, wobei p konstant ist auf S^1. Der Beweis dieser Tatsache erfolgt ganz analog zum dreidimensionalen Fall.

1.4.2.3 Die Glättungseigenschaft der Doppler–Transformation

Wir haben bereits gezeigt, daß es sich bei dem Problem $(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{K})$ um ein schlecht gestelltes Problem handelt. Um ein Maß für diese Schlechtgestelltheit zu erhalten, untersuchen wir die Glättungseigenschaft von $\mathcal{D}$. Natterer [25] hat bewiesen, daß die Radon–Transformation in einer Sobolev-Norm um den Faktor $1/2$ glättet und es sich daher bei der zweidimensionalen Computer–Tomographie um ein mäßig schlecht gestelltes Problem handelt (siehe dazu auch Louis [19]). Ziel dieses Abschnittes ist es, ein analoges Ergebnis für die Dopplertransformation zu zeigen.

Wir führen dazu einen Raum ein, der ein dichter Teilraum des Raumes $\mathcal{H}$, des Definitionsbereiches von $\mathcal{D}$ ist. Es handelt sich hierbei um den Sobolev-Raum $\tilde{H}_0^{\alpha,\beta}((-1,1)^2 \times (-1,1), I\!R^3)$. Wir bezeichnen damit den Abschluß von $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega^3, I\!R^3)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H_0^{\alpha,\beta}}$. Man beachte, daß dieser Raum sich von $H_0^{\alpha,\beta}((-1,1)^2 \times (-1,1), I\!R^3)$ unterscheidet, da bei letzterem der Abschluß von $\mathcal{C}_c^\infty(K_1^3, I\!R^3)$ genommen wird.
Wir führen noch eine weitere Bezeichnung ein. Mit $a \preceq b$ zeichnen wir die Tatsache aus, daß es eine von a und b unabhängige Konstante $c > 0$ gibt mit $a \leq cb$.
Uns stehen somit die mathematischen Hilfsmittel bereit, um eine Stetigkeitsaussage der Doppler–Transformation in Sobolev-Normen zu beweisen. Wir bemerken zunächst, daß wir die Operatoren $\mathcal{D}_j$ auch in der folgenden Form schreiben können:

$$\mathcal{D}_j \,\mathbf{f}(\omega, s, a) = \theta_j(\omega) \cdot \int_{L_j(\omega,s,a)} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,. \tag{1.18}$$

Ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis der Stetigkeitsaussage ist das folgende Lemma, das eine Weiterführung des Lemmas 3.2 aus Wloka [41] darstellt.

Lemma 1.4.13 *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit im $I\!R^n$.*
1.) Ist $f \in \mathcal{C}^{[\alpha]+1}(I\!R^n)$, dann gilt für alle $g \in H^\alpha(M)$

$$\|fg\|_{H^\alpha(M)} \preceq \|f\|_{\mathcal{C}^{[\alpha]+1}(I\!R^n)} \|g\|_{H^\alpha(M)}\,.$$

2.) Ist $f \in \mathcal{C}^{[\alpha]+1}(I\!R^n, I\!R^m)$, dann gilt für alle $g \in H^\alpha(M, I\!R^m)$

$$\|f \cdot g\|_{H^\alpha(M)} \preceq \|f\|_{\mathcal{C}^{[\alpha]+1}(I\!R^n, I\!R^m)} \|g\|_{H^\alpha(M, I\!R^m)}\,.$$

Das Skalarprodukt $f \cdot g$ ist dabei punktweise zu nehmen, also

$$(f \cdot g)(\omega) = f(\omega) \cdot g(\omega)\,.$$

Beweis: Zu 1.): Es sei $\Xi = (\mathcal{U}_i, \gamma_i)$, $i \in \mathcal{J}$ ein Atlas von M und $\{\beta_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ eine zugehörige Partition der Eins. Da M kompakt ist, ist die Indexmenge $\mathcal{J}$ endlich. Die Funktionen

$$(fg) \cdot \beta_i \circ \gamma_i^{-1} : \gamma_i(\mathcal{U}_i) \to \mathbb{C}$$

sind aus $H^\alpha(\gamma_i(\mathcal{U}_i))$. Mit Lemma 3.2 aus Wloka [41] folgt dann

$$\|(fg) \cdot \beta_i \circ \gamma_i^{-1}\|_{H^\alpha(\gamma_i(\mathcal{U}_i))} \preceq \|f\|_{\mathcal{C}^{[\alpha]+1}(I\!R^n)} \|g \cdot \beta_i \circ \gamma_i^{-1}\|_{H^\alpha(\gamma_i(\mathcal{U}_i))}\,.$$

Die Behauptung von Teil 1.) ergibt sich schließlich aus

$$\begin{aligned} \|fg\|^2_{H^\alpha(M)} &= \sum_{i\in\mathcal{J}} \|(fg) \cdot \beta_i \circ \gamma_i^{-1}\|_{H^\alpha(\gamma_i(\mathcal{U}_i))} \\ &\preceq \|f\|^2_{\mathcal{C}^{[\alpha]+1}(I\!R^n)} \sum_{i\in\mathcal{J}} \|g \cdot \beta_i \circ \gamma_i^{-1}\|_{H^\alpha(\gamma_i(\mathcal{U}_i))} \\ &= \|f\|^2_{\mathcal{C}^{[\alpha]+1}(I\!R^n)} \|g\|^2_{H^\alpha(M)}\,. \end{aligned}$$

Entscheidend hierbei ist die Endlichkeit der Indexmenge $\mathcal{J}$.
Zu 2.): Es genügt, die Behauptung auf dichten Teilmengen zu beweisen. Wir nehmen daher an, daß $f \in \mathcal{C}^{[\alpha]+1}(M) \otimes I\!R^m$ und $g \in H^\alpha(M) \otimes I\!R^m$ gilt. Es ist dabei $\mathcal{C}^\alpha(M) \otimes I\!R^m = \operatorname{span}\{\varphi x : \varphi \in \mathcal{C}^\alpha(M),\ x \in I\!R^m\}$. Analog ist die Definition von $H^\alpha(M) \otimes I\!R^m$. Offenbar sind beide Mengen dicht in den Ausgangsräumen. Seien also $f = \check{f} x$ und $g = \check{g} y$, für $\check{f} \in \mathcal{C}^{[\alpha]+1}(M)$, $\check{g} \in H^\alpha(M)$, und $x, y \in I\!R^m$. Unter Ausnutzung von Teil 1.) und der Tatsache, daß wir $H^\alpha(M, I\!R^m)$ mit $H^\alpha(M)\hat{\otimes} I\!R^m$ identifizieren können, ergibt sich die Behauptung. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\|f \cdot g\|_{H^\alpha(M)} &= |x^\top y| \|\check{f}\check{g}\|_{H^\alpha(M)} \\
&\preceq \|x\|\|y\|\|\check{f}\|_{\mathcal{C}^{[\alpha]+1}(M)} \|\check{g}\|_{H^\alpha(M)} \\
&= \|f\|_{\mathcal{C}^{[\alpha]+1}(M)\hat{\otimes} I\!R^m} \|g\|_{H^\alpha(M)\hat{\otimes} I\!R^m} \\
&\preceq \|f\|_{\mathcal{C}^{[\alpha]+1}(M, I\!R^m)} \|g\|_{H^\alpha(M, I\!R^m)} .
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

□

Hauptziel dieses Abschnittes ist es, die Aussage:

$$\mathcal{D} : \tilde{H}_0^{\alpha,\alpha}((-1,1)^2 \times (-1,1), I\!R^3) \to \oplus_{j=1}^3 \left(H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}) \hat{\otimes} H_0^\alpha(-1,1) \right) ,$$

ist für $\alpha \geq 0$ ein stetiger Operator zu beweisen.
Zur Definition der auftretenden Räume sei auf Abschnitt 1.1.2 verwiesen. Den wesentlichen Schritt zum Beweis der Stetigkeitsaussage liefert der folgende Satz.

Satz 1.4.14 *Für $\alpha \geq 0$ sind*

$$\mathcal{D}_j : X_\alpha := \tilde{H}_0^{\alpha,\alpha}((-1,1)^2 \times (-1,1), I\!R^3) \to H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}) \hat{\otimes} H_0^\alpha(-1,1) =: Y_\alpha \tag{1.19}$$

stetige Operatoren.

Beweis: Wir führen den Beweis, indem wir den Operator $\mathcal{D}_j$ als Hintereinanderausführung von drei Operatoren interpretieren, deren Stetigkeit wir beweisen. Diese Operatoren sind im einzelnen:

$$\begin{aligned}
\lambda_j : X_\alpha &\to H_0^\alpha(\Omega^2, H_0^\alpha((-1,1), I\!R^3)) , \\
\lambda_j \mathbf{f}(x) &= (s \mapsto \mathbf{f}(\pi_j x + \tau_j s)) , \\
(\mathcal{R} \otimes I) : H_0^\alpha(\Omega^2, H_0^\alpha((-1,1), I\!R^3)) &\to H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}, H_0^\alpha((-1,1), I\!R^3)) , \\
\mathcal{M}_j : H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}, H_0^\alpha((-1,1), I\!R^3)) &\to Y_\alpha , \\
\mathcal{M}_j \mathbf{g}(\omega, s) &= \theta_j(\omega) \cdot \mathbf{g}(\omega, s) .
\end{aligned}$$

1) Sei $\mathbf{f} \in X_\alpha$, dann gilt die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\|\lambda_j \mathbf{f}\|^2_{H_0^\alpha(\Omega^2, H_0^\alpha((-1,1), I\!R^3))} &= \int_{I\!R^2} (1 + |\xi|^2)^\alpha \, \|\widehat{\lambda_j \mathbf{f}}(\xi)\|^2_{H_0^\alpha((-1,1), I\!R^3)} \, d\xi \\
&= \int_{I\!R} \int_{I\!R^2} (1 + |\xi|^2)^\alpha \, (1 + |\sigma|^2)^\alpha \, \|\hat{\mathbf{f}}(\pi_j \xi + \tau_j \sigma)\|_2^2 \, d\xi \, d\sigma \\
&= \|\mathbf{f}\|^2_{X_\alpha} .
\end{aligned}$$

Damit folgt, daß λ_j eine Isometrie und somit stetig ist.
2) Die Radon-Transformation ist ein stetiger Operator zwischen $H_0^\alpha(\Omega^2)$ und $H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z})$, siehe RIEDER, SCH. [28]. Wie in Abschnitt 1.1.2 erwähnt können wir $H_0^\alpha(\Omega^2, H_0^\alpha((-1,1), \mathbb{R}^3))$ mit dem Tensorprodukt $H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes} H_0^\alpha((-1,1), \mathbb{R}^3)$ und $H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}, H_0^\alpha((-1,1), \mathbb{R}^3))$ mit $H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z})\hat{\otimes} H_0^\alpha((-1,1), \mathbb{R}^3))$ identifizieren. Offensichtlich ist dann $\mathcal{R} \otimes I$ ein stetiger Operator zwischen diesen Tensorprodukten.
3) Sei $g \in H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}, H_0^\alpha((-1,1), \mathbb{R}^3)) =: \mathcal{U}$. Eine auf $\mathcal{U}$ äquivalente Norm ist gegeben durch

$$\|\!|g|\!\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\sigma|^2)^{\alpha+1/2} \|\hat{g}(\sigma)\|^2_{H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}, \mathbb{R}^3)} \, d\sigma \,,$$

siehe AUBIN [3]. Wir fassen die Funktionen aus $H_{\mathrm{p}}^\alpha(\tilde{Z}, \mathbb{R}^3)$ als Funktionen aus $H^\alpha(\Pi^3, \mathbb{R}^3)$ auf und definieren $m_j(\varphi, s) = \theta_j(\omega(\varphi))$. Offenbar ist $m_j \in \mathcal{C}^\infty(\Pi^3, \mathbb{R}^3)$, wobei wir zu lokalen Koordinaten übergegangen sind. Es gilt dann unter Verwendung von Lemma 1.4.13

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}_j g\|^2_{Y_\alpha} &\preceq \|\mathcal{M}_j g\|^2_{H_0^\alpha((-1,1), H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}))} \\
&\preceq \int_{\mathbb{R}} (1 + |\sigma|^2)^\alpha \, \|\widehat{\mathcal{M}_j} g(\sigma)\|^2_{H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z})} \, d\sigma \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\sigma|^2)^\alpha \, \|m_j \cdot \hat{g}(\sigma)\|^2_{H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z})} \, d\sigma \\
&\preceq \|m_j\|^2_{\mathcal{C}^{[\alpha+1/2]+1}(\Pi^3, \mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\sigma|^2)^\alpha \, \|\hat{g}(\sigma)\|^2_{H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}, \mathbb{R}^3)} \, d\sigma \\
&\preceq \|\!|g|\!\|^2 \\
&\preceq \|g\|^2_{\mathcal{U}} \,.
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $\mathcal{M}_j$ ist bewiesen, denn man beachte, daß $H_{\mathrm{p}}^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}, H_0^\alpha((-1,1), \mathbb{R}^3))$ isometrisch isomorph zu Y_α ist. Mit Hilfe der Darstellung (1.18) von $\mathcal{D}_j$ sieht man aber direkt, daß

$$\mathcal{D}_j = \mathcal{M}_j \, (\mathcal{R} \otimes I) \, \lambda_j$$

ist, woraus schließlich die Behauptung des Satzes folgt.

□

Korollar 1.4.15 *Es gilt*

$$\mathcal{D} : X_\alpha \to \oplus_{j=1}^3 Y_\alpha$$

ist ein stetiger Operator.

BEWEIS: Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 1.4.14, der besagt, daß die einzelnen Komponenten $\mathcal{D}_j$ stetige Abbildungen zwischen den Räumen X_α und Y_α darstellen, und aus der Tatsache, daß $\mathcal{D} = \oplus_{j=1}^3 \mathcal{D}_j$ ist.

□

Bemerkung: In groben Worten besagt Satz 1.4.14, daß $\mathcal{D}_j$ bezüglich zweier Variablen um die Stufe 1/2 glättet, während sie bezüglich der dritten nicht glättet. Das ist auch genau das, was man erwarten würde, denn im wesentlichen führt $\mathcal{D}_j$ bezüglich zweier Variablen eine zweidimensionale Radon–Transformation durch, während sie die dritte konstant läßt.

Kapitel 2

Theorie der Approximativen Inversen

Wir betrachten Probleme der Form (A, X, Y) mit separablen Hilberträumen X und Y und einem linearen, stetigen Operator A. Ist der Bildbereich von A, $\mathsf{R}(A)$, nicht abgeschlossen, so ist die verallgemeinerte Inverse $A^\dagger$ nicht stetig. Ein Rauschen in den Daten, das zum Beispiel durch fehlerbehaftete Messungen entsteht, würde zu großen Fehlern in der Lösung f führen. Es ist daher nötig, $A^\dagger$ durch stetige Operatoren zu approximieren, sogenannte *Regularisierungsverfahren.* Bekannte Regularisierungsverfahren sind die *abgeschnittene Singulärwertzerlegung*, die *Tikhonov-Phillips Regularisierung*, oder das *Verfahren der konjugierten Gradienten* als Beispiel eines nichtlinearen Verfahrens. Wir definieren im ersten Abschnitt die Methode der *approximativen Inversen*, siehe LOUIS [20, 24], LOUIS, MAASS [22], LOUIS, SCH. [23], die eine ganze Klasse von Regularisierungsverfahren beinhaltet. In den letzten Jahren wurde die approximative Inverse erfolgreich eingesetzt in der *2D–Computer–Tomographie*, siehe LOUIS, SCH. [23], RIEDER, SCH. [28], in der *3D–Computer–Tomographie*, siehe DIETZ [9] und auch in der *Ultraschall–Tomographie*, siehe ABDULLAH, LOUIS [1]. Behandeln wir im ersten Abschnitt ausschließlich den kontinuierlichen Fall, so wenden wir uns im zweiten Abschnitt dem für praktische Anwendungen wichtigen diskreten Fall zu, d.h. $Y = \mathbb{R}^n$ bzw. $Y = \mathbb{C}^n$. Es werden Konvergenzsätze angegeben, die das Verhalten der Lösung charakterisieren für den Fall, daß die Anzahl der Daten n gegen Unendlich strebt. Außerdem zeigen wir, wie man für kompakte Operatoren *Rekonstruktionskerne* mit Hilfe der Singulärwertzerlegung berechnen kann.

2.1 Definition und erste Eigenschaften

Der Grundgedanke der approximativen Inversen ist, die Lösung $f \in X$ durch Momente $\langle f, e^i \rangle_X$, $e^i \in X$, $i = 1, \ldots, m$ zu approximieren. Liegen die Elemente e^i im Bildbereich des adjungierten Operators von A, also existiert ein $v^i \in Y$ mit $A^* v^i = e^i$, so hat man die Gleichheit

$$\langle f, e^i\rangle_X = \langle f, A^*v^i\rangle_X = \langle Af, v^i\rangle_Y = \langle g, v^i\rangle_Y \,.$$

Stehen die v^i zur Verfügung, so kann das letzte Skalarprodukt berechnet werden, da die Daten g bekannt sind. Im Falle, daß $e^i \notin \mathsf{R}(A^*)$, bestimmt man v^i, indem man das Residuum

$$\|A^*v^i - e^i\|_X$$

minimiert. Äquivalent dazu kann man, falls $e^i \in \mathsf{D}((A^*)^\dagger) = \mathsf{R}(A^*) \oplus \mathsf{N}(A)$ ist, v^i als Lösung der Normalgleichung

$$AA^*v^i = Ae^i \tag{2.1}$$

festlegen.

Definition 2.1.1 *Wir bezeichnen die Abbildung $S_m : Y \to \mathbb{C}^m$, die gegeben ist durch*

$$(S_m g)_i = \langle g, v^i\rangle_Y \,, \qquad i = 1, \dots, m\,,$$

als diskrete approximative Inverse *von A. Die Elemente $v^i \in Y$ heißen* Rekonstruktionskerne *zu e^i.*

Bemerkung: 1.) Da die Gleichung (2.1) nicht von g abhängt, machen sich zum einen Fehler in den Meßdaten beim Lösen der Gleichung nicht bemerkbar, zum anderen können die Rekonstruktionskerne v^i schon vor dem Meßvorgang bestimmt werden. Es wird sich später zeigen, daß das Verfahren der approximativen Inversen unter Ausnutzung von Invarianzen des Operators A außerdem auch sehr effizient ist, siehe dazu auch Louis, Sch. [23].
2.) Wir haben jede Lösung v^i der Gleichung (2.1) als Rekonstruktionskern zugelassen. Ein Rekonstruktionskern zeichnet sich jedoch gegenüber allen anderen aus, nämlich derjenige mit minimaler Norm

$$\psi^i_{\min} = (A^*)^\dagger e^i \,.$$

Voraussetzung ist natürlich, daß $e^i \in \mathsf{D}((A^*)^\dagger)$ gilt.
Wir beschränken uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit auf den Spezialfall $X = L^2(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist. Im Unterschied zum allgemeinen Fall, in dem X kein Raum von skalaren Funktionen ist, können wir die approximative Inverse hier als Abbildung zwischen X und Y definieren, die, wie wir später sehen werden, die Inverse von A approximiert.
Wir wählen eine Funktion $\tilde{e} \in L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, die Mittelwert 1 hat, also für die

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{e}(x)\, dx = 1 \tag{2.2}$$

gilt und definieren $e_\gamma \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ durch

$$e_\gamma(x, y) = T^y D^\gamma \tilde{e}(x) = \gamma^{-n} \tilde{e}((x - y)/\gamma)\,.$$

Für diese Funktion gilt wiederum

$$\int_{I\!R^n} e_\gamma(x,y)\,dx = 1\,. \tag{2.3}$$

Wir nennen eine Funktion e_γ, die der Gleichung (2.3) genügt, einen *Mollifier*, wenn sie zusätzlich

$$\lim_{\gamma\searrow 0}\left\|\int_{I\!R^n} e_\gamma(x,\cdot)f(x)\,dx - f\right\|_{L^2(\Omega)} = 0\,,$$

d.h.

$$\lim_{\gamma\searrow 0}\int_{I\!R^n} e_\gamma(x,y)f(x)\,dx = f(y) \qquad \text{f.ü.}$$

erfüllt. Demnach approximiert $e_\gamma(x,y)$ in einem gewissen Sinne δ_{x-y}. Bekannte Mollifier ergeben sich aus

$$\begin{aligned}\tilde e(x) &= \frac{n}{|S^{n-1}|}\cdot\chi_{\Omega^n}(x)\,,\\ \tilde e(x) &= \sqrt{2/\pi}\,\mathrm{sinc}(x)\,,\\ \tilde e(x) &= (2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|^2/2)\,.\end{aligned}$$

Dabei bedeute χ_{Ω^n} die charakteristische Funktion der n-dimensionalen offenen Einheitskugel.
Sei e_γ ein Mollifier. Wir definieren den zu e_γ gehörenden Rekonstruktionskern $\upsilon_\gamma(x)$ als Lösung der Normalgleichung

$$AA^*\upsilon_\gamma(x) = Ae_\gamma(x,\cdot)\,. \tag{2.4}$$

Damit diese Normalgleichung eine Lösung besitzt, ist es notwendig, daß $e_\gamma(x,\cdot)\in \mathsf{D}((A^*)^\dagger)$ ist. Wie erwähnt wollen wir für den Spezialfall $X = L^2(\Omega)$, eine kontinuierliche Form der approximativen Inversen definieren.

Definition 2.1.2 *Seien $A\in\mathcal{L}(X,Y)$, $X = L^2(\Omega)$, Y ein separabler Hilbertraum und $e_\gamma\in L^2(I\!R^n\times I\!R^n)$ ein Mollifier, für den $e_\gamma(x,\cdot)\in\mathsf{D}((A^*)^\dagger)$ gilt für alle $x\in\Omega$. Wir nennen die Abbildung $S_\gamma : Y\to X$, die definiert ist durch*

$$S_\gamma g(x) = \langle g, \upsilon_\gamma(x)\rangle_Y\,,\quad x\in\Omega\,,$$

kontinuierliche approximative Inverse *von A. Der* Rekonstruktionskern $\upsilon_\gamma(x)$ *ist als Lösung der Normalgleichung (2.4) gegeben.*

Wir wollen zunächst zeigen, daß die Bezeichnung approximative Inverse ihre Berechtigung hat.

Lemma 2.1.3 *Sei $f\in L^2(\Omega)$ Lösung von $Af = g$, $g\in Y$ und e_γ ein Mollifier mit $e_\gamma(x,\cdot)\in\mathsf{R}(A^*)$ für alle $x\in\Omega$. Dann ist $S_\gamma g\in L^2(\Omega)$ und es gilt für $x\in\Omega$*

$$\lim_{\gamma\searrow 0} S_\gamma Af(x) = f(x) \qquad \textit{f.ü.}$$

BEWEIS: Offensichtlich ist

$$\langle g, \upsilon_\gamma(x)\rangle_Y = \langle f, \mathcal{P}_{\mathsf{N}(A)^\perp} e_\gamma(x,\cdot)\rangle_{L^2(\Omega)} ,$$

wobei $\mathcal{P}_{\mathsf{N}(A)^\perp}$ die orthogonale Projektion auf $\mathsf{N}(A)^\perp$ bezeichnet. Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} \|S_\gamma g\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |\langle f, \mathcal{P}_{\mathsf{N}(A)^\perp} e_\gamma(x,\cdot)\rangle_{L^2(\Omega)}|^2 \, dx \\ &\le \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \int_\Omega \|\mathcal{P}_{\mathsf{N}(A)^\perp} e_\gamma(x,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dx \\ &\le \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \|e_\gamma\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} , \end{aligned}$$

und damit der erste Teil der Behauptung. Die Funktion $\bar{f}$ sei definiert durch:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ für } \quad x \in \Omega , \\ 0 & , \text{ für } \quad x \notin \Omega . \end{cases}$$

Dann ergibt sich die Behauptung des zweiten Teils aus der folgenden Gleichungskette:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma\searrow 0} S_\gamma A f(x) &= \lim_{\gamma\searrow 0} \langle Af, \upsilon_\gamma(x)\rangle_Y \\ &= \lim_{\gamma\searrow 0} \langle f, e_\gamma(x,\cdot)\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \lim_{\gamma\searrow 0} \int_{I\!R^n} \bar{f}(y) e_\gamma(x,y) \, dy \\ &= \bar{f}(x) \qquad \text{f.ü.} \end{aligned}$$

□

Im Falle, daß der Operator A kompakt ist, kann man den Rekonstruktionskern υ_γ mit Hilfe des zugehörigen singulären Systems $\{v_\mu, u_\mu, \sigma_\mu\}_\mu$ ausdrücken. Dabei sind $\{v_\mu\}_\mu$ ein vollständiges Orthonormalsystem für $\mathsf{N}(A)^\perp$, und $\{u_\mu\}_\mu$ ein vollständiges Orthonormalsystem für $\overline{\mathsf{R}(A)}$. Beide sind über die Singulärwerte verknüpft durch die Beziehungen

$$A v_\mu = \sigma_\mu u_\mu , \qquad A^* u_\mu = \sigma_\mu v_\mu .$$

Für die Singulärwerte gilt außerdem

$$\lim_{\mu\to\infty} \sigma_\mu = 0 ,$$

und 0 ist der einzige Häufungspunkt. Liegt $e_\gamma(x,\cdot)$ in $\mathsf{D}((A^*)^\dagger)$ für alle $x \in \Omega$, so ist die eindeutige Lösung von (2.4) in $\overline{\mathsf{R}(A)}$ gegeben durch

$$\upsilon_\gamma(x) = \sum_{\sigma_\mu>0} \sigma_\mu^{-1} \langle e_\gamma(x,\cdot), v_\mu\rangle_{L^2(\Omega)} \, u_\mu , \tag{2.5}$$

siehe LOUIS [19, 24]. Die Abbildung S_γ hat in diesem Fall die Gestalt

$$S_\gamma g(x) = \sum_{\sigma_\mu>0} \sigma_\mu^{-1} \langle e_\gamma(x,\cdot), v_\mu\rangle_{L^2(\Omega)} \langle g, u_\mu\rangle_Y = \langle e_\gamma(x,\cdot), A^\dagger g\rangle_{L^2(\Omega)} .$$

Zur Darstellung der verallgemeinerten Inversen durch die Singulärwertzerlegung sei auf Louis [19] verwiesen.
Wir wollen nun zeigen, daß S_γ unter gewissen Voraussetzungen als Regularisierungsverfahren betrachtet werden kann, wobei γ die Rolle des Regularisierungsparameters zufällt. Ist das Problem (A, X, Y) schlecht gestellt, also $\mathsf{R}(A)$ nicht abgeschlossen, so ist $A^\dagger$ nicht stetig, siehe z.B. Louis [19]. Man approximiert daher $A^\dagger$ durch eine Folge von stetigen Operatoren $\{T_\gamma\}_{\gamma>0}$, $T_\gamma : Y \to X$, so daß gilt

$$\lim_{\gamma \searrow 0} T_\gamma g = A^\dagger g \,,$$

für $g \in \mathsf{D}(A^\dagger)$. Die Abbildungen T_γ nennt man *Regularisierungsverfahren für* $A^\dagger$, γ ist der *Regularisierungsparameter*. Das folgende Lemma ist in Louis [24] bewiesen.

Lemma 2.1.4 *Sind $A : L^2(\Omega) \to Y$ ein kompakter Operator und e_γ ein Mollifier mit $e_\gamma(x, \cdot) \in \mathsf{D}((A^*)^\dagger)$ für alle $x \in \Omega$, so sind die Abbildungen $\{S_\gamma\}_{\gamma>0}$ lineare Regularisierungsverfahren für $A^\dagger$.*

Je nach Wahl von e_γ erhält man für S_γ einige bekannte Regularisierungsverfahren.

Lemma 2.1.5 *Sei $F_\gamma : I\!R_0^+ \to I\!R_0^+$ ein regularisierendes Filter. Zur Definition des Begriffes sei auf* Louis *[19] verwiesen. F_γ erfülle die Bedingung*

$$F_\gamma(\sigma_\mu) \preceq \sigma_\mu \, \|v_\mu\|_\infty^{-1} \, \mu^{-\alpha} \,, \quad \alpha > 1/2 \,.$$

Wir definieren ferner

$$e_\gamma(x, y) = \sum_\mu F_\gamma(\sigma_\mu) \, v_\mu(x) \, v_\mu(y) \,.$$

Die zu diesem Mollifier gehörende approximative Inverse S_γ stimmt mit dem durch

$$T_\gamma g = \sum_\mu F_\gamma(\sigma_\mu) \, \sigma_\mu^{-1} \, \langle g, u_\mu \rangle_Y \, u_\mu$$

gegebenen Regularisierungsverfahren überein.

Beweis: Es bleibt nur zu zeigen, daß die bei der Definition von e_γ auftretende Reihe konvergiert, und daß $e_\gamma(x, \cdot) \in \mathsf{D}((A^*)^\dagger)$ ist. Die Konvergenz der Reihe ist jedoch offensichtlich, da

$$\sum_\mu |F_\gamma(\sigma_\mu)|^2 \preceq \sum_\mu \sigma_\mu^2 \, \|v_\mu\|_\infty^{-2} \, \mu^{-2\alpha} < \infty$$

gilt. Es ist außerdem $e_\gamma(x, \cdot) \in \overline{\mathsf{R}(A^*)}$. Damit $e_\gamma(x, \cdot) \in \mathsf{D}((A^*)^\dagger)$ gilt, muß demnach

$$\sum_\mu F_\gamma(\sigma_\mu) \, v_\mu(x) \, v_\mu \in \mathsf{R}(A^*)$$

für jedes $x \in \Omega$ gelten. Die PICARD-Bedingung besagt, daß dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\sum_\mu \sigma_\mu^{-2} \, |\langle \sum_\nu F_\gamma(\sigma_\nu) \, v_\nu(x) \, v_\nu, v_\mu \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 = \sum_\mu \sigma_\mu^{-2} \, |v_\mu(x)|^2 \, F_\gamma(\sigma_\mu)^2 < \infty$$

gilt. Das ergibt sich aber aus der Bedingung an F_γ.
Der Rest des Beweises ist in LOUIS [20] nachzulesen.

□

Bemerkung: Aus der Tatsache, daß F_γ ein regularisierendes Filter ist, folgt

$$F_\gamma(\sigma_\mu) \leq c(\gamma) \, \sigma_\mu \, .$$

Dies allein reicht jedoch noch nicht aus, um die Existenz des Mollifiers e_γ zu gewährleisten. Vielmehr spielt auch noch eine Rolle, wie schnell die Singulärwerte gegen 0 streben.

Beispiele: Die *abgeschnittene Singulärwertzerlegung* läßt sich als approximative Inverse darstellen, da es in diesem Fall ein μ_0 gibt mit $F_\gamma(\sigma_\mu) = 0$ für alle $\mu \geq \mu_0$. Das *Landweber-Verfahren* läßt sich als approximative Inverse darstellen, falls die Singulärwerte von A schneller fallen als $\mu^{-1/2} \|v_\mu\|_\infty^{-1}$. Für das Filter gilt nämlich in diesem Fall $F_\gamma(\sigma_\mu) \preceq \sigma_\mu^2$. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß sich auch das Verfahren von BACKUS-GILBERT als approximative Inverse darstellen läßt.

In manchen Fällen ist es nicht nötig, den Rekonstruktionkern $\upsilon_\gamma(x)$ in jedem Punkt x auszurechnen. Vielmehr kann man Invarianzeigenschaften des zugrundeliegenden Operators A ausnutzen, um den Kern nur noch in einem Punkt zu errechnen.

Lemma 2.1.6 *Es seien Operatoren $T_1^x \in \mathcal{L}(X)$ und $T_2^x \in \mathcal{L}(Y)$ gegeben mit $T_1^x \, A^* = A^* \, T_2^x$ und $\|T_i^x\| \leq 1$ für $i = 1, 2$. Weiter seien $\mathcal{P}_{A^*} : X \to X$ die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathsf{R}(A^*)}$ und $e_\gamma(x, \cdot) = T_1^x \tilde{e}_\gamma$ für einen Mollifier $\tilde{e}_\gamma$. Dann gilt für die Lösung $\upsilon_\gamma(x)$ von*

$$A^* \upsilon_\gamma(x) = \mathcal{P}_{A^*} e_\gamma(x, \cdot)$$

die Gleichheit

$$\upsilon_\gamma(x) = T_2^x \upsilon(0) \, .$$

BEWEIS: Es sei bemerkt, daß die Gleichung $A^* \upsilon_\gamma(x) = \mathcal{P}_{A^*} e_\gamma(x, \cdot)$ äquivalent ist zur Normalgleichung (2.4). Offenbar genügt es, die Gleichheit

$$\mathcal{P}_{A^*} T_1^x \tilde{e}_\gamma = T_1^x \, \mathcal{P}_{A^*} \tilde{e}_\gamma$$

zu zeigen, denn dann gilt

$$\mathcal{P}_{A^*} e_\gamma(x, \cdot) = \mathcal{P}_{A^*} T_1^x \tilde{e}_\gamma = T_1^x \, \mathcal{P}_{A^*} \tilde{e}_\gamma = T_1^x \, A^* \upsilon_\gamma(0) = A^* \, T_2^x \upsilon_\gamma(0) \, .$$

Sei dazu $f^x := \mathcal{P}_{A^*} T_1^x \tilde{e}_\gamma$. Es gibt eine Folge $\{g_n^x\}_n \subset Y$ mit $f^x = \lim_n A^* g_n^x$ und

$$\lim_n \|A^* g_n^x - T_1^x \tilde{e}_\gamma\|_X = \min_{g \in Y} \|A^* g - T_1^x \tilde{e}_\gamma\|_X \, .$$

Zu zeigen ist

$$g_n^x = T_2^x g_n^0 \,, \tag{2.6}$$

denn dann ist

$$A^* g_n^x = T_1^x A^* g_n^0$$

und damit $f^x = T_1^x f^0$.
Wir führen den Beweis von (2.6) durch Widerspruch. Dazu nehmen wir an, daß es eine Folge $\{h_n^x\}_n \subset Y$ gibt mit

$$\|A^* h_n^x - T_1^x \tilde{e}_\gamma\|_X < \|A^* T_2^x g_n^0 - T_1^x \tilde{e}_\gamma\|_X \,,$$

für fast alle n, denn das würde bedeuten, daß (2.6) nicht gilt. Die folgende Ungleichungskette führt diese Annahme zu einem Widerspruch:

$$\begin{aligned}
\|A^* T_2^{-x} h_n^x - \tilde{e}_\gamma\|_X &= \|T_1^{-x}(A^* h_n^x - T_1^x \tilde{e}_\gamma)\|_X \\
&\leq \|A^* h_n^x - T_1^x \tilde{e}_\gamma\|_X \\
&< \|A^* T_2^x g_n^0 - T_1^x \tilde{e}_\gamma\|_X \\
&= \|T_1^x (A^* g_n^0 - \tilde{e}_\gamma)\|_X \\
&\leq \|A^* g_n^0 - \tilde{e}_\gamma\|
\end{aligned}$$

Das würde bedeuten, daß

$$\lim_n \|A^* T_2^{-x} h_n^x - \tilde{e}_\gamma\|_X < \lim_{n\to\infty} \|A^* g_n^0 - \tilde{e}_\gamma\|_X = \min_{g\in Y} \|A^* g - \tilde{e}_\gamma\|$$

ist, was einen Widerspruch ergibt.

□

Wir wollen uns zum Ende dieses Abschnittes noch mit der Frage befassen, ob es einen Zusammenhang zwischen den entsprechenden Rekonstruktionskernen gibt, wenn zwei Operatoren A und B über eine stetige, lineare Abbildung U miteinander verknüpft sind. In der Tat ist diese Frage, unter bestimmten Voraussetzungen, positiv zu beantworten.

Lemma 2.1.7 *Seien Y, Z separable Hilberträume, $U \in \mathcal{L}(Y,Z)$ eine stetige, lineare Abbildung und $B = UA \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), Z)$. Weiter seien e_γ ein Mollifier mit $e_\gamma(x,\cdot) \in \mathsf{D}((A^*)^\dagger) \cap \mathsf{D}((B^*)^\dagger)$ und $\upsilon_\gamma(x)$ ein zu A gehörender Rekonstruktionskern für den Mollifier e_γ. Es gelten die drei folgenden Aussagen.*
a) Ist U^* invertierbar, so ist $\phi_\gamma(x) = (U^*)^{-1}\upsilon_\gamma(x)$ ein zu B gehörender Rekonstruktionskern für den Mollifier e_γ.
b) Gilt $U^*U = I$, so ist $\phi_\gamma(x) = U\upsilon_\gamma(x)$ ein zu B gehörender Rekonstruktionskern für den Mollifier e_γ.
c) Ist $\upsilon_\gamma(x) \in \mathsf{D}((U^*)^\dagger)$, so gilt für die Lösung $\beta_\gamma(x)$ von $UU^*\beta_\gamma(x) = U\upsilon_\gamma(x)$

$$\|BB^*\beta_\gamma(x) - Be_\gamma(x,\cdot)\|_Z \preceq \|U^*\beta_\gamma(x) - \upsilon_\gamma(x)\|_Y \,.$$

BEWEIS: Wir lassen den Index γ der Übersicht halber weg. Offensichtlich gilt die Äquivalenz

$$BB^*\phi(x) = Be(x,\cdot) \Longleftrightarrow UAA^*U^*\phi(x) = UAe(x,\cdot)\,.$$

Eine Lösung der Gleichung $U^*\phi(x) = \upsilon(x)$ ist demnach ein Rekonstruktionskern für B. Daraus ergeben sich die Aussagen a) und b).
Zu c): Es gilt

$$\|BB^*\beta(x) - Be(x)\|_Z \leq \|UAA^*\|_{Y\to Z}\|U^*\beta(x) - \upsilon(x)\|_Y\,. \tag{2.7}$$

Daraus ergibt sich c) und das Lemma ist vollständig bewiesen.

□

Bemerkung: Es gibt Fälle, in denen die Normalgleichung (2.4) nicht explizit lösbar ist. Das vorangegangene Lemma stellt dann ein nützliches Werkzeug dar zur Bestimmung von Rekonstruktionskernen bei Problemen, die stetig voneinander abhängen, wobei man von einem Problem schon einen Kern explizit kennt. Sind die Voraussetzungen zu den Aussagen a) und b) nicht erfüllt, so bietet Teil c) die Möglichkeit zumindest noch eine Approximation an den Rekonstruktionskern zu errechnen. Die Funktion $\beta(x)$ minimiert den Defekt $\|U^*\phi(x) - \upsilon(x)\|_Y$, so daß die rechte Seite in Aussage c) betragsmäßig klein ist.

Beispiel: *Das limited-angle-Problem*
Bekanntermaßen beschreibt die Radon-Transformation $\mathcal{R} : L^2(\Omega^2) \to L^2(Z)$, $Z = S^1 \times [-1,1]$ das mathematische Modell der 2D Computer-Tomographie, siehe LOUIS [19], NATTERER [25] u.a. Seien $\delta < \pi/2$, $Z_\delta = \{(\omega(\varphi), s) \,|\, s \in [-1,1],\ \varphi \in [-\delta,\delta]\}$ und der Operator $\Lambda_\delta : L^2(Z) \to L^2(Z_\delta)$ definiert durch

$$\Lambda_\delta g = g_{|Z_\delta}\,.$$

Dann ist der Operator $\mathcal{R}_\delta = \Lambda_\delta\mathcal{R} : L^2(\Omega^2) \to L^2(Z_\delta)$ das mathematische Modell des limited-angle Problems. Offenbar ist der adjungierte Operator $\Lambda_\delta^* : L^2(Z_\delta) \to L^2(Z)$ gegeben durch

$$\Lambda_\delta^* h(z) = \begin{cases} h(z)\,, & \text{für } z \in Z_\delta\,, \\ 0\,, & \text{für } z \in Z\backslash Z_\delta\,. \end{cases}$$

Ist $\upsilon(x)$ ein zu $\mathcal{R}$ gehörender Rekonstruktionskern, so ist die Gleichung $\Lambda_\delta^*\beta(x) = \upsilon(x)$ nicht lösbar. Man kann jedoch leicht eine Lösung von

$$\Lambda_\delta\Lambda_\delta^*\beta(x) = \Lambda_\delta\upsilon(x)$$

angeben, nämlich

$$\beta(x) = \Lambda_\delta\upsilon(x) = \upsilon(x)_{|Z_\delta}\,.$$

Für die in (2.7) auftretende Konstante gilt

$$\|U\,AA^*\| = \|\Lambda_\delta\,\mathcal{R}\mathcal{R}^*\| \leq \|\mathcal{R}\|^2\,.$$

Man beachte, daß $\beta(x)$ **kein** Rekonstruktionskern für $\mathcal{R}_\delta$ ist, sondern lediglich eine Approximation an einen solchen nach Lemma 2.1.7. Den exakten Kern kann man mit Hilfe der Singulärwertzerlegung von $\mathcal{R}_\delta$ ausdrücken, siehe DIETZ [9].

In der Praxis werden wir die Funktion f nur an endlich vielen Punkten rekonstruieren wollen. Es sei daher $e^i_\gamma(y) = e_\gamma(x_i, y)$ mit $x_i \in \Omega$ für $i = 1, \ldots, m$. Durch Lösen der Normalgleichung (2.1) sind mit den Mollifiern e^i_γ Rekonstruktionskerne v^i_γ verbunden, und die approximative Inverse hat wieder die anfangs eingeführte Form

$$\begin{aligned} S_m : Y &\to \mathbb{C}^m\,, \\ (S_m g)_i &= \langle g, v^i_\gamma \rangle_Y\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,. \end{aligned}$$

2.2 Der diskrete Fall

Wir betrachten wieder einen linearen, stetigen Operator $A : L^2(\Omega) \to Y$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ ist und Y ein separabler Hilbertraum. Zusätzlich sei A injektiv. Im Falle, daß A nicht injektiv ist, schränken wir den Operator auf $\mathsf{N}(A)^\perp$ ein und bezeichnen die Einschränkung wieder mit A. Die Elemente aus $\mathsf{N}(A)$ tragen zu den gemessenen Daten g nichts bei.

Bei Anwendungen stehen uns nur endlich viele Daten zur Verfügung. Wir definieren daher einen zu A gehörenden diskreten Operator

$$A_n : L^2(\Omega) \to \mathbb{C}^n$$

durch

$$(A_n f)_i = (\Psi_n A f)_i = \langle Af, \psi_{n,i} \rangle_{Y \times Y^*}\,. \tag{2.8}$$

Dabei unterscheiden wir die zwei Fälle $\psi_{n,i} \in Y$ und $\psi_{n,i} \in Y_1^*$ für einen dichten Teilraum $Y_1 \subset Y$. Der erste Fall bedeutet, daß die diskreten Daten Momente der kontinuierlichen Daten sind. In diesem Fall können wir unter gewissen Voraussetzungen an die $\psi_{n,i}$ eine Fehlerabschätzung der approximativen Inversen in der L^2-Norm beweisen. Praktische Anwendung findet diese Situation in der 2D–Computer–Tomographie nach dem Ansatz von LOUIS, SCH. [23]. Hier werden die Punktauswertungen der Daten durch eine Summe von singulären Funktionen der Radon–Transformation approximiert. Darüberhinaus zeigen wir noch, wie man das Verfahren von BACKUS-GILBERT als approximative Inverse auffassen kann.

Im zweiten Fall haben wir für $\psi_{n,i}$ speziell die Punktauswertung im Auge, die oft nur auf dichten Teilräumen von Y stetig ist. Zum Beispiel ist sie nicht stetig auf $L^2(\Omega)$, wohl aber auf $H^\alpha(\Omega)$ für $\alpha > d/2$. Wir folgen in diesem Abschnitt der Arbeit [28] von RIEDER, SCH., die einen Zusammenhang zwischen Rekonstruktionskernen des kontinuierlichen und solchen des diskreten Problems herstellt. Wir erhalten Konvergenz der entsprechenden approximativen Inversen, aber nur noch in einem schwachen Sinne.

2.2.1 Der Fall $\psi_{n,i} \in Y$

Wir identifizieren Y^* mit Y, das duale Paar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y \times Y^*}$ in (2.8) ist dann gerade das Skalarprodukt auf Y. Der diskrete Operator A_n hat die Form

$$\begin{aligned} A_n : L^2(\Omega) &\to \mathbb{C}^n\,, \\ (A_n f)_i &= (\Psi_n A f)_i = \langle Af, \psi_{n,i} \rangle_Y = \int_\Omega f(x)\, A^* \psi_{n,i}(x)\, dx\,, \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, n$.
Sei $e_\gamma(x, \cdot) \in \mathsf{D}((A_n^*)^\dagger)$ für $x \in \Omega$ ein Mollifier. Die approximative Inverse $f_{n,\gamma}$ des Problems $(A_n, L^2(\Omega), \mathbb{C}^n)$ sieht dann folgendermaßen aus:

$$f_{n,\gamma}(x) := \mathcal{S}_n g_n(x) = \langle g_n, v_\gamma^n(x) \rangle_{\mathbb{C}^n}\,.$$

Dabei ist $g_n = \Psi_n A f$ und der Rekonstruktionskern $v_\gamma^n(x)$ ist bestimmt als Lösung der Normalengleichung

$$A_n A_n^* v_\gamma^n(x) = A_n e_\gamma(x, \cdot)\,,$$

wobei der adjungierte Operator $A_n^* : \mathbb{C}^n \to L^2(\Omega)$ die Form

$$A_n^* v = \sum_{i=1}^n \overline{v_i}\, A^* \psi_{n,i}$$

hat.
Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, eine Fehlerabschätzung für die $f_{n,\gamma}$ anzugeben und das Verhalten für $\gamma \searrow 0$ und $n \to \infty$ zu untersuchen. Es ist klar, daß die Folge $\{\Psi_n\}_n$ nicht beliebig gewählt werden kann, wir stellen vielmehr zwei Forderungen, die für unseren Konvergenzbeweis nötig sind.
Die Folge der Ψ_n sei so angeordnet, daß es zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n > n_0$ gibt mit

$$\{\psi_{n_0,i} \,|\, i = 1, \ldots, n_0\} \subset \{\psi_{n,i} \,|\, i = 1, \ldots, n\}\,. \tag{2.9}$$

Mit der Beziehung (2.9) wird eine bestimmte Struktur in der Anordnung der Ψ_n gefordert. Die zweite Forderung ist topologischer Natur:

$$\overline{\operatorname{span}}\,\{A^* \psi_{n,i} \,|\, n \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n\} = L^2(\Omega)\,. \tag{2.10}$$

Die lineare Hülle der Folge $\{A^* \psi_{n,i}\}_{n,i}$ soll dicht in $L^2(\Omega)$ sein. Das schließt unter anderem aus, daß die Folge der Ψ_n konstant ist. Das nachfolgende Lemma liefert eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Bedingung (2.10) erfüllt ist.

Lemma 2.2.1 *Ist die Menge $\{\psi_{n,i} \,|\, n \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n\}$ dicht in Y, so ist die Bedingung (2.10) erfüllt.*

Bemerkung: Eine abzählbare dichte Teilmenge in Y existiert stets, da Y als separabel vorausgesetzt war. Demnach gibt es immer mindestens eine Folge, die den Bedingungen (2.9) und (2.10) genügt.

Beweis des Lemmas: Es sei $\langle A^*\psi_{n,i}, f\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ für alle $n \in I\!N$ und $i = 1,\dots,n$. Dann folgt aus der Äquivalenz

$$\langle A^*\psi_{n,i}, f\rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \langle \psi_{n,i}, Af\rangle_Y = 0$$

und der Dichtheit der $\psi_{n,i}$ in Y, daß $Af = 0$ ist. Aus der Injektivität von A folgt dann $f = 0$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

$\square$

Zu der Folge Ψ_n definieren wir endlich dimensionale Teilräume V_n von $L^2(\Omega)$ durch

$$V_n := \text{ span } \{A^*\psi_{n,i} \,|\, i = 1,\dots,n\} \subset L^2(\Omega)\,.$$

Aus der Bedingung (2.10) folgt, daß

$$\overline{\bigcup_{n\in I\!N} V_n} = L^2(\Omega)$$

gilt. Die Bedingung (2.9) besagt zudem, daß es eine streng monoton wachsende Teilfolge n_k gibt, mit $V_{n_k} \subset V_{n_{k+1}}$ und

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} V_{n_k}} = L^2(\Omega)\,.$$

Schließlich bezeichne noch

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_n^\gamma(x))^2 &= \|A^*\upsilon_\gamma^n(x) - e_\gamma(x,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \min_{u\in I\!R^n} \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n \overline{u_i}\, A^*\psi_{n,i}(y) - e_\gamma(x,y) \right|^2 dy \\
&= \min_{\tilde{u}\in V_n} \int_\Omega |\tilde{u}(y) - e_\gamma(x,y)|^2\, dy
\end{aligned}$$

den Approximationsfehler $\|A_n^*\upsilon_\gamma^n(x) - e_\gamma(x,\cdot)\|^2$. Die Funktion ε_n^γ ist stetig in x, falls e_γ stetig ist, und aus den Bedingungen (2.9) und (2.10) folgt die Existenz einer Teilfolge n_k, so daß

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{n_k}^\gamma(x) = 0\,, \text{ für alle } x \in \Omega \tag{2.11}$$

ist. Folglich ist auch

$$\lim_{k\to\infty} \|\varepsilon_{n_k}^\gamma\|_\infty = 0\,, \tag{2.12}$$

denn sonst gäbe es eine Teilmenge $U \subset \Omega$ mit von Null verschiedenem Lebesgue-Maß, so daß

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{n_k}^\gamma(x) \neq 0\,, \text{ für alle } x \in U$$

gilt. Dies ist aber ein Widerspruch zu Gleichung (2.11).
Das nachfolgende Lemma charakterisiert die Approximationseigenschaft von $f_{n,\gamma}$.

Lemma 2.2.2 *Seien $e_\gamma \in \mathsf{D}((A_n^*)^\dagger)$ ein Mollifier, $f \in L^2(\Omega)$ und $g_n = A_n f$ für alle $n \in I\!N$. Mit den vorangegangenen Bezeichnungen gilt: Es gibt ein $\varrho^\gamma \in L^2(\Omega)$ mit*

$$\|f_{n,\gamma} - f\|_{L^2(\Omega)} \preceq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varepsilon_n^\gamma\|_\infty + \|\varrho^\gamma\|_{L^2(\Omega)}$$

und

$$\lim_{\gamma \searrow 0} \|\varrho^\gamma\|_{L^2(\Omega)} = 0\,.$$

Beweis: Es ist $f_{n,\gamma} \in L^2(\Omega)$ nach Lemma 2.1.3. Wir haben

$$\begin{aligned}
|f_{n,\gamma}(x) - f(x)| &= \left|\sum_{i=1}^n (g_n)_i\, \overline{(v_\gamma^n)_i}(x) - f(x)\right| \\
&= \left| \int_\Omega f(y) \left(\sum_{i=1}^n A^*\psi_{n,i}(y)\, \overline{(v_\gamma^n)_i}(x) - e_\gamma(x,y)\right) dy \right. \\
&\quad \left. - \int_\Omega (f(x) - f(y))\, e_\gamma(x,y)\, dy \right| \\
&\le \left| \int_\Omega f(y) \left(\sum_{i=1}^n A^*\psi_{n,i}(y)\, \overline{(v_\gamma^n)_i}(x) - e_\gamma(x,y)\right) dy \right| \\
&\quad + \left| \int_\Omega (f(x) - f(y))\, e_\gamma(x,y)\, dy \right| \\
&\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\, \varepsilon_n^\gamma(x) + \left| \int_\Omega (f(x) - f(y))\, e_\gamma(x,y)\, dy \right|\,.
\end{aligned}$$

Indem wir mit ϱ^γ die Funktion

$$\varrho^\gamma(x) = \int_\Omega (f(x) - f(y))\, e_\gamma(x,y)\, dy$$

bezeichnen, folgt der erste Teil der Behauptung durch Quadrieren und Integration der obigen Ungleichung.
Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich aus den Voraussetzungen $f \in L^2(\Omega)$ und der Tatsache, daß e_γ ein Mollifier ist.

□

Bemerkung: Der Fehler $\|f_{n,\gamma} - f\|$ läßt sich also in zwei Terme $\|\varepsilon_n^\gamma\|$ und $\|\varrho^\gamma\|$ aufspalten. Das Verhalten dieser beiden Terme für $\gamma \searrow 0$ ist von gegensätzlicher Natur. Während ϱ^γ wie gesehen gegen 0 konvergiert, gilt im allgemeinen für festes n

$$\lim_{\gamma \searrow 0} \|\varepsilon_n^\gamma\|_\infty = \infty\,,$$

da e_γ als Approximation der Delta-Distribution für $\gamma \searrow 0$ immer steiler wird. Ein Ausbalancieren beider Fehler ist daher wichtig für eine geschickte Wahl des Parameters γ. Die Funktion ϱ^γ gibt an, wie genau diese Approximationseigenschaft im L^2-Sinne ist, während die Funktion ε_n^γ angibt, wie gut e_γ in V_n angenähert werden kann.

Satz 2.2.3 *Sei $e_\gamma \in \mathsf{D}((A_n^*)^\dagger)$ ein Mollifier, $f \in L^2(\Omega)$ und $A_n f = g_n$. Die approximative Inverse $f_{n,\gamma} \in L^2(\Omega)$ sei definiert durch*

$$f_{n,\gamma}(x) = \langle g_n, \upsilon_\gamma^n(x)\rangle_{\mathbb{C}^n} .$$

Dann gibt es zu jedem beliebigen $\delta > 0$ ein $\gamma_0(\delta) > 0$ mit

$$\inf_{\gamma\in(0,\infty)} \|f_{n,\gamma} - f\|_{L^2(\Omega)} \preceq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varepsilon_n^{\gamma_0}\|_\infty + \delta .$$

Daraus ergibt sich

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\inf_{\gamma\in(0,\infty)} \|f_{n,\gamma} - f\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0 .$$

Beweis: Sei $\delta > 0$ beliebig. Nach Lemma 2.2.2 existiert ein $\gamma_0 > 0$ mit $\|\varrho^{\gamma_0}\|_{L^2(\Omega)} < \delta$. Daraus ergibt sich

$$\|f_{n,\gamma_0} - f\|_{L^2(\Omega)} \preceq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varepsilon_n^{\gamma_0}\|_\infty + \delta$$

und somit durch Übergang zum Infimum der erste Teil der Behauptung.
Mit Hilfe der Gleichung (2.12) hat man

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\inf_{\gamma\in(0,\infty)} \|f_{n,\gamma} - f\|_{L^2(\Omega)} \right) \preceq \delta .$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt auch der zweite Teil der Behauptung.

□

Den zweiten Teil des obigen Satzes kann man auch anders formulieren.

Korollar 2.2.4 *Es gibt eine Teilfolge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\inf_{\gamma\in(0,\infty)} \|f_{n_k,\gamma} - f\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0 .$$

Bemerkung: Es sei darauf hingewiesen, daß wir keinerlei Glattheitsbedingungen an die Lösung f stellen, es muß lediglich $f \in L^2(\Omega)$ sein.
Der optimale Regularisierungsparameter γ_{opt} für festes n ist derjenige, bei dem das Infimum

$$\inf_{\gamma\in(0,\infty)} \|f_{n,\gamma} - f\|_{L^2(\Omega)}$$

angenommen wird. Aus dem vorne beschriebenen Verhalten der Funktionen ε_n^γ und ϱ^γ folgt nämlich, daß $\gamma_{opt} \in (0,\infty)$ sein muß.
Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang eine Arbeit von Louis, Maass [21], in der die Autoren einen Algorithmus für das Momentenproblem entwerfen, die sogenannte s-Methode. Sie beweisen deren Konvergenz für den Fall, daß die Menge der Daten n gegen unendlich strebt. Dabei werden Glattheitsbedingungen sowohl an die Lösung f, als auch an die Momente ψ_i gestellt.

Beispiele: Die untersuchte Situation $\psi_{n,i} \in Y$ findet praktische Anwendung in der *2D–Computer–Tomographie*. Das mathematische Modell ist die Radon–Transformation. Wir bezeichnen mit $\mathcal{R}$ die zweidimensionale Radon–Transformation zwischen den Räumen $L^2(\Omega^2)$ und $L^2(Z, w^{-1})$, wobei $Z = S^1 \times (-1, 1)$ ist und $w(s) = \sqrt{1 - s^2}$ ein Gewicht. Das Problem der 2D–Computer–Tomographie sieht dann folgendermaßen aus: Suche ein f mit

$$(\mathcal{R}_n f)_{jl} := \mathcal{R}f(\omega_j, s_l) = (g_n)_{jl}\,.$$

Dabei sind $\omega_j \in S^1$, $j = 1, \ldots, p$, $s_l \in (-1, 1)$, $l = 1, \ldots, q$, $n = pq$ vorgegebene Meßpunkte und $g_n \in \mathbb{C}^n$ gegebene Daten. Da $\mathcal{R}$ nur um den Faktor $1/2$ glättet, siehe Natterer [25], ist $\mathcal{R}_n$ nur stetig als Abbildung zwischen $H_0^\kappa(\Omega^2)$ und $\mathbb{R}^n$ mit $\kappa > 1/2$. Zu jedem Punkt $(\omega, s) \in Z$ kann man eine Folge $\{f_k\} \subset H_0^\kappa(\Omega^2)$ angeben mit $\|f_k\|_{L^2(\Omega^2)} \leq 1$, so daß $|\mathcal{R}f_k(\omega, s)| \to \infty$ gilt für $k \to \infty$, siehe Rieder, Sch. [28]. Für die Abbildung $\mathcal{R}_n : H_0^\kappa(\Omega^2) \subset L^2(\Omega^2) \to \mathbb{C}^n$ gilt demnach

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\mathcal{R}_n^*) &= \{y \in \mathbb{C}^n \mid f \mapsto \langle \mathcal{R}_n f, y\rangle_{\mathbb{C}^n} \text{ ist stetig in } L^2(\Omega^2)\ \forall f \in H_0^\kappa(\Omega^2)\} \\ &= \{0\}\,. \end{aligned}$$

Im Bezug auf Definitionsbereiche adjungierter Operatoren von unbeschränkten Abbildungen sei z.B. auf Rudin [29] verwiesen. $\mathcal{R}_n^* : \mathbb{C}^n \to L^2(\Omega^2)$ existiert demnach nicht. Wir wollen zwei Ansätze zur Lösung des Tomographie–Problems geben, auf die sich die vorangegangenen Ergebnisse anwenden lassen. In beiden Fällen wird versucht, die Verwendung von $\mathcal{R}_n^*$ zu umgehen.

1.) Ansatz von Louis, Sch. [23]

In [18] hat Louis das singuläre System $\{\mathrm{v}_{ml}, u_{ml}, \sigma_{ml}\}_{ml}$ der Radon–Transformation $\mathcal{R} : L^2(\Omega^2) \to L^2(Z, w^{-1})$ angegeben. Mit Hilfe dieses Systems führen wir einen neuen Operator $\mathcal{R}_{n,M}$ ein. Es sei

$$(\mathcal{R}_{n,M} f)_{jl} = (\Psi_n^M \mathcal{R}f)_{jl} = \langle \mathcal{R}f, \psi_{n,jl}^M\rangle_{L^2(Z,w^{-1})}\,,$$

wobei $\psi_{n,jl}^M \in L^2(Z, w^{-1})$ gegeben ist durch

$$\psi_{n,jl}^M = \sum_{m=0}^{M} \sum_{\substack{l=-m \\ l+m \text{ gerade}}}^{m} u_{ml}(\omega_j, s_l)\, u_{ml}\,.$$

Offenbar gilt für $v \in \mathbb{C}^n$

$$\mathcal{R}_{n,M}^* v = \sum_{j,l} \overline{v_{jl}}\, \mathcal{R}^* \psi_{n,jl}^M\,.$$

Das folgende Lemma zeigt, daß $\mathcal{R}_{n,M}^*$ in einem gewissen Sinne $\mathcal{R}_n^*$ ersetzen kann.

Lemma 2.2.5 *Für alle $v \in \mathbb{C}^n$ und alle singulären Funktionen v_{ml} gilt*

$$\langle \mathcal{R}_{n,M}^* v, \mathrm{v}_{ml}\rangle_{L^2(\Omega^2)} \to \langle v, \mathcal{R}_n \mathrm{v}_{ml}\rangle_{\mathbb{C}^n} \quad \textit{für } M \to \infty\,.$$

BEWEIS: Seien $v \in \mathbb{C}^n$ beliebig, v_{ml} eine beliebige singuläre Funktion und M so groß, daß $M \geq m$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}_{n,M}^* v, \mathrm{v}_{ml} \rangle_{L^2(\Omega^2)} &= \langle v, \mathcal{R}_{n,M} \mathrm{v}_{ml} \rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &= \sum_{j,l} v_{jl}\, \overline{\sigma_m}\, \overline{u_{ml}}(\omega_j, s_l) \\ &= \langle v, \mathcal{R}_n \mathrm{v}_{ml} \rangle_{\mathbb{C}^n} .\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

□

Grob gesagt approximiert $\psi_{n,jl}^M$ die Punktauswertung in (ω_j, s_l) durch eine Summe von singulären Funktionen. Man erhält einen Rekonstruktionskern für $\mathcal{R}_{n,M}$, indem man die Normalgleichung

$$\mathcal{R}_{n,M} \mathcal{R}_{n,M}^* v_{\gamma,M}^n(x) = \mathcal{R}_{n,M} e_\gamma(x, \cdot)$$

löst.
Diesen Kern verwendet man dann als Rekonstruktionskern für $\mathcal{R}_n$. Für nähere Untersuchungen dieses Ansatzes sei auf LOUIS, SCH. [23] verwiesen.

2.) Ansatz von NATTERER [25, Kap. V.5]
Bei der Lösung der Radonschen Integralgleichung mittels direkter algebraischer Methoden behilft sich NATTERER durch Einführung einer Gewichtsfunktion, deren Träger nicht mehr nur eine Gerade, sondern zum Beispiel ein Streifen ist. Sei

$$S_{jl} = \{x \in I\!R^2 : |x^\top \omega_j - s_l| \leq d/2\} ,$$

$d > 0$, ein Streifen der Breite d, und

$$\chi_l(s) = \begin{cases} 1 & , \quad |s - s_l| \leq d/2 , \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren für $f \in L^2(\Omega^2)$

$$(\widetilde{\mathcal{R}}_n f)_{jl} = \langle \mathcal{R}_{\omega_j} f, \chi_l \rangle_{L^2([-1,1])} = \int_{S_{jl}} f(x)\, dx .$$

Es ist dann

$$\widetilde{\mathcal{R}}_n^* v(x) = \sum_{j,l} v_{jl}\, \mathcal{R}_{\omega_j}^* \chi_{jl}(x) = \sum_{j,l} v_{jl}\, \chi_l(x^\top \omega_j) .$$

Man löst analog zum vorhergehenden Ansatz die Normalgleichung

$$\widetilde{\mathcal{R}}_n \widetilde{\mathcal{R}}_n^* v_\gamma^n(x) = \widetilde{\mathcal{R}}_n e_\gamma(x, \cdot) ,$$

und verwende den Kern $v_\gamma^n(x)$ als Rekonstruktionskern für $\mathcal{R}_n$.
Abschließend wollen wir noch zeigen, wie sich das *Verfahren von Backus-Gilbert* formal als approximative Inverse schreiben läßt. 1967 entwickelten BACKUS und GILBERT [4]

dieses Verfahren, um ein Momentenproblem in der Geophysik zu lösen. Wir betrachten dazu das Problem $(A_n, L^2(\Omega), \mathbb{C}^n)$ mit

$$(A_n f)_i = \int_\Omega f(x)\, \psi_i(x)\, dx = (g_n)_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Offenbar hat der adjungierte Operator A_n^* die Darstellung

$$A_n^* v = \sum_{i=1}^n \overline{v_i}\, \psi_i\,. \tag{2.13}$$

Die Idee des Verfahrens ist, für jedes $x \in \Omega$ einen Vektor $v(x) \in \mathbb{C}^n$ zu bestimmen, so daß $\sum v_i(x)\psi_i(y)$ die Delta-Distribution $\delta(|x-y|)$ approximiert. Um $v(x)$ zu bestimmen, minimiert man für jedes x das Funktional

$$S_x(v) = 3\left(\frac{\omega_d}{d}\right)^2 \int_\Omega |x-y|^{2k} \left|\sum_{j=1}^n v_j(x)\, \psi_j(y)\right|^2 dy$$

unter der Bedingung

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n v_j(x)\, \psi_j(y)\, dy = 1\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega\,. \tag{2.14}$$

Dabei bedeutet ω_d das Maß der Einheitssphäre S^{d-1}. Bezeichnen wir mit $v_k^{\min}(x)$ den minimierenden Vektor von S_x, so ist die Backus–Gilbert–Lösung f_{BG} definiert durch

$$f_{\mathrm{BG}}(x) = \sum_{j=1}^n (g_n)_j\, v_{k,j}^{\min}(x)\,.$$

Daß f_{BG} die exakte Lösung f approximiert, folgt aus der Tatsache, daß

$$f_{\mathrm{BG}}(x) = \int_\Omega f(y) \sum_{j=1}^n v_{k,j}^{\min}(x)\, \psi_j(y)\, dy \approx f(x)$$

gilt. Das folgende Lemma zeigt, wie man durch die spezielle Wahl eines Mollifiers e_γ als approximative Inverse des Problems $(A_n, L^2(\Omega), \mathbb{C}^n)$ die Backus–Gilbert–Lösung f_{BG} erhält.

Lemma 2.2.6 *Definieren wir für $x, y \in \Omega$*

$$e_\gamma(x,y) = \sum_{j=1}^n v_{k,j}^{\min}(x)\, \psi_j(y)$$

mit $\gamma = 1/k$, so gilt

$$f_{\mathrm{BG}} = f_{n,\gamma}\,.$$

BEWEIS: Offenbar ist für alle $e_\gamma(x,\cdot) \in \mathsf{R}(A_n^*) \subset \mathsf{D}((A_n^*)^\dagger)$, und mit Gleichung (2.14) folgt

$$\int_\Omega e_\gamma(x,y)\,dy = 1\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega\,.$$

Leider gilt im allgemeinen für festes n nicht $\lim_{\gamma\searrow 0} \int f(x) e_\gamma(x,y)\,dx = f(y)$ fast überall, aber dennoch approximiert nach den vorangegangenen Betrachtungen $e_\gamma(x,y)$ die Delta-Distribution $\delta(|x-y|)$. Aus der Darstellung (2.13) von A_n^* folgt, daß die Gleichung

$$A_n^* v_\gamma^n(x) = e_\gamma(x,\cdot) = \sum_{j=1}^n v_{k,j}^{\min}(x)\,\psi_j$$

trivialerweise die Lösung $v_\gamma^n(x) = v_k^{\min}(x)$ hat. Wegen

$$f_{n,\gamma}(x) = \langle g_n, v_\gamma^n(x)\rangle_{\mathbb{C}^n}$$

folgt die Behauptung.

□

KIRSCH ET AL. [15] zeigen unter bestimmten Glattheitsbedingungen an die Lösung f die Konvergenz von f_{BG} für $n \to \infty$ gegen f.

Bemerkung: Der Unterschied zwischen dem Verfahren von Backus–Gilbert und der schon erwähnten s-Methode von LOUIS, MAASS [21] besteht hauptsächlich in der Art und Weise wie die Delta-Distribution approximiert wird. Bei der s-Methode geschieht dies durch Minimierung einer H^s-Norm mit $s < -d/2$.

2.2.2 Der Fall $\psi_{n,i} \in Y_1^*$

Die Sätze und Untersuchungen in diesem Abschnitt sind einer gemeinsamen Arbeit [28] von RIEDER, SCH. entnommen. Wir wollen hier die für unser Problem wesentlichen Ergebnisse dieses Papers darstellen.

Wieder sei $A : X \to Y$ ein injektiver, stetiger, linearer Operator zwischen zwei Hilberträumen. Weiterhin seien $X_1 \hookrightarrow X$ und $Y_1 \hookrightarrow Y$ dichte Teilräume mit stetigen Inklusionen und es gelte

$$A : X_1 \to Y_1$$

ist ebenfalls eine stetige Abbildung. Der diskrete Operator A_n wird durch Funktionale $\Psi_n = \{\psi_{n,i}\}_{i=1,\ldots,n} : Y_1 \to \mathbb{C}^n$ definiert mittels

$$\begin{aligned} A_n : X_1 &\to \mathbb{C}^n\,, \\ (A_n f)_i &= \langle \psi_{n,i}, Af\rangle_{Y_1^*\times Y_1}\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{Y_1^*\times Y_1}$ ein duales Paar auf $Y_1^* \times Y_1$.

Als Beispiel für die Funktionale $\psi_{n,i}$ kann man Punktauswertungen betrachten. Der Unterraum X_1 wäre in diesem Fall ein Sobolev-Raum von hinreichend großer Ordnung. Seien weiterhin m Mollifier $e^i \in X$ gegeben. Wir lassen den Regularisierungsparameter

γ der Übersicht halber weg, da wir in diesem Abschnitt das Verhalten für $\gamma \searrow 0$ nicht untersuchen wollen. Ferner schreiben wir lediglich e, falls wir nur einen einzelnen Mollifier betrachten. Bei der Definition der zu den e^i gehörenden Rekonstruktionskerne ist zu beachten, daß

$$\mathsf{D}(A_n^*) = \{y \in \mathbb{C}^n \mid x \mapsto \langle A_n x, y\rangle_{\mathbb{C}^n} \text{ ist stetig in } X \;\forall x \in X_1\}$$

im allgemeinen ein echter Teilraum von $\mathbb{C}^n$ ist, und schlimmstenfalls nur die 0 enthält. Um die Kerne υ_n^i als Lösung einer Normalgleichung der Form (2.1) zu beschreiben, müssen wir zu dem Spezialfall übergehen, daß

$$A : X \to Y_1$$

ein stetiger Operator ist. (Dies würde automatisch die Stetigkeit von $A : X_1 \to Y_1$ implizieren.) Beispiele für solche Abbildungen sind Integraloperatoren, die hinreichend glätten. In dieser Situation werden die Rekonstruktionskerne υ_n^i durch Minimierung der Norm

$$\|A_n^* \upsilon_n^i - e^i\|_X$$

bestimmt, äquivalent dazu ist das Lösen der Normalgleichung

$$A_n A_n^* \upsilon_n^i = A_n e^i\,, \tag{2.15}$$

wobei $e^i \in \mathsf{D}((A_n^*)^\dagger)$ vorausgesetzt ist. Die *diskrete approximative Inverse* ist dann definiert durch ($Y = \mathbb{C}^n$)

$$\begin{aligned} S_{n,m} : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^m \\ (S_{n,m} g_n)_i &= \langle g_n, \upsilon_n^i\rangle_{\mathbb{C}^n}\,, \quad i = 1, \ldots, m\,. \end{aligned}$$

Die Radon–Transformation erfüllt diese Bedingung nicht. Damit die Punktauswertungen Ψ_n stetig definiert sind, muß $Y_1 = H_{\mathrm{p}}^{1+\kappa}$ mit $\kappa > 0$ sein. Die Radon–Transformation glättet jedoch nur um den Faktor 1/2, weshalb $A = \mathcal{R} : X = L^2(\Omega^2) \to Y_1$ unbeschränkt ist. Ist $A : X \to Y_1$ stetig, so ist die Darstellung der Matrix $A_n A_n^*$ aus Gleichung (2.15) zwar im allgemeinen bekannt, jedoch ist diese Matrix vollbesetzt und schlecht konditioniert.

Diese Betrachtungen motivieren eine andere Vorgehensweise. Man errechnet einen Rekonstruktionskern υ für das kontinuierliche Problem (A, X, Y), und wendet auf υ den Operator Ψ_n an. Voraussetzung ist natürlich, daß $\upsilon \in Y_1$ ist. Zum ersten Mal angewendet wurde diese Idee von Dietz [9] in der Computer–Tomographie. Verallgemeinert wurde sie in der Arbeit [28] von Rieder, Sch., worin auch untersucht wird, inwiefern $\Psi_n \upsilon$ einen Rekonstruktionskern υ_n für A_n approximiert. Dabei wurde dargelegt, wie sich der Fehler in der euklidischen Norm für $n \to \infty$ verhält. Wir werden diese Konvergenzuntersuchungen angeben. Wie man einen Rekonstruktionskern für das kontinuierliche Problem zumindest approximativ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung im Falle kompakter Operatoren errechnet, wird am Ende des Abschnittes 2.2.2.2 noch

erläutert.
Um diese Betrachtungen durchzuführen, transformieren wir die diskrete Operatorgleichung $A_n f = g_n$ in eine dazu äquivalente Gleichung, indem wir endlichdimensionale Unterräume $V_n \subset Y$ von Y einführen, die von einem Riesz-System aufgespannt werden. Genauer sei $V_n \subset V_{n+1}$, $V_n =$ span $\{\varphi_{n,k} \,|\, k = 1, \ldots, n\}$, wobei die $\varphi_{n,k}$ linear unabhängig seien und die folgende Abschätzung erfüllen:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \preceq \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \, \varphi_{n,k} \right\|_Y^2 \preceq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \,, \qquad \text{für alle } n \in I\!N \,. \tag{2.16}$$

Bemerkung: Die Räume V_n sind nicht mit denjenigen aus dem vorigen Abschnitt zu verwechseln, die von den $\psi_{n,i}$ aufgespannt wurden.
Die zu dem Riesz - System $\{\varphi_{n,k}\}$ gehörende Gram'sche Matrix sei mit G_n bezeichnet. Sie ist definiert durch $(G_n)_{i,j} = \langle \varphi_{n,i}, \varphi_{n,j} \rangle_Y$. Die Transformation von $\mathbb{C}^n$ in V_n leistet der Operator $Q_n : \mathbb{C}^n \to V_n$, der erklärt ist durch

$$Q_n a := \sum_{k=1}^{n} a_k \, \varphi_{n,k} \,.$$

Aus der Abschätzung (2.16) folgt sofort

$$\|Q_n\|_{\mathbb{C}^n \to Y} = \|Q_n^*\|_{Y \to \mathbb{C}^n} \preceq 1 \,.$$

Die Hintereinanderausführung von Ψ_n und Q_n ergibt einen neuen Operator $\Pi_n : Y_1 \to V_n$:

$$\Pi_n v := Q_n \Psi_n v = \sum_{k=1}^{n} \langle \psi_{n,k}, v \rangle_{Y_1^* \times Y_1} \, \varphi_{n,k} \,.$$

Der Operator Π_n kann im Falle, daß Y ein Funktionenraum ist, als eine Art Interpolationsoperator betrachtet werden.
Auch dieses Mal stellen wir zwei Forderungen an die Folge der Ψ_n. Dies geschieht indirekt, indem wir annehmen, daß der Operator Π_n zwei Bedingungen erfüllen soll. Zum einen soll Π_n gleichmäßig beschränkt sein in n, also

$$\|\Pi_n\|_{Y_1 \to Y} \preceq 1 \,, \quad \text{für } n \to \infty \,. \tag{2.17}$$

Zum anderen sollen die Operatoren Π_n eine Approximationseigenschaft haben, in dem Sinne, daß es eine Folge $\{\rho_n\}_{n \in I\!N} \subset [0, 1)$ gibt, die monoton gegen 0 konvergiert und der Abschätzung

$$\|v - \Pi_n v\|_Y \preceq \rho_n \, \|v\|_{Y_1} \,, \quad \text{für alle } v \in Y_1 \text{ und } n \to \infty \tag{2.18}$$

genügt.
Indem wir auf beide Seiten der Gleichung $A_n f = g_n$ den Operator Q_n anwenden, erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$\tilde{A}_n f = \tilde{g}_n$$

mit $\tilde{A}_n = Q_n A_n : X \to V_n$ und $\tilde{g}_n = Q_n g_n$.
Für das weitere Vorgehen unterscheiden wir die beiden Fälle $e^i \in \mathsf{R}(A^*)$ und $e^i \notin \mathsf{R}(A^*)$. Für näheres Interesse sei auf Rieder, Sch. [28] verwiesen.

2.2.2.1 Der Spezialfall $e \in \mathsf{R}(A^*)$

Wir betrachten die schon erwähnte Situation, daß $A : X \to Y_1$ stetig ist. Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Aussagen gelten auch nur, falls A diese Stetigkeitsbedingung erfüllt.
Zunächst wollen wir zeigen, daß die Rekonstruktionskerne von A_n und $\tilde{A}_n$ in einer eineindeutigen Beziehung zueinander stehen.

Lemma 2.2.7 *Es sei $e \in \mathsf{D}((A_n^*)^\dagger) \cap \mathsf{D}((\tilde{A}_n^*)^\dagger)$ ein Mollifier. Ist $\tilde{\upsilon}_n$ ein Rekonstruktionskern zu $\tilde{A}_n$ für e, so ist $Q_n^*\tilde{\upsilon}_n$ einer zu A_n für e. Ist umgekehrt υ_n ein Rekonstruktionskern zu A_n für e, so ist $Q_n(G_n^\top)^{-1}\upsilon_n$ einer zu $\tilde{A}_n$ für e.*

Beweis: a.) Sei $\tilde{\upsilon}_n$ ein Rekonstruktionskern für $\tilde{A}_n$, d.h. $\tilde{\upsilon}_n$ erfüllt die Normalgleichung $\tilde{A}_n\tilde{A}_n^*\tilde{\upsilon}_n = \tilde{A}_n e$. Dazu äquivalent ist die Gleichung

$$\tilde{A}_n^*\tilde{\upsilon}_n = \mathcal{P}_n e\,,$$

wobei $\mathcal{P}_n : X \to X$ die orthogonale Projektion auf $\mathsf{N}(\tilde{A}_n)^\perp$ ist. Wegen der Injektivität von Q_n gilt $\mathsf{N}(\tilde{A}_n)^\perp = \mathsf{N}(A_n)^\perp$. Damit hat man aber schnell folgende Gleichheit

$$A_n^*Q_n^*\tilde{\upsilon}_n = \tilde{A}_n^*\tilde{\upsilon}_n = \mathcal{P}_n e\,.$$

Folglich ist $Q_n^*\tilde{\upsilon}_n$ eine Rekonstruktionskern für A_n.
b.) Sei umgekehrt υ_n ein Rekonstruktionskern für A_n, der die Normalgleichung (2.15) erfüllt. Eine einfache Rechnung zeigt, daß $Q_n^*Q_n = G_n^\top$ gilt. Daraus folgt

$$\tilde{A}_n^*Q_n(G_n^\top)^{-1}\upsilon_n = A_n^*Q_n^*Q_n(G_n^\top)^{-1}\upsilon_n = \mathcal{P}_n e\,,$$

womit das ganze Lemma bewiesen ist.

□

Wir sind nun in der Lage, den Fehler $G_n\Psi_n\upsilon - Q_n^*\tilde{\upsilon}_n$ für ein $\upsilon \in Y_1$ in der euklidischen Norm abzuschätzen. Dabei ist $\tilde{\upsilon}_n$ ein Rekonstruktionskern für $\tilde{A}_n$ zu dem Mollifier $e_n = \tilde{A}_n^*\upsilon$. Wie wir in Lemma 2.2.7 gesehen haben, ist $Q_n^*\tilde{\upsilon}_n$ ein Rekonstruktionskern für A_n, falls $\tilde{\upsilon}_n$ einer für $\tilde{A}_n$ ist. Man beachte, daß im Falle orthogonaler Basis-Funktionen $\varphi_{n,k}$ die Matrix G_n ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist, und in diesem Falle in der Tat der Fehler $\Psi_n\upsilon - \upsilon_n$, $\upsilon_n = Q_n^*\tilde{\upsilon}_n$, gemessen wird.

Satz 2.2.8 *Es sei $e_n = \tilde{A}_n^*\upsilon$ für ein $\upsilon \in Y_1$, $\tilde{\upsilon}_n \in \mathsf{N}(\tilde{A}_n^*)^\perp$ sei ein zu e_n gehörender Rekonstruktionskern für $\tilde{A}_n$. Dann ist $Q_n^*\tilde{\upsilon}_n$ ein zu e_n gehörender Rekonstruktionskern für A_n und es gilt*

$$\|G_n\Psi_n\upsilon - Q_n^*\tilde{\upsilon}_n\|_{\mathbb{C}^n} \preceq \rho_n\,\|\upsilon\|_{Y_1} + \inf_{y\in\mathsf{R}(\tilde{A}_n)} \|\upsilon - y\|_Y \tag{2.19}$$

für $n \to \infty$.

Der Beweis ist in RIEDER, SCH. [28] nachzulesen. Mit Hilfe weiterer Voraussetzungen an υ oder A_n kann man sogar noch mehr zeigen.

Korollar 2.2.9 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.2.8. Weiterhin sei enweder $\upsilon \in \mathsf{R}(A)$ oder die A_n seien alle surjektiv. Dann gilt*

$$\|G_n \Psi_n \upsilon - Q_n^* \tilde{\upsilon}_n\|_{\mathbb{C}^n} \preceq \rho_n \, \|\upsilon\|_{Y_1} \tag{2.20}$$

für $n \to \infty$.

BEWEIS: Sei $\upsilon \in \mathsf{R}(A)$, d.h. es existiert ein $z \in X$ mit $\upsilon = Az$. Wir erhalten (2.20) aus (2.19), der Approximationseigenschaft (2.18) und der folgenden Abschätzung:

$$\inf_{y \in \mathsf{R}(\tilde{A}_n)} \|\upsilon - y\|_Y \leq \|Az - \Pi_n Az\|_Y \preceq \rho_n \, \|Az\|_{Y_1} \, .$$

Sind andererseits alle A_n surjektiv, so gilt $\mathsf{R}(\tilde{A}_n) = V_n$. In dieser Situation erhalten wir die Behauptung aus (2.19) und der Ungleichung:

$$\inf_{y \in \mathsf{R}(\tilde{A}_n)} \|\upsilon - y\|_Y = \inf_{y \in V_n} \|\upsilon - y\|_Y \leq \|\upsilon - \Pi_n \upsilon\|_Y \preceq \rho_n \, \|\upsilon\|_{Y_1} \, .$$

□

Korollar 2.2.9 zeigt, daß $\Psi_n \upsilon$ eine sinnvolle Näherung an einen Rekonstruktionskern υ_n von A_n ist für den Mollifier $e_n = \tilde{A}_n^* \upsilon$. Seien m Mollifier e_n^i durch $e_n^i = \tilde{A}_n^* \upsilon^i$ gegeben, so motiviert Korollar 2.2.9 die Definition einer Abbildung $\Sigma_{n,m} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ analog zu $S_{n,m} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ durch

$$(\Sigma_{n,m} g)_i = \langle g, G_n \, \Psi_n \upsilon^i \rangle_{\mathbb{C}^n} \, , \quad i = 1, \ldots, m \, .$$

Der abschließende Satz dieses Abschnittes schätzt den Fehler $S_{n,m} A_n f - \Sigma_{n,m} A_n f$ in der Maximumnorm ab und bildet die Zusammenfassung der vorangegangenen Untersuchungen.

Satz 2.2.10 *Es gelten wiederum die Voraussetzungen von Satz 2.2.8. Weiterhin seien υ_n^i die zu den Mollifiern e_n^i gehörenden Rekonstruktionskerne für den Operator A_n, für $i = 1, \ldots, m$, und $e_n^i = \tilde{A}_n^* \upsilon^i$ mit $\upsilon^i \in Y_1$. Sind die υ^i alle aus $\mathsf{R}(A)$ oder die Operatoren A_n alle surjektiv, so gilt*

$$\|S_{n,m} A_n f - \Sigma_{n,m} A_n f\|_\infty \preceq \rho_n \, \max_{1 \leq i \leq m} \|\upsilon^i\|_{Y_1} \, \|f\|_X$$

für $n \to \infty$.

BEWEIS: Es sei $\tilde{\upsilon}_n^i \in \mathsf{N}(\tilde{A}_n^*)^\perp$ ein zu e_n^i gehörender Rekonstruktionskern für $\tilde{A}_n$. Aus Lemma 2.2.7 folgt, daß $Q_n^* \tilde{\upsilon}_n^i$ ein Rekonstruktionskern für A_n ist. Dieser unterscheidet sich im allgemeinen von υ_n^i. Es gilt jedoch $A_n^* \upsilon_n^i = A_n^* Q_n^* \tilde{\upsilon}_n^i$. Daraus folgt

$$(S_{n,m} A_n f)_i = \langle f, A_n^* \upsilon_n^i \rangle_X = \langle f, A_n^* Q_n^* \tilde{\upsilon}_n^i \rangle_X = \langle A_n f, Q_n^* \tilde{\upsilon}_n^i \rangle_{\mathbb{C}^n} \, ,$$

was

$$\begin{aligned} |(S_{n,m}A_nf)_i - (\Sigma_{n,m}A_nf)_i| &= |\langle A_nf, Q_n^*\tilde{\upsilon}_n^i - G_n\,\Psi_n\upsilon^i\rangle_{\mathbb{C}^n}| \\ &\le \|A_n\|_{X\to\mathbb{C}^n}\,\|f\|_X\,\|Q_n^*\tilde{\upsilon}_n^i - G_n\,\Psi_n\upsilon^i\|_{\mathbb{C}^n} \end{aligned}$$

ergibt. Mit Hilfe von (2.16) und (2.17) erhalten wir die Normabschätzung

$$\|A_n\|_{X\to\mathbb{C}^n} \preceq \|\Pi_nA\|_{X\to Y} \preceq \|A\|_{X\to Y_1}\,.$$

Diese impliziert zusammen mit Korollar 2.2.9 die Behauptung des Satzes.

□

Bemerkung: Satz 2.2.10 zeigt, daß für speziell gewählte Mollifier e_n^i die Abbildung $\Sigma_{n,m}$ auf $\mathsf{R}(A_n)$ ein guter Ersatz für die approximative Inverse $S_{n,m}$ ist. Die Mollifier e_n^i sind durch $e_n^i = \tilde{A}_n^*\upsilon^i$ jedoch sehr speziell gewählt. Aufgrund der Approximationseigenschaft (2.18) gilt $\|\tilde{A}_n - A\| \to 0$ für $n\to\infty$, und folglich konvergiert $e_n = \tilde{A}_n^*\upsilon$ gegen $e = A^*\upsilon$. Es ist daher gerechtfertigt, den Kern υ in Satz 2.2.10 durch einen Rekonstruktionskern zu A für einen beliebig gewählten Mollifier e zu ersetzen. Es kann für diese Situation eine Konvergenz wie in Satz 2.2.10 gezeigt werden, allerdings in einer schwächeren Norm. Wir gehen an dieser Stelle nicht weiter darauf ein, sondern verweisen diesbezüglich auf Rieder, Sch. [28].

2.2.2.2 Der allgemeine Fall $e \in X$

Wir setzen voraus, daß A ein linearer, injektiver Operator ist, der stetig ist, sowohl als Abbildung zwischen X und Y, als auch zwischen den Räumen X_1 und Y_1. Die Konvergenzaussagen dieses Abschnittes sind nicht so stark wie die des vorhergehenden. Dafür treffen sie auf Operatoren wie die Doppler– und die Radon–Transformation zu, und sind daher für Anwendungen der approximativen Inversen in der Vektor– und Computer–Tomographie von Bedeutung.
Im allgemeinen gilt $e \notin \mathsf{R}(A^*)$, was wir im vorangegangenen Abschnitt stets vorausgesetzt haben. Da A injektiv ist, ist $\mathsf{R}(A^*)$ dicht in X. Sind $e^i \in X$, $i = 1,\ldots,m$ Mollifier, so finden wir zu beliebig vorgegebenen Zahlen $\varepsilon_i > 0$ Elemente $\upsilon^i \in Y_1$ mit

$$\|e^i - A^*\upsilon^i\|_X \le \varepsilon_i\,, \quad i = 1,\ldots,m\,. \tag{2.21}$$

Da mit den e^i kein Rekonstruktionskern υ^i assoziiert werden kann ($e^i \notin \mathsf{D}((A^*)^\dagger)$), wird man folgende Vorgehensweise wählen: Zu vorgegebenen Genauigkeiten $\varepsilon_i > 0$ wähle man zu e^i jeweils dasjenige $\upsilon^i \in Y_1$, das die Gleichung (2.21) erfüllt, und nehme $\Psi_n\upsilon^i$ als Rekonstruktionskern für A_n. Im folgenden Satz formulieren wir eine Art schwache Konvergenz der entsprechenden approximativen Inversen gegen die Momente $\langle f, e^i\rangle_X$ der exakten Lösung. Wir bezeichnen mit $E : X \to \mathbb{C}^m$ die Abbildung, die definiert ist durch

$$(Ef)_i = \langle f, e^i\rangle_X\,, \qquad i = 1,\ldots,m\,.$$

E ordnet also einem Element $f \in X$ dessen Momente bezüglich des Mollifiers e^i zu.

Satz 2.2.11 *Es seien $e^i \in X$ Mollifier und $\upsilon^i \in Y_1$ Rekonstruktionskerne, welche die Abschätzung (2.21) erfüllen, $i = 1, \ldots, m$. Ist $f \in X_1$, so gilt*

$$\|\Sigma_{n,m} A_n f - Ef\|_\infty \preceq (\rho_n \max_{1\le i\le m} \|\upsilon^i\|_{Y_1} + \max_{1\le i\le m} \varepsilon_i)\, \|f\|_{X_1}\,, \qquad \textit{für } n \to \infty\,.$$

Beweis: Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Abschätzung (2.21) hat man

$$\begin{aligned} |(\Sigma_{n,m} A_n f)_i - \langle f, e^i\rangle_X| &\le |\langle \Psi_n A f, G_n \Psi_n \upsilon^i\rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle f, A^* \upsilon^i\rangle_X| + \|f\|_X\, \varepsilon_i \\ &= |\langle \Pi_n A f, \Pi_n \upsilon^i\rangle_Y - \langle Af, \upsilon^i\rangle_X| + \|f\|_X\, \varepsilon_i\,. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich aus der folgenden Ungleichungskette, wobei $g = Af$ ist:

$$\begin{aligned} |\langle \Pi_n g, \Pi_n \upsilon^i\rangle_Y - \langle g, \upsilon^i\rangle_Y| &\le \|\Pi_n g - g\|_Y\, \|\Pi_n \upsilon^i\|_Y + \|\Pi_n \upsilon^i - \upsilon^i\|_Y\, \|g\|_Y \\ &\preceq \rho_n\, \|g\|_{Y_1}\, \|\upsilon^i\|_{Y_1} \preceq \rho_n\, \|f\|_{X_1}\, \|\upsilon^i\|_{Y_1} \end{aligned}$$

Es wurden wieder die gleichmäßige Beschränktheit (2.17) und die Approximationseigenschaft (2.18) ausgenutzt.

□

Es sei darauf hingewiesen, daß im Gegensatz zu Satz 2.2.10 die für die Definition von $\Sigma_{n,m}$ wichtigen Elemente υ^i keine Beziehung der Form $e^i = \tilde{A}_n^* \upsilon^i$ erfüllen müssen, sondern lediglich die Abschätzung (2.21) erfüllen sollen für beliebige Mollifier e^i.

Abschließend wollen wir noch angeben, wie man ein υ^i, das der Abschätzung (2.21) genügt, bei kompakten Operatoren mit Hilfe der Singulärwertzerlegung ermitteln kann. Sei hierzu $A : X \to Y$ kompakt und $\{\mathrm{v}_k, u_k, \sigma_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ das zugehörige singuläre System. Für den Fall, daß $e \in \mathsf{D}((A^*)^\dagger)$ ist, haben wir durch Gleichung (2.5) einen Rekonstruktionskern υ berechnet. Indem wir die dort angegebene Reihe nach endlich vielen Schritten abschneiden, erhalten wir für den Fall, daß die $u_k \in Y_1$ sind, ein Element aus Y_1. Wir definieren

$$\upsilon_M := \sum_{k=0}^{M-1} \sigma_k^{-1}\, \langle e, \mathrm{v}_k\rangle_X\, u_k \in Y_1\,. \tag{2.22}$$

Man sieht sofort, daß wegen der Dichtheit von $\mathsf{R}(A^*)$ in X gilt

$$\|e - A^* \upsilon_M\|_X = \sum_{k=M}^{\infty} |\langle e, \mathrm{v}_k\rangle_X|^2 \to 0 \quad \text{für } M \to \infty\,.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir demnach M so wählen, daß

$$\|e - A^* \upsilon_M\|_X < \varepsilon$$

ist. Wenn wir Glattheitsbedingungen an e stellen, können wir sogar Konvergenzgeschwindigkeiten für $\|e - A^* \upsilon_M\|_X$ angeben.

Lemma 2.2.12 *Unter der Annahme, daß* $e \in \mathsf{R}((A^*A)^\alpha) = \mathsf{D}((A^*A)^{-\alpha})$ *für* $\alpha \geq 0$ *ist, gilt*

$$\lim_{M\to\infty} \sigma_M^{-\alpha} \, \|e - A^* \upsilon_M\|_X = 0 \,.$$

Genauer ist sogar folgende Abschätzung gültig

$$\|e - A^*\upsilon_M\|_X < \sigma_M^\alpha \sqrt{\|e\|_X \, \|(A^*A)^{-\alpha} e\|_X} \,.$$

Beweis: Beide Aussagen des Lemmas folgen unmittelbar aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} \|e - A^*\upsilon_M\|_X^2 &= \sum_{k=M}^{\infty} \sigma_k^{-2\alpha} \, |\langle e, \mathrm{v}_k\rangle_X| \, \sigma_k^{2\alpha} \, |\langle e, \mathrm{v}_k\rangle_X| \\ &\leq \left(\sum_{k=M}^{\infty} \sigma_k^{-4\alpha} \, |\langle e, \mathrm{v}_k\rangle_X|^2\right)^{1/2} \sigma_M^{2\alpha} \left(\sum_{k=M}^{\infty} |\langle e, \mathrm{v}_k\rangle_X|^2\right)^{1/2} . \end{aligned}$$

□

Wie in Satz 2.2.11 gesehen ist für eine Fehlerabschätzung nicht nur der Fehler $\|e - A^*\upsilon_M\|_X$ ausschlaggebend, sondern auch das Wachstumsverhalten von $\|\upsilon_M\|_{Y_1}$.

Lemma 2.2.13 *Sei wiederum* $e \in \mathsf{R}((A^*A)^\alpha) = \mathsf{D}((A^*A)^{-\alpha})$ *für* $\alpha \geq 0$. *Weiterhin soll ein* $\beta \geq 0$ *existieren, so daß* $\|u_k\|_{Y_1} \preceq \sigma_k^{-\beta}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$ *ist. Dann hat man*

$$\|\upsilon_M\|_{Y_1} \preceq \|(A^*A)^{-\alpha} e\|_X \left(\sum_{k=0}^{M-1} \sigma_k^{4\alpha - 2(1+\beta)}\right)^{1/2} .$$

Beweis: Die Behauptung resultiert aus einer einfachen Rechnung:

$$\begin{aligned} \|\upsilon_M\|_{Y_1} &\preceq \sum_{k=0}^{M-1} \sigma_k^{-2\alpha} \, |\langle e, \mathrm{v}_k\rangle_X| \, \sigma_k^{2\alpha-(1+\beta)} \\ &\preceq \left(\sum_{k=0}^{M-1} \sigma_k^{-4\alpha} \, |\langle e, \mathrm{v}_k\rangle_X|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{M-1} \sigma_k^{4\alpha-2(1+\beta)}\right)^{1/2} . \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der beiden vorangegangenen Lemmata ist es möglich die Konvergenzaussage aus Satz 2.2.11 zu verstärken.

Bezeichnung: Es sei $a \asymp b$ genau dann, wenn $a \preceq b \preceq a$ ist.

Satz 2.2.14 *Sei* $A : X \to Y$ *ein kompakter Operator mit singulärem System* $\{\mathrm{v}_k, u_k, \sigma_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. *Weiterhin nehmen wir an, daß* $\sigma_k \asymp (k+1)^{-\kappa}$ *für ein* $\kappa > 0$ *gilt, wenn* $k \to \infty$ *konvergiert, und daß* $\|u_k\|_{Y_1} \preceq \sigma_k^{-\beta}$ *für ein* $\beta > 0$ *gilt. Schließlich seien noch* m *Mollifier* $e^i \in \mathsf{D}((A^*A)^{-\alpha})$, $i = 1, \ldots, m$ *gegeben, und die zugehörigen* $\upsilon_{M_i}^i$ *durch (2.22) definiert. Ist* $\alpha > (1+\beta)/2 + 1/(4\kappa)$ *und* $M_i = M_i(n) \succeq \rho_n^{-1/(\alpha\kappa)}$ *für* $n \to \infty$, *dann gilt für* $f \in X_1$

$$\|\Sigma_{n,m} A_n f - Ef\|_\infty \preceq \rho_n \, \|f\|_{X_1} \max_{1\leq i\leq m} \|(A^*A)^{-\alpha} e^i\|_X \qquad \text{für } n \to \infty \,.$$

Beweis: Der Beweis ist unter Berücksichtigung der Voraussetzungen eine Folgerung von Satz 2.2.11, den Lemmata 2.2.12 und 2.2.13 und der Tatsache, daß

$$\|e^i\|_X \preceq \|(A^*A)^{-\alpha}e^i\|_X$$

ist.

□

Bemerkung: Der vorangegangene Satz weist auf, daß unter ganz bestimmten Voraussetzungen sowohl an die Mollifier, als auch an den zugrunde liegenden Operator, eine schwache Konvergenz des Ersatzkernes $\Psi_n v_{M_i}$ für $n \to \infty$ gegen die Momente $\langle e^i, f\rangle_X$ besteht. Mit Hilfe des Picard–Kriteriums sieht man, daß die Glattheitsbedingung $e \in \mathsf{R}((A^*A)^\alpha) = \mathsf{D}((A^*A)^{-\alpha})$ übergeht in $e \in \mathsf{R}(A^*)$ für $\alpha \geq 1/2$. Damit wir die Konvergenz in Satz 2.2.14 haben, muß nach Voraussetzung $\alpha > (1+\beta)/2 + 1/(4\kappa) \geq 1/2$ sein, was bedeutet, daß wieder der Spezialfall $e^i \in \mathsf{R}(A^*)$ vorausgesetzt werden muß.

Abschließend wollen wir noch untersuchen, wie sich die Konvergenz $\|\Sigma_{n,m}A_n f - Ef\|$ verhält, wenn statt der exakten Daten $g_n = A_n f$ nur gestörte Daten g_n^η zur Verfügung stehen. Dabei wollen wir annehmen, daß die Störung in unserem Observationsoperator Ψ_n steckt. Es sei also eine Nullfolge $\{\eta_n\}_{n\in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$ gegeben mit

$$\|\Psi_n^\eta - \Psi_n\|_{Y_1\to\mathbb{C}^n} \preceq \eta_n \,. \tag{2.23}$$

Ψ_n^η sei dabei der gestörte Observationsoperator. Eine solche Störung kann unter anderem durch Meßfehler entstehen. Wir können angeben, wie sich eine solche Störung auf $\Sigma_{n,m}\Psi_n^\eta Af$ auswirkt.

Satz 2.2.15 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.2.11, ferner sei Ψ_n^η wie in Gleichung (2.23) gegeben. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\|\Sigma_{n,m}\Psi_n^\eta Af - Ef\|_\infty &\preceq ((\eta_n+\rho_n)\max_{1\leq i\leq m}\|v^i\|_{Y_1} + \max_{1\leq i\leq m}\varepsilon_i)\,\|f\|_{X_1}\\ &\preceq (\lambda_n \max_{1\leq i\leq m}\|v^i\|_{Y_1} + \max_{1\leq i\leq m}\varepsilon_i)\,\|f\|_{X_1}\end{aligned}$$

für $n\to\infty$, und $f \in X_1$. Dabei ist $\lambda_n = \max\{\eta_n,\rho_n\}$.

Beweis: Mit Hilfe der Dreiecksungleichung hat man

$$\begin{aligned}|\langle\Psi_n^\eta Af, G_n\Psi_n v^i\rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle f, e^i\rangle_X| &\leq |\langle(\Psi_n^\eta - \Psi_n)\,Af, G_n\Psi_n v^i\rangle_{\mathbb{C}^n}|\\ &\quad + |\langle A_n f, G_n\Psi_n v^i\rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle f, e^i\rangle_X|\,.\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt

$$\begin{aligned}|\langle(\Psi_n^\eta - \Psi_n)\,Af, G_n\Psi_n v^i\rangle_{\mathbb{C}^n}| &\leq \eta_n\,\|Af\|_{Y_1}\,\|G_n\Psi_n v^i\|_{\mathbb{C}^n} = \eta_n\,\|Af\|_{Y_1}\,\|Q_n^*\Pi_n v^i\|_{\mathbb{C}^n}\\ &\leq \eta_n\,\|Af\|_{Y_1}\,\|Q_n^*\|_{Y\to\mathbb{C}^n}\,\|\Pi_n v^i\|_Y \preceq \eta_n\,\|f\|_{X_1}\,\|v^i\|_{Y_1}\,.\end{aligned}$$

Dabei haben wir wiederum die Abschätzungen (2.16) und (2.17) ausgenutzt. Den zweiten Summanden behandelt man wie im Beweis zu Satz 2.2.11. Durch Übergang zum

Maximum ergibt sich die Behauptung.

□

Die Abschätzung in obigem Satz weist auf, daß wir drei Größen kontrollieren müssen, um den Fehler unseres Verfahrens gering zu halten. Zum einen ist dies der Approximationsfehler $\max \varepsilon_i$, der angibt, wie exakt wir die Mollifier e^i in $\mathsf{R}(A^*)$ nähern können. Dieser Fehler ist jedoch unproblematisch, da wir, vorausgesetzt $v^i_{M_i}$ ist durch (2.22) definiert, ihn beliebig klein machen können, indem wir M_i hinreichend groß wählen. Ferner gilt für hinreichend glatte e^i sowieso $e^i \in \mathsf{R}(A^*)$, womit die ε_i verschwinden. Zum anderen ist der Parameter M auch nicht zu groß zu wählen, da $\|v_M\|_{Y_1}$ im allgemeinen mit wachsendem M anwächst. Desweiteren spielt die Folge ρ_n bei der Fehlerabschätzung eine Rolle. Diese Folge hängt von dem Riesz-System $\{\varphi_{n,k}\}$ ab und deren Approximationsgüte für Elemente aus Y_1, siehe (2.18). Der dritte Fehlerterm ist schließlich derjenige, der durch den Datenfehler $\|g^\eta - g\|$ verursacht wird.

Kapitel 3

Die Anwendung der approximativen Inversen auf die Doppler–Transformation

Es ist uns im ersten Kapitel gelungen, die Vektortomographie als inverses Problem $(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{K})$ zu beschreiben. Im darauffolgenden Kapitel haben wir eine Methode entwickelt, um Probleme von genau dieser Form numerisch zu lösen. Folglich wollen wir dieses Verfahren in diesem Kapitel auf die Doppler–Transformation anwenden, und zwar auf die für praktische Zwecke wichtige diskrete Form. Dabei hat sich folgende Vorgehensweise als günstig erwiesen: Wir berechnen einen Rekonstruktionskern für die kontinuierliche Doppler–Transformation, und wenden anschließend die Funktionale, die die diskrete Doppler–Transformation definieren, auf diesen an. Nach der in Kapitel 2 entwickelten Theorie ist bei diesem Vorgehen die Glättungseigenschaft der Doppler–Transformation (1.19) von Bedeutung. Da bei der Darstellung der Doppler–Transformation die zweidimensionale Radon–Transformation involviert ist (siehe z.B. (1.18)), wird in einem ersten Abschnitt ein Rekonstruktionskern für diese Transformation bestimmt. Anschließend führen wir vor, wie man einen Rekonstruktionskern für die Doppler–Transformation erhält mit Hilfe der Betrachtungen aus Kapitel 2, allerdings wird uns das nur für einen ganz speziellen Mollifier gelingen.

3.1 Berechnung von Rekonstruktionskernen für die Radon–Transformation

Es sei wieder $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$ die zweidimensionale Radon–Transformation. In Kapitel 2 wurde aufgezeigt, wie ein Rekonstruktionskern für die Radon–Transformation mit Hilfe der Singulärwertzerlegung angegeben werden kann. Die Singulärwertzerlegung der Radon–Transformation als Abbildung zwischen gewichteten L^2-Räumen wurde von Louis [18] bestimmt, und zwar allgemein für den n-dimensionalen Fall. 1995

verwendeten LOUIS, SCH. [23] das singuläre System, um einen Kern für die diskrete Radon–Transformation zu bestimmen, DIETZ [9] berechnete einen für den kontinuierlichen Fall.
Zunächst geben wir die Singulärwertzerlegung der 2D–Radon–Transformation an. Ein Beweis ist unter anderem in LOUIS [19] zu finden.

Lemma 3.1.1 *Es sei* $\mathcal{R} : L^2(\Omega^2) \to L^2(Z, w^{-1})$ *die 2D–Radon–Transformation,* $w(s) = \sqrt{1-s^2}$*. Das singuläre System*

$$\{(\mathrm{v}_{\mu k}, u_{\mu k}, \sigma_{\mu k}) : \mu \geq 0\,,\ -\mu \leq k \leq \mu\,,\ k+\mu \text{ gerade}\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_{\mu k}(x) &= \sqrt{\frac{\mu+1}{\pi}}\,|x|^{|k|}\,P^{(0,|k|)}_{(\mu-|k|)/2}(2|x|^2-1)\,Y_k(x/|x|)\,, \\ u_{\mu k}(\omega, s) &= \pi^{-1}\,w(s)\,U_\mu(s)\,Y_k(\omega)\,, \\ \sigma_{\mu k} &= \sigma_\mu = 2\sqrt{\frac{\pi}{\mu+1}}\,, \end{aligned}$$

wobei U_μ *die Tschebyscheff-Polynome 2. Art,* $Y_k(\omega(\varphi)) = e^{\imath k\varphi}$ *die zweidimensionalen Kugelflächenfunktionen und* $P_n^{\alpha,\beta}$ *die Jacobi-Polynome darstellen.*

Bezeichnung: Es sei

$$\sum_{k=-\mu}^{\mu}{}' a_{\mu k} := \sum_{\substack{k=-\mu \\ k+\mu \text{ gerade}}}^{\mu} a_{\mu k}\,.$$

Da es sich bei der Radon–Transformation um einen injektiven Operator handelt, befinden wir uns somit genau in der in Kapitel 2 betrachteten Situation. Zu einem gegebenen Mollifier $\tilde{e} \in \mathsf{D}((\mathcal{R}^*)^\dagger) = \mathsf{R}(\mathcal{R}^*)$ erhalten wir einen Rekonstruktionskern durch Einsetzen in Gleichung (2.5). (Der Regularisierungsparameter γ wird der Übersicht halber weggelassen, da er in diesem Abschnitt nicht von Interesse ist.)

$$\begin{aligned} \upsilon(\omega, s) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma_\mu^{-1} \sum_{k=-\mu}^{\mu}{}' \langle \tilde{e}, \mathrm{v}_{\mu k}\rangle_{L^2(\Omega^2)}\, u_{\mu k}(\omega, s) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\, w(s) \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1) \sum_{k=-\mu}^{\mu}{}' \langle \mathcal{R}\tilde{e}, u_{\mu k}\rangle_{L^2(\Omega^2)}\, U_\mu(s)\, Y_k(\omega)\,. \end{aligned}$$

Im Falle, daß $\tilde{e} \notin \mathsf{R}(\mathcal{R}^*)$ ist, bestimmen wir einen Kern numerisch mit Hilfe der Gleichung (2.22):

$$\begin{aligned} \upsilon_M(\omega, s) &= \sum_{\mu=0}^{M} \sigma_\mu^{-1} \sum_{k=-\mu}^{\mu}{}' \langle \tilde{e}, \mathrm{v}_{\mu k}\rangle_{L^2(\Omega^2)}\, u_{\mu k}(\omega, s) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\, w(s) \sum_{\mu=0}^{M} (\mu+1) \sum_{k=-\mu}^{\mu}{}' \langle \mathcal{R}\tilde{e}, u_{\mu k}\rangle_{L^2(\Omega^2)}\, U_\mu(s)\, Y_k(\omega)\,, \end{aligned}$$

wobei $M > 0$ so bestimmt ist, daß

$$\|\mathcal{R}^* \upsilon_M - \tilde{e}\|_{L^2(\Omega^2)} < \varepsilon$$

für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ ist. Man beachte, daß mit Lemma 2.2.12

$$\mathcal{R}^* \upsilon_M \longrightarrow \tilde{e} \quad \text{für } M \to \infty$$

folgt. In der Computer–Tomographie ist es zweckmäßig, rotationssymmetrische Mollifier zu verwenden, also Mollifier $\tilde{e}$ mit $\tilde{e}(x) = \bar{e}(\|x\|)$. Die Radontransformierte von $\tilde{e}$ hängt dann nicht mehr von der Richtung ω ab, und der Rekonstruktionskern υ_M ergibt sich durch eine leichte Rechnung zu

$$\begin{aligned}
\upsilon_M(\omega, s) &= \frac{1}{4\pi^3} w(s) \sum_{\mu=0}^{M} (\mu+1) {\sum_{k=-\mu}^{\mu}}' \int_{-1}^{1} \mathcal{R}\tilde{e}(t)\, U_\mu(t)\, dt \int_{S^1} Y_k(\vartheta)\, d\vartheta\, U_\mu(s)\, Y_k(\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} w(s) \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} (2\mu+1) \int_{-1}^{1} \mathcal{R}\tilde{e}(t)\, U_{2\mu}(t)\, dt\, U_{2\mu}(s) \\
&= \upsilon_M(s)\,,
\end{aligned}$$

wegen

$$\int_{S^1} Y_k(\vartheta)\, d\vartheta = 2\pi\, \delta_{k,0}\,.$$

Für $\tilde{e} \in \mathsf{R}(\mathcal{R}^*)$ gilt dieselbe Darstellung mit $M = \infty$.
Beispiel: Nehmen wir $\bar{e}_\gamma(t) = (2\pi)^{-1} \gamma^{-2} \exp(-t^2/(2\gamma^2))$, so gilt $(\tilde{e}_\gamma(x) = \bar{e}_\gamma(\|x\|))$

$$\mathcal{R}\tilde{e}_\gamma(t) = (2\pi)^{-1/2} \gamma^{-1} \exp(-t^2/(2\gamma^2))\,,$$

und es ergibt sich für υ_M

$$\upsilon_M(s) = (2\pi)^{-3/2} \pi^{-1} \gamma^{-1} w(s) \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} (2\mu+1)\, c_\mu^\gamma\, U_{2\mu}(s)$$

mit $c_\mu^\gamma = \int_{-1}^{1} \exp(-\tau^2/(2\gamma^2)) U_{2\mu}(\tau)\, d\tau$.
Der Kern υ_M ist in Abbildung 3.1.1. graphisch dargestellt mit M=267, γ=0.01. Es ist auch möglich, den zu $\tilde{e}_\gamma$ gehörenden Rekonstruktionskern in einer geschlossenen Form anzugeben, indem man die Inversionsformel für die Radon–Transformation ausnutzt, siehe Rieder, Sch. [28].

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir stets die Radon–Transformation als Abbildung zwischen den ungewichteten Räumen $L^2(\Omega^2)$ und $L^2(Z)$ betrachtet. Für diese Abbildung ist jedoch keine Singulärwertzerlegung bekannt. Wir sind aber dennoch in der Lage einen Rekonstruktionskern zu bestimmen, indem wir die obige Darstellung für υ_M und Lemma 2.1.7 ausnutzen. Als Bezeichnung führen wir noch den Multiplikationsoperator $\mathcal{M}_h$ ein, der definiert ist durch

$$\mathcal{M}_h\, g(\omega, s) = h(\omega, s)\, g(\omega, s)$$

für $g \in L^2(Z, w^{-1})$.

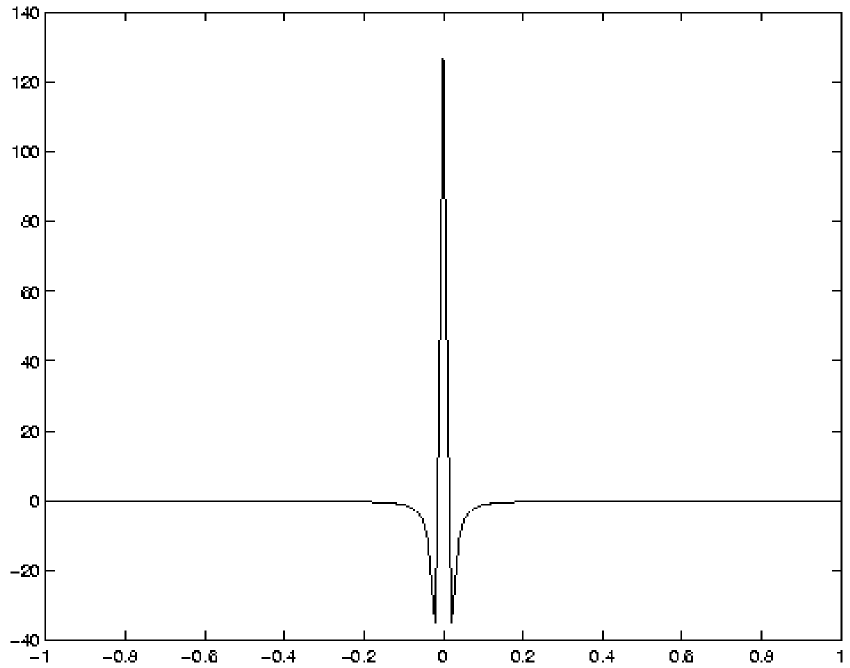

Abbildung 3.1.1. Der Kern υ_M für M=267, γ=0.01

Lemma 3.1.2 *Ist υ ein Rekonstruktionskern von $\mathcal{R}$ als Abbildung zwischen $L^2(\Omega^2)$ und $L^2(Z, w^{-1})$, so ist*

$$\phi = \mathcal{M}_{w^{-1}}\upsilon$$

ein Rekonstruktionskern für $\mathcal{R}$ als Abbildung von $L^2(\Omega^2)$ nach $L^2(Z)$.

Beweis: Es bezeichne $\widetilde{\mathcal{R}}$ die Abbildung die Radon–Transformation mit Bild in $L^2(Z, w^{-1})$, und $\jmath : L^2(Z, w^{-1}) \hookrightarrow L^2(Z)$ die natürliche, stetige Inklusionsabbildung. Dann ist

$$\mathcal{R} = \jmath\widetilde{\mathcal{R}},$$

und wir können Lemma 2.1.7 mit $A = \widetilde{\mathcal{R}}$, $B = \mathcal{R}$ und $U = \jmath$ anwenden. Die folgende Gleichheit zeigt, daß $\jmath^* = \mathcal{M}_w$ ist.

$$\begin{aligned}
\langle \jmath g, h\rangle_{L^2(Z)} &= \int_{S^1}\int_{-1}^{1} g(\omega, s)\, h(\omega, s)\, ds\, d\omega \\
&= \int_{S^1}\int_{-1}^{1} g(\omega, s)\, h(\omega, s)\, w(s)\, w^{-1}(s)\, ds\, d\omega \\
&= \langle g, \mathcal{M}_w\, h\rangle_{L^2(Z, w^{-1})}\,.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(\jmath^*)^{-1} = \mathcal{M}_{w^{-1}}$. Mit Lemma 2.1.7 ergibt sich somit die Behauptung. $\square$

Wenden wir das Lemma 3.1.2 auf unseren Kern υ an, so ergibt sich

$$\phi(s) = \mathcal{M}_{w^{-1}}\upsilon(s) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\mu=0}^{\infty}(2\mu+1)\int_{-1}^{1}\mathcal{R}\tilde{e}(t)\,U_{2\mu}(t)\,dt\,U_{2\mu}(s)$$

als Rekonstruktionskern von $\mathcal{R} : L^2(\Omega^2) \to L^2(Z)$. Es ist naheliegend, im Falle daß $\tilde{e} \notin \mathsf{R}(\mathcal{R}^*)$ ist, als Kern

$$\phi_M = \mathcal{M}_{w^{-1}}\upsilon_M$$

zu nehmen.
Mit Hilfe des Lemmas 2.1.7 lassen sich Rekonstruktionskerne finden für alle Abbildungen, die stetig mit der zweidimensionalen Radon–Transformation zusammenhängen, ein Umstand, den wir im Zusammenhang mit der Doppler–Transformation noch ausnutzen werden.

Wie in Kapitel 2 betrachtet, hat man im allgemeinen nicht nur einen Mollifier $\tilde{e}$, sondern vielmehr für jedes $x \in \Omega^2$ einen mollfier $e(x,\cdot) \in L^2(\Omega^2)$. Folglich hängt auch der Rekonstruktionskern von x ab, und man müßte deshalb für jedes x einen eigenen Kern $\upsilon_M(x)$ berechnen. Diese Schwierigkeit kann man jedoch umgehen, indem man sich eine Translationsinvarianz der Radon–Transformation zunutze macht.
Wir definieren zwei Translationsoperatoren T_1^x, und T_2^x in der folgenden Weise

$$\begin{aligned} T_1^x f(y) &= \frac{1}{4} f\left(\frac{y-x}{2}\right), \\ T_2^x g(\omega,s) &= \frac{1}{4} g\left(\omega, \frac{s - x^\top\omega}{2}\right), \end{aligned}$$

für $f \in L^2(\Omega^2)$, $g \in L^2(Z)$. Die Dilatation mit dem Faktor 2 wurde vorgenommen, um zu gewährleisten, daß $g(\omega,(s-x^\top\omega)/2)$ für alle $x \in \Omega^2$ definiert ist. Eine einfache Rechnung beweist

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^*T_2^x g(y) &= \frac{1}{4}\int_{S^1} g\left(\omega, \frac{y^\top\omega - x^\top\omega}{2}\right) d\omega \\ &= \frac{1}{4}\int_{S^1} g\left(\omega, \frac{(y-x)^\top\omega}{2}\right) d\omega \\ &= T_1^x\mathcal{R}^*g(y) \end{aligned}$$

mit $g \in L^2(Z)$. Setzt man $e(x,y) = T_1^x\tilde{e}(y)$, so motiviert diese Translationsinvarianz und Lemma 2.1.6 für $x \in \Omega^2$ die Definition

$$\bar{\upsilon}_M(x) = T_2^x\upsilon_M(0) = T_2^x\upsilon_M\,.$$

Denn mit der Translationsinvarianz $\mathcal{R}^*T_2^x = T_1^x\mathcal{R}^*$ gilt

$$\mathcal{R}^*T_2^x\bar{\upsilon}_M = T_1^x\mathcal{R}^*\upsilon_M \longrightarrow T_1^x\tilde{e} = e(x,\cdot) \quad \text{für } M\to\infty\,.$$

Man benötigt lediglich den Kern υ_M, um alle anderen Kerne $\bar{\upsilon}_M(x)$ zu berechnen. Dies macht das Verfahren der approximative Inverse sehr effizient. Um dann für praktische Anwendungen einen Rekonstruktionskern für die diskrete Radon–Transformation zu erhalten, gehen wir wie in Kapitel 2 erläutert vor und werten für endlich viele $x_i \in \Omega^2$ die Kerne $T_2^{x_i}\upsilon_M$ an den Punkten (ω_j, s_l) aus. Nimmt man als Riesz-System stückweise konstante Splines, so bekommt man als Rekonstruktionsalgorithmus gerade die gefilterte Rückprojektion. Die Details dieses Vorgehens sind in RIEDER, SCH. [28] nachzulesen, an dieser Stelle soll darauf nicht weiter eingegangen werden. Wir wenden uns nunmehr der Doppler–Transformation zu.

3.2 Ein effizientes Verfahren für die Vektor–Tomographie

Das in Kapitel 2 abstrakt beschriebene Verfahren wird auf das Problem der Vektor–Tomographie $(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{K})$ angewandt. Wir formulieren dazu die Methode der approximativen Inversen zunächst um, so daß sie zur Rekonstruktion von Vektorfeldern geeignet ist. Anschließend berechnen wir die dafür notwendigen Rekonstruktionskerne für die Operatoren $\mathcal{D}_j$, wobei uns dies jedoch nur für einen ganz bestimmten Mollifier gelingen wird. Um das Verfahren für praktische Anwendungen zugänglich zu machen, übertragen wir unsere Ergebnisse analog zu Abschnitt 2.2 auf die diskrete Doppler–Transformation.

3.2.1 Rekonstruktion von Vektorfeldern mit der approximativen Inversen

Wir stehen zunächst vor dem Problem, daß wir die approximative Inverse bisher stets für die Rekonstruktion von skalaren Größen formuliert haben, in der Definition von S_γ tauchen nur Skalarprodukte auf. Wir formulieren daher eine Variante, die für die Behandlung von Vektorfeldern geeignet ist, und zwar speziell für unser Problem der Vektor–Tomographie. Ein erster, naiver Ansatz könnte darin bestehen, das Problem aufzuspalten in drei Abbildungen von $L^2(K_1^3)$ mit Bildbereich in $L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$. Man stößt dabei jedoch auf die Schwierigkeit, daß in der Definition der Operatoren $\mathcal{D}_j$ nicht nur eine Komponente von $\mathbf{f}$, sondern jeweils 2 Komponenten auftauchen. Die Doppler–Transformation $\mathcal{D}$ läßt sich nicht entkoppeln. Wir wählen daher einen anderen Ansatz, indem wir die Skalarprodukte auf $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ ersetzen durch zwei Bilinearformen.

Definition 3.2.1 *Die beiden Bilinearformen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind gegeben durch*

$$\mathcal{A} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to I\!R^3 \quad , \quad \mathcal{A}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1 \rangle_{L^2(K_1^3)} \\ \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{g}_2 \rangle_{L^2(K_1^3)} \\ \langle \mathbf{f}_3, \mathbf{g}_3 \rangle_{L^2(K_1^3)} \end{pmatrix} ,$$

$$\mathcal{B} : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to I\!R^3 \quad , \quad \mathcal{B}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1 \rangle_{L^2(S^1 \times [-1,1]^2)} \\ \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{g}_2 \rangle_{L^2(S^1 \times [-1,1]^2)} \\ \langle \mathbf{f}_3, \mathbf{g}_3 \rangle_{L^2(S^1 \times [-1,1]^2)} \end{pmatrix} .$$

Weiter seien $e_\gamma \in L^2(I\!R^3 \times I\!R^3)$, $e_\gamma = 0$ in $(I\!R^3 \times I\!R^3) \backslash (\Omega^3 \times \Omega^3)$ ein Mollifier im Sinne der Definition von Abschnitt 2.1 und

$$\mathcal{E}_\gamma(\mathbf{x}) = (e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot), e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot), e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot))^\top \in \mathcal{H} .$$

Die Idee ist, nicht mehr $\langle \mathbf{f}, \mathcal{E}_\gamma(x) \rangle_{\mathcal{H}}$ zu rekonstruieren, sondern

$$\mathbf{f}_\gamma(x) = \mathcal{A}(\mathbf{f}, \mathcal{E}_\gamma(x)) .$$

Dabei muß man beachten, daß $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ keine Skalarprodukte mehr sind und wir daher nicht mehr so vorgehen können wie wir das in Kapitel 2 gemacht haben, da $\mathcal{D}$ bezüglich der Bilinearformen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ keinen dualen Operator mehr hat. Wir müssen vielmehr die Methode der approximativen Inversen modifizieren, damit sie auf unser Problem anwendbar ist. Dabei wird sich zeigen, daß es von großem Vorteil ist, daß der Operator $\mathcal{D}$ in die drei Komponenten $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ und $\mathcal{D}_3$ aufgespalten werden kann. Wir definieren $\Phi_\gamma(x) \in \mathcal{K}$ für $\mathbf{x} \in K_1^3$ als Lösung von

$$\mathcal{D}_j^* \Phi_\gamma^j(\mathbf{x}) = e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot) \cdot e_j =: E_\gamma^j(\mathbf{x}) . \tag{3.1}$$

Nehmen wir an, Gleichung (3.1) habe eine Lösung, dann verdeutlicht die folgende Gleichungskette den Sinn dieser Festlegung:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\gamma(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(\mathbf{f}, \mathcal{E}_\gamma(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}_1, e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot) \rangle \\ \langle \mathbf{f}_2, e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot) \rangle \\ \langle \mathbf{f}_3, e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}, E_\gamma^1(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \mathbf{f}, E_\gamma^2(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \mathbf{f}, E_\gamma^3(\mathbf{x}) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}, \mathcal{D}_1^* \Phi_\gamma^1(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathcal{D}_2^* \Phi_\gamma^2(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathcal{D}_3^* \Phi_\gamma^3(\mathbf{x}) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{D}_1 \mathbf{f}, \Phi_\gamma^1(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \mathcal{D}_2 \mathbf{f}, \Phi_\gamma^2(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \mathcal{D}_3 \mathbf{f}, \Phi_\gamma^3(\mathbf{x}) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{g}_1, \Phi_\gamma^1(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \mathbf{g}_2, \Phi_\gamma^2(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \mathbf{g}_3, \Phi_\gamma^3(\mathbf{x}) \rangle \end{pmatrix} = \mathcal{B}(\mathbf{g}, \Phi_\gamma(\mathbf{x})) =: \mathcal{S}_\gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

Der Übersicht halber wurden die Indizes bei den Skalarprodukten weggelassen.
Im allgemeinen wird jedoch Gleichung (3.1) keine Lösung haben, wir definieren demnach wieder $\Phi_\gamma(\mathbf{x})$ analog zu Kapitel 2 als Lösung der Normalgleichung

$$\mathcal{D}_j \mathcal{D}_j^* \Phi_\gamma^j(\mathbf{x}) = \mathcal{D}_j E_\gamma^j(\mathbf{x}) , \tag{3.2}$$

vorausgesetzt, daß $E_\gamma^j(\mathbf{x}) \in \mathsf{D}((\mathcal{D}_j^*)^\dagger) = \mathsf{R}(\mathcal{D}_j^*) \oplus \mathsf{N}(\mathcal{D}_j)$ ist für jedes $\mathbf{x} \in K_1^3$. Es liegt nahe, die approximative Inverse für die Vektor–Tomographie in folgender Weise zu definieren.

Definition 3.2.2 *Wir bezeichnen die Abbildung $\mathcal{S}_\gamma : \mathcal{K} \to L^2(K_1^3, I\!R^3)$, die gegeben ist durch*

$$\mathcal{S}_\gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{g}, \Phi_\gamma(\mathbf{x}))\,,$$

wobei $\Phi_\gamma(\mathbf{x})$ eine Lösung der Normalgleichung (3.2) für einen Mollifier $E_\gamma^j(\mathbf{x}) = e_\gamma(\mathbf{x},\cdot)\cdot e_j \in \mathsf{D}((\mathcal{D}_j^*)^\dagger)$ darstellt, als approximative Inverse *für die Vektor–Tomographie. $\Phi_\gamma(\mathbf{x}) = (\Phi_\gamma^1(\mathbf{x}), \Phi_\gamma^2(\mathbf{x}), \Phi_\gamma^3(\mathbf{x}))$ heißt* Rekonstruktionskern *für die Doppler–Transformation.*

Die Schwierigkeit besteht darin, eine Lösung der Normalgleichung (3.2) zu finden. War dies bei der Radon–Transformation mit Hilfe der Singulärwertzerlegung kein Problem, so hilft uns dieser Zugang hier nicht, da das singuläre System der Doppler–Transformation nicht bekannt ist. In Satz 1.4.8 wurde eine Beziehung zwischen Doppler-Transformation und Radon–Transformation angegeben, die uns aus diesem Dilemma helfen wird. Ist $\Phi_\gamma^j(\mathbf{x})$ eine Lösung von (3.2), so auch von

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j\mathcal{D}_j^*\Phi_\gamma^j(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j E_\gamma^j(\mathbf{x})\,. \tag{3.3}$$

Wir nehmen an, daß beide Seiten der Normalgleichung (3.2) differenzierbar bezüglich s sind. Die Glättungseigenschaften des Operators $\mathcal{D}_j$ belegen, daß dies für hinreichend glattes $E_\gamma^j(\mathbf{x})$ stets der Fall ist. Das nachfolgende Lemma charakterisiert die Lösungen der Gleichung (3.3).

Satz 3.2.3 *Es sei $\Phi_\gamma^j(\mathbf{x}) \in H_0^1(-1,1)\hat{\otimes}L^2(S^1 \times [-1,1])$ eine Lösung von Gleichung (3.3). Dann erfüllt deren Ableitung die Gleichung*

$$(\mathcal{R}\mathcal{R}^* \otimes I)\left(\frac{\partial}{\partial s}\Phi_\gamma^j(\mathbf{x})\right) = \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j E_\gamma^j(\mathbf{x})\,. \tag{3.4}$$

Beweis: Wir führen zunächst eine Hilfsgröße ein. Es sei $\check{\Phi}_\gamma(\mathbf{x}) \in H^2(-1,1)\hat{\otimes}L^2(S^1 \times [-1,1])$ gegeben durch

$$\Phi_\gamma^j(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial s}\check{\Phi}_\gamma^j(\mathbf{x})\,.$$

(So ein $\check{\Phi}_\gamma^j(\mathbf{x})$ existiert immer, z.B. $\int_s^0 \Phi_\gamma^j(\mathbf{x})\,dt$.) Mit Hilfe der in Satz 1.4.8 bewiesenen Identität $(\mathcal{R}\otimes I)d_j = \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j$, Lemma 1.4.7 und den Rechenregeln für die Radon–Transformation 1.4.3 erhält man die Behauptung aus der folgenden Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j\mathcal{D}_j^*\Phi_\gamma^j(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j\mathcal{D}_j^*\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\check{\Phi}_\gamma^j(\mathbf{x}) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j\right)^*\check{\Phi}_\gamma^j(\mathbf{x}) \\
&= (\mathcal{R}\otimes I)\,d_j d_j^*\,(\mathcal{R}^*\otimes I)\check{\Phi}_\gamma^j(\mathbf{x}) \\
&= (\mathcal{R}\otimes I)(-\Delta\otimes I)(\mathcal{R}^*\otimes I)\check{\Phi}_\gamma^j(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathcal{R}\otimes I)(\mathcal{R}^*\otimes I)\left(-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)\check{\Phi}^j_\gamma(\mathbf{x}) \\
&= (\mathcal{R}\mathcal{R}^*\otimes I)\frac{\partial}{\partial s}\Phi^j_\gamma(\mathbf{x})\,.
\end{aligned}
$$

Man beachte hierbei, daß $\frac{\partial}{\partial s} : H^1_0(-1,1) \subset L^2(-1,1) \to L^2(-1,1)$ ein unbeschränkter Operator ist, für dessen Adjungierte gilt: $\mathsf{D}((\frac{\partial}{\partial s})^*) = H^1(-1,1)$ und

$$
\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^* = -\frac{\partial}{\partial s} : H^1(-1,1) \subset L^2(-1,1) \to L^2(-1,1)\,.
$$

Wegen $\check{\Phi}^j_\gamma \in H^2(-1,1)\hat{\otimes}L^2(S^1\times[-1,1])$ nach Voraussetzung, sind alle auftretenden Operatoren wohldefiniert.

□

Korollar 3.2.4 $\frac{\partial}{\partial s}\Phi^j_\gamma(\mathbf{x})$ *ist Lösung der Gleichung*

$$
(\mathcal{R}^*\otimes I)\left(\frac{\partial}{\partial s}\Phi^j_\gamma(\mathbf{x})\right) = d_j E^j_\gamma(\mathbf{x})\,. \tag{3.5}
$$

Beweis: Unter Beachtung der Injektivität von $\mathcal{R}\otimes I$ und der Tatsache, daß $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j = (\mathcal{R}\otimes I)d_j$ ist, folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.2.3.

□

Bemerkung: Das vorangegangene Lemma charakterisiert die Ableitung der Kerne $\Phi_\gamma(\mathbf{x})$ bezüglich der Variablen s. Die Glattheitsbedingung, die in Satz 3.2.3 an $\Phi^j_\gamma(\mathbf{x})$ gestellt wird, ist eigentlich eine Glattheitsbedingung für $E^j_\gamma(\mathbf{x})$. Wir werden später Forderungen an den Mollifier $E^j_\gamma(\mathbf{x})$ stellen, so daß diese Bedingungen stets erfüllt sind.

Im vorhergehenden Abschnitt über die Radon–Transformation haben wir gesehen, daß wir Dank der Translationsinvarianzen des Operators $\mathcal{R}$, den Rekonstruktionskern nur für $x = 0$ berechnen mußten. Diese Invarianzen sind auf die Gleichung (3.5) direkt übertragbar.

Definition 3.2.5 *Die Operatoren* $\mathbf{T}^{\mathbf{x}}_1 \in \mathcal{L}(L^2(K^3_1, \mathbb{R}^3))$ *und* $\mathbf{T}^{\mathbf{x}}_{2,j} \in \mathcal{L}(L^2(S^1\times[-1,1]^2))$ *seien definiert durch*

a)

$$
\mathbf{T}^{\mathbf{x}}_1\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \frac{1}{8}\,\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{2}\right)\,,
$$

b)

$$
\mathbf{T}^{\mathbf{x}}_{2,j} = T_2^{\pi_j^*\mathbf{x}} \otimes T_3^{\tau_j^*\mathbf{x}}\,,
$$

wobei T^y_2 *wie in Abschnitt 3.1 definiert und*

$$
T^a_3 f(t) = \frac{1}{2} f\left(\frac{t-a}{2}\right)
$$

ist für $f \in L^2([-1,1])$.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir ein zur Radon–Transformation analoges Resultat.

Satz 3.2.6 *Ist* $E^j_\gamma(\mathbf{x}) \in \mathsf{D}((\mathcal{D}^*_j)^\dagger)$ *und gilt* $E^j_\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^{\mathbf{x}}_1 E^j_\gamma(\mathbf{0})$, *so hat man die Gleichheit*

$$\Phi^j_\gamma(\mathbf{x}) = T^{\mathbf{x}}_{2,j}\Phi^j_\gamma(\mathbf{0})\,.$$

Bezeichnung: Der Kürze wegen sei von nun an stets $V^j_\gamma := V^j_\gamma(\mathbf{0})$ und $E^j_\gamma := E^j_\gamma(\mathbf{0})$.
Beweis des Satzes: Man rechnet mit der Darstellung von Satz 1.4.8 die Invarianz

$$\mathbf{T}^{\mathbf{x}}_1\mathcal{D}^*_j = \mathcal{D}^*_j\mathbf{T}^{\mathbf{x}}_{2,j}$$

nach. Die Behauptung ergibt sich dann aus Lemma 2.1.6.

□

Ist $d_j E^j_\gamma(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega^2 \times [-1,1]) \backslash \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$, so existiert eine Folge $\frac{\partial}{\partial s}\Phi^{j,M}_\gamma(\mathbf{x})$, mit

$$\lim_{M\to\infty} \|(\mathcal{R}^* \otimes I)\frac{\partial}{\partial s}\Phi^{j,M}_\gamma(\mathbf{x}) - d_j E^j_\gamma(\mathbf{x})\|_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])} = 0\,.$$

Dies folgt aus der Dichtheit von $\mathsf{R}(\mathcal{R}^*\otimes I)$ in $L^2(\Omega^2\times[-1,1])$. Sei $M_0 \in \mathbb{N}$ so bestimmt, daß

$$\|(\mathcal{R}^* \otimes I)\frac{\partial}{\partial s}\Phi^{j,M_0}_\gamma(\mathbf{x}) - d_j E^j_\gamma(\mathbf{x})\|_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])} < \varepsilon_j \tag{3.6}$$

ist für vorgegebene Zahlen $\varepsilon_j > 0$. Wegen

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}^* \otimes I)\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{T}^{\mathbf{x}}_{2,j}\Phi^{j,M}_\gamma &= \frac{1}{2}\,(T_1^{\pi^*_j\mathbf{x}} \otimes T_3^{\tau^*_j\mathbf{x}})(\mathcal{R}^* \otimes I)\frac{\partial}{\partial s}\Phi^{j,M}_\gamma \\ &\longrightarrow \frac{1}{2}\,(T_1^{\pi^*_j\mathbf{x}} \otimes T_3^{\tau^*_j\mathbf{x}})\,d_j E^j_\gamma = d_j E^j_\gamma(\mathbf{x})\end{aligned}$$

für $M \to \infty$ ist $\mathbf{T}^{\mathbf{x}}_{2,j}\Phi^{j,M_0}_\gamma$ eine sinnvolle Festlegung für einen Rekonstruktionskern.
Wir werden also die Gleichung (3.5), die äquivalent ist zu Gleichung (3.4), nur für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lösen.

3.2.2 Berechnung des Rekonstruktionskernes $\Phi^{j,M}_\gamma$

Wir wollen uns in diesem Abschnitt der Lösung der Gleichung (3.5) zuwenden. Dies schließt zunächst ein paar allgemeinere Betrachtungen ein.
Es seien X, X_1, Y_1 separable Hilberträume und $A : X_1 \to Y_1$ ein kompakter, injektiver Operator mit Singulärwertzerlegung $\{v_k, u_k, \sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Weiter sei auf X eine Orthonormalbasis $\{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ gegeben. Dann ist $\{v_k \otimes z_\ell\}_{k,\ell\in\mathbb{N}_0}$ ein vollständiges Orthogonalsystem von $\mathsf{N}(A)^\perp\hat{\otimes}X = \overline{\mathsf{R}(A^*\otimes I)} = X_1\hat{\otimes}X$ und $\{u_k \otimes z_\ell\}_{k,\ell\in\mathbb{N}_0}$ ein vollständiges Orthogonalsystem von $\overline{\mathsf{R}(A)}\hat{\otimes}X = \overline{\mathsf{R}(A\otimes I)}$, siehe Weidmann [37]. Man beachte hierbei, daß $\overline{\mathsf{R}(A\otimes B)} = \overline{\mathsf{R}(A)}\hat{\otimes}\overline{\mathsf{R}(B)}$ ist. Es gelten die Gleichungen

$$(A\otimes I)(v_k\otimes z_\ell) = \sigma_k\, u_k \otimes z_\ell\,, \quad (A^*\otimes I)(u_k\otimes z_\ell) = \sigma_k\, v_k\otimes z_\ell\,.$$

Bemerkung: Die Menge $\{v_k \otimes z_\ell, u_k \otimes z_\ell, \sigma_k\}_{k,\ell \in I\!N_0}$ ist im allgemeinen **keine** Singulärwertzerlegung von $A \otimes I$, sondern nur dann, wenn $\dim X < \infty$ ist. Ansonsten besitzen alle Werte σ_k unendliche Vielfachheit. Der Operator $A \otimes I$ ist auch nur in diesem Fall ein kompakter Operator.

Lemma 3.2.7 *Ist $f \in \mathsf{R}(A^* \otimes I) \subset X_1 \hat{\otimes} X$, so besitzt die Gleichung*

$$(A^* \otimes I)g = f$$

die Lösung

$$\begin{aligned} g^\dagger &= \sum_{k \in I\!N_0} \sum_{\ell \in I\!N_0} \sigma_k^{-1} \langle f, v_k \otimes z_\ell \rangle_{X_1 \hat{\otimes} X} \, u_k \otimes z_\ell \\ &= \sum_{k \in I\!N_0} \sum_{\ell \in I\!N_0} \sigma_k^{-2} \langle (A \otimes I) f, u_k \otimes z_\ell \rangle_{X_1 \hat{\otimes} X} \, u_k \otimes z_\ell \,. \end{aligned}$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} (A^* \otimes I) g^\dagger &= \sum_{k \in I\!N_0} \sum_{\ell \in I\!N_0} \sigma_k^{-1} \langle f, v_k \otimes z_\ell \rangle_{X_1 \hat{\otimes} X} \, (A^* \otimes I) u_k \otimes z_\ell \\ &= \sum_{k \in I\!N_0} \sum_{\ell \in I\!N_0} \langle f, v_k \otimes z_\ell \rangle_{X_1 \hat{\otimes} X} \, v_k \otimes z_\ell \\ &= f \,. \end{aligned}$$

□

Ist allgemein $f \in X_1 \hat{\otimes} X$, so können wir wegen der Dichtheit von $\mathsf{R}(A^* \otimes I)$ in $X_1 \hat{\otimes} X$ zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein g bestimmen mit

$$\|(A^* \otimes I)g - f\|_{X_1 \hat{\otimes} X} < \varepsilon \,.$$

Ein solches g findet man, indem man

$$g^M = \sum_{k=0}^{M} \sum_{\ell \in I\!N_0} \sigma_k^{-1} \langle f, v_k \otimes z_\ell \rangle_{X_1 \hat{\otimes} X} \, u_k \otimes z_\ell$$

definiert und $M > 0$ so groß wählt, daß

$$\|(A^* \otimes I)g^M - f\|_{X_1 \hat{\otimes} X} = \sum_{k=0}^{M} \sum_{\ell \in I\!N_0} |\langle f, v_k \otimes z_\ell \rangle_{X_1 \hat{\otimes} X}|^2 < \varepsilon \tag{3.7}$$

ist. Ein solches M existiert, da $\{v_k \otimes z_\ell\}_{k,\ell \in I\!N_0}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $X_1 \hat{\otimes} X$ ist.

Wir wenden die vorausgegangenen Betrachtungen auf $A = \mathcal{R}$ an mit $X_1 = L^2(\Omega^2)$, $X_2 = L^2(Z, w^{-1})$ und $X = L^2([-1,1])$. Zunächst stellen wir noch eine Bedingung an den Mollifier E_γ^j. Es sei

$$E_\gamma^j(\mathbf{x}) = e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot) \cdot e_j \,, \text{ mit } e_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{e}_\gamma(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \,, \tag{3.8}$$

wobei $\tilde{e}_\gamma \in L^2(I\!R)$ ein Mollifier ist. Wir sind jetzt in der Lage, eine Lösung der Gleichung (3.5) anzugeben. Hierzu benötigen wir jedoch ein technisches Lemma.

Lemma 3.2.8 *Seien $\Omega_1 \subset I\!R^n$, $\Omega_2 \subset I\!R^m$, $\{v_k\}_{k\in I\!N}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(\Omega_1)$ und $\{z_\ell\}_{\ell\in I\!N}$ eines von $L^2(\Omega_2)$. Dann gilt für $f \in L^2(\Omega_1)\hat{\otimes}L^2(\Omega_2) \cong L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$*

$$\begin{aligned} f(\omega_1,\omega_2) &= \left(\sum_{k\in I\!N}\sum_{\ell\in I\!N}\langle f, v_k\otimes z_\ell\rangle_{L^2(\Omega_1)\hat{\otimes}L^2(\Omega_2)}\, v_k\otimes z_\ell\right)(\omega_1,\omega_2) \\ &= \left(\sum_{k\in I\!N}\langle f(\cdot,\omega_2), v_k\rangle_{L^2(\Omega_1)}\, v_k\right)(\omega_1)\,. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $f = f_1 \otimes f_2$, mit $f_i \in L^2(\Omega_i)$, $i = 1, 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(\omega_1,\omega_2) &= (f_1\otimes f_2)(\omega_1,\omega_2) = f_1(\omega_1)\, f_2(\omega_2) \\ &= \left(\sum_{k\in I\!N}\langle f_1, v_k\rangle_{L^2(\Omega_1)}\, v_k\right)(\omega_1)\, f_2(\omega_2) \\ &= \left(\sum_{k\in I\!N}\langle f(\cdot,\omega_2), v_k\rangle_{L^2(\Omega_1)}\, v_k\right)(\omega_1)\,. \end{aligned}$$

Da die endlichen Linearkombinationen von Funktionen der Form $f_1 \otimes f_2$ dicht in $L^2(\Omega_1)\hat{\otimes}L^2(\Omega_2)$ liegen, ergibt sich hieraus die Behauptung.

□

Satz 3.2.9 *Erfüllt der Mollifier E_γ^j die Voraussetzung (3.8), so ist die Ableitung des Rekonstruktionskernes $\frac{\partial}{\partial s}\Phi_\gamma^{j,M}$ gegeben durch*

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s}\Phi_\gamma^{j,M}(\omega(\varphi), s, a) = -\frac{1}{\pi^2}\, r_j(\varphi) \sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2\rfloor}(\mu+1)\, I_\mu^\gamma(a)\, U_{2\mu+1}(s)\,, \\ &\textit{mit}\quad I_\mu^\gamma(a) = \int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\int_{I\!R}\tilde{e}_\gamma(\sqrt{\tau^2+t^2+a^2})\,dt\right] U_{2\mu+1}(\tau)\,d\tau. \end{aligned}}$$

Dabei bedeutet $r_1(\varphi) = r_2(\varphi) = \sin(\varphi)$ und $r_3(\varphi) = \cos(\varphi)$. Es ist $M = \infty$ im Falle, daß $d_jE_\gamma^j \in \mathsf{R}(\mathcal{R}^*\otimes I)$ ist, und $M < \infty$ gemäß (3.6), falls $d_jE_\gamma^j \in L^2(\Omega^2\times[-1,1])\setminus\mathsf{R}(\mathcal{R}^*\otimes I)$ ist.

Beweis: Betrachten wir zunächst $\mathcal{D}_j$ als Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $L^2(S^1\times[-1,1]^2, w^{-1})$. Seien $u_{\mu,k}$ die singulären Funktionen, σ_μ die Singulärwerte der Radon–Transformation, und $\{z_\ell\}_{\ell\in I\!N}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2([-1,1])$ (z.B. die Legendre-Polynome). Für die Lösung der Gleichung (3.5) gilt dann nach Lemma 3.2.7

$$\frac{\partial}{\partial s}\Phi_\gamma^{j,M} = \sum_{\mu=0}^{M}\sum_{k=-\mu}^{\mu}{}'\sum_{\ell\in I\!N}\sigma_\mu^{-2}\,\langle\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_jE_\gamma^j, u_{\mu,k}\otimes z_\ell\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2,w^{-1})}\, u_{\mu,k}\otimes z_\ell\,. \tag{3.9}$$

Man beachte, daß $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j = (\mathcal{R} \otimes I)d_j$ ist. Wir werden den Ausdruck auf der rechten Seite schrittweise ausrechnen.
1.) Sei $j = 1, 2$. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j E^j_\gamma(\omega(\varphi), s, a) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty} \theta_j(\omega) \cdot E^j_\gamma(\pi_j(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_j a)\, dt \\ &= -\sin(\varphi)\, \frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{s^2+t^2+a^2})\, dt\,.\end{aligned}$$

Für $j = 3$ ergibt sich wegen $\theta_3(\omega(\varphi)) = (\sin\varphi, 0, -\cos\varphi)^\top$

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_3 E^3_\gamma(\omega(\varphi), s, a) = -\cos(\varphi)\, \frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{s^2+t^2+a^2})\, dt\,.$$

2.) Für $j = 1, 2$ hat man

$$\begin{aligned}&\langle \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j E^j_\gamma, u_{\mu,k} \otimes z_\ell\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2, w^{-1})} \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} -\sin(\varphi)\, \frac{\partial}{\partial s}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{s^2+t^2+a^2})\, dt\right] \frac{1}{\pi}\, U_\mu(s)\, Y_k(\omega(\varphi))\, z_\ell(a)\, d\varphi\, ds\, da \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (-\sin(\varphi))\, Y_k(\omega(\varphi))\, d\varphi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial s}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{s^2+t^2+a^2})\, dt\right] U_\mu(s)\, z_\ell(a)\, ds\, da.\end{aligned}$$

Für $j = 3$ ist der Sinus durch den Cosinus zu ersetzen.
3.) Eine einfache Rechnung zeigt

$$-\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\, Y_k(\omega(\varphi))\, d\varphi = \begin{cases} \imath\pi\,, & k = 1\,, \\ -\imath\pi\,, & k = -1\,, \\ 0\,, & k \notin \{-1, 1\}\,. \end{cases}$$

Die Summe über k in der rechten Seite von Gleichung (3.9) hat demnach nur für $k \in \{-1, 1\}$ von Null verschiedene Einträge. Mit Hilfe von Lemma 3.2.8 ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\Phi^{j,M}_\gamma(\omega(\varphi), s, a) &= \frac{1}{\pi^2}\sum_{\mu=0}^{M}\sum_{k=-\mu}^{\mu}{}' \sigma_\mu^{-2}\int_0^{2\pi} (-\sin(\psi))\, Y_k(\vartheta(\psi))\, d\psi\ \times \\ &\quad \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{\tau^2+t^2+a^2})\, dt\right] U_\mu(\tau)\, d\tau\, w(s)\, U_\mu(s)\, Y_k(\omega(\varphi)) \\ &= \frac{1}{4\pi^3}\, w(s) \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu\ ungerade}}^{M} (\mu+1)\, \imath\pi\ (Y_1(\omega(\varphi)) - Y_{-1}(\omega(\varphi)))\ \times\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{\tau^2 + t^2 + a^2})\, dt \right] U_\mu(\tau)\, d\tau\, U_\mu(s) \\
= \;& \frac{1}{4\pi^2}\, w(s) \sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} (2\mu + 2)\,(-2\sin(\varphi))\, I_\mu^\gamma(a)\, U_{2\mu+1}(s) \\
= \;& -\frac{1}{\pi^2}\, w(s)\, \sin(\varphi) \sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} (\mu + 1)\, I_\mu^\gamma(a)\, U_{2\mu+1}(s)\,.
\end{aligned}
$$

Man beachte hierbei, daß $Y_1(\omega(\varphi)) - Y_{-1}(\omega(\varphi)) = 2\imath \sin(\varphi)$ ist. Fassen wir $\mathcal{D}_j$ wie definiert als Abbildung mit Bildbereich $L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$ auf, so erhalten wir analog zur Radon–Transformation durch Lemma 3.1.2

$$
\frac{\partial}{\partial s} \Phi_\gamma^{j,M}(\omega(\varphi), s, a) = -\frac{1}{\pi^2}\, \sin(\varphi) \sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} (\mu + 1)\, I_\mu^\gamma(a)\, U_{2\mu+1}(s)\,.
$$

Für $j = 3$ beachte man, daß

$$
-\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\, Y_k(\omega(\varphi))\, d\varphi = \begin{cases} -\pi\,, & k \in \{-1, 1\} \\ 0\,, & k \notin \{-1, 1\} \end{cases}
$$

und $Y_1(\omega(\varphi)) + Y_{-1}(\omega(\varphi)) = 2\cos(\varphi)$ ist. Dann resultiert durch eine analoge Rechnung

$$
\frac{\partial}{\partial s} \Phi_\gamma^{3,M}(\omega(\varphi), s, a) = -\frac{1}{\pi^2}\, \cos(\varphi) \sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} (\mu + 1)\, I_\mu^\gamma(a)\, U_{2\mu+1}(s)\,.
$$

Hiermit ist der Satz vollständig bewiesen.

□

Bemerkung: Ist $M < \infty$, so wird der Abbruchindex M gemäß den Gleichungen (3.7), bzw. (3.6) gewählt.
Die Bedingung $d_j E_\gamma^j \in \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$ impliziert $E_\gamma^j \in X_\alpha$ für ein $\alpha \geq 1$. Das wiederum verspricht uns nach den Überlegungen aus dem vorhergehenden Abschnitt einen Rekonstruktionskern Φ_γ^j aus $L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$. In praktischen Fällen wird man die unendliche Reihe sowieso nach endlich vielen Schritten abbrechen, worauf wir später zurückkommen.
Wir setzen allerdings für die weiteren Berechnungen generell voraus, daß unser Mollifier E_γ^j die folgenden Bedingungen erfüllt

$$
E_\gamma^j \in \mathsf{D}((\mathcal{D}_j^*)^\dagger) \quad \text{und} \quad d_j E_\gamma^j \in \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)\,. \tag{3.10}
$$

Es ist dann $M = \infty$. Abkürzend schreiben wir Φ_γ^j statt $\Phi_\gamma^{j,\infty}$.

Korollar 3.2.10 *E_γ^j erfülle die Bedingungen (3.8) und (3.10). Es gibt eine Funktion h_γ^j, die nicht von s abhängt, so daß*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \Phi_\gamma^j(\omega, s, a) & = & K_\gamma^j(\omega, s, a) + h_\gamma^j(\omega, a)\,, \\ K_\gamma^j(\omega(\varphi)), s, a) & = & -\dfrac{1}{\pi^2}\, r_j(\varphi) \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)\, I_\mu^\gamma(a) \int\limits_{-1}^{s} U_{2\mu+1}(\tau)\, d\tau\,. \end{array}}$$

ist.

Über die Funktion h_γ^j ist zunächst nichts näheres bekannt, es wird uns auch nicht gelingen, diese für beliebige Mollifier E_γ^j zu bestimmen. Aus der Tatsache, daß Φ_γ^j die Normalgleichung (3.2) erfüllt, gewinnt man eine Eigenschaft der Funktionen h_γ^j.

Lemma 3.2.11 *E_γ^j erfülle die Bedingung (3.10). Es gilt*

$$\int_{S^1} h_\gamma^j(\omega(\varphi), a)\, \bar{r}_j(\varphi)\, d\varphi = 0\,, \quad \textit{für } j \in \{1,2,3\}\,.$$

Dabei sind $\bar{r}_1(\varphi) = \bar{r}_2(\varphi) = \cos(\varphi)$ und $\bar{r}_3(\varphi) = \sin(\varphi)$.

Beweis: Sei $j = 1, 2$. Die Normalgleichung $\mathcal{D}_j \mathcal{D}_j^* \Phi_\gamma^j = \mathcal{D}_j E_\gamma^j$ läßt sich mit Hilfe von Satz 1.4.8 und Korollar 3.2.10 schreiben als

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-w(s)}^{w(s)} \int\limits_{0}^{2\pi} \left(-\frac{1}{\pi^2} \sin(\varphi) \sum_{\mu=0}^{\infty} I_\mu^\gamma(a)\, (\mu+1) \int\limits_{-1}^{\langle s\vartheta + t\vartheta^\perp, \omega(\varphi)\rangle} U_{2\mu+1}(\tau)\, d\tau + h_\gamma^j(\omega(\varphi), a) \right) \times \\ &\qquad \times \langle \vartheta, \omega(\varphi)\rangle\, d\varphi\, dt \qquad (3.11) \\ &= -\sin(\psi) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{s^2+t^2+a^2})\, dt\,, \end{aligned}$$

mit $\vartheta = \vartheta(\psi) \in S^1$. Setzen wir $\psi = 0$, so ergibt sich wegen $\langle \vartheta, \omega \rangle = \cos(\varphi)$ die Gleichung (3.11) zu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-w(s)}^{w(s)} \int_{S^1} \sin(\varphi)\, \cos(\varphi) \sum_{\mu=0}^{\infty} I_\mu^\gamma(a)\, (\mu+1) \int\limits_{-1}^{s\cos\varphi + t\sin\varphi} U_{2\mu+1}(\tau)\, d\tau\, d\varphi\, dt \\ &= \int\limits_{-w(s)}^{w(s)} \int_{S^1} h_\gamma^j(\omega(\varphi), a)\, \cos(\varphi)\, d\varphi\, dt\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $Q_\mu(s, \varphi)$ sei definiert durch

$$Q_\mu(s, \varphi) = \sin(\varphi)\, \cos(\varphi) \int\limits_{-w(s)}^{w(s)} \int\limits_{-1}^{s\cos\varphi + t\sin\varphi} U_{2\mu+1}(\tau)\, d\tau\, dt\,.$$

Diese Funktion erfüllt $Q_\mu(s,-\varphi) = -Q_\mu(s,\varphi)$ und daher ist

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{S^1} \sum_{\mu=0}^{\infty} I_\mu^\gamma(a)\,(\mu+1)\,Q_\mu(s,\varphi)\,d\varphi = 0\,.$$

Dann muß aber auch

$$\int_{S^1} h_\gamma^j(\omega(\varphi),a)\,\cos(\varphi)\,d\varphi = 0$$

gelten und somit die Behauptung für $j = 1,2$.
Für $j = 3$ führt man die analoge Rechnung mit $\psi = \frac{\pi}{2}$ und damit $\langle\vartheta,\omega\rangle = \sin(\varphi)$ durch.

□

Alle weiteren Untersuchungen unternehmen wir für einen ganz speziellen Mollifier, der die Bedingungen (3.10) erfüllt. Es handelt sich hierbei, um die schon bei der 2D–Computer–Tomographie verwendete Gauss-Funktion

$$\tilde{e}_\gamma(s) = (2\pi)^{-3/2}\,\gamma^{-3}\,\exp(-s^2/(2\gamma^2))\,. \tag{3.12}$$

Aufgrund der Glattheit dieses Mollifiers sind die Voraussetzungen (3.10) erfüllt. Für diesen Mollifier gilt

$$\begin{aligned} I_\mu^\gamma(a) &= (2\pi)^{-3/2}\,\gamma^{-3} \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(t^2+\tau^2+a^2)/(2\gamma^2))\,dt\right) U_{2\mu+1}(\tau)\,d\tau \\ &= -(2\pi)^{-1}\,\gamma^{-4} \int_{-1}^{1} \tau\,\exp(-\tau^2/(2\gamma^2))\,U_{2\mu+1}(\tau)\,d\tau\,\exp(-a^2/(2\gamma^2)) \\ &= -(2\pi)^{-1}\,\gamma^{-4}\,c_\mu^\gamma\,\exp(-a^2/(2\gamma^2))\,, \end{aligned}$$

wobei

$$c_\mu^\gamma = 2\int_0^1 \tau\,\exp(-\tau^2/(2\gamma^2))\,U_{2\mu+1}(\tau)\,d\tau$$

ist. Wegen

$$\int_{-1}^{s} U_{2\mu+1}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\mu+2}\Big(\cos\left((2\mu+2)\arccos s\right) - 1\Big) = \frac{1}{2\mu+2}\Big(T_{2\mu+2}(s) - 1\Big)\,,$$

wobei $T_\mu(s) = \cos(\mu \arccos s)$ die Tschebyscheff-Polynome 1. Art bedeuten, ergibt sich für K_γ^j der folgende Ausdruck:

$$K_\gamma^j(\omega(\varphi),s,a) = \frac{1}{4\pi^3}\,\gamma^{-4}\,r_j(\varphi)\,\exp(-a^2/(2\gamma^2)) \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu^\gamma\,\left(T_{2\mu+2}(s) - 1\right)\,. \tag{3.13}$$

Die Funktionen h_γ^j aus Korollar 3.2.10 sind noch immer unbekannt. Nehmen wir an, daß Φ_γ^j die eindeutige Lösung der Normalgleichung (3.2) in $\overline{\mathsf{R}(\mathcal{D}_j)}$ ist, so können wir h_γ^j für unseren speziellen Mollifier näher bestimmen.

Satz 3.2.12 *Sei $\tilde{e}_\gamma$ wie in Gleichung (3.12) vorgegeben. Ferner sei Φ^j_γ die eindeutige Lösung der Normalgleichung (3.2) in $\overline{\mathsf{R}(\mathcal{D}_j)}$. Dann gibt es eine Funktion $\tilde{h}^j_\gamma \in L^2(S^1)$ mit*

$$h^j_\gamma(\omega, a) = \tilde{h}^j_\gamma(\omega)\ \exp(-a^2/(2\gamma^2))\,.$$

Beweis: 1.) Wir setzen unseren speziellen Mollifier in die Normalgleichung (3.2) ein, und erhalten gemäß Gleichung (3.11) zwei Funktionen f^j_γ und g^j_γ mit

$$f^j_\gamma(\omega, s)\ \exp(-a^2/(2\gamma^2)) + 2\,w(s) \int_{S^1} h^j_\gamma(\vartheta, a)\,\langle\vartheta, \omega\rangle\, d\vartheta = g^j_\gamma(\omega, s)\exp(-a^2/(2\gamma^2))\,.$$

Dabei sind

$$f^j_\gamma(\omega, s) = \frac{\gamma^{-4}}{4\pi^3} \int\limits_{-w(s)}^{w(s)} \int_{S^1} r_j(\psi) \sum_{\mu=0}^{\infty} c^\gamma_\mu \Big(T_{2\mu+2}(\langle s\vartheta + t\vartheta^\perp, \omega\rangle) - 1\Big)\ \langle\vartheta, \omega\rangle\, d\vartheta\, dt$$

und

$$g^j_\gamma(\omega, s) = -(2\pi)^{-1}\,\gamma^{-2}\, r_j(\varphi)\ \exp(-s^2/(2\gamma^2))\,.$$

Definieren wir weiter

$$k^j_\gamma(\omega, s) = \frac{g^j_\gamma(\omega, s) - f^j_\gamma(\omega, s)}{2\,w(s)}\,,$$

so gilt offenbar

$$\exp(-a^2/(2\gamma^2))\, k^j_\gamma(\omega, s) = \int_{S^1} h^j_\gamma(\vartheta, a)\,\langle\vartheta, \omega\rangle\, d\vartheta \tag{3.14}$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial s} k^j_\gamma(\omega, s) = 0\,,$$

d.h. k^j_γ hängt nur von ω ab, und Gleichung (3.14) geht über in

$$\exp(-a^2/(2\gamma^2))\, k^j_\gamma(\omega) = \int_{S^1} h^j_\gamma(\vartheta, a)\,\langle\vartheta, \omega\rangle\, d\vartheta\,. \tag{3.15}$$

Für $k \in I\!N_0$ seien $c_k \in L^2(S^1)$ und $s_k \in L^2(S^1)$ definiert durch

$$c_k(\omega(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k\varphi)\,, \qquad s_k(\omega(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\varphi)\,.$$

Die Menge $\{c_k, s_k\}_{k \in I\!N_0}$ bildet ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(0, 2\pi)$. Sei weiter $\{g_\ell\}_{\ell \in I\!N}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(-1, 1)$, so bildet die Menge $\{c_k \otimes g_\ell, s_k \otimes g_\ell\}_{(k,\ell) \in I\!N_0 \times I\!N}$ eine Orthonormalbasis für $L^2((0, 2\pi) \times (-1, 1))$, siehe Weidmann [37]. Die Funktionen h^j_γ lassen sich demnach darstellen durch

$$h^j_\gamma(\omega(\varphi), a) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \Big(h^{1,j}_{k\ell}\ c_k \otimes g_\ell + h^{2,j}_{k\ell}\ s_k \otimes g_\ell\Big)(\varphi, a) \tag{3.16}$$

mit

$$\begin{aligned} h_{k\ell}^{1,j} &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} h_\gamma^j(\omega(\varphi),a)\,(c_k\otimes g_\ell)(\varphi,a)\,da\,d\varphi\,, \\ h_{k\ell}^{2,j} &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} h_\gamma^j(\omega(\varphi),a)\,(s_k\otimes g_\ell)(\varphi,a)\,da\,d\varphi\,. \end{aligned}$$

2.) Wir zeigen zunächst: Für $k \neq 1$ gilt

$$h_{k\ell}^{1,j} = h_{k\ell}^{2,j} = 0\,. \tag{3.17}$$

Mit Hilfe der in Satz 1.4.8 angegebenen Darstellung von $\mathcal{D}_j^*$ sieht man sofort, daß $c_k \otimes g_\ell \in \mathsf{N}(\mathcal{D}_j^*)$ und $s_k \otimes g_\ell \in \mathsf{N}(\mathcal{D}_j^*)$ sind für $k \neq 1$. Da $\Phi_\gamma^j \in \overline{\mathsf{R}(\mathcal{D}_j)}$ ist, gilt

$$\langle \Phi_\gamma^j, c_k\otimes g_\ell\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)} = \langle \Phi_\gamma^j, s_k\otimes g_\ell\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)} = 0$$

für $k \neq 1$. Anhand der Darstellung (3.13) von K_γ^j erkennt man, daß für $k \neq 1$

$$\langle K_\gamma^j, c_k\otimes g_\ell\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)} = \langle K_\gamma^j, s_k\otimes g_\ell\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)} = 0$$

gilt. Eine Anwendung von Korollar 3.2.10 liefert schließlich:

$$\langle h_\gamma^j, c_k\otimes g_\ell\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)} = \langle h_\gamma^j, s_k\otimes g_\ell\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)} = 0$$

für $k \neq 1$, und die Gleichheit (3.17) ist bewiesen.
3.) Es verbleibt die Berechnung von $h_{1\ell}^{1,j}$ und $h_{1\ell}^{2,j}$. Wir setzen in (3.15) $\omega = \omega_0 = (1,0)^\top$ und gewinnen so die Beziehung

$$\begin{aligned} h_{1\ell}^{1,j} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} h_\gamma^j(\vartheta(\psi),a)\,(\cos\psi)\,g_\ell(a)\,da\,d\psi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,k_\gamma^j(\omega_0)\int_{-1}^{1}\exp(-a^2/(2\gamma^2))\,g_\ell(a)\,da\,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $\omega = \omega_1 = (0,1)^\top$ in (3.15) erhalten wir analog

$$\begin{aligned} h_{1\ell}^{2,j} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} h_\gamma^j(\vartheta(\psi),a)\,(\sin\psi)\,g_\ell(a)\,da\,d\psi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,k_\gamma^j(\omega_1)\int_{-1}^{1}\exp(-a^2/(2\gamma^2))\,g_\ell(a)\,da\,. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 3.2.11 gilt für $j = 1,2$

$$h_{1\ell}^{1,j} = 0\,,\qquad h_{1\ell}^{2,j} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,k_\gamma^j(\omega_1)\int_{-1}^{1}\exp(-a^2/(2\gamma^2))\,g_\ell(a)\,da$$

und für $j = 3$

$$h_{1\ell}^{1,3} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, k_\gamma^j(\omega_0) \int\limits_{-1}^{1} \exp(-a^2/(2\gamma^2))\, g_\ell(a)\, da\,, \quad h_{1\ell}^{2,3} = 0\,.$$

Setzen wir die Berechnungen aus den Teilen 2.) und 3.) in (3.16) ein, so erhalten wir für $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} h_\gamma^j(\omega(\varphi), a) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} h_{1\ell}^{2,j}\, (s_1 \otimes g_\ell)(\varphi, a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, k_\gamma^j(\omega_1)\, \sin\varphi \sum_{\ell=1}^{\infty} \int\limits_{-1}^{1} \exp(-z^2/(2\gamma^2))\, g_\ell(z)\, dz\, g_\ell(a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, k_\gamma^j(\omega_1)\, \sin\varphi\, \exp(-a^2/(2\gamma^2)) \end{aligned}$$

und für $j = 3$

$$h_\gamma^3(\omega(\varphi), a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, k_\gamma^3(\omega_0)\, \cos\varphi\, \exp(-a^2/(2\gamma^2))\,.$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich mit den Festlegungen

$$\tilde{h}_\gamma^j(\omega(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, k_\gamma^j(\omega_1)\, \sin\varphi$$

für $j = 1, 2$ und

$$\tilde{h}_\gamma^3(\omega(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, k_\gamma^3(\omega_0)\, \cos\varphi\,.$$

□

Bemerkung: Der vorangegangene Satz kann nicht ohne weiteres auf beliebige Mollifier übertragen werden. Der entscheidende Vorteil der Gaussschen Glockenfunktion liegt darin, daß sich die drei Raumvariablen entkoppeln lassen.

Die bei der Definition der Funktionen $\tilde{h}_\gamma^j$ auftretenden Größen $k_\gamma^j(\omega_0)$ und $k_\gamma^j(\omega_1)$ hängen weder von j ab noch von ω_0 oder ω_1.

Lemma 3.2.13 *Es gilt*

$$k_\gamma^1(\omega_1) = k_\gamma^2(\omega_1) = k_\gamma^3(\omega_0) = \frac{\gamma^{-4}}{8\pi^3} \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu^\gamma\, (2\pi - z_\mu) - \frac{\gamma^{-2}}{4\pi} =: \kappa_\gamma\,,$$

mit

$$\begin{aligned} z_0 &= -5\pi/3\,, \\ z_\mu &= (-1)^{\mu+1}\, 8\pi\, \frac{\mu+1}{4\mu^2 + 8\mu + 3}\,, \quad \mu = 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

Beweis: Sei zunächst $j \in \{1,2\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
k_\gamma^j(\omega_1) &= \frac{1}{2}\Big(g_\gamma^j(\omega(\pi/2),0) - f_\gamma^j(\omega(\pi/2),0)\Big) \\
&= -\frac{\gamma^{-4}}{8\pi^3}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}(\sin\psi)^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu^\gamma \Big(T_{2\mu+2}(t\,\cos\psi)-1\Big)\,d\psi\,dt - \frac{\gamma^{-2}}{4\pi} \\
&= \frac{\gamma^{-4}}{8\pi^3}\sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu^\gamma\,(2\pi - z_\mu) - \frac{\gamma^{-2}}{4\pi}
\end{aligned}$$

wegen

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}(\sin\psi)^2\,T_{2\mu+2}(t\,\cos\psi)\,d\psi\,dt = z_\mu\,, \tag{3.18}$$

z_μ wie angegeben. Der Beweis von (3.18) geht aus dem nachfolgenden Lemma hervor. Hieraus ergibt sich die Behauptung für $j \in \{1,2\}$.
Für $j = 3$ führt man eine analoge Rechnung mit ω_0 durch. Man erhält die Behauptung unter Berücksichtigung von

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}(\cos\psi)^2\,T_{2\mu+2}(-t\,\sin\psi)\,d\psi\,dt = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}(\sin\zeta)^2\,T_{2\mu+2}(t\,\cos\zeta)\,d\zeta\,dt\,.$$

Diese letzte Gleichheit erreicht man mit Hilfe der Substitution $\psi = \zeta - \frac{\pi}{2}$.

□

Lemma 3.2.14 *Es gilt*

$$M_\mu := \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}(\sin\psi)^2\,T_{2\mu+2}(t\,\cos\psi)\,d\psi\,dt = \begin{cases} -5\pi/3 & ,\ \text{für } \mu = 0\,, \\ (-1)^{\mu+1}\,\dfrac{8\pi\mu+8\pi}{4\mu^2+8\mu+3} & ,\ \text{für } \mu \ge 1\,. \end{cases}$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
M_\mu &= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}(\sin\psi)^2\,T_{2\mu+2}(t\,\cos\psi)\,d\psi\,dt = 4\int_0^1\int_0^{\pi}(\sin\psi)^2\,T_{2\mu+2}(t\,\cos\psi)\,d\psi\,dt \\
&= 8\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,T_{2\mu+2}(t\,u)\,du\,dt = 8\int_0^1 u^{-1}\sqrt{1-u^2}\int_0^u T_{2\mu+2}(z)\,dz\,du\,,
\end{aligned}$$

wobei die Substitutionen $u = \cos\psi$ und $z = tu$ Anwendung fanden. Indem wir die Formel (22.5.8) aus Abramowitz, Stegun [2] ausnutzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^u T_{2\mu+2}(z)\,dz &= \frac{1}{2}\left(\int_0^u U_{2\mu+2}(z)\,dz - \int_0^u U_{2\mu}(z)\,dz\right) \\
&= \frac{1}{4\mu+6}\,T_{2\mu+3}(u) - \frac{1}{4\mu+2}\,T_{2\mu+1}(u)\,,
\end{aligned}$$

was

$$M_\mu = 4 \int_0^1 u^{-1} \sqrt{1-u^2} \left(\frac{1}{2\mu+3} T_{2\mu+3}(u) - \frac{1}{2\mu+1} T_{2\mu+1}(u) \right) du$$

ergibt. Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 u^{-1} \sqrt{1-u^2}\, T_{2\mu+1}(u)\, du \\
= & \int_0^1 u^{-1} (1-u^2)^{-1/2} (1-u^2)\, T_{2\mu+1}(u)\, du \\
= & \int_0^1 u^{-1} (1-u^2)^{-1/2}\, T_{2\mu+1}(u)\, du \\
& - \int_0^1 u\, (1-u^2)^{-1/2}\, T_{2\mu+1}(u)\, du \\
= & \frac{\pi}{2} U_{2\mu}(0) - \frac{\pi}{8\, B(\mu+2, 1-\mu)} .
\end{aligned}$$

Dabei wurden die Formeln (7.344.2) und (7.346) aus Gradshteyn, Ryzhik [11] benutzt, $B(\cdot,\cdot)$ ist die Beta-Funktion. Unter Beachtung von $U_{2\mu}(0) = (-1)^\mu$ ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
M_\mu &= \frac{4}{2\mu+3} \left(\frac{\pi}{2} (-1)^{\mu+1} - \frac{\pi}{8\, B(\mu+3, -\mu)} \right) \\
& \quad - \frac{4}{2\mu+1} \left(\frac{\pi}{2} (-1)^{\mu} - \frac{\pi}{8\, B(\mu+2, 1-\mu)} \right) \\
&= (-1)^{\mu+1} \left(\frac{2\pi}{2\mu+3} + \frac{2\pi}{2\mu+1} \right) + \frac{\pi}{4\mu+2} \frac{1}{B(\mu+2, 1-\mu)} \\
& \quad - \frac{\pi}{4\mu+6} \frac{1}{B(\mu+3, -\mu)} \\
&= (-1)^{\mu+1}\, 8\pi \frac{\mu+1}{4\mu^2+8\mu+3} + N_\mu
\end{aligned}$$

mit

$$N_\mu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2\mu+1} \frac{1}{B(\mu+2, 1-\mu)} - \frac{1}{2\mu+3} \frac{1}{B(\mu+3, -\mu)} \right) .$$

Bezeichnet Γ die Eulersche Gamma-Funktion, so ist

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\, \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} ,$$

und wegen $1/\Gamma(z) = 0$ für $z = 0, -1, -2, \dots$ gilt

$$N_\mu = \begin{cases} \pi\,, & \text{falls } \mu = 0\,, \\ 0\,, & \text{falls } \mu \geq 1\,. \end{cases}$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Mit Hilfe von Satz 3.2.12 und Lemma 3.2.13 sind wir schließlich in der Lage, die Funktionen h_γ^j anzugeben.

Korollar 3.2.15 *Die Funktionen h_γ^j haben die Darstellung*

$$h_\gamma^j(\omega(\varphi), a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\kappa_\gamma\, r_j(\varphi)\, \exp(-a^2/(2\gamma^2))\,.$$

Beweis: Das Korollar ist eine unmittelbare Folgerung der Ergebnisse aus Satz 3.2.12 und Lemma 3.2.13.

□

Die Korollare 3.2.10 und 3.2.15 können wir zusammenfassen zu der folgenden Aussage.

Korollar 3.2.16 *Für unseren speziellen Mollifier (3.12) ist die eindeutige Lösung der Normalgleichung (3.2) für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in $\overline{\mathsf{R}(\mathcal{D}_j)}$ gegeben durch*

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_\gamma^j(\omega(\varphi), s, a) &= K_\gamma^j(\omega(\varphi), s, a) + h_\gamma^j(\omega(\varphi), a) \\ &= r_j(\varphi)\, \exp(-a^2/(2\gamma^2))\, \left(\frac{\gamma^{-4}}{4\pi^3} \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu^\gamma \Big(T_{2\mu+2}(s) - 1\Big) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\kappa_\gamma \right)\,. \end{aligned} \qquad (3.19)}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma &= \frac{\gamma^{-4}}{8\pi^3} \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu^\gamma\,(2\pi - z_\mu) - \frac{\gamma^{-2}}{4\pi}\,, \\ c_\mu^\gamma &= 2 \int_0^1 \tau\, \exp(-\tau^2/(2\gamma^2))\, U_{2\mu+1}(\tau)\, d\tau\,, \\ z_0 &= -5\pi/3\,, \\ z_\mu &= (-1)^{\mu+1}\, 8\pi\, \frac{\mu+1}{4\mu^2 + 8\mu + 3}\,, \qquad \mu = 1, 2, \dots\,. \end{aligned}$$

Eine Darstellung von $-\Phi_\gamma^{1,M}$ für $M = 56$, $\gamma = 0.05$ und $a = 0$ ist in Abbildung 3.2.1 dargestellt. Die Integrale c_μ^γ wurden numerisch berechnet. Durch die Darstellung des Inversen $-\Phi_\gamma^{1,M}$ kommt die Struktur des Kernes deutlicher zum Vorschein.

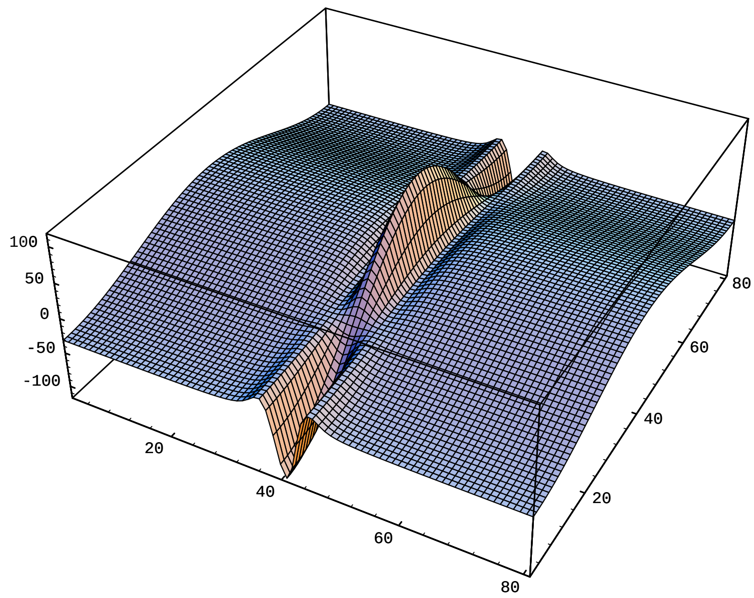

Abbildung 3.2.1 $-\Phi^M_{\gamma,1}$ für $\gamma = 0.05$, $M = 56$ und $a = 0$

Bei praktischen Anwendungen wird man die Reihe in der Darstellung (3.19) nach endlich vielen Schritten abbrechen. Hierbei stellt sich die Frage nach einem geeigneten Abbruchkriterium. Man wird zunächst versucht sein, ein Kriterium der Form

$$\|\mathcal{D}_j^* \Phi_\gamma^{j,M} - E_\gamma^j\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon_j$$

für beliebig kleine $\varepsilon_j > 0$ anzuwenden, ähnlich wie wir es bei der Radon–Transformation getan haben. $\mathcal{D}_j$ ist jedoch nicht injektiv, und E_γ^j ist im allgemeinen kein Element aus $\mathsf{N}(\mathcal{D}_j)^\perp$. Es ist daher nicht möglich, die obige Norm beliebig klein zu wählen. Wir wählen aus diesem Grund unseren Abbruchindex $M > 0$ so groß, daß zu vorgegebenen $\varepsilon_j > 0$ das Kriterium

$$\|(\mathcal{R}^* \otimes I)\frac{\partial}{\partial s}\Phi_\gamma^{j,M} - d_j E_\gamma^j\|_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])} < \varepsilon_j \tag{3.20}$$

erfüllt ist. Wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, ist dies auch das Vorgehen für den Fall, daß $d_j E_\gamma^j \notin \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$ ist.
Gilt $E_\gamma^j \notin \mathsf{D}((\mathcal{D}_j^*)^\dagger)$, besitzt die Normalgleichung (3.2) also keine Lösung, so kann man wegen der Dichtheit von $\mathsf{D}((\mathcal{D}_j^*)^\dagger)$ höchstens einen Rekonstruktionskern Φ_γ^j so bestimmen, daß

$$\|\mathcal{D}_j \mathcal{D}_j^* \Phi_\gamma^j - \mathcal{D}_j E_\gamma^j\|_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)} < \varepsilon_j$$

ist. Es ist jedoch völlig unklar, wie man einen solchen ohne Kenntnis der Singulärwertzerlegung von $\mathcal{D}_j$ erhält.
Zusammenfassend kann man eine 'Rezeptur' zur Bestimmung von Rekonstruktionskernen für die Vektor–Tomographie wie folgt angeben.

- Wähle einen Mollfier E_γ^j, der die Bedingungen (3.8) und (3.10) erfüllt.
- Bestimme die Ableitung des Rekonstruktionskernes $\frac{\partial}{\partial s}\Phi_\gamma^j$ als Lösung der Gleichung
$$(\mathcal{R}^* \otimes I)\frac{\partial}{\partial s}\Phi_\gamma^j = d_j E_\gamma^j \,.$$
- Integriere die Lösung bezüglich s und bestimme den additiven Term so, daß Φ_γ^j die Normalgleichung (3.2) löst.
- Ist $E_\gamma^j \notin \mathsf{D}((\mathcal{D}_j^*)^\dagger)$, oder $d_j E_\gamma^j \notin \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$, so bestimme man ein $\Phi_\gamma^{j,M}$ mit Hilfe von Kriterium (3.20).

Für die folgende Anwendung auf die diskrete Doppler–Transformation werden wir ausschließlich den Rekonstruktionskern (3.19) verwenden.

3.2.3 Die diskrete Doppler–Transformation

Bei praktischen Anwendungen stehen uns nur endlich viele Daten zur Verfügung. Wir werden daher unseren Operator wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben diskretisieren und die dort hergeleiteten theoretischen Aspekte auf die Doppler–Transformation anwenden. Der Übersicht halber lassen wir an manchen Stellen den Regularisierungsparameter γ aus, da dieser bei den folgenden Betrachtungen keine Rolle spielt.
Unsere Diskretisierung wählen wir wie folgt: Für $p,q,r \in \mathbb{N}$ seien $\varphi_\nu = \nu \cdot h_\varphi$, $\nu = 0,\dots,p-1$, $h_\varphi = 2\pi/p$, $s_l = l \cdot h_s$, $l = -q,\dots,q-1$, $h_s = 1/q$ und $a_k = k \cdot h_a$, $k = -r,\dots,r-1$, $h_a = 1/r$. Mit Hilfe dieser Punkte definieren wir die Funktionale Ψ_n für $\alpha > 1/2$ durch

$$\begin{aligned} \Psi_n : Y_\alpha &\to \mathbb{R}^n \,, \\ (\Psi_n g)_{\nu,l,k} &:= \langle \psi_{\nu,l,k}, g\rangle_{Y_\alpha^*\times Y_\alpha} \,, \\ \langle \psi_{\nu,l,k}, g\rangle_{Y_\alpha^*\times Y_\alpha} &:= \zeta_{\nu,l,k}\, g(\omega(\varphi_\nu), s_l, a_k) \,. \end{aligned}$$

Dabei ist $n = 4pqr$ die Anzahl der Daten, die Konstante $\zeta_{\nu,l,k}$ wird später definiert.

Definition 3.2.17 *Sei $\alpha > 1/2$. Der Operator $\mathcal{D}_n : X_\alpha \to I\!R^{3n}$, der definiert ist durch*

$$\mathcal{D}_n := \oplus_{j=1}^3 \mathcal{D}_{n,j}\,, \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}_{n,j} := \Psi_n \mathcal{D}_j$$

heißt diskrete Doppler–Transformation.

Wir können unser Rekonstruktionsproblem wie folgt formulieren:
Finde für $j \in \{1,2,3\}$ zu vorgegebenem $g_{n,j} \in I\!R^n$ ein $f \in X_\alpha$ mit

$$\mathcal{D}_{n,j} f = g_{n,j}\,.$$

Als nächstes legen wir die endlichdimensionalen Unterräume V_n von $L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$ fest. Wir definieren V_n als Tensorprodukt von Splineräumen, genauer sei $V_n = S_\varphi \otimes S_s \otimes S_a$, wobei S_φ, S_s, S_a Funktionsräume sind, die aus stückweise konstanten Splines aufgespannt werden. Als Basis von V_n wählen wir

$$\{B_{p,\nu} \otimes B_{q,l} \otimes B_{r,k}/\zeta_{\nu,l,k} \,|\, 0 \le \nu \le p-1\,,\ -q \le l \le q-1\,,\ -r \le k \le r-1\}\,,$$

wobei $B_{p,\nu} \in S_\varphi$, $B_{q,l} \in S_s$, $B_{r,k} \in S_a$ die charakteristischen Funktionen zu unseren Knoten φ_ν, s_l, a_k sind, also

$$B_{p,\nu} = \chi_{[\varphi_\nu,\varphi_{\nu+1})}\,, \quad B_{q,l} = \chi_{[s_l,s_{l+1})}\,, \quad B_{r,k} = \chi_{[a_k,a_{k+1})}\,.$$

Die Konstanten $\zeta_{\nu,l,k}$ seien gerade die L^2-Normen der Basisfunktionen.

$$\zeta_{\nu,l,k} := \|B_{p,\nu} \otimes B_{q,l} \otimes B_{r,k}\|_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)}\,,$$

für $\nu = 0,\dots,p-1$, $l = -q,\dots,q-1$ und $k = -r,\dots,r-1$.
Weiterhin legen wir den Interpolationsoperator $\Pi_n : Y_\alpha \to V_n$, für $\alpha > 1/2$ fest durch

$$\begin{aligned}\Pi_n y &= \sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{l=-q}^{q-1}\sum_{k=-r}^{r-1} (\Psi_n y)_{\nu,l,k}\, B_{p,\nu} \otimes B_{q,l} \otimes B_{r,k}/\zeta_{\nu,l,k} \\ &= \sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{l=-q}^{q-1}\sum_{k=-r}^{r-1} y(\omega(\varphi_\nu), s_l, a_k)\, B_{p,\nu} \otimes B_{q,l} \otimes B_{r,k}\,.\end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, daß die Aussagen (2.17) und (2.18) gelten.

Lemma 3.2.18 *Es sei $h := \max\{h_\varphi, h_s, h_a\}$, $\alpha > 1/2$. Dann gelten für $n \to \infty$ und $y \in Y_\alpha$ die Abschätzungen*
a) $\|\Pi_n y\|_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)} \preceq \|y\|_{Y_\alpha}$,
b) $\|y - \Pi_n y\|_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)} \preceq h\,\|y\|_{Y_\alpha}$.

Beweis: Die Abschätzungen können analog zu Standardabschätzungen der Splinetheorie bewiesen werden, es sei zum Beispiel auf Schumaker [30] verwiesen.

□

Wie bei der Radon–Transformation, können wir zu dem diskreten Operator $\mathcal{D}_{n,j}$ keinen Rekonstruktionskern definieren, da $\mathcal{D}_{n,j}^*$ nicht existiert. Vielmehr werden wir wie in Abschnitt 2.2.2.2 vorgehen. Wir wählen m Rekonstruktionspunkte $\mathbf{x}_i \in \Omega^3$, $i = 1, \ldots, m$, und setzen

$$E_j^i := \mathbf{T}_1^{\mathbf{x}_i} E_\gamma^j \,. \tag{3.21}$$

Dabei ist E_γ^j der im vorhergehenden Abschnitt verwendete Mollifier. Wie in Abschnitt 3.2.1 bereits erwähnt, ist $\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\Phi_\gamma^j$ eine sinnvolle Näherung für $\Phi_\gamma^j(\mathbf{x}_i)$. Als Ersatz für einen Rekonstruktionskern für $\mathcal{D}_{n,j}$ zu unserem Mollifier (3.21) nehmen wir analog zu den Ergebnissen im Abschnitt 2.2.2

$$\Psi_n \mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\Phi_\gamma^j \,.$$

Diese Festlegung motiviert die Definition des Operators $\mathbf{\Sigma}_{n,m} : I\!R^{3n} \to I\!R^{3m}$ wie in Abschnitt 2.2.2 durch

$$(\mathbf{\Sigma}_{n,m} g)_i = ((\mathbf{\Sigma}_{n,m}^1 g)_i, (\mathbf{\Sigma}_{n,m}^2 g)_i, (\mathbf{\Sigma}_{n,m}^3 g)_i)^\top \,, \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m \,,$$

wobei

$$(\mathbf{\Sigma}_{n,m}^j g)_i = \langle g_j, G_n\, \Psi_n\, \mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\Phi_\gamma^j \rangle_{I\!R^n}$$

ist.
Die Gram'sche Matrix G_n ist gerade die Einheitsmatrix I_n. Ist $g_{n,j} = \mathcal{D}_{n,j}\mathbf{f}$, so hat der Operator $\mathbf{\Sigma}_{n,m}^j$ die Gestalt

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Sigma}_{n,m}^j\, g_n)_i \quad &= \quad \frac{\pi}{8pqr} \sum_{k=-r}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{p-1} \sum_{l=-q}^{q-1} g_{n,j}(\omega(\varphi_\nu), s_l, a_k) \\ &\quad \times \Phi_\gamma^j \left(\omega(\varphi_\nu), \frac{s_l - (\pi_j^* \mathbf{x}_i)^\top \omega(\varphi_\nu)}{2}, \frac{a_k - \tau_j^* \mathbf{x}_i}{2} \right) \,.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Aufgrund dieser Struktur läßt sich bei Anwendungen der Ausdruck $\mathbf{\Sigma}_{n,m}\mathcal{D}_n\mathbf{f}$ analog zum aus der 2D–Computer–Tomographie bekannten Verfahren der *gefilterten Rückprojektion* programmieren.
Wir wollen zeigen, daß $(\mathbf{\Sigma}_{n,m}^j \mathcal{D}\mathbf{f})_i$ in einem bestimmten Sinn eine Approximation an $\mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i)$ darstellt. Hierzu benötigen wir jedoch noch einen Hilfssatz.

Lemma 3.2.19 *Es sei $y \in Y_\alpha = H^{\alpha+1/2}(\tilde{Z}) \hat{\otimes} H^\alpha(-1,1)$ für ein $\alpha \geq 0$. Dann gilt*

$$\|\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}} y\|_{Y_\alpha} \preceq \|y\|_{Y_\alpha} \,.$$

Beweis: Sei $y = y_1 \otimes y_2$, mit $y_1 \in H^{\alpha+1/2}(\tilde{Z})$ und $y_2 \in H^\alpha(-1,1)$. Wegen $\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}} = T_2^{\pi_j^*\mathbf{x}} \otimes T_3^{\tau_j^*\mathbf{x}}$ hat man

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}} y\|_{Y_\alpha} \quad &= \quad \|T_2^{\pi_j^*\mathbf{x}} y_1\|_{H^{\alpha+1/2}(\tilde{Z})} \, \|T_3^{\tau_j^*\mathbf{x}} y_2\|_{H^\alpha(-1,1)} \\ &\preceq \quad \|y_1\|_{H^{\alpha+1/2}(\tilde{Z})} \, \|y_2\|_{H^\alpha(-1,1)} \\ &= \quad \|y\|_{Y_\alpha} \,.\end{aligned}$$

Dabei haben wir Lemma 5.3 aus RIEDER, SCH. [28] verwendet. Da Funktionen der Form $y = y_1 \otimes y_2$ dicht in Y_α liegen, ist die Behauptung bewiesen.

□

Wir führen noch analog zu Abschnitt 2.2.2 den Momentenoperator $\mathbf{E} : \mathcal{H} \to I\!R^{3m}$ ein durch

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}\,\mathbf{f})_i &= (\langle \mathbf{f}, E_1^i\rangle_{\mathcal{H}}, \langle \mathbf{f}, E_2^i\rangle_{\mathcal{H}}, \langle \mathbf{f}, E_3^i\rangle_{\mathcal{H}})^\top \\ &= (\langle \mathbf{f}_1, e^i\rangle_{L^2(K_1^3)}, \langle \mathbf{f}_2, e^i\rangle_{L^2(K_1^3)}, \langle \mathbf{f}_3, e^i\rangle_{L^2(K_1^3)})^\top . \qquad (3.23)\end{aligned}$$

Satz 3.2.20 *Seien* $\mathbf{f} \in X_\alpha$ *für ein* $\alpha > 1/2$, $\mathcal{P}_{\mathsf{N}(\mathcal{D}_j)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *die orthogonale Projektion auf* $\mathsf{N}(\mathcal{D}_j)$ *und* $h = \max\{h_\varphi, h_s, h_a\}$. *Dann gilt mit den vorangegangenen Bezeichnungen für* $j \in \{1, 2, 3\}$

$$\|\mathbf{\Sigma}_{n,m}^j\,\Psi_n\,\mathcal{D}\mathbf{f} - (\mathbf{E}\,\mathbf{f})_j\|_\infty \preceq \|\mathbf{f}\|_{X_\alpha}\,(h\,\|\Phi_\gamma^j\|_{Y_\alpha} + \|\mathcal{P}_{\mathsf{N}(\mathcal{D}_j)}E_\gamma^j\|_{\mathcal{H}})$$

für $n \to \infty$.
Ist $\mathcal{P}_{\mathsf{N}(\mathcal{D}_j)}E_\gamma^j = 0$, *so gilt sogar*

$$\|\mathbf{\Sigma}_{n,m}^j\,\Psi_n\,\mathcal{D}\mathbf{f} - (\mathbf{E}\,\mathbf{f}^s)_j\|_\infty \to 0$$

für $n \to \infty$.

BEWEIS: Es gilt für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}|(\mathbf{\Sigma}_{n,m}^j\,\Psi_n\,\mathcal{D}\mathbf{f})_i &- ((\mathbf{E}\,\mathbf{f})_j)_i| = |(\mathbf{\Sigma}_{n,m}^j\,\Psi_n\,\mathcal{D}\mathbf{f})_i - \langle \mathbf{f}, E_j^i\rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\le |\langle \Psi_n\,\mathcal{D}_j\mathbf{f}, G_n\,\Psi_n\,\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\Phi_\gamma^j\rangle_{I\!R^n} - \langle \mathcal{D}_j\mathbf{f}, \mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\Phi_\gamma^j\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)}| \\ &\quad + |\langle \mathbf{f}, \mathcal{D}_j^*\,\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\Phi_\gamma^j - E_j^i\rangle_{\mathcal{H}}| \\ &= |\langle \Psi_n\,\mathcal{D}_j\mathbf{f}, G_n\,\Psi_n\,\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\Phi_\gamma^j\rangle_{I\!R^n} - \langle \mathcal{D}_j\mathbf{f}, \mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\Phi_\gamma^j\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)}| \\ &\quad + |\langle \mathbf{f}, \mathbf{T}_1^{\mathbf{x}_i}\,(\mathcal{D}_j^*\Phi_\gamma^j - E_\gamma^j)\rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\preceq \|\mathbf{f}\|_{X_\alpha}\,h\,\|\Phi_\gamma^j\|_{Y_\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{X_\alpha}\,\|\mathcal{D}_j^*\Phi_\gamma^j - E_\gamma^j\|_{\mathcal{H}} .\end{aligned}$$

Dabei kamen die Lemmata 3.2.18 und 3.2.19 zur Anwendung. Man beachte außerdem, daß $|\langle \Psi_n\mathcal{D}_j\mathbf{f}, G_n\,\Psi_n y\rangle_{I\!R^n} - \langle \mathcal{D}_j\mathbf{f}, y\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)}| \preceq h\,\|\mathbf{f}\|_{X_\alpha}\,\|y\|_{Y_\alpha}$ ist (siehe Beweis zu Satz 2.2.11). Wegen $\mathcal{D}_j^*\Phi_\gamma^j - E_\gamma^j = \mathcal{P}_{\mathsf{N}(\mathcal{D}_j)}E_\gamma^j$ ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Nach dem Zerlegungssatz von HELMHOLTZ 1.2.4 ist $\mathbf{f} = \mathbf{f}^s + \nabla p$. Wegen $\mathbf{f} \in X_\alpha$ für $\alpha > 1/2$, ist auch $\nabla p \in X_\alpha$ für $\alpha > 1/2$. Das bedeutet aber, daß $p \in H^\alpha(K_1^3)$ für $\alpha > 3/2$ und $\nabla p = 0$ auf $\partial\Omega^3$ ist. Nach dem SOBOLEVschen Einbettungssatz ist p damit stetig und deshalb konstant auf $\partial\Omega^3$. Nach Satz 1.4.12 ist damit $\nabla p \in \mathsf{N}(\mathcal{D}_j)$ und es gilt

$$(\mathbf{E}\,\mathbf{f})_i = (\mathbf{E}\,\mathbf{f}^s)_i\,.$$

Damit ist der ganze Satz bewiesen.

□

Bemerkung: Der Satz 3.2.20 bestätigt einmal mehr, daß es von großem Interesse ist, Mollifier E_γ^j zu kennen, für die $\mathcal{P}_{\mathsf{N}(\mathcal{D}_j)} E_\gamma^j = 0$ ist. Nur in diesem Falle gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{\Sigma}_{n,m}^j \, \Psi_n \, \mathcal{D}\mathbf{f} - (\mathbf{E}\,\mathbf{f})_j\|_\infty = 0\,.$$

Bei dem Ausdruck $\|\mathcal{P}_{\mathsf{N}(\mathcal{D}_j)} E_\gamma^j\|$ handelt es sich um den unvermeidbaren Anteil am Rekonstruktionsfehler, der durch die Wahl der Mollifier E_γ^j bestimmt ist.
Wir haben bislang noch nichts darüber gesagt, in welcher Größenordnung der Abbruchindex M der unendlichen Reihe bei der Darstellung (3.19) unseres Rekonstruktionskernes Φ_γ^j zu wählen ist. Wir geben uns dazu Zahlen $\varepsilon_j > 0$ für $j \in \{1,2,3\}$ vor. Unser Ziel ist es, M so zu bestimmen, daß

$$\|(\mathcal{R}^* \otimes I)\, \frac{\partial}{\partial s}\, \Phi_\gamma^{j,M} - d_j E_\gamma^j\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon_j$$

für $j \in \{1,2,3\}$ ist.

Satz 3.2.21 *Es sei* $d_j E_\gamma^j \in \mathsf{R}((\mathcal{R}^*\mathcal{R} \otimes I)^\beta) = \mathsf{D}((\mathcal{R}^*\mathcal{R} \otimes I)^{-\beta}) \cap H_0^\beta(\Omega^2)\hat{\otimes} L^2(-1,1)$ *für ein* $\beta > 0$, $M = M(h) \succeq h^{-2/\beta}$. *Dann ist mit* $h = \max\{h_\varphi, h_s, h_a\}$

$$\|(\mathcal{R}^* \otimes I)\, \frac{\partial}{\partial s}\, \Phi_\gamma^{j,M} - d_j E_\gamma^j\|_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])} < h\, \|d_j E_\gamma^j\|_{H_0^\beta(\Omega^2)\hat{\otimes} L^2(-1,1)}\,.$$

Beweis: Wegen $(\mathcal{R}^*\mathcal{R} \otimes I)^{-\beta} = (\mathcal{R}^*\mathcal{R})^{-\beta} \otimes I$ gilt

$$\|(\mathcal{R}^*\mathcal{R} \otimes I)^{-\beta} d_j E_\gamma^j\|_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])} \preceq \|d_j E_\gamma^j\|_{H_0^\beta(\Omega^2)\hat{\otimes} L^2(-1,1)}\,, \tag{3.24}$$

siehe Rieder, Sch. [28]. Mit Lemma 2.2.12 ($A = \mathcal{R} \otimes I$) und Gleichung (3.24) folgt dann

$$\|(\mathcal{R}^* \otimes I)\, \frac{\partial}{\partial s}\, \Phi_\gamma^{j,M} - d_j E_\gamma^j\|_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])} < \sigma_M^\beta\, \|d_j E_\gamma^j\|_{H_0^\beta(\Omega^2)\hat{\otimes} L^2(-1,1)}$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{R}^* \otimes I)\, \frac{\partial}{\partial s}\, \Phi_\gamma^{j,M} - d_j E_\gamma^j\|_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])} &\preceq (M+1)^{-\beta/2}\, \|d_j E_\gamma^j\|_{H_0^\beta(\Omega^2)\hat{\otimes} L^2(-1,1)} \\ &\preceq h\, \|d_j E_\gamma^j\|_{H_0^\beta(\Omega^2)\hat{\otimes} L^2(-1,1)}\,. \end{aligned}$$

□

Soll $\|(\mathcal{R}^*\mathcal{R} \otimes I)^{-\beta} d_j E_\gamma^j\|_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])} < \varepsilon_j$ sein, so muß zum einen die Anzahl der Daten n so groß sein, daß

$$h\, \|d_j E_\gamma^j\|_{H_0^\beta(\Omega^2)\hat{\otimes} L^2(-1,1)} < \varepsilon_j$$

ist, und zum anderen muß der Abbruchindex M in der Größenordnung

$$M = M(h) \succeq h^{-2/\beta}$$

gewählt werden. Grundvoraussetzung ist, daß der Mollifier E_γ^j die Glattheitsbedingungen von Lemma 3.2.21 erfüllt.

3.3 Die Rekonstruktion der Rotation

Wir wollen in diesem Abschnitt beschreiben, wie man mit dem Datensatz der Doppler–Transformation

$$g_n = \mathcal{D}_n \mathbf{f}$$

die Rotation des Vektorfeldes

$$\nabla \times \mathbf{f}$$

numerisch berechnen kann, indem man einfach bei der approximativen Inversen $\mathcal{S}_\gamma$ einen anderen Rekonstruktionskern einsetzt. Das so entstehende Verfahren wird eine Struktur wie Gleichung (1.15) haben. In etwas anderer Form war dies auch schon Gegenstand der Arbeit Sch. [31]. Dort wurden die Dopplerdaten jedoch zuerst differenziert, was wir vermeiden wollen.
Wir betrachten wieder die Bilinearformen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ aus Definition 3.2.1. Es sei $\bar{e}_\gamma \in L^2(I\!R^3) \hookrightarrow L^2(\Omega^2 \times [-1,1])$ ein Mollifier, $e_\gamma(\mathbf{x},\cdot) = \mathbf{T}_1^{\mathbf{x}} \bar{e}_\gamma(\cdot)$ und

$$\mathcal{E}_\gamma(\mathbf{x}) = (e_\gamma(\mathbf{x},\cdot), e_\gamma(\mathbf{x},\cdot), e_\gamma(\mathbf{x},\cdot))^\top \in \mathcal{H}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{f}_\gamma(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(\nabla \times \mathbf{f}, \mathcal{E}_\gamma(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \langle d_2\mathbf{f}, e_\gamma(\mathbf{x},\cdot)\rangle \\ \langle d_3\mathbf{f}, e_\gamma(\mathbf{x},\cdot)\rangle \\ \langle d_1\mathbf{f}, e_\gamma(\mathbf{x},\cdot)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle d_2\mathbf{f}, (\mathcal{R}^*\otimes I)\tilde{\Phi}^1_\gamma(\mathbf{x})\rangle \\ \langle d_3\mathbf{f}, (\mathcal{R}^*\otimes I)\tilde{\Phi}^2_\gamma(\mathbf{x})\rangle \\ \langle d_1\mathbf{f}, (\mathcal{R}^*\otimes I)\tilde{\Phi}^3_\gamma(\mathbf{x})\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_2\mathbf{f}, \tilde{\Phi}^1_\gamma(\mathbf{x})\rangle \\ \langle \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_3\mathbf{f}, \tilde{\Phi}^1_\gamma(\mathbf{x})\rangle \\ \langle \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_1\mathbf{f}, \tilde{\Phi}^1_\gamma(\mathbf{x})\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{D}_2\mathbf{f}, -\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}^1_\gamma(\mathbf{x})\rangle \\ \langle \mathcal{D}_3\mathbf{f}, -\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}^2_\gamma(\mathbf{x})\rangle \\ \langle \mathcal{D}_1\mathbf{f}, -\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}^3_\gamma(\mathbf{x})\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{g}_2, -\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}^1_\gamma(\mathbf{x})\rangle \\ \langle \mathbf{g}_3, -\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}^2_\gamma(\mathbf{x})\rangle \\ \langle \mathbf{g}_1, -\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}^3_\gamma(\mathbf{x})\rangle \end{pmatrix} = \mathcal{B}(\tilde{\mathbf{g}}, -\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma(\mathbf{x})) =: \tilde{\mathcal{S}}_\gamma \mathbf{g}(\mathbf{x})\,.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder die Identität

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}_j = (\mathcal{R}\otimes I)d_j$$

ausgenutzt (siehe Satz 1.4.8). Es sei $\tilde{\mathbf{g}}_j = \mathbf{g}_{p(j)}$ eine Umstellung der drei Datensätze, wobei p die Permutation $p = (2,3,1)$ ist. Falls $\bar{e}_\gamma \in \mathsf{R}(\mathcal{R}^*\otimes I)$ ist, sind die Rekonstruktionskerne $\tilde{\Phi}^j_\gamma = \tilde{\Phi}^j_\gamma(\mathbf{0})$ bestimmt durch

$$(\mathcal{R}^*\otimes I)\tilde{\Phi}^j_\gamma = \bar{e}_\gamma\,. \tag{3.25}$$

Ist $\bar{e}_\gamma \notin \mathsf{R}(\mathcal{R}^*\otimes I)$, so können wir zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{\Phi}^{j,M}_\gamma$ bestimmen mit

$$\|(\mathcal{R}^*\otimes I)\tilde{\Phi}^{j,M}_\gamma - \bar{e}_\gamma\|_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])} < \varepsilon\,. \tag{3.26}$$

Bezeichnung: Die Abbildung $\tilde{\mathcal{S}} : \mathcal{K} \to L^2(K_1^3, I\!R^3)$ mit

$$(\tilde{\mathcal{S}}_\gamma \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\tilde{\mathbf{g}}, -\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma(\mathbf{x}))$$

sei die *approximative Inverse zur Rekonstruktion der Rotation eines Vektorfeldes* $\mathbf{f}$.

Lemma 3.3.1 *Ist $\bar{e}_\gamma \in \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$ und $e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot) = \mathbf{T}_1^{\mathbf{x}} \bar{e}_\gamma(\cdot)$, so gilt*

$$\tilde{\Phi}_\gamma^j(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}} \tilde{\Phi}_\gamma^j \, .$$

Gilt $\bar{e}_\gamma \notin \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$, so gibt es eine Folge $\{\tilde{\Phi}_\gamma^{j,M}\}_{M \in I\!N}$ mit

$$(\mathcal{R}^* \otimes I)\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}} \tilde{\Phi}_\gamma^{j,M} \to e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot) \quad \textit{für } M \to \infty$$

in $L^2(\Omega^2 \times [-1, 1])$.

Beweis: Wegen $\mathbf{T}_1^{\mathbf{x}}(\mathcal{R}^* \otimes I) = (\mathcal{R}^* \otimes I)\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}}$ ergibt sich der Beweis analog zu Lemma 3.2.6 und den nachfolgenden Betrachtungen. Die Existenz der Folge $\{\tilde{\Phi}_\gamma^{j,M}\}_{M \in I\!N}$ ergibt sich aus der Dichtheit von $\mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$ in $L^2(\Omega^2 \times [-1, 1])$.

□

Da $\tilde{\Phi}_\gamma^{j,M}$ offenbar nicht von j abhängt, siehe Gleichung (3.25), lassen wir der Übersicht halber den Index weg.

Lemma 3.3.2 *Es sei $\bar{e}_\gamma(\mathbf{x}) = \tilde{e}_\gamma(\|\mathbf{x}\|)$ ein Mollifier. Dann ist*

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\gamma^M(\omega(\varphi), s, a) &= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} (2\mu + 1)\, \tilde{I}_\mu^\gamma(a)\, U_{2\mu}(s)\, , \\ \textit{mit} \quad \tilde{I}_\mu^\gamma(a) &= \int_{-1}^{1} \int_{I\!R} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{\tau^2 + t^2 + a^2})\, dt\, U_{2\mu}(\tau)\, d\tau \end{aligned}}$$

für $M = \infty$ eine Lösung von Gleichung (3.25) im Falle, daß $\bar{e}_\gamma \in \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$ gilt. Ansonsten ist $\{\tilde{\Phi}_\gamma^M\}_{M \in I\!N}$ eine Folge mit

$$(\mathcal{R}^* \otimes I)\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}} \tilde{\Phi}_\gamma^M \to \mathbf{T}_1^{\mathbf{x}} \bar{e}_\gamma(\cdot) = e_\gamma(\mathbf{x}, \cdot)$$

für $M \to \infty$.

Beweis: Es sei $\bar{e}_\gamma \in \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$. Wir betrachten zunächst $\mathcal{R} \otimes I$ als Abbildung von $L^2(\Omega^2 \times [-1, 1])$ nach $L^2(S^1 \times [-1, 1]^2, w^{-1})$. Wieder bemühen wir Lemma 3.2.7, um die Lösung von Gleichung (3.25) darzustellen. Es ist $(M = \infty)$

$$\tilde{\Phi}_\gamma^\infty = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{k=-\mu}^{\mu}{}' \sum_{\ell \in I\!N} \sigma_\mu^{-2} \langle (\mathcal{R} \otimes I)\bar{e}_\gamma, u_{\mu,k} \otimes z_\ell \rangle_{L^2(S^1 \times [-1,1]^2, w^{-1})}\, u_{\mu,k} \otimes z_\ell \, . \tag{3.27}$$

Dabei sei $\{z_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2([-1,1])$. Wegen

$$(\mathcal{R} \otimes I)\bar{e}_\gamma(\omega, s, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{s^2+t^2+a^2})\, dt$$

gilt

$$\begin{aligned}
&\langle (\mathcal{R} \otimes I)\bar{e}_\gamma, u_{\mu,k} \otimes z_\ell \rangle_{L^2(S^1 \times [-1,1]^2, w^{-1})} \\
=\;& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{S^1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{s^2+t^2+a^2})\, dt\, U_\mu(s)\, Y_k(\omega)\, z_\ell(a)\, d\omega\, ds\, da \\
=\;& 2 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{s^2+t^2+a^2})\, dt\, U_\mu(s)\, z_\ell(a)\, ds\, da\, \delta_{k0}\,.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in Gleichung (3.27) ein und verwenden Lemma 3.2.8, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Phi}_\gamma^\infty(\omega, s, a) = \tilde{\Phi}_\gamma^\infty(s, a) \\
=\;& {\sum_{\mu=0}^{\infty}}' \frac{\mu+1}{4\pi}\, 2 \int_{-1}^{1} \int_{\infty}^{\infty} \tilde{e}_\gamma(\sqrt{\tau^2+t^2+a^2})\, dt\, U_\mu(\tau)\, d\tau\, \frac{1}{\pi}\, w(s)\, U_\mu(s) \\
=\;& \frac{1}{2\pi^2}\, w(s) \sum_{\mu=0}^{\infty} (2\mu+1)\, \tilde{I}_\mu^\gamma(a)\, U_{2\mu}(s)\,.
\end{aligned}$$

Nehmen wir als Bildraum von $\mathcal{R} \otimes I$ den Raum $L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$, so müssen wir die Darstellung von $\tilde{\Phi}_\gamma^\infty$ noch mit w^{-1} multiplizieren, und erhalten in diesem Fall die zu beweisende Form.

Der Rest der Behauptung ergibt sich aus Gleichung (3.7) wie im vorhergehenden Abschnitt.

□

Eine Möglichkeit, $\tilde{e}_\gamma$ zu wählen ist die bekannte Gauss-Funktion

$$\tilde{e}_\gamma(t) = (2\pi)^{-3/2}\, \gamma^{-3}\, \exp(-t^2/(2\gamma^2))\,.$$

Aufgrund seiner Glattheit, erfüllt dieser Mollifier $\bar{e}_\gamma \in \mathsf{R}(\mathcal{R}^* \otimes I)$. Der Rekonstruktionskern $\tilde{\Phi}_\gamma^\infty$ hat dann die Gestalt

$$\tilde{\Phi}_\gamma^\infty(s, a) = \frac{\gamma^{-2}}{4\pi^3}\, e^{-a^2/(2\gamma^2)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{c}_\mu^\gamma\, (2\mu+1)\, U_{2\mu}(s)$$

mit

$$\tilde{c}_\mu^\gamma = \int_{-1}^{1} e^{-\tau^2/(2\gamma^2)}\, U_{2\mu}(\tau)\, d\tau\,.$$

Bei praktischen Anwendungen werden wir wieder die unendliche Reihe nach $M < \infty$ Schritten abbrechen gemäß Gleichung (3.26).
Die Ableitung $-\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma^M$, die wir für die Rekonstruktion der Rotation benötigen, ist gegeben durch

$$-\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma^M(s,a) = -\frac{\gamma^{-2}}{4\pi^3}\, e^{-a^2/(2\gamma^2)} \sum_{\mu=0}^{M} \tilde{c}_\mu^\gamma \,(2\mu+1)\, U'_{2\mu}(s)$$

mit

$$U'_{2\mu}(s) = \frac{s\, U_{2\mu}(s) - (2\mu+1)\, T_{2\mu+1}(s)}{1-s^2}\,.$$

In Abbildung 3.3.1 ist eine Darstellung von $-\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma^M$ zu sehen mit $M = 32$, $\gamma = 0.07$ und $a = 0$.
Um mit endlich vielen Daten zu rechnen geben wir uns wieder m Mollifier $\bar{e}_\gamma^i$ und m Rekonstruktionspunkte $\mathbf{x}_i \in \Omega^3$, $i = 1,\ldots,m$, mit

$$\bar{e}_\gamma^i = \mathbf{T}_1^{\mathbf{x}_i}\bar{e}_\gamma\,, \qquad i = 1,\ldots,m\,,$$

vor, und betrachten statt $\mathcal{R}\otimes I$ den diskreten Operator

$$\Psi_n\,(\mathcal{R}\otimes I)$$

mit Ψ_n wie in Abschnitt 3.2.3 definiert. Als Ersatz für den nicht definierten Rekonstruktionskern zu $\bar{e}_\gamma^i$ für $\Psi_n\,(\mathcal{R}\otimes I)$ nehmen wir

$$\Psi_n\, \mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\, \tilde{\Phi}_\gamma^M\,,$$

wobei $\tilde{\Phi}_\gamma^M$ der in Lemma 3.3.2 angegebene Rekonstruktionskern ist.
Diese Festlegungen motivieren in Anlehnung an $\mathbf{\Sigma}_{n,m}$ die Definition eines Operators $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}$ durch

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m} : I\!R^{3n} &\;\rightarrow\; I\!R^{3m}\,,\\
(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}\, g_n)_i &= \left((\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}^1\, g_n)_i, (\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}^2\, g_n)_i, (\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}^3\, g_n)_i\right)\,,\\
(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}^j\, g_n)_i &= \langle g_{n,p(j)}, G_n\, \Psi_n\, \mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\tilde{\Phi}_\gamma^M\rangle_{I\!R^n}\,.
\end{aligned}$$

Die endlichdimensionalen Teilräume V_n von $L^2(S^1 \times [-1,1]^2)$ und deren RIESZ-Basis werden aus dem vorhergehenden Abschnitt übernommen, so daß der Ausdruck

$$(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}^j g_n)_i$$

ebenfalls die Darstellung (3.22) besitzt.
Der folgende Satz, der eine Anwendung von Satz 2.2.14 ist, zeigt die Konvergenz von $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}$ in einem schwachen Sinne gegen Momente der Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{f}$.

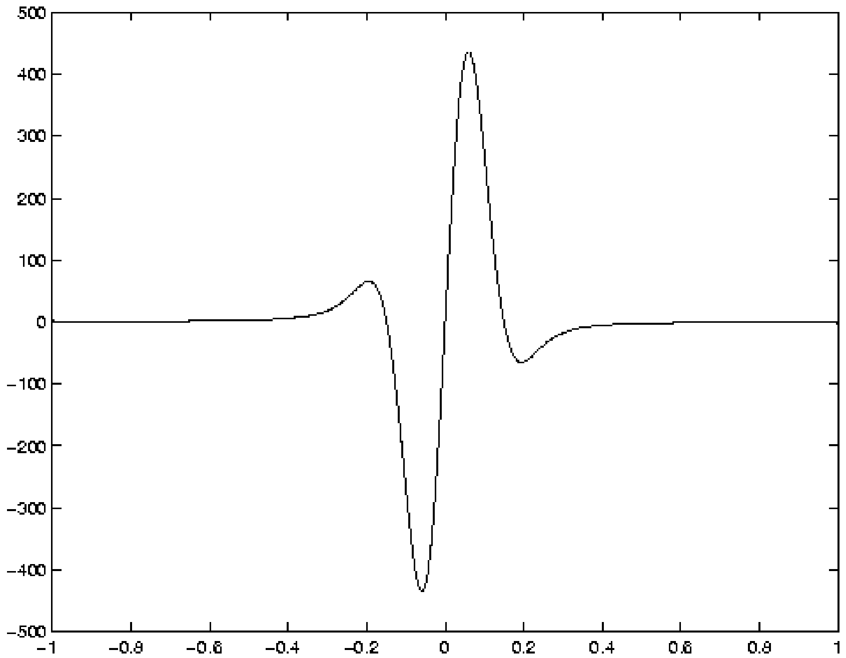

Abbildung 3.3.1 $-\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma^M$ für $\gamma = 0.07$, $M = 32$ und $a = 0$

Satz 3.3.3 *Es seien* $\mathbf{f} \in X_{3/2+\kappa}$, $0 < \kappa \leq 1$, $\tilde{\Phi}_\gamma^M$ *wie in Lemma 3.3.2,* $\bar{e}_\gamma$ *ein rotationssymmetrischer Mollifier aus* $H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes}H^{1/2+\kappa}(-1,1)$ *für* $\alpha > 6 + 2\kappa$, $h = \max\{h_\varphi, h_s, h_a\}$, $\mathbf{E}$ *der Momentenoperator (3.23) bezüglich der Mollifier* $\mathbf{T}_1^{\mathbf{x}_i}\bar{e}_\gamma$ *und* $M = M(h) \succeq h^{-2/\alpha}$. *Dann gilt für alle* $j \in \{1,2,3\}$

$$\|\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}^j \mathcal{D}_n \mathbf{f} - (\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{f}))_j\|_\infty \preceq h\,\|\mathbf{f}\|_{X_{3/2+\kappa}}\,\|\bar{e}_\gamma\|_{H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes}H^{1/2+\kappa}(-1,1)}$$

für $n \to \infty$.

Beweis: $\nabla \times \mathbf{f} \in X_{1/2+\kappa}$ existiert wegen der Glattheitsannahme an $\mathbf{f}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& |(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}^j \mathcal{D}_n \mathbf{f})_i - ((\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{f}))_j)_i| \\
= \;& |(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}^j \mathcal{D}_n \mathbf{f})_i - \langle (\nabla \times \mathbf{f})_j, \mathbf{T}_1^{\mathbf{x}_i}\bar{e}_\gamma\rangle_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])}| \\
\leq \;& |(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}^j \mathcal{D}_n \mathbf{f})_i - \langle (\nabla \times \mathbf{f})_j, (\mathcal{R}^* \otimes I)\,\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\tilde{\Phi}_\gamma^M\rangle_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])}| \\
& +|\langle (\nabla \times \mathbf{f})_j, (\mathcal{R}^* \otimes I)\,\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\tilde{\Phi}_\gamma^M - \mathbf{T}_1^{\mathbf{x}_i}\bar{e}_\gamma\rangle_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])}| \\
= \;& |\langle \Psi_n\,\mathcal{D}_{p(j)}\mathbf{f}, G_n\,\Psi_n\,\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\tilde{\Phi}_\gamma^M\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \frac{\partial}{\partial s}\,\mathcal{D}_{p(j)}\mathbf{f}, \mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\tilde{\Phi}_\gamma^M\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)}| \\
& +|\langle (\nabla \times \mathbf{f})_j, (T_1^{\pi_j^*\mathbf{x}_i} \otimes T_3^{\tau_j^*\mathbf{x}_i})\,\left((\mathcal{R}^* \otimes I)\tilde{\Phi}_\gamma^M - \bar{e}_\gamma\right)\rangle_{L^2(\Omega^2\times[-1,1])}| \\
= \;& |\langle \Psi_n\,\mathcal{D}_{p(j)}\mathbf{f}, G_n\,\Psi_n\,\mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\tilde{\Phi}_\gamma^M\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathcal{D}_{p(j)}\mathbf{f}, \mathbf{T}_{2,j}^{\mathbf{x}_i}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\tilde{\Phi}_\gamma^M\rangle_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)}|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +|\langle d_j \mathbf{f}, (T_1^{\pi_j^* \mathbf{x}_i} \otimes T_3^{\tau_j^* \mathbf{x}_i}) \left((\mathcal{R}^* \otimes I)\tilde{\Phi}_\gamma^M - \bar{e}_\gamma\right)\rangle_{L^2(\Omega^2 \times [-1,1])}| \\
\preceq \quad & \|\mathbf{f}\|_{X_{3/2+\kappa}} \, h \, \|\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma^M\|_{Y_{1/2+\kappa}} \\
& +\|d_j \mathbf{f}\|_{H_0^{1/2+\kappa}(\Omega^2)\hat{\otimes} H_0^{1/2+\kappa}(-1,1)} \, \|(\mathcal{R}^* \otimes I)\tilde{\Phi}_\gamma^M - \bar{e}_\gamma\|_{L^2(\Omega^2 \times [-1,1])} \\
\preceq \quad & \|\mathbf{f}\|_{X_{3/2+\kappa}} \left(h \, \|\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma^M\|_{Y_{1/2+\kappa}} + \|(\mathcal{R}^* \otimes I)\tilde{\Phi}_\gamma^M - \bar{e}_\gamma\|_{L^2(\Omega^2 \times [-1,1])} \right)
\end{aligned}
$$

Bei den Umformungen wurden unter anderem Satz 1.4.8 und Lemma 3.2.19 verwendet, das auch für $T_1^{\pi_j^* \mathbf{x}_i} \otimes T_3^{\tau_j^* \mathbf{x}_i}$ gilt. Wegen

$$
\|(\mathcal{R}^*\mathcal{R} \otimes I)^{-\alpha}\bar{e}_\gamma\|_{L^2(\Omega^2 \times [-1,1])} \preceq \|\bar{e}_\gamma\|_{H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes} L^2([-1,1])} \preceq \|\bar{e}_\gamma\|_{H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes} H^{1/2+\kappa}(-1,1)}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
\|(\mathcal{R}^* \otimes I)\tilde{\Phi}_\gamma^M - \bar{e}_\gamma\|_{L^2(\Omega^2 \times [-1,1])} \quad & \preceq \quad \sigma_M^\alpha \, \|\bar{e}_\gamma\|_{H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes} H^{1/2+\kappa}(-1,1)} \\
& \preceq \quad (M+1)^{-\alpha/2} \, \|\bar{e}_\gamma\|_{H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes} H^{1/2+\kappa}(-1,1)} \\
& \preceq \quad h \, \|\bar{e}_\gamma\|_{H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes} H^{1/2+\kappa}(-1,1)} \, .
\end{aligned}
$$

Hierbei kam die Darstellung (3.27) des Rekonstruktionskernes und Lemma 2.2.12 zur Anwendung.
Zum Beweis der Behauptung müssen wir noch $\|\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma^M\|_{Y_{1/2+\kappa}}$ abschätzen. Dazu nehmen wir zunächst an, daß $\bar{e}_\gamma = \bar{e}_\gamma^1 \otimes \bar{e}_\gamma^2 \in H_0^\alpha(\Omega^2) \otimes H^{1/2+\kappa}(-1,1)$ ist. Verwenden wir die Darstellung (3.27), so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& \|\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma^M\|_{Y_{1/2+\kappa}} \\
\preceq \quad & \sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} \sum_{k=-\mu}^{\mu} {\sum_{\ell \in I\!N}}' \sigma_\mu^{-1} \, |\langle \bar{e}_\gamma, \mathrm{v}_{\mu,k} \otimes z_\ell \rangle_{L^2(\Omega^2 \times [-1,1])}| \, \|\frac{\partial}{\partial s}(w^{-1} \, u_{\mu,k}) \otimes z_\ell\|_{Y_{1/2+\kappa}} \\
\preceq \quad & \|\bar{e}_\gamma^2\|_{H^{1/2+\kappa}(-1,1)} \sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} \sigma_\mu^{-1} \, |\langle \bar{e}_\gamma^1, \mathrm{v}_{2\mu,0} \rangle_{L^2(\Omega^2)}| \, \|U_{2\mu}'\|_{H^{1+\kappa}(-1,1)} \, .
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Markoffschen Ungleichung für ein Polynom P_μ vom Grad μ,

$$
|P_\mu'(s)| \leq \mu^2 \max_{-1 \leq t \leq 1} |P_\mu(t)| \, , \qquad |s| \leq 1 \, ,
$$

siehe z.B. Lorentz [17], sieht man, daß

$$
\|U_{2\mu}'\|_{H^1(-1,1)} \preceq (2\mu+1)^5 \preceq \sigma_{2\mu}^{-10} \quad \text{und} \quad \|U_{2\mu}'\|_{H^2(-1,1)} \preceq (2\mu+1)^7 \preceq \sigma_{2\mu}^{-14}
$$

gilt. Durch die Interpolationsungleichung für Sobolev-Normen, siehe Lions, Magenes [16], erhält man die Abschätzung

$$
\|U_{2\mu}'\|_{H^{1+\kappa}(-1,1)} \preceq \sigma_{2\mu}^{-(4\kappa+10)} \, .
$$

Diese setzen wir in den obigen Ausdruck ein, und erhalten

$$
\begin{aligned}
\|\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\Phi}_\gamma^M\|_{Y_{1/2+\kappa}} &\preceq \|\bar{e}_\gamma^2\|_{H^{1/2+\kappa}(-1,1)} \sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} \sigma_{2\mu}^{-2\alpha} \left|\langle \bar{e}_\gamma^1, \mathrm{v}_{2\mu,0}\rangle_{L^2(\Omega^2)}\right| \sigma_{2\mu}^{2\alpha-(11+4\kappa)} \\
&\preceq \|\bar{e}_\gamma^2\|_{H^{1/2+\kappa}(-1,1)} \left(\sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} \sigma_{2\mu}^{-4\alpha} \left|\langle \bar{e}_\gamma^1, \mathrm{v}_{2\mu,0}\rangle_{L^2(\Omega^2)}\right|^2 \right)^{1/2} \times \\
&\quad \left(\sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} \sigma_{2\mu}^{4\alpha-2(11+4\kappa)} \right)^{1/2} \\
&\preceq \|\bar{e}_\gamma^2\|_{H^{1/2+\kappa}(-1,1)} \|(\mathcal{R}^*\mathcal{R})^{-\alpha}\bar{e}_\gamma^1\|_{L^2(\Omega^2)} \left(\sum_{\mu=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} (2\mu+1)^{11+4\kappa-2\alpha} \right)^{1/2} \\
&\preceq \|\bar{e}_\gamma^1\|_{H_0^\alpha(\Omega^2)} \|\bar{e}_\gamma^2\|_{H^{1/2+\kappa}(-1,1)} = \|\bar{e}_\gamma\|_{H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes} H^{1/2+\kappa}(-1,1)} \,,
\end{aligned}
$$

falls $11 + 4\kappa - 2\alpha < -1 \Leftrightarrow \alpha > 6 + 2\kappa$ ist. Da die endlichen Linearkombinationen von Mollifiern $\bar{e}_\gamma$ der Form $\bar{e}_\gamma = \bar{e}_\gamma^1 \otimes \bar{e}_\gamma^2$ dicht in $H_0^\alpha(\Omega^2)\hat{\otimes}H^{1/2+\kappa}(-1,1)$ liegen, ist der Satz hiermit vollkommen bewiesen.

$\square$

Bemerkung: Der vorangegangene Satz zeigt, daß es möglich ist, ohne den Datensatz $\mathbf{g}_n = \mathcal{D}_n\mathbf{f}$ zu manipulieren, nur durch Austauschen des Rekonstruktionskernes statt des Feldes $\mathbf{f}$ die Rotation des Feldes $\nabla \times \mathbf{f}$ zu approximieren.

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse und Ansätze zu anderen Verfahren

In diesem Kapitel werden numerische Ergebnisse präsentiert, die die Qualität des in den vorangegangenen Kapiteln hergeleiteten Verfahrens darlegen. Simuliert wird der Fluß einer inkompressiblen Flüssigkeit durch einen Zylinder, der um die x-Achse zentriert ist. Die Daten werden zum einen exakt berechnet, zum anderen wird ein Rauschen aufaddiert.
Anschließend werden noch andere Lösungsansätze kurz angesprochen, die vor allem das zweidimensionale Rekonstruktionsproblem betrachten (Stråhlén [36], Desbat [8], Winters, Rouseff [40]). Aber es soll auch eine Methode, die auf ART (**A**lgebraische **R**ekonstruktions **T**echniken) basiert und von Wernsdörfer [39] für das dreidimensionale Problem skizziert wurde, kurz besprochen werden.

4.1 Numerische Ergebnisse

Wir wollen den Fluß einer inkompressiblen Flüssigkeit durch einen Zylinder betrachten, wobei das Geschwindigkeitsfeld stationär ist und nur vom Abstand von der Zylinderwand abhängt. Dies ist zwar ein einfaches Beispiel, aber es belegt sowohl die Effizienz unseres Algorithmus, als auch dessen Approximationsgüte. Es wird mit exakten und mit verrauschten Daten gerechnet, wobei jeweils der relative Fehler in der euklidischen Norm angegeben wird.
In einem weiteren Abschnitt rekonstruieren wir ein zweidimensionales Feld mit von Null verschiedener Divergenz. Dabei werden experimentell gemessene Daten rekonstruiert.

4.1.1 Dreidimensionaler Fluß durch einen Zylinder

Wir betrachten einen Zylinder mit Radius 1, der auf der x-Achse zentriert ist, gemäß Abbildung 4.1.1.

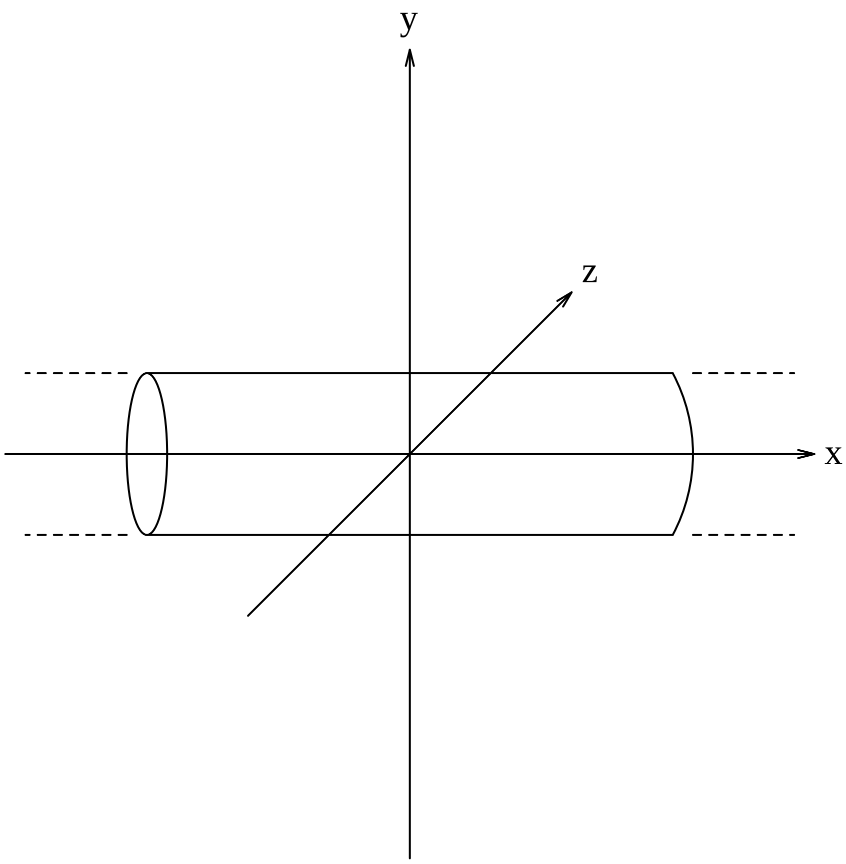

Abbildung 4.1.1 Modell für den Fluß durch einen auf der x-Achse zentrierten Zylinder

Durch diesen Zylinder fließe eine Flüssigkeit, deren Geschwindigkeitsfeld gegeben ist durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (1 - R^2) \cdot e_1\,, \quad R^2 = x_2^2 + x_3^2\,, \quad \mathbf{u} := \mathbf{0} \text{ in } K_1^3 \backslash \Omega^3\,.$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist stationär, und der Betrag $\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|$ hängt nur vom Abstand eines Partikels von der Zylinderwand ab. Die Fortsetzung durch Null garantiert uns, daß $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ ist und $\mathbf{u} \perp \mathsf{N}(\mathcal{D}_j)$ gilt für alle j. $\mathbf{u}$ kann als Lösung einer linearisierten Navier-Stokes-Gleichung in Zylinderkoordinaten angesehen werden, siehe Juhlin [14]. Offenbar ist $\mathbf{u}$ divergenzfrei, es gilt $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Die Helmholtz-Zerlegung hat die einfache Form

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^s\,.$$

Da die rotationsfreien Anteile im Kern der Doppler–Transformation liegen, ist dieses Feld gut geeignet, um aus Doppler-Daten rekonstruiert zu werden. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß man leicht die Doppler–Transformierten von $\mathbf{u}$ exakt angeben kann. Eine elementare Rechnung ergibt

$$\mathcal{D}_1\mathbf{u}(\omega(\varphi), s, a) = \int\limits_{-w(s)}^{w(s)} \theta_1(\omega) \cdot \mathbf{u}(\pi_1(s\omega + t\omega^\perp) + \tau_1 a)\, dt$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{1-s^2}\,\sin(\varphi)\Big(a^2+s^2\,(\sin\varphi)^2 \\ &\quad +\frac{1}{3}\,(1-s^2)\,(\cos\varphi)^2-1\Big)\,, \\ \mathcal{D}_2\mathbf{u} &= 0\,, \\ \mathcal{D}_3\mathbf{u} &= -\mathcal{D}_1\mathbf{u}\,. \end{aligned}$$

Wir wollen die Implementierung der Ausdrücke

$$\mathbf{\Sigma}^j_{n,m}\,g_n\,, \qquad g_n = \Psi_n\,\mathcal{D}\mathbf{u}$$

beschreiben. Diese erfolgt analog zum Algorithmus der *gefilterten Rückprojektion* der 2D–Computer–Tomographie, und besteht aus drei Schritten. Man beachte, daß der Rekonstruktionskern $\Phi^{j,M}_\gamma$ die Gestalt

$$\Phi^{j,M}_\gamma(\omega(\varphi),s,a) = r_j(\varphi)\,\exp(-a^2/(2\gamma^2))\,p^\gamma_M(s)$$

hat, wobei p^γ_M ein Polynom vom Grad $2(\lfloor M/2\rfloor+1)$ ist.

1. Berechne für $\nu = 0,\ldots,p-1$ und $k=-r,\ldots,r-1$ jeweils den Vektor

$$\begin{aligned} v_{\nu,k;\mu} &= \frac{1}{4q}\sum_{l=-q}^{q-1}(g_{n,j})_{(\nu,l,k)}\,p^\gamma_M(s_\mu-s_l)\,, \\ \mu &= -q,\ldots,q-1\,. \end{aligned}$$

2a. Berechne für $i=1,\ldots,m$ und $k=-r,\ldots,r-1$ jeweils den Ausdruck

$$u_k(\pi^*_j\mathbf{x}_i) = \frac{\pi}{p}\sum_{\nu=0}^{p-1}[(1-h)\,v_{\nu,k;\mu}+h\,v_{\nu,k;\mu+1}]\,r_j(\varphi_\nu)\,,$$

wobei h und μ bestimmt sind durch

$$s = \pi^*_j\mathbf{x}_i^\top\omega(\varphi_\nu)\,, \quad \mu\le sq<\mu+1\,, \quad h = sq-\mu\,.$$

2b. Ermittle anschließend

$$(\mathbf{\Sigma}^j_{n,m}g_n)_i = \frac{1}{2r}\sum_{k=-r}^{r-1}u_k(\pi^*_j\mathbf{x}_i)\,\exp((a_k-\tau^*_j\mathbf{x}_i)^2/(8\gamma^2))\,.$$

Nimmt man an, daß $r=q=\mathcal{O}(p)$ gilt, so benötigt man für Schritt 1 $\mathcal{O}(prq^2)=\mathcal{O}(p^4)$ Rechenoperationen und für die Schritte 2a und 2b $\mathcal{O}(m(rp+r)=\mathcal{O}(mrp)=\mathcal{O}(mp^2)$ Rechenoperationen. Insgesamt benötigt man für den gesamten Algorithmus

$$\mathcal{O}(p^4)+\mathcal{O}(p^2m)$$

Rechenoperationen. Üblicherweise wählt man $m = (N+1)^3$ äquidistant verteilte Rekonstruktionspunkte

$$\mathbf{x}_i = \left(\frac{2i_1}{N}, \frac{2i_2}{N}, \frac{2i_3}{N}\right)^\top, \quad -N/2 \leq i_j \leq N/2\,, \quad j = 1,2,3 \tag{4.1}$$

in K_1^3. Der obige Algorithmus läßt sich bedeutend beschleunigen, wenn zusätzlich

$$N = 2r \tag{4.2}$$

gilt. Um dies zu zeigen, benötigen wir noch ein technisches Lemma.

Lemma 4.1.1 *Ist $h \in L^2([-1,1])$ mit $h(-1) = h(1) = 0$ und $t_0 \in [-1,1]$, so gilt*

$$\lim_{\gamma \searrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\gamma} \int_{-1}^{1} h(s)\, e^{-\frac{(s-t_0)^2}{8\gamma^2}}\, ds = h(t_0)\,.$$

Beweis: Wir definieren eine Fortsetzung $\bar{h}$ von h, indem wir h außerhalb von $[-1,1]$ durch Null fortsetzen.

$$\bar{h}(s) = \begin{cases} h(s) & : \quad s \in [-1,1]\,, \\ 0 & : \quad s \in \mathbb{R} \backslash [-1,1]\,. \end{cases}$$

Die Behauptung ergibt sich aus der folgenden Gleichungskette.

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \searrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\gamma} \int_{-1}^{1} h(s)\, e^{-\frac{(s-t_0)^2}{8\gamma^2}}\, ds &= \lim_{\gamma \searrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(s)\, e^{-\frac{(s-t_0)^2}{8\gamma^2}}\, ds \\ &= \lim_{\gamma \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(2\sqrt{2}\,\gamma\, s + t_0)\, e^{-s^2}\, ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds\, \bar{h}(t_0) = h(t_0)\,. \end{aligned}$$

□

Für hinreichend kleines γ ist nach Lemma 4.1.1 die Näherung

$$\int_{-1}^{1} h(s)\, e^{-\frac{(s-t_0)^2}{8\gamma^2}}\, ds \approx 2\sqrt{2\pi}\,\gamma\, h(t_0)$$

durchaus gerechtfertigt. Verwenden wir diese Näherung bei der Berechnung von $(\mathcal{S}_\gamma \mathbf{g})_j$, so erhalten wir

$$(\mathcal{S}_\gamma \mathbf{g})_j(\mathbf{x}) \quad = \quad \langle \mathbf{g}_j, \mathbf{T}^{\mathbf{x}}_{2,j} \Phi^{j,M}_\gamma \rangle_{L^2(S^1 \times [-1,1]^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{-1}^{1} \mathbf{g}_j(\omega(\varphi), s, a)\, r_j(\varphi)\, p_M^\gamma \left(\frac{s - \pi_j^* \mathbf{x}^\top \omega(\varphi)}{2} \right) e^{-\frac{(a-\tau_j^*\mathbf{x})^2}{8\gamma^2}}\, ds\, d\varphi\, da \\
&= \frac{1}{8} \int_{0}^{2\pi} \int_{-1}^{1} r_j(\varphi)\, p_M^\gamma \left(\frac{s - \pi_j^* \mathbf{x}^\top \omega(\varphi)}{2} \right) \int_{-1}^{1} \mathbf{g}_j(\omega(\varphi), s, a)\, e^{-\frac{(a-\tau_j^*\mathbf{x})^2}{8\gamma^2}}\, da\, ds\, d\varphi \\
&\approx \frac{1}{4} \sqrt{2\pi}\, \gamma \int_{0}^{2\pi} \int_{-1}^{1} r_j(\varphi)\, p_M^\gamma \left(\frac{s - \pi_j^* \mathbf{x}^\top \omega(\varphi)}{2} \right) \mathbf{g}_j(\omega(\varphi), s, \tau_j^* \mathbf{x})\, ds\, d\varphi\,.
\end{aligned}$$

Ist die Bedingung (4.2) erfüllt und sind die Punkte $\mathbf{x}_i$ wie in (4.1) definiert, so gibt es zu jedem $\mathbf{x}_i$ ein a_{k_i} gibt mit

$$\mathbf{g}_j(\omega, s, \tau_j^* \mathbf{x}_i) = \mathbf{g}_j(\omega, s, a_{k_i})\,.$$

Somit läßt sich das letzte Doppelintegral, und damit auch jeder Ausdruck $\mathbf{\Sigma}^j_{n,m}\, g_{n,j}$, in der selben Art und Weise und auch mit demselben Aufwand implementieren, wie die gefilterte Rückprojektion in der 2D–Computer–Tomographie. In diesem Falle benötigen wir unter Berücksichtigung von $N = 2r = \mathcal{O}(q)$ nur noch

$$\mathcal{O}(pq^2N) + \mathcal{O}(pN^3) = \mathcal{O}(pN^3)$$

Rechenoperationen, siehe Natterer [25]. Das bedeutet, daß wir bei der Berechnung einer Komponente $\mathbf{\Sigma}^j_{n,m}\, g_n$ eine Potenz von p gewinnen, was das Verfahren für ein dreidimensionales Problem sehr schnell macht. Es sei hier jedoch bemerkt, daß diese Vorgehensweise zunächst nur für unseren speziell gewählten Mollifier e_γ zulässig ist.

Die Abbildung 4.1.2 zeigt die Rekonstruktion des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}$. Der Träger liegt in Ω^3, da wir $\mathbf{u}$ außerhalb von Ω^3 durch Null fortgesetzt haben. Ansonsten wäre $\mathbf{u} \notin \mathcal{H}$. Die Größen wurden wie folgt gewählt: $p = 21$, $q = 11$, $r = 4$, $N = 8$, $\gamma = 0.05$ und $M = 56$.

Der Grund, warum die Menge der Daten und Rekonstruktionspunkte so klein gewählt wurde, liegt darin, daß sich für eine größere Menge an Punkten die Rekonstruktion nicht mehr gut durch Pfeile visualisieren läßt. In der Abbildung 4.1.3 ist lediglich die einzig von Null verschiedene Komponente $\mathbf{\Sigma}^1_{n,m} g_n$ von $\mathbf{\Sigma}_{n,m} g_n$ dargestellt. Hier wurde die Menge der Daten, sowie der Rekonstruktionspunkte vergrößert. Es sind $r = 50$, $p = 153$, $q = 25$, $N = 100$. Als Regularisierungsparameter wurde $\gamma = 0.0157$ gewählt und der Abschneideindex der Reihe in $\Phi^{1,M}_\gamma$ ist $M = 161$. Die Rechenzeit für die Rekonstruktion dieser einen Komponente beträgt etwa 10 Minuten auf einer Silicon Graphics O2.

Wir berechnen den relativen Fehler

$$\Big(\mathrm{err}(g_n)\Big)^2 = \sum_{j=1}^{3} \|\mathbf{\Sigma}^j_{n,m}\, g_n - u_j\|_2^2 \Big/ \sum_{j=1}^{3} \|u_j\|_2^2 \approx \frac{\|(\mathcal{S}_\gamma \mathcal{D}\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|^2_{L^2(K_1^3, I\!R^3)}}{\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(K_1^3, I\!R^3)}}\,,$$

wobei $u_j \in I\!R^m$ gegeben ist durch $(u_j)_i = \mathbf{u}_j(\mathbf{x}_i)$. Bei der Rekonstruktion von Abbildung 4.1.3 beträgt der Fehler

$$\mathrm{err}(g_n) = 0.272 = 27.2\%\,.$$

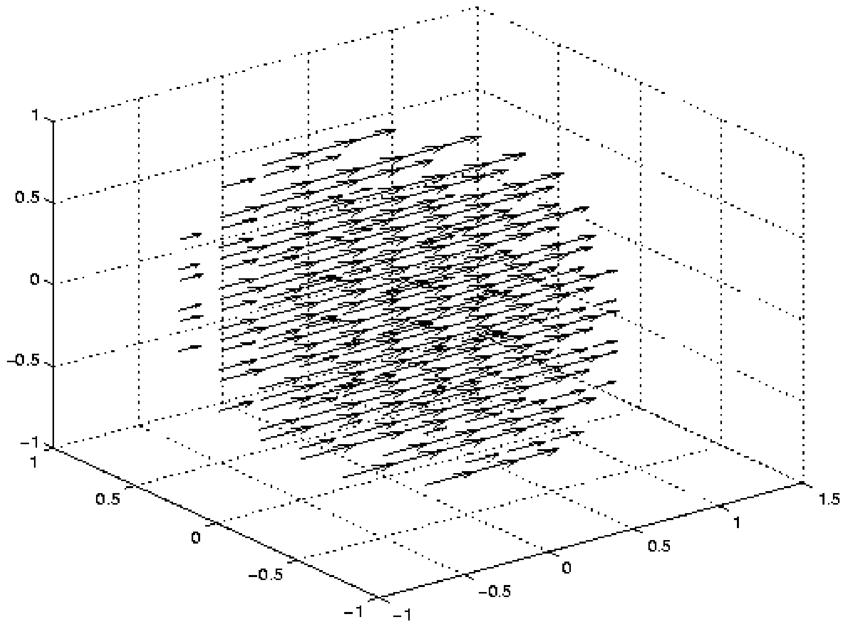

Abbildung 4.1.2 Rekonstruktion $\mathbf{\Sigma}_{n,m}\, g_n$ von $\mathbf{u}$

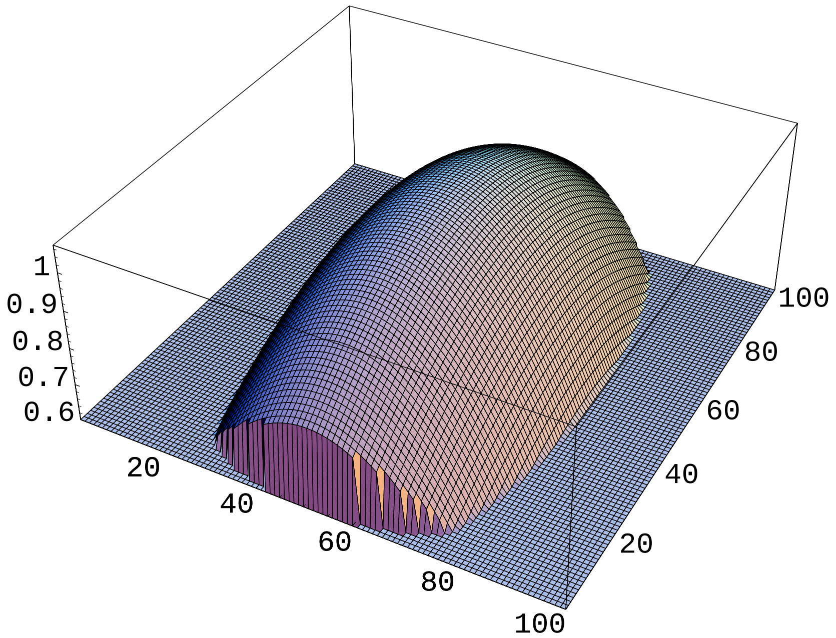

Abbildung 4.1.3 Rekonstruktion $\mathbf{\Sigma}^1_{n,m}\, g_n$ von $\mathbf{u}_1$

In der Abbildung 4.1.4 ist der Fehler in der Rekonstruktion aus Abbildung 4.1.3 für $x = 0$ zu sehen. Auffallend ist, daß der Hauptanteil des Fehlers in der z-Richtung liegt. In dieser Richtung wird auch der Datensatz $\mathcal{D}_1\mathbf{u}$ abgetastet.

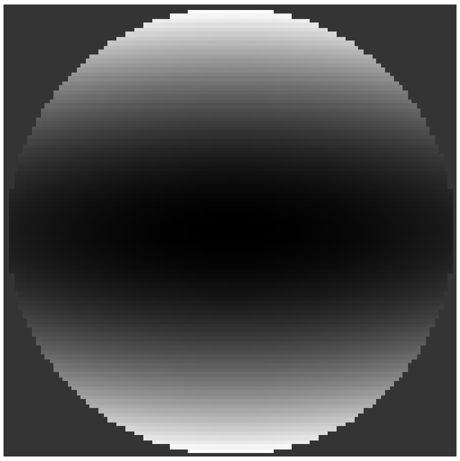

Abbildung 4.1.4 Fehler in der Rekonstruktion von $\mathbf{u}_1$ für $x_1 = 0$

Weiterhin wollen wir unseren Algorithmus mit gestörten Daten testen. Wir ersetzen unseren gegebenen Datenvektor g_n durch einen verrauschten Datenvektor $\tilde{g}_n$ mit

$$\tilde{g}_{n,j} = g_{n,j} + \delta_{n,j} \,, \qquad \|\delta_{n,j}\| = \eta_j \sqrt{\frac{rpq}{2\pi}} \,,$$

wobei $\eta_j > 0$ den Datenfehler angibt. Mit dieser Festlegung ergibt sich ein relativer Datenfehler von

$$\frac{\|g_j - \tilde{g}_j\|_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)}}{\|g_j\|_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)}} \approx \frac{\eta_j}{\|g_j\|_{L^2(S^1\times[-1,1]^2)}} \,.$$

In Abbildung 4.1.5 ist die Rekonstruktion $\mathbf{\Sigma}^1_{n,m}\,\tilde{g}_n$ dargestellt mit $\eta_1 = 0.5$. Das entspricht einem Datenfehler von 15.34%, also einem sehr starken Rauschen.

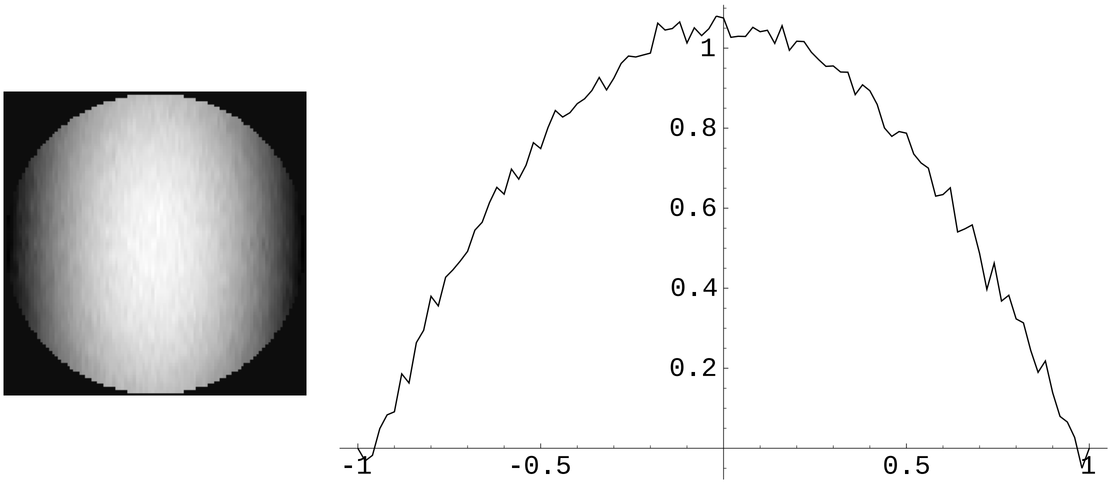

Abbildung 4.1.5 Rekonstruktion $\mathbf{\Sigma}^1_{n,m}\,\tilde{g}_n$ (links) von $\mathbf{u}$ mit gestörten Daten, rechts eine Zeile der Rekonstruktion ($x_2 = 0$)

Im rechten Teil der Abbildung sieht man deutlich den Fehler in der Rekonstruktion. In diesem Fall beträgt er

$$\mathrm{err}(\tilde{g}_n) = 0.274 = 27.4\%\,,$$

ist also nur unwesentlich größer als im ungestörten Fall. Das ist sehr beachtlich, wenn man die Größe des Datenfehlers in Betracht zieht. Die Rotation von $\mathbf{u}$ ist

$$\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -2\,\mathbf{x}_3 \cdot e_2 + 2\,\mathbf{x}_2 \cdot e_3\,.$$

In der Abbildung 4.1.6 ist die Rekonstruktion der Rotation $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}\, g_n$ dargestellt, wobei die Größen N, r, p und q wie in Abbildung 4.1.2 gewählt wurden.
Um eine Fehlerberechnung durchzuführen, haben wir die Datenmenge erhöht auf $r = 50$, $p = 153$, $q = 25$. Rekonstruiert wurde auf einem Gitter mit $N = 100$. Der Regularisierungsparameter wurde $\gamma = 0.0174$, der Abschneideindex $M = 114$ festgelegt. Der Fehler beträgt in diesem Fall

$$\mathrm{err}(g_n) = \left(\sum_{j=1}^{3} \|\tilde{\mathbf{\Sigma}}^j_{n,m}\, g_n - \tilde{u}_j\|_2^2 / \sum_{j=1}^{3} \|\tilde{u}_j\|_2^2 \right)^{1/2} = 0.115 = 11.5\%\,.$$

$\tilde{u}_j \in I\!R^m$ ist gegeben durch $(\tilde{u}_j)_i = (\nabla \times \mathbf{u})_j(\mathbf{x}_i)$.
Die Tatsache, daß der Fehler bei der Berechnung der Rotation deutlich geringer ist als bei der Berechnung des Feldes, untermauert die Konvergenzaussage aus Satz 3.2.20. Im Gegensatz zu $\mathcal{D}_j^*$ besitzt $\mathcal{R}^* \otimes I$ einen dichten Bildraum. Unser speziell gewählter Mollifier E^j_γ ist nicht aus $\mathsf{N}(\mathcal{D}_j)^\perp$. Nach Satz 3.2.20 konvergiert demnach der Fehler $\|\mathbf{\Sigma}^j_{n,m}\, \Psi_n\, \mathcal{D}\mathbf{f} - (\mathbf{E}\,\mathbf{f})_j\|_\infty$ nicht gegen 0, falls $n \to \infty$ strebt.

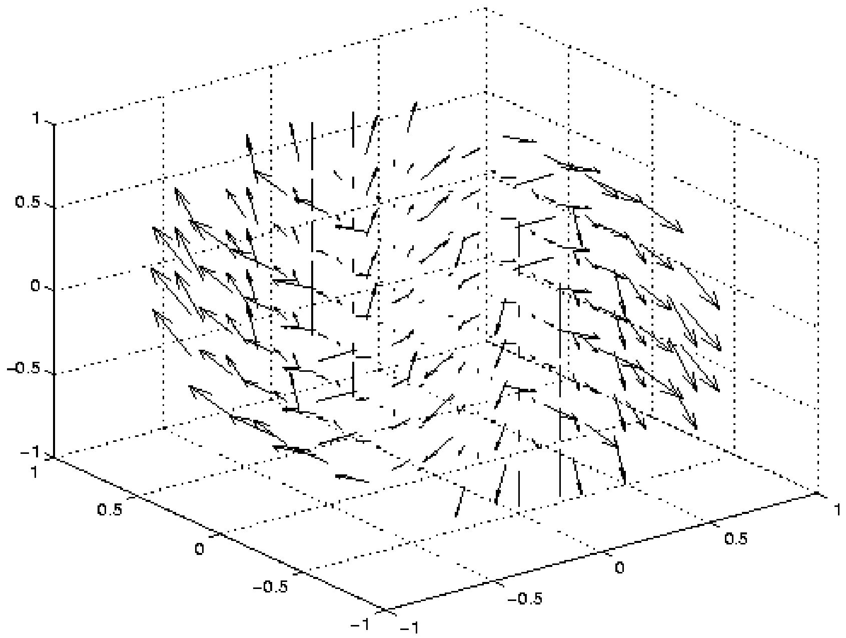

Abbildung 4.1.6 Rekonstruktion $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{n,m}\, g_n$ von $\nabla \times \mathbf{u}$

Die vorangegangenen Berechnungen sollten zum einen die hohe Effizienz des Verfahrens, zum anderen die Güte der Approximation untermauern.

4.1.2 Rekonstruktion eines 2D–Feldes mit gemessenen Daten

Interessant ist es, den Algorithmus an gemessenen Daten zu testen. Eine Apparatur die Doppler-Daten eines zweidimensionalen Feldes mißt, steht im Department of Electrical Measurements and Mathematics in Lund/Schweden. Dabei umkreist eine Ultraschallquelle auf einer Kreisbahn mit Radius R einen Zylinder, durch den eine Flüssigkeit fließt. Genaueres über die Meßapparatur ist in Jansson et al. [13] zu finden. Im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen findet hierbei die *Fächerstrahlgeometrie* Anwendung. Bei jeder Detektorposition werden die Schallwellen nacheinander in Form eines Fächers ausgesandt, wie in Abbildung 4.1.7 dargestellt ist.
Betrachtet wird nur der Fluß in der xy-Ebene, so daß das zweidimensionale Geschwindigkeitsfeld die Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -A\left(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 - \rho^2\right) \cdot e_2$$

hat, wobei $0 < \rho < R$ der Radius des Zylinders ist und A eine Konstante.

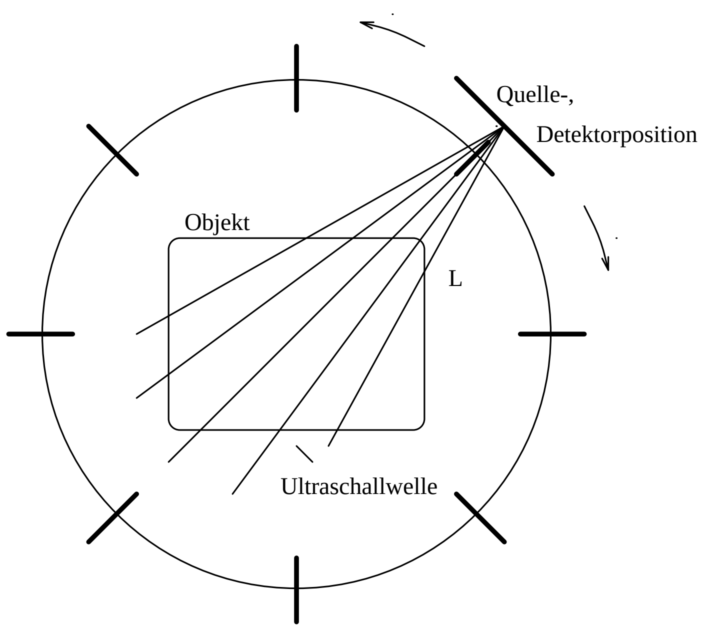

Abbildung 4.1.7 Meßanordnung für die Fächerstrahlgeometrie

Wir wollen den Rekonstruktionskern zunächst für die parallele Geometrie angeben, um den für die Fächerstrahlgeometrie mittels einer Transformation unter Verwendung von Lemma 2.1.7 zu erhalten. Das mathematische Modell ist durch die 2D–Doppler–Transformation gegeben. Wir setzen stets voraus, daß Ω ein beschränktes Gebiet und $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, I\!R^2)$ ist.

Definition 4.1.2 *Es sei $\omega \in S^1$ und $s \in [-1, 1]$. Der Operator $\mathcal{D}$ mit*

$$\mathcal{D}\mathbf{f}(\omega, s) = \int_{\Omega \cap L(\omega,s)} \omega^{\perp} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x})$$

heißt zweidimensionale Doppler–Transformation. *Die Gerade* $L(\omega, s)$ *ist definiert durch* $L(\omega, s) = \{\mathbf{x} \in I\!R^2 \,|\, \mathbf{x}^\top \omega = s\}$.

Bezeichnung: Mit $\nabla_2 \times \mathbf{f}$ bezeichnen wir die zweidimensionale Rotation des Feldes $\mathbf{f}$. Sie ist gegeben durch

$$\nabla_2 \times \mathbf{f}(x, y) = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y}\,.$$

Man beachte, daß im Gegensatz zu dreidimensionalen Feldern die Rotation eines zweidimensionalen Feldes eine skalare Größe ist. Es gilt ein zweidimensionales Analogon zu Lemma 1.4.4.

Lemma 4.1.3 *Es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\mathcal{D}\mathbf{f} = \mathcal{R}(\nabla_2 \times \mathbf{f})\,. \tag{4.3}$$

Indem wir

$$E_\gamma^j = e_\gamma \cdot e_j\,, \quad j = 1, 2$$

festlegen mit

$$e_\gamma(x) = (2\pi)^{-1}\,\gamma^{-2}\,\exp(-\|\mathbf{x}\|^2/(2\gamma^2))\,,$$

erhalten wir wie in Kapitel 3 eine approximative Inverse von $\mathbf{u}$ durch

$$\mathbf{u}_\gamma(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_1, T_1^{\mathbf{x}} e_\gamma \rangle \\ \langle \mathbf{u}_2, T_1^{\mathbf{x}} e_\gamma \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{D}\mathbf{u}, T_2^{\mathbf{x}} \bar{\Phi}_\gamma^1 \rangle \\ \langle \mathcal{D}\mathbf{u}, T_2^{\mathbf{x}} \bar{\Phi}_\gamma^2 \rangle \end{pmatrix}\,. \tag{4.4}$$

Hierin sind die $\bar{\Phi}_\gamma^j$ Lösungen der Normalgleichungen

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^* \bar{\Phi}_\gamma^j = \mathcal{D} E_\gamma^j\,.$$

Die Rekonstruktionskerne $\bar{\Phi}_\gamma^j$ bestimmt man wie in Abschnitt 3.2.2, die Herleitung ist völlig identisch. Wir geben daher nur die Lösungen an.

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\Phi}_\gamma^1(\omega, s) &= \sqrt{2\pi}\,\gamma\,\Phi_\gamma^1(\omega, s, a)\big|_{a=0}\,, \\ \bar{\Phi}_\gamma^2(\omega, s) &= -\sqrt{2\pi}\,\gamma\,\Phi_\gamma^3(\omega, s, a)\big|_{a=0}\,. \end{aligned}}$$

Der Vorfaktor $\sqrt{2\pi}\gamma$ ist gerade der Faktor, um den sich die zwei- und die dreidimensionale Gauss-Funktion unterscheiden.
Für die weiteren Betrachtungen sei stets $\Omega = B_R(0)$ die offene Kreisscheibe mit Radius R um 0. Wie erwähnt wollen wir Lemma 2.1.7 anwenden, um das Problem auf

die Fächerstrahlgeometrie zu übertragen. Hierzu benötigen wir die Transformation, die Daten der Fächerstrahlgeometrie in parallele Daten überträgt. Sei dazu zunächst

$$\begin{aligned} \varrho : [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2] &\rightarrow S^1 \times [-R, R]\,, \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \omega(\alpha + \beta - \pi/2) \\ R\,\sin(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Abbildung ϱ erklären wir eine Transformation $\bar{\varrho}$, die das Gewünschte leistet.

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} : L^2(S^1 \times [-R, R]) &\rightarrow L^2([0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2]) \\ \bar{\varrho} g(\alpha, \beta) &= g(\varrho(\alpha, \beta))\,. \end{aligned}$$

Wie man auch in diesem Fall die Skalarprodukte in Gleichung (4.4) in Form der gefilterten Rückprojektion schreiben kann, ist in Dietz [9] nachzulesen.

In unserem Datensatz wurden diskrete Winkel $\alpha_k = k \cdot 2\pi/p$, $k = 0, \ldots, p-1$ und $\beta_i = i \cdot \pi/(2q)$, $i = -q, \ldots, q$ gewählt mit $p = 45$ und $q = 22$. Der Radius der Abtastkurve beträgt $R = 70$ mm. In Abbildung 4.1.8 ist sowohl der gesamte Datensatz zu sehen, als auch eine einzelne Projektion.

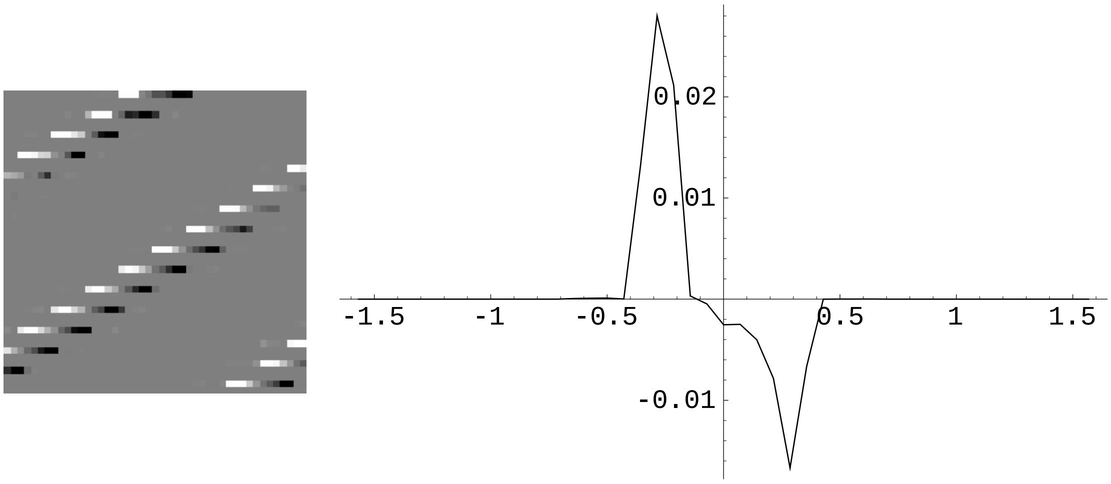

Abbildung 4.1.8 Der Datensatz $\mathcal{D}\mathbf{u}(\alpha_k, \beta_i)$ (links) und eine einzelne Projektion (rechts)

Die Rekonstruktion ist in Abbildung 4.1.9 zu sehen. Bemerkenswert dabei ist, daß der Träger des Geschwindigkeitsfeldes in einem Schlauch in der Mitte enthalten ist, ohne daß wir irgendwelche Vorinformationen in der Rekonstruktion verarbeitet haben. Fehler in der Rekonstruktion sind nicht nur auf Meßfehler zurückzuführen, sondern auch darauf, daß das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ eine von Null verschiedene Divergenz hat. Daher sind Anteile von $\mathbf{u}$ im Kern von $\mathcal{D}$ enthalten und können nicht rekonstruiert werden.

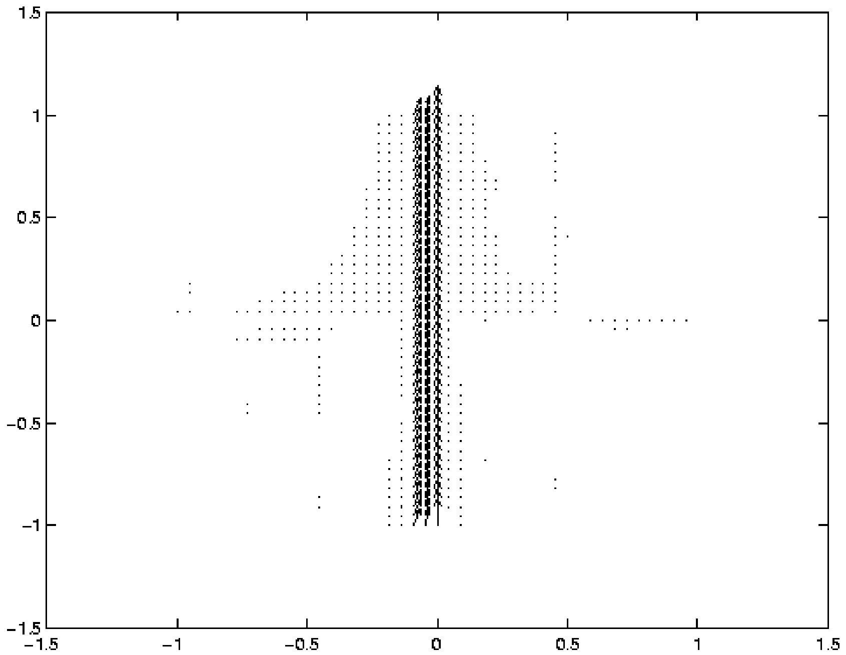

Abbildung 4.1.9 Rekonstruktion $\mathbf{u}_\gamma$ aus den gemessenen Daten $\mathcal{D}\mathbf{u}(\alpha_k, \beta_i)$

Die Rotation des Feldes hat die Form

$$\nabla_2 \times \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -2\,A\,\mathbf{x}_1\,.$$

Diese können wir ebenfalls analog zu Abschnitt 3.3 rekonstruieren. Der entsprechende Rekonstruktionskern ist wiederum gerade das $\sqrt{2\pi}\gamma$-fache des Kernes, den wir im dreidimensionalen Fall errechnet hatten, ausgewertet in $a = 0$. Die Rekonstruktion ist in Abbildung 4.1.10 dargestellt, wobei derselbe Datensatz wie bei der Rekonstruktion von $\mathbf{u}$ verwendet wurde.

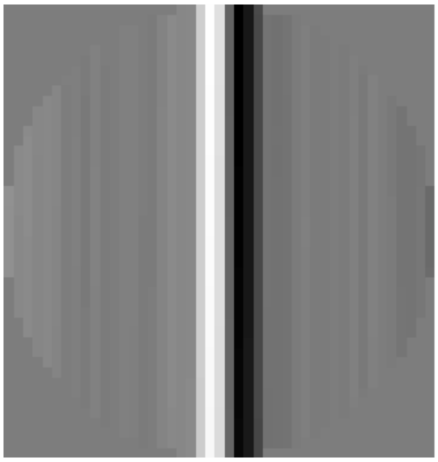

Abbildung 4.1.10 Rekonstruktion von $\nabla_2 \times \mathbf{u}$ aus den gemessenen Daten $\mathcal{D}\mathbf{u}(\alpha_k, \beta_i)$

Die Rekonstruktionen zeigen, daß auch im Falle gemessener Daten der beschriebene Algorithmus sehr gute Ergebnisse effizient liefert, was Hoffnung macht auf weitere praktische Anwendungen.

4.2 Ansätze zu anderen Verfahren

Wir stellen einige Verfahrensansätze vor, die vor allem für die 2D–Vektor–Tomographie hergeleitet wurden. Diese beruhen entweder auf der Gleichung (1.15), oder auf einem Analogon zum Projektionssatz der Radon–Transformation (siehe z.B. Natterer [25]). Abschließend wird kurz auf ein iteratives Verfahren von Wernsdörfer [39] eingegangen.

4.2.1 Vollständige Rekonstruktion durch Messung des Normalflusses

Das im folgenden vorgestellte Verfahren zur vollständigen Rekonstruktion von zweidimensionalen Vektorfeldern entstammt im wesentlichen der Arbeit von Stråhlén [36]. Dabei wird die enge Verwandtschaft der 2D–Doppler–Transformation mit der 2D–Radon–Transformation ausgenutzt und in Anlehnung an die gefilterte Rückprojektion in der 2D–Computer–Tomographie ein Algorithmus angegeben.
Für den gesamten Abschnitt setzen wir stets voraus, daß $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet sei und $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit kompaktem Träger in Ω.

Definition 4.2.1 *Es seien $\omega \in S^1$ und $s \in [-1, 1]$.*
Der Operator $\mathcal{D}^\perp$ mit

$$\mathcal{D}^\perp \mathbf{f}(\omega, s) = \int_{\Omega \cap L(\omega, s)} \omega \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x})$$

heißt Normalfluß–Transformation.

Wie die 3D–Doppler–Transformation ist auch die 2D–Doppler–Transformation nicht injektiv. Jedoch ist ein Vektorfeld $\mathbf{f}$ eindeutig bestimmt, wenn man sowohl seine Dopplertransformierte, als auch seinen Normalfluß kennt.

Lemma 4.2.2 *Gilt sowohl $\mathcal{D}\mathbf{f} = \mathbf{0}$, als auch $\mathcal{D}^\perp \mathbf{f} = \mathbf{0}$, so ist schon $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.*

Beweis: Ist $\mathcal{D}\mathbf{f} = \mathbf{0}$ und $\mathcal{D}^\perp \mathbf{f} = \mathbf{0}$, so gilt für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} -\sin(\varphi)\, \mathcal{R}\mathbf{f}_1 + \cos(\varphi)\, \mathcal{R}\mathbf{f}_2 &= 0\,, \\ \cos(\varphi)\, \mathcal{R}\mathbf{f}_1 + \sin(\varphi)\, \mathcal{R}\mathbf{f}_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{R}\mathbf{f}_1 \\ \mathcal{R}\mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix auf der linken Seite hat Determinante -1, demnach muß für die Lösung gelten

$$\mathcal{R}\mathbf{f}_1 = \mathcal{R}\mathbf{f}_2 = \mathbf{0} .$$

Aus der Injektivität von $\mathcal{R}$ folgt die Behauptung.

□

Lemma 4.2.3 *Mit den vorangegangenen Bezeichnungen gilt die Gleichheit*

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}^{\perp}\mathbf{f} = \mathcal{R}(\nabla \cdot \mathbf{f}) . \tag{4.5}$$

Beweis: Die Aussage beweist man mit den Rechenregeln der Radon–Transformation.

□

Mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas kann man Gleichungen vom Typ der gefilterten Rückprojektion angeben, um die Rotation und Divergenz des Feldes $\mathbf{f}$ zu berechnen.

Satz 4.2.4 *Es sei $v_\gamma \in \mathcal{S}(I\!R)$ eine Schwartz-Funktion und $V_\gamma = \mathcal{R}^* v_\gamma$. Dann gilt*

a)

$$V_\gamma * (\nabla_2 \times \mathbf{f}) = \mathcal{R}^*(v'_\gamma * \mathcal{D}\mathbf{f}) ,$$

b)

$$V_\gamma * (\nabla \cdot \mathbf{f}) = \mathcal{R}^*(v'_\gamma * \mathcal{D}^{\perp}\mathbf{f}) .$$

Beweis: Beide Teile beweist man wie Satz 1.4.5, indem man die Gleichungen (4.3) und (4.5) ausnutzt.

□

Approximiert V_γ die Delta-Distribution δ, so kann man aus den Daten $\mathcal{D}\mathbf{f}$, bzw. $\mathcal{D}^{\perp}\mathbf{f}$ durch gefilterte Rückprojektion, eine geglättete Version von Divergenz und Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{f}$ berechnen. Daß analoge Formeln auch für die Komponenten des Feldes $\mathbf{f}$ gelten, beweist der nachstehende Satz.

Satz 4.2.5 *Mit den vorangegangenen Bezeichnungen gilt*

a)

$$V_\gamma * \mathbf{f}_1 = \mathcal{R}^*(v_\gamma * \omega^{\perp} \cdot (\mathcal{D}\mathbf{f}, \mathcal{D}^{\perp}\mathbf{f})^{\top}) ,$$

b)

$$V_\gamma * \mathbf{f}_2 = \mathcal{R}^*(v_\gamma * \omega \cdot (\mathcal{D}\mathbf{f}, \mathcal{D}^{\perp}\mathbf{f})^{\top}) .$$

BEWEIS: Nutzt man die Gleichheiten

$$\omega^\perp \cdot (\mathcal{D}\mathbf{f}, \mathcal{D}^\perp\mathbf{f})^\top = \mathcal{R}\mathbf{f}_1$$

und

$$\omega \cdot (\mathcal{D}\mathbf{f}, \mathcal{D}^\perp\mathbf{f})^\top = \mathcal{R}\mathbf{f}_2$$

aus, so gehen die Behauptungen a) und b) über in Gleichung d) von Lemma 1.4.3.

□

Bemerkung: Der Satz 4.2.5 zeigt, wie man aus den gegebenen Daten, eine geglättete Version des zu rekonstruierenden Feldes durch gefilterte Rückprojektion erhält. Eine Verallgemeinerung auf höherdimensionale Fälle ist möglich, siehe STRÅHLÉN [36]. Es ergeben sich dabei jedoch zwei bedeutende Schwierigkeiten. Zum einen wird es Probleme messtechnischer Art geben, da die Normalfluß–Transformation eines Vektorfeldes eine Integration über Hyperebenen ist, im dreidimensionalen Fall also über Ebenen. Es ist unklar, wie man solche Integrale durch Messungen ermitteln will. Im zweidimensionalen Fall ist dies kein Problem für rotationssymmetrische Felder $\mathbf{f}$, denn dann gilt einfach $\mathcal{D}^\perp\mathbf{f}(\omega(\varphi), s) = \mathcal{D}\mathbf{f}(\omega(\varphi - \pi/2), s)$. Die zweite Schwierigkeit liegt in dem enormen Rechenaufwand, der zur Rekonstruktion nötig wäre. Satz 4.2.5 läßt sich in dieser Form nicht auf Dimensionen übertragen, die größer als 2 sind. Vielmehr folgt der Beweis des Rekonstruktionssatzes in beliebigen Dimensionen, der in der zitierten Arbeit steht, demjenigen von Theorem 1.2.5. Aufgrund der dort auftretenden Differentiationen und Volumenintegrale ist der Beweis kaum für ein effizientes Verfahren geeignet.

4.2.2 Ein Projektionssatz für die Vektor–Tomographie

Der Projektionssatz für die 2D–Radon–Transformation ist aus der Computer–Tomographie bestens bekannt. Er beschreibt die Fourier–Transformierte von $\mathcal{R}f$ bezüglich der Variablen s. Es gilt

$$(\mathcal{R}f)\hat{}(\omega, \sigma) = (2\pi)^{1/2}\, \hat{f}(\sigma\omega)\,. \tag{4.6}$$

Ein entsprechender Projektionssatz existiert auch für die Doppler–Transformation.

Satz 4.2.6 (Projektionssatz) *a) Ist $\mathcal{D}$ die 2D–Doppler–Transformation, so gilt*

$$(\mathcal{D}\mathbf{f})\hat{}(\omega, \sigma) = (2\pi)^{1/2}\, \omega^\perp \cdot \hat{\mathbf{f}}(\sigma\omega)\,.$$

b) Ist $\mathcal{D} = \oplus_{j=1}^3 \mathcal{D}_j$ die 3D–Doppler–Transformation, so gilt analog

$$(\mathcal{D}_j\mathbf{f})\hat{}(\omega, \sigma, a) = (2\pi)^{1/2}\, \theta_j(\omega) \cdot \hat{\mathbf{f}}(\sigma\, \pi_j\omega + \tau_j a)\,.$$

BEWEIS: Teil a): Wegen

$$\mathcal{D}\mathbf{f}(\omega, s) = \cos(\varphi)\, \mathcal{R}\mathbf{f}_2(\omega, s) - \sin(\varphi)\, \mathcal{R}\mathbf{f}_1(\omega, s)$$

folgt die Behauptung aus Gleichung (4.6). Teil b) ergibt sich aus Teil a).

□

Winters, Rouseff [40] leiten mit Hilfe des Projektionssatzes einen weiteren Algorithmus vom Typ der gefilterten Rückprojektion zur Rekonstruktion der Rotation her. Indem wir beide Seiten der Gleichung (4.3) Fouriertransformieren und den Projektionssatz der Radon–Transformation ausnutzen, erhalten wir

$$\imath\,\sigma\,(\mathcal{D}\mathbf{f})\hat{}(\omega,\sigma) = (2\pi)^{1/2}\,(\nabla_2\times\mathbf{f})\hat{}(\sigma\omega)\,. \tag{4.7}$$

Schreiben wir die inverse Fourier–Transformation in Polarkoordinaten und verwenden Gleichung (4.7), so ergibt sich

$$\begin{aligned}\nabla_2\times\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-1}\int_0^\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma|\,(\nabla_2\times\mathbf{f})\hat{}(\sigma\omega(\varphi))\,e^{\imath\,\sigma\,\mathbf{x}^\top\omega(\varphi)}\,d\sigma\,d\varphi\\ &= (2\pi)^{-1}\int_0^\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma|\,(2\pi)^{-1/2}\,\imath\,\sigma\,(\mathcal{D}\mathbf{f})\hat{}(\omega(\varphi),\sigma)\,e^{\imath\,\sigma\,\mathbf{x}^\top\omega(\varphi)}\,d\sigma\,d\varphi\\ &\approx (2\pi)^{-3/2}\int_0^\pi Q_B(\omega(\varphi),\mathbf{x}^\top\omega(\varphi))\,d\varphi\,,\end{aligned}$$

mit

$$Q_B(\omega,s) = \imath\int_{-B}^{B}|\sigma|\,\sigma\,(\mathcal{D}\mathbf{f})\hat{}(\omega,\sigma)\,e^{\imath\,\sigma\,s}\,d\sigma\,.$$

Die Funktion Q_B kann man auch in Form einer Faltung schreiben. Es gilt

$$Q_B(\omega,s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_B(s-s')\,\mathcal{D}\mathbf{f}(\omega,s')\,ds'\,,$$

wobei

$$g_B(s) = (2\pi)^{-1/2}\,\imath\int_{-B}^{B}|\sigma|\,\sigma\,e^{\imath\,\sigma s}\,d\sigma$$

ist. Insgesamt haben wir demnach

$$\nabla_2\times\mathbf{f}\approx(2\pi)^{-3/2}\,\mathcal{R}^*(g_B*\mathcal{D}\mathbf{f})\,.$$

Den Filter g_B kann man auch durch sphärische Bessel-Funktionen (siehe Abramowitz, Stegun [2]) ausdrücken, es gilt

$$g_B(s) = (2\pi)^{-1/2}\,B^3\,(j_0(Bs/2)\,j_1(Bs/2) - 2\,j_1(Bs))\,.$$

j_0 und j_1 bedeuten die sphärischen Bessel-Funktionen 1. Art von 0-ter bzw. erster Ordnung. Dieser Zugang stellt eine Alternative zu Satz 4.2.4 dar.

Eine offene Frage ist, inwiefern, ähnlich wie bei der Computer–Tomographie, Algorithmen für die Rekonstruktion des Feldes **f** ausgehend vom Projektionssatz für die Doppler–Transformation 4.2.6 entwickelt werden können,.

4.2.3 Direkte algebraische Methoden

Desbat [8] behandelt das zweidimensionale Vektor–Tomographie–Problem mit algebraischen Methoden wie Natterer [25] dies für die Radon–Transformation getan hat, siehe auch Abschnitt 2.2.1.
Es seien endlich viele Punkte ω_j, s_l gegeben mit $\omega_j = \omega(\varphi_j)$, $\varphi_j = j\pi/p$, $j = 0, \ldots, p-1$ und $s_l = l/q$, $l = -q+1, \ldots, q-1$. Der Operator $\mathcal{D}_n : L^2(\Omega^2, I\!R^2) \to I\!R^n$, $n = p(2q-1)$, sei durch Punktauswertung in den Punkten (ω_j, s_l) definiert.

$$(\mathcal{D}_n \mathbf{f})_{j,l} = (\mathcal{D}\mathbf{f})(\omega_j, s_l)\,. \tag{4.8}$$

Da $\mathcal{D}_n$ nur als Abbildung auf X_α mit $\alpha > 1/2$ eine auf ganz $\mathbb{C}^n$ stetige Adjungierte besitzt, bringt die Berechnung der Minimum-Norm-Lösung für das unterbestimmte System (4.8) Schwierigkeiten mit sich. Diese kann man umgehen, indem man statt über Linien über Streifen S_{jl} integriert mit

$$S_{jl} = \{\mathbf{x} \in I\!R^2 : |\mathbf{x}^\top \omega_j - s_l| < 1/q\}\,.$$

Man erhält so einen Operator $\widetilde{\mathcal{D}}_n : L^2(\Omega^2, I\!R^2) \to I\!R^n$ durch

$$(\widetilde{\mathcal{D}}_n \mathbf{f})_{j,l} = \int_{S_{jl}} \omega^\perp \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega^2} \omega^\perp \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \chi_{jl}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,,$$

wobei die Funktion $\chi_{jl} \in L^2(\Omega^2)$ gerade die charakteristische Funktion des Streifens S_{jl} ist, also

$$\chi_{jl}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1\,, & \text{für } |\langle \mathbf{x}, \omega_j\rangle - s_l| < 1/q\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Eine Darstellung für die Matrix $\widetilde{\mathcal{D}}_n \widetilde{\mathcal{D}}_n^*$ kann angegeben und mit dieser die zu $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ gehörende Minimum-Norm-Lösung $\tilde{\mathbf{f}}_{\min}$ berechnet werden.
Darüber hinaus gibt Desbat eine Abtastgeometrie für die 2D–Vektor–Tomographie an, indem er den Zugang von Natterer [25, Kap.3] für die 2D–Radon–Transformation auf die Vektor–Tomographie überträgt.

4.2.4 Ein iteratives Verfahren

Wernsdörfer [39] beschreibt die Anwendung von Algebraischen Rekonstruktionstechniken (ART) zur Rekonstruktion von 3D–Vektorfeldern.
Wir betrachten dazu wieder die diskreten Operatorgleichungen

$$\mathcal{D}_{n,j}\mathbf{f} = g_{n,j} \tag{4.9}$$

mit

$$(\mathcal{D}_{n,j}\mathbf{f})_{(\nu,l,k)} = \int_{L(\omega_\nu, s_l, a_k)} \theta_j(\omega_\nu) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x})$$

für $n = 4pqr$, $j \in \{1,2,3\}$. Die Diskretisierung sei wie in Abschnitt 3.2.3 gegeben. Für das Feld $\mathbf{f}$ gelte $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$. Ferner sei $\iota : I\!N \to I\!N^3$ eine Bijektion, so daß es zu jedem Index-Tripel (ν, l, k) ein $\kappa \in I\!N$ gibt mit $\iota(\kappa) = (\nu, l, k)$. Wir zerlegen den dreidimensionalen Einheitswürfel K_1^3 in disjunkte Quader S_μ mit Seitenlängen $2/N$ für $N > 0$. Es sei also

$$K_1^3 = \bigcup_{\mu=1}^{N\times N\times N} S_\mu\,, \qquad S_\mu \cap S_{\mu'} = \emptyset \Leftrightarrow \mu \neq \mu'\,.$$

Wir nehmen an, $\mathbf{f}$ sei stückweise konstant auf den Quadern S_μ, d.h. $\mathbf{f}$ hat eine Darstellung

$$\mathbf{f}_j = \sum_{\mu=1}^{N^3} F_\mu^j \, \chi_{S_\mu}\,.$$

Bezeichnen wir mit

$$b_{\mu,\kappa} = \lambda(L(\omega_\nu, s_l, a_k) \cap S_\mu)\,, \qquad \iota(\kappa) = (\nu, l, k)\,,$$

die Länge des Teilstücks der Gerade $L(\omega_\nu, s_l, a_k)$, das S_μ schneidet, wobei λ das eindimensionale Lebesgue-Maß ist, so gehen die drei Gleichungen (4.9) über in

$$\begin{aligned}
(g_{n,1})_{\iota(\kappa)} &= \sum_{\mu=1}^{N^3} F_\mu^1\,(-\sin(\varphi_\nu))\, b_{\mu,\kappa} + F_\mu^2\, \cos(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa}\,,\\
(g_{n,2})_{\iota(\kappa)} &= \sum_{\mu=1}^{N^3} F_\mu^2\,(-\sin(\varphi_\nu))\, b_{\mu,\kappa} + F_\mu^3\, \cos(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa}\,,\\
(g_{n,3})_{\iota(\kappa)} &= \sum_{\mu=1}^{N^3} F_\mu^1\, \sin(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa} - F_\mu^3\, \cos(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa}\,,\\
\iota(\kappa) &= (\nu, l, k)\,.
\end{aligned}$$

Wir wollen diese drei Gleichungen in kompakter Form zu einem Gleichungssystem zusammenfassen. Dazu fassen wir die drei Datensätze $g_{n,j}$ zu einem Vektor $\mathbf{G}_n$ zusammen in der Form

$$(\mathbf{G}_n) = (g_{n,1}, g_{n,2}, g_{n,3})^\top \in I\!R^{3n}\,.$$

$\varsigma : \{1,\ldots,3n\} \to \{1,2,3\} \times \{1,\ldots,n\}$ sei ein Isomorphismus, d.h. zu jedem $\xi \in \{1,\ldots,3n\}$ gibt es ein eindeutiges Paar Zahlen (j,κ) mit

$$(\mathbf{G}_n)_\xi = (g_{n,j})_{\iota(\kappa)}\,.$$

Dann lassen sich die drei obigen Gleichungen kompakter schreiben in der Form

$$(\mathbf{G}_n)_\xi = \sum_{\mu=1}^{N^3} F_\mu^1\, B_{\mu,\xi}^1 + F_\mu^2\, B_{\mu,\xi}^2 + F_\mu^3\, B_{\mu,\xi}^3\,. \tag{4.10}$$

Mit $B^m_{\mu,\xi}$ bezeichnen wir die Größen

$$B^m_{\mu,\xi} = \begin{cases} -\sin(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa} & : \quad m=1\,,\ j=1\,, \\ \sin(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa} & : \quad m=1\,,\ j=3\,, \\ \cos(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa} & : \quad m=2\,,\ j=1\,, \\ -\sin(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa} & : \quad m=2\,,\ j=2\,, \\ \cos(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa} & : \quad m=3\,,\ j=2\,, \\ -\cos(\varphi_\nu)\, b_{\mu,\kappa} & : \quad m=3\,,\ j=3\,, \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\varsigma(\xi) = (j,\kappa)$, $\iota(\kappa) = (\nu, l, k)$. Gleichung (4.10) können wir noch kürzer schreiben durch

$$(\mathbf{G}_n)_\xi = F^{1,\top} B^1_\xi + F^{2,\top} B^2_\xi + F^{3,\top} B^3_\xi\,, \quad 1 \le \xi \le 3n\,,$$

und erhalten schließlich die kompakte Form

$$\mathbf{G}_n = [B^1\, B^2\, B^3][F^1\, F^2\, F^3]^\top := \mathbf{B}_n \mathbf{F} \tag{4.11}$$

mit $\mathbf{G}_n \in I\!R^{3n}$, $\mathbf{B}_n \in I\!R^{3n\times 3N^3}$, und $\mathbf{F} \in I\!R^{3N^3}$. Die Anwendung von ART auf die Gleichungen (4.11) sieht wie folgt aus.
Sei $\mathbf{F}^0 \in \text{ span } \{B_\xi = [B^1_\xi, B^2_\xi, B^3_\xi]^\top \,|\, 1 \le \xi \le 3n\} \subset I\!R^{3N^3}$ gegeben (z.B. $\mathbf{F}^0 = 0$).
Für $k = 0, 1, \ldots$ iteriere

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}^k_1 &:= \mathbf{F}^k \in I\!R^{3N^3}\,, \\ \tilde{\mathbf{F}}^k_\xi &= \tilde{\mathbf{F}}^k_{\xi-1} + \frac{\rho}{|B_\xi|^2}\left((\mathbf{G}_n)_\xi - B_\xi^\top \tilde{\mathbf{F}}^k_{\xi-1}\right) B_\xi\,, \\ & \quad\ \text{für} \quad \xi = 2, \ldots, 3n\,, \\ \mathbf{F}^{k+1} &:= \tilde{\mathbf{F}}^k_{3n}\,. \end{aligned}$$

Hier ist $0 < \rho < 2$ ein Relaxationsparameter. Für eingehendere Untersuchungen und eine Konvergenzanalyse sei auf Natterer [25] verwiesen.
Wernsdörfer korrigiert in seiner Arbeit jede Iterierte $\mathbf{F}^k$, indem er für jeden Quader S_μ ein Funktional der Form

$$\sum_{i=1}^{8} \left((\mathbf{F}^{k+1}_{xi} - \mathbf{F}^k_{xi})^2 + (\mathbf{F}^{k+1}_{yi} - \mathbf{F}^k_{yi})^2 + (\mathbf{F}^{k+1}_{zi} - \mathbf{F}^k_{zi})^2\right) + w\, \text{div}^* \mathbf{F}^{k+1}$$

minimiert. Dabei ist div^* eine Diskretisierung des Divergenz-Operators, w ein Lagrange-Multiplikator. Es wird jeweils über die 8 benachbarten Quader von S_μ summiert.

Der Vorteil dieses Verfahrens ist, daß es sich ohne große Probleme auf beliebige Geometrien übertragen läßt. Der entscheidende Nachteil gegenüber dem Verfahren der approximativen Inversen ist der Aufwand. Jede Gerade L trifft pro Schicht etwa N Quader, d.h. in jedem Vektor B_ξ sind etwa $\mathcal{O}(N^2)$ von Null verschiedene Einträge. Nehmen wir an, daß $q = \mathcal{O}(p)$ und $r = \mathcal{O}(p)$ gilt, eine durchaus sinnvolle Annahme, so muß man pro Iteration $\mathcal{O}(p^3N^2)$ Rechenoperationen durchführen, soviel wie für die gesamte approximative Inverse. Vergleicht man den Aufwand mit der schnellen Version der approximativen Inversen für Vektorfelder unter denselben Annahmen, so sieht man, daß das Iterationsverfahren für große Datenmengen nicht mehr konkurrenzfähig sein wird.

4.3 Ausblick auf zukünftige Untersuchungen

Mit dieser Arbeit ist das Problem der Vektor–Tomographie natürlich bei weitem noch nicht abgeschlossen. Vielmehr ist das hier vorgestellte Verfahren ein erster Schritt. Probleme, die noch zu untersuchen sind, sind neben anderen die folgenden.
Wie verhält sich die Divergenz des rekonstruierten Feldes $\mathcal{S}_\gamma\mathbf{g}$, wenn die des exakten Feldes gleich Null war? Eine Möglichkeit den Fehler zu korrigieren besteht in folgendem Vorgehen. Es sei $\mathbf{f} = \mathbf{f}^s$ ein divergenzfreies Vektorfeld. Das rekonstruierte Feld $\mathbf{f}_{\mathrm{rek}}$ hat die Gestalt

$$\mathbf{f}_{\mathrm{rek}} = \mathbf{f}^s + \nabla p\,.$$

Wendet man auf beiden Seiten den Divergenz-Operator an, so erhält man

$$\Delta p = \nabla \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{rek}}\,.$$

Mit Hilfe geeigneter Randbedingungen an p erhält man p somit als Lösung einer Potentialgleichung und wir können $\mathbf{f}^s$ berechnen durch

$$\mathbf{f}^s = \mathbf{f}_{\mathrm{rek}} - \nabla p\,.$$

Desweiteren wäre es auch interessant zu untersuchen, wie die Normalkomponente

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{rek}}$$

auf dem Rand von Ω sich verhält. Üblicherweise fordert man von Geschwindigkeitsfeldern

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = 0$$

auf $\partial\Omega$, d.h. es dringt keine Flüssigkeit nach außen. Den Fehler in $\mathbf{f}_{\mathrm{rek}}$ kann man so korrigieren: Man addiert zu $\mathbf{f}_{\mathrm{rek}}$ ein Korrekturfeld $\tilde{\mathbf{f}}$, das die Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{f}} &= \mathbf{0}\,, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}} &= 0\,, \\ \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{f}} &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{rek}} \end{aligned}$$

erfüllt. Mit Lemma 1.2.3 folgt aus der ersten Gleichung $\tilde{\mathbf{f}} = \nabla\phi$. Damit gehen die beiden anderen Gleichungen über in

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0\,, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{rek}}\,. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Laplace-Gleichung ist bis auf eine additive Konstante bestimmt, also ist $\nabla\phi$ eindeutig bestimmt, und wir berechnen

$$\mathbf{f}_{\text{neu}} = \mathbf{f}_{\text{rek}} + \nabla\phi\,.$$

Grundsätzlich ist die beschriebene Meßgeometrie ziemlich umständlich für praktische Anwendungen, da entweder das zu untersuchende Objekt, oder die Meßanordnung drei mal gedreht werden müssen. JUHLIN [14] zeigt, daß man auch mit zwei Datensätzen $\mathcal{D}_j\mathbf{f}$ auskommt, indem man die Gleichheit

$$\begin{aligned} e_2 \cdot \nabla \times \mathbf{f}(x,y,z) &= \int_{-\infty}^{y} \frac{\partial}{\partial\eta} e_2 \cdot \nabla \times \mathbf{f}(x,\eta,z)\,d\eta \\ &= -\int_{-\infty}^{y} \frac{\partial}{\partial x} e_1 \cdot \nabla \times \mathbf{f}(x,\eta,z) + \frac{\partial}{\partial z} e_3 \cdot \nabla \times \mathbf{f}(x,\eta,z)\,d\eta \end{aligned}$$

ausnutzt. Jedoch ist die angegebene Formel nicht zur Implementierung geeignet. Es ist demnach durchaus wichtig, sich geschicktere Meßgeometrien zu überlegen.
Bei unserem hergeleiteten Verfahren verwenden wir zur Rekonstruktion der ersten Komponente eines Vektorfeldes $\mathbf{f}_1$ lediglich den ersten Datensatz $\mathcal{D}_1\mathbf{f}$. Dieser enthält Informationen über die Komponenten $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$. Im Datensatz $\mathcal{D}_3\mathbf{f}$ stecken Informationen über $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_3$, diese werden jedoch zur Berechnung von $\mathbf{f}_1$ nicht genutzt. Die Frage ist daher, inwiefern sich das Konzept der Approximativen Inversen im Falle der Vektor–Tomographie erweitern läßt, damit zur Rekonstruktion von $\mathbf{f}_1$ sowohl der Datensatz $\mathcal{D}_1\mathbf{f}$, als auch $\mathcal{D}_3\mathbf{f}$ Verwendung finden. Die zusätzliche Information sollte zu einer Verringerung des Fehlers bei der Rekonstruktion in Abschnitt 4.1.1 führen.
Ein weiterer Forschungsgegenstand wird es sein, auf dem Gebiet Ω, z.B. $\Omega = \Omega^3$, nicht nur die euklidische, sondern beliebige RIEMANNsche Metriken zu betrachten. Es ist klar, daß die Geraden, die wir betrachten, nur Annäherungen an die Realität sind. In Wirklichkeit wird die Welle gebeugt, d.h. man wird über geodätische Linien einer RIEMANNschen Metrik integrieren. Das ist jedoch mit enormen Schwierigkeiten verbunden. Zum einen kann man bei der Berechnung der Rekonstruktionskerne nicht mehr die Singulärwertzerlegung der Radon–Transformation ausnutzen, da diese nur für die euklidische Metrik bekannt ist. Zum anderen hat der Divergenzoperator eine andere Gestalt, nämlich

$$\delta\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_j}\, g^{ij}\,,$$

wobei g^{ij} die Koeffizienten des zweifach kontravarianten metrischen Tensors darstellen, siehe SHARAFUTDINOV [32]. Demzufolge ist die Differentialgleichung, die zur Korrektur des rekonstruierten Feldes gelöst werden muß, nicht mehr eine Potentialgleichung, sondern hat eine wesentlich kompliziertere Form.

Dies sind nur einige Punkte, in welche Richtung die Forschungen in der Vektor–Tomographie weitergehen könnten.

Literaturverzeichnis

[1] H. Abdullah, A.K. Louis, *The approximate inverse for solving an inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium*, Inverse Problems 15, 1213-1230, **1999**.

[2] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, **1972**.

[3] J.-P. Aubin, *Applied functional analysis*, Wiley, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, **1979**.

[4] G. Backus, F. Gilbert, *Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems*, Geophys. J. R. Astron. Soc., 13, 247-276, **1967**.

[5] H. Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter, Berlin, New York, **1990**.

[6] L. Brand, *Vector and Tensor Analysis*, Wiley, New York, **1962**.

[7] A.J. Chorin, J.E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, **1979**.

[8] L. Desbat, *Efficient parallel sampling in vector field tomography*, Inverse Problems 11, 995-1003, **1995**.

[9] R. Dietz, *Die Approximative Inverse als Rekonstruktionsmethode in der Röntgen-Computer–Tomographie*, Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, **1999**.

[10] O. Forster, *Analysis 3*, Vieweg, **1984**.

[11] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, **1980**.

[12] S. Helgason, *The Radon Transform*, Birkhäuser, **1980**.

[13] T. Jansson, M. Almquist, K. Strahlen et al., *Ultrasound Doppler vector tomography measurements of directional blood flow*, Ultrasound in Med. and Biol., Vol. 23, Nr. 1, S. 47-57, **1997**.

[14] P. Juhlin, *Principles of Doppler Tomography*, Technical Report, Dept. of Mathematics, Lund Institute of Technology, **1992**.

[15] A. Kirsch, B. Schomburg, G. Berendt, *The Backus-Gilbert method*, Inverse Problems 4, 771-783, **1988**.

[16] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Volume 1, Dunod Paris, **1968**.

[17] G.G. Lorentz, *Approximation of Functions*, Holt, Rinehart and Winston, New York, **1966**.

[18] A.K. Louis, *Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform*, SIAM J. Math. Anal. 15, 621-633, **1984**.

[19] A.K. Louis, *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner, **1989**.

[20] A.K. Louis, *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Problems 12, 175-190, **1996**.

[21] A.K. Louis, P. Maass, *Smoothed projection methods for the moment problem*, Numer. Math. 59, 277-294, **1991**.

[22] A.K. Louis, P. Maass, *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*, Inverse Problems 6, 746-769, **1990**.

[23] A.K. Louis, Th. Schuster, *A Novel Filter Design Technique in 2D - Computerized Tomography*, Inverse Problems 12, 685-696, **1996**.

[24] A.K. Louis, *A Unified Approach to Regularization Methods for Linear Ill–Posed Problems*, Inverse Problems 15, 489-498, **1999**.

[25] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, Wiley and Teubner, **1986**.

[26] N.F. Osman, J.L. Prince, *3D vector tomography on bounded domains*, Inverse Problems 14, 185-196, **1998**.

[27] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ber. Ver. Sächs. Akad. Wiss. Lepzig, 69, **1917**.

[28] A. Rieder, Th. Schuster, *The approximate inverse in action with an application to computerized tomography*, erscheint bei SIAM Journal of Num. Anal., **1999**.

[29] W. Rudin, *Functional Analysis*, Tata McGraw-Hill, **1973**.

[30] L.L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*, Pure & and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, **1981**.

[31] TH. SCHUSTER, *Die approximative Inversionsformel und ihre Anwendung bei der Rekonstruktion der Rotation von Vektorfeldern*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes Saarbrücken, **1995**.

[32] V.A. SHARAFUTDINOV, *Integral Geometry of Tensor Fields* , VSP Utrecht, **1994**.

[33] H. SIELSCHOTT, *Measurement of horizontal flow in a large scale furnace using acoustic vector tomography*, Flow. Meas. Instrum. 8, Nr. 3/4, 191-197, **1997**.

[34] G. SPARR, K. STRAHLEN, K. LINDSTRÖM, H.W. PERSSON, *Doppler tomography for vector fields*, Inverse Problems 11, 1051-1061, **1995**.

[35] G. SPARR, K. STRAHLEN, *Vector field tomography, an overview*, Preprint, **1998**.

[36] K. STRAHLEN, *Reconstructions from Doppler Radon transforms*, Technical Report, Dept. of Mathematics, Lund Institute of Technology, **1996**.

[37] J. WEIDMANN, *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teubner Stuttgart, **1976**.

[38] P.N.T. WELLS, M. HALLIWELL, R. SKIDMORE, A.J. WEBB, J.P.WOODCOCK, *Tumour detection by ultrasonic Doppler blood-flow signals*, Ultrasonics 15, Nr. 5, 231-232, **1977**.

[39] A. WERNSDÖRFER, *Complete Reconstruction of Three–Dimensional Vector Fields*, Proc. ECAPT 93 (Karlsruhe), **1993**.

[40] K.B. WINTERS, D. ROUSEFF, *A filtered backprojection method for the tomographic reconstruction of fluid vorticity*, Inverse Problems 6, S. L33-L38, **1990**.

[41] J. WLOKA, *Partielle Differentialgleichungen*, Teubner Stuttgart, **1982**.