Algorithmen für die 3D – Computer – Tomographie bei zerstörungsfreien Prüfverfahren

Alfred K. Louis, Rainer Dietz

Universität des Saarlandes, Fachbereich Mathematik, Postfach 15 11 50,
D-66041 Saarbrücken, Germany

Abstract. 2D X–Ray computerized tomography is a standard technique both in medical imaging and in nondestructive testing. One of the drawbacks in a series of 2D measurements is that the resolution perpendicular to the image planes is much inferior to the resolution in the image planes. Especially for finding flaws in welded joints this is not acceptable. In this paper a 3D scanning scheme is described, a reconstruction algorithm enhancing discontinouities is presented and resolution and stability problems are addressed. Reconstructions from real data, especially from a laser welded steal tube and a piece of a lamb bone, are included.

1 Einleitung

Bei der zerstörungsfreien Prüfung von Stahl, Kunststoff, metallarmiertem Gummi usw. wird häufig die Röntgencomputertomographie eingesetzt. Es können so kostengünstig gesicherte Informationen über den Zustand von Produkten, selbst während der Produktion, gewonnen werden. Ein Vorteil gegenüber der Ultraschallmessung ist die bessere Durchdringung bei stark absorbierenden Medien wie Stahl mit hohen Dichtesprüngen. In dem vorliegenden Projekt werden Röhren, insbesondere vor Ort in Kraftwerken, auf Fehler in den Schweißnähten untersucht. Dazu werden Röntgenstrahlen durch das Rohr geschickt, und die Intensität der Strahlen wird auf der gegenüberliegneden Seite in Detekoren gemessen.
Standardmäßig wird dieses Verfahren in der Medizin angewandt, wo Serien von Schnittbildern durch den Patienten erzeugt werden. Die Auflösung in den Bildern ist sehr gut. Senkrecht zu diesen Ebenen wird die Auflösung durch die räumliche Verschiebung des Patienten in dem Röntgenscanner bestimmt. Dieses Verfahren ist konzeptionell auch bei der Materialprüfung anwendbar. Bei der Suche nach feinen Rissen in den Schweißnähten besteht allerdings die Gefahr, daß durch die Bewegung der Röntgenröhre die Auflösung in dieser Richtung zu gering ist, um die Schwachstellen zu finden.

Deshalb wird in diesem gemeinsam mit Siemens Energiewirtschaft (KWU), Erlangen, und dem Fraunhofer Institut für zerstörungsfreie Prüfverfahren in Saarbrücken durchgeführten Projekt von dreidimensionalen Messungen ausgegangen : von jeder Position der Röntgenquelle wird ein Kegel von Röntgenstrahlen ausgesandt, der den zu untersuchenden Bereich vollständig überdeckt. An die Meßapparatur werden folgende Anforderungen gestellt :

– hohe Fehlernachweiswahrscheinlichkeit (insbesondere für Risse)
– Mobilität (geringes Gewicht, einfache Handhabung)
– vertretbarer Meßzeitaufwand (maximal eine Nachtschicht pro Naht)
– geringe Störeffekte der Hintergrundstrahlung
– zuverlässige Kalibrierung und Justierung

Dem hier aufgeführte Lastenheft liegen die Anforderungen einer solchen Meßeinrichtung im betrieblichen Alltag zugrunde. Die Forderung nach geringem Gewicht und die nicht angeschnittene Kostenfrage schränken die Leistungsfähigkeit der Röntgenröhre ein. Das beeinflußt negativ das Signal–Rausch–Verhältnis. Wegen der relativ langen Strahlenwege schräg durch den Röhrenmantel kommen kaum Photonen an den entsprechenden Detektorpositionen an, es liegt de facto das Problem unvollständiger Daten bezüglich des Röntgenkegels vor. Bei schlecht zugänglichen Röhren ist es nicht immer möglich, eine volle Umrundung des Rohres vorzunehmen. Schließlich ist bestenfalls eine Spiralbahn, meistenfalls aber eine Kreisbahn um das Objekt möglich. All dies entfernt uns weit vom Idealfall ' vollständiger ' Daten.

Im zweiten Abschnitt wird das mathematische Modell der Röntgencomputertomographie hergeleitet, und es werden einige grundlegende mathematische Resultate zusammengestellt. Ein allgemeines Prinzip zur Herleitung von Lösungsverfahren bei endlich vielen Daten unter Vermeidung von künstlichen Diskretisierungen, die approximative Inverse, wird dann vorgestellt. Eine Diskussion über mögliche Rekonstruktionsalgorithmen schließt sich an. Es stellt sich dabei heraus, daß wegen der oben genannten unvollständigen und stark verrauschten Daten das von Maaß und dem Autor entwickelte Rekonstruktionsverfahren besondere Vorteile hat. Es folgt eine Diskussion über Fragen der Implementierung an. Im letzten Abschnitt werden Rekonstruktionen aus realen Daten, die im Fraunhofer Institut für zerstörungsfreie Prüfverfahren in Saarbrücken gemessen wurden, präsentiert. Insbesondere im Falle eines lasergeschweißten Stahlrohrs zeigt sich die Überlegenheit des hier entwickelten Verfahrens gegenüber den (wenigen bisher zur Verfügung stehenden) Algorithmen.

2 Herleitung und Analyse des mathematischen Modells

Röntgenstrahlen laufen geradlinig durch das zu untersuchende Objekt, die Intensitätsminderung ΔI ist proportional der Weglänge Δt und der Intensität I selbst. Gleichheit erhält man durch Einführung eines Porportionalitätsfaktors f, dem Röntgenabminderungsfaktor, welcher der Dichte entspricht :

$$\Delta I = -I \ \Delta t \ f \ .$$

Um ein positives f zu erhalten, wird das Minuszeichen bei der Intensitätsänderung gewählt. Division durch Δt und Grenzübergang $\Delta t \to 0$ liefert bei dem betrachteten Strahlenweg die gewöhnliche Differentialgleichung

$$I'/I = (\ln I)' = -f \ ,$$

wobei die Intensität des Strahlens beim Verlassen der Röntgenröhre, I_0, und beim Auftreffen auf den Detektor über den Weg L, I_L, bekannt sind. Integriert man die Differentialgleichung mit diesen Randbedingungen, so ergibt sich

$$\int_L f \ dt = -\ln(I_0/I_L) = g_L \ .$$

Diese Integralgleichung für f, die sogenannte Röntgentransformation, ist zu invertieren, wobei die Daten g_L für alle Wege von Röntgenquelle zu Detektorpositionen gegeben sind.
Es sind nun mehrere Parametrisierungen dieser Wege üblich. Für die mathematische Analyse besonders einfach ist die folgende Vorgehensweise. Es sei $\theta \in S^2$ eine Richtung und $\theta^\perp$ die zu θ senkrechte Ebene durch 0. Dann ist

$$Pf(\theta, y) = \int_{\mathbb{R}} f(y + t\theta)dt \ , \ y \in \theta^\perp$$

die Röntgentransformation in der sogenannten parallelen Geometrie. Eine Inversionsformel ist bekannt, wenn $g(\theta, y)$ für alle $y \in \theta^\perp$ und für alle $\theta \in S^2$ gegeben ist, siehe zum Beispiel [17]. Ebenso kennt man die Singulärwertzerlegung und den Nullraum für endlich viele Richtungen, siehe [16]. Diese Resultate basieren auf dem Zusammenhang zwischen Röntgen– und Radontransformation, wo entsprechende Ergebnisse zunächst angegeben wurden, siehe [7, 8].

Praktisch wird folgendermaßen gemessen : die Quelle wird auf einer Bahn Γ um das Objekt geführt, und von jeder Position $a \in \Gamma$ wird ein Kegel von Strahlen in den Richtungen $\theta \in S^2$ emittiert, die auf einem flächigen Detektor empfangen werden :

$$Df(a, \theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta)dt \tag{1}$$

sind die Daten in der sogenannten Kegelstrahlgeometrie. In den hier interessierenden Anwendungen ist Γ meistens eine Kreisbahn oder manchmal auch eine Spiralbahn um das Objekt. Nach einem Ergebnis von Tuy, [19], und Kirillov, [5], ist das Objekt nur in den Punkten eindeutig bestimmt, bei denen alle Ebene durch den Punkt die Meßkurve Γ schneiden (und nicht nur berühren). Bei der Kreisbahn ist dieser Bereich natürlich sehr klein.

3 Approximative Inverse

In diesem Abschnitt wird ein konstruktives Verfahren zur Lösung von Integralgleichungen erster Art angegeben. Sei $A : X \to Y$ ein linearer, kompakter Operator zwischen Hilberträumen X und Y. Da bei praktischen Problemen nur endlich viele Daten zur Verfügung stehen, beschränken wir uns hier auf $Y = \mathbb{R}^N$ oder $Y = \mathbb{C}^N$. Weiter sei $X = L_2(\Omega)$, wobei Ω der Definitionsbereich der gesuchten Funktion f ist, welche die Gleichung

$$Af = g \tag{2}$$

löst. Es sei

$$(Af)_n = \langle f, p_n \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{p_n(x)}\, dx \ , \ n = 1, \dots, N \ .$$

Für die Näherungslösung machen wir den Ansatz

$$f_\gamma(x) = \langle f, e_\gamma(x, \cdot)\rangle = \int_\Omega f(y)\overline{e_\gamma(x,y)}\, dy$$

mit einer geeignet zu wählenden Funktion $e_\gamma(x,y)$, wobei γ die Rolle des Regularisierungsparameters spielt. Ist $e_\gamma(x,\cdot)$ eine Approximation an die Deltadistribution δ_x, so erhalten wir Näherungen von f. Wählt man $e_\gamma(x,\cdot)$ als Wavelet, so können Approximationen von Ableitungen von f berechnet werden, siehe [13]. Dies ist insbesondere dann von Vorteil, wenn Konturen von Objekten und nicht die Objekte selbst interessieren.

Zur Berechnung von $f_\gamma(x)$ approximieren wir für festes x nun $e_\gamma(x,\cdot)$ im Range des adjungierten Operators A^*, wobei

$$A^* g(y) = \sum_{n=1}^N g_n \, p_n(y) \ .$$

Falls lösbar, berechnen wir $\psi_\gamma(x) \in \mathbb{C}^N$ mit

$$A^*\psi_\gamma(x) = e_\gamma(x,\cdot) \text{ für } x \in \Omega \ . \tag{3}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f_\gamma(x) &= \langle f, e_\gamma(x,\cdot)\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle f, A^*\psi_\gamma(x)\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle Af, \psi_\gamma(x)\rangle_{\mathbb{C}^N} \\ &= \langle g, \psi_\gamma(x)\rangle_{\mathbb{C}^N} \end{aligned}$$

berechenbar durch Bildung von Skalarprodukten in $\mathbb{C}^N$.

Ist Gl.(3) nicht lösbar, so minimieren wir für hinreichend glattes $e_\gamma(x,\cdot)$ den Defekt

$$\|A^*\psi_\gamma(x) - e_\gamma(x,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \to \min \ ,$$

das heißt, wir berechnen

$$AA^*\psi_\gamma(x) = Ae_\gamma(x,\cdot)$$

in $\mathcal{N}(A^*)^\perp = \mathcal{R}(A)$. Dabei ist die Matrix AA^* gegeben als

$$(AA^*)_{mn} = \langle p_n, p_m \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega p_n(y)\overline{p_m(y)}\,dy\ .$$

Definition 1. Die Abbildung $S_\gamma : Y \to X$ mit

$$S_\gamma g(x) = \langle g, \psi_\gamma(x) \rangle_{\mathbb{C}^N} \tag{4}$$

heißt *approximative Inverse von* A. Der Vektor $\psi_\gamma(x) \in \mathbb{C}^N$ heißt *Rekonstruktionskern für den Punkt* x.

Theorem 2. *Es gilt*

$$S_\gamma g(x) = \langle f_m, e_\gamma(x,\cdot) \rangle_X\ , \tag{5}$$

das heißt, die approximative Inverse liefert die gefilterte Version der Minimum – Norm – Lösung.

Für einen Beweis sei auf [11] verwiesen. Der Rekonstruktionskern kann für beliebige Stellen x unabhängig von den Daten vorberechnet werden, die Auswertung der approximativen Inversen besteht dann nur noch in der Berechnung von Skalarprodukten, was leicht parallel implementiert werden kann. Bei dieser Vorgehensweise wird die Einführung künstlicher Diskretisierungen vermieden. Die meisten Regularisierungsverfahren, wie Tikhonov – Phillips Regularisierung, abgeschnittene Singulärwertzerlegung oder Landweberverfahren treten als Spezialfälle auf.

Invarianzeigenschaften des Operators A lassen sich ausnutzen, um Speicher– und Rechenaufwand drastisch zu reduzieren, siehe [11].

Theorem 3. *Seien* $A : X \to Y$, $T_1^x : X \to X$ *und* $T_2^x, T_3^x : Y \to Y$ *lineare stetige Operatoren mit*

$$AT_1 = T_2 A \quad \textit{und} \quad T_2 AA^* = AA^* T_3\ .$$

Sei ϕ_γ *die Minimum–Norm–Lösung von*

$$AA^*\phi_\gamma = AE_\gamma$$

für einen festen Mollifier E_γ. *Dann ist die Minimum–Norm–Lösung von*

$$AA^*\psi_\gamma(x) = AT_1^x E_\gamma$$

gegeben als

$$\psi_\gamma(x) = T_3^x \phi_\gamma\ .$$

Verwendet man zum Beispiel Mollifier, die sich durch Translation eines festen Mollifiers ergeben, und ist der Operator A invariant gegenüber Translationen, so errechnet sich der Rekonstruktionskern $\psi_\gamma(x)$ einfach als Translation eines festen Kernes ϕ_γ. Es braucht also nur noch ϕ_γ gespeichert zu werden. Eine Anwendung auf die 2D – CT mit einer geeigneten Approximation an AA^* ist in [14] enthalten; es zeigt sich dabei, daß ein Verfahren vom Typ der gefilterten Rückprojektion entsteht, was eine effiziente Implementierung ermöglicht.

4 Rekonstruktionsformeln

Im zweidimensionalen Fall stimmen Radon– und Röntgentransformation für die parallele Geometrie überein. Sehr einfach ist es, eine Inversionsformel für die Radontransformation herzuleiten, siehe z.B. [17], [10]. Für die praktisch verwendete Fächergeometrie ergeben sich Inversionsformeln durch Transformation der Variablen. Im dreidimensionalen Fall ist der Zusammenhang zwischen den beiden Transformationen wesentlich schwieriger. Wie oben erwähnt wurde er von Maaß in [16] genutzt, um Singulärwertzerlegungen zu finden. Die Verfahren von Grangeat, [4], und Lewitt et al, [6], nutzen ebenfalls diesen Zusammenhang.

Bei der parallelen Geometrie erhält man eine Inversionsformel durch Anwendung des adjungierten Operators P^* und des Riesz – Potentials I^α. Der adjungierte Operator zwischen den L_2 Räumen ist definiert als

$$P^*g(x) = \int_{S^2} g(\theta, E_\theta x) d\theta \ ,$$

wobei E_θ die orthogonale Projektion auf $\theta^\perp$ ist. Es handelt sich hier um eine lokale Operation, da nur über alle Linienintegrale durch den Punkt x gemittelt wird. Hierzu müssen aber die Daten für alle Richtungen $\theta \in S^2$ vorliegen. Das Riesz – Potential im $\mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\imath x\xi} |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

wobei $\hat{f}$ die Fourier – Transformierte von f ist. Insgesamt ergibt sich die Inversionsformel, siehe z.B. [17]

$$I^\alpha f = \frac{1}{8\pi} P^* I^{\alpha-1} P f \tag{6}$$

für $\alpha < 3$. Für $\alpha = 0$ erhält man f selbst. Allerdings ist dann die Inversionsformel nicht mehr lokal, denn zur Berechnung von $I^{-1}Pf$ muß Pf für alle $x \in \mathbb{R}^3$ bekannt sein. Interessant ist noch der Fall $\alpha = -1$. Es ergibt sich I^{-2} direkt durch die zweite Ableitung von Pf nach der zweiten Variablen, und so ist auch diese Operation lokal : zur Berechnung an einer Stelle müssen nur die Linienintegrale durch eine kleine Umgebung des entsprechenden Punktes bekannt sein. Wegen

$$(\widehat{I^{-1}f})(\xi) = |\xi|\hat{f}(\xi) = ((-\Delta)^{-1/2}f)^{\wedge}(\xi)$$

rekonstruiert man in diesem Falle die Anwendung des Pseudodifferentialoperators $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ auf die gesuchte Dichte. Dies wurde schon im zweidimensionalen Fall in [5] ausgenutzt, da $(-\Delta)^{1/2}f$ überall dort Unstetigkeiten hat, wo auch f unstetig ist. Ebenfalls im zweidimensionalen Fall ist das zur Rekonstruktion von Konturen von f verwandt worden, siehe [2].

Bei der praktischen Durchführung müssen die Daten gefiltert werden. Verwendet man einen Tiefpaß, so rekonstruiert man

$$\begin{aligned} \hat{f}_\gamma(\xi) &= \hat{f}(\xi)\chi_{V(0,\gamma)}(\xi) \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{e}_\gamma(\xi) \end{aligned}$$

mit $\chi_{V(0,\gamma)}$ der charakteristischen Funktion der Kugel um 0 mit Radius γ, oder

$$f_\gamma(x) = \int f(y)e_\gamma(x-y)\, dy \ ,$$

wobei e_γ ein Wavelet ist. Dies war der Ausgangspunkt des in [12] entwickelten Verfahrens. Ziel ist es dabei, ein geeignetes Wavelet im Range von D^*, dem adjungierten Operators bei der Kegelstrahlgeometrie zu approximieren, also ein Rekonstruktionsverfahren zu entwickeln, das eine Verstärkung der Konturen liefert.

Es ergibt sich folgendes Ergebnis für die Rekonstruktion aus Daten, bei denen die Röntgenquelle auf einem Kreis um das Objekt geführt wird.

Theorem 4. *Es sei*

$$\Xi f = d_x D^* d_\theta D f$$

für die Kombinationen

$$d_x = \Delta \quad und \quad d_\theta = Identit\ddot{a}t \tag{7}$$

beziehungsweise

$$d_x = Identit\ddot{a}t \quad und \quad d_\theta = \Delta, \tag{8}$$

wobei im letzteren Fall bei ebenen Detekoren der Laplace– und bei gekrümmten Detektoren der Laplace – Beltrami – Operator verwendet wird. Dann gilt

$$(\widehat{\Xi f})(\xi) = \|\xi\| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\rho\xi)|\rho|C_\xi(\rho)d\rho \ , \tag{9}$$

wobei

$$C_\xi(\rho) = -2\pi R J_0\left(R(1-\rho)\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)$$

mit der Besselfunktion J_0 und dem Radius R des Kreises der Bewegung der Röntgenquelle ist.

Zusätzlich wurde in [12] gezeigt, daß die Funktion C_ξ eine Approximation an $\delta(\rho-1)$ ist, insgesamt ergibt sich also eine Approximation an Λf.

5 Implementierung und Auswertung

Bei der Implementierung von (7) muß der Laplace–Operator im $\mathbb{R}^3$ diskretisiert werden, der gegenüber (8) höhere Aufwand, wo nur im Zweidimensionalen differenziert wird, rechtfertigt sich bei stark gestörten Daten, weil dann durch die Rückprojektion D^* die Daten erst geglättet werden. Insbesondere bei der hier gewünschten Rekonstruktion aus Meßdaten von Stahlröhren hat diese Variante ihre Vorteile.

Die Werte $Df(a,(x-a)/\|x-a\|)$ liegen nicht direkt vor, es muß auf der Detektorfläche interpoliert werden. Es haben sich bei guten Daten, insbesondere auch bei den Simulationsrechnungen Unterschiede zwischen Nearest – Neighbour Interpolation und linearer Interpolation zugunsten letzterer gezeigt. Bei den Daten von den Stahlröhren war der Qualitätsunterschied so gering, daß zugunsten einer höheren Rechengeschwindigkeit die einfachere Variante implementiert wurde.

Die Rückprojektion, also die Anwendung des Operators D^*, ist durch die Trapezregel auf dem Kreis approximiert worden.

Im folgenden sind Rekonstruktionen aus 3D – Aufnahmen eines lasergeschweißten Stahlrohres mit Durchmesser 7cm gezeigt. Aus 600 Positionen verteilt auf einem Kreis um das Rohr ist die Röntgenröhre gefeuert worden, an 768×60 Detektoren ist die Intensität der angekommenen Strahlen gemessen worden, es handelt sich also um $27,648$ Millionen Daten. Verglichen werden in Abbildung 1 und 2 die Rekonstruktionen mit dem Feldkamp – Algorithmus aus [1] und dem hier vorgestellten Algorithmus. Es zeigt sich, daß die Rekonstruktion mit unserem Verfahren eine wesentlich präzisere Ortung und Beschreibung der Poren in den Schweißnähten ermöglicht.

Die Abbildung 3 zeigt die dreidimensionale Darstellung einer Rekonstruktion eines Teils eines Lammknochens. Dabei wurde die Röntgenquelle an 400 Positionen auf einem Kreis gefeuert, die Zahl der Detektoren war 512×512, also insgesamt 105 Millionen Daten. Das Objekt wurde in 100 Schnitten mit 512×512 Pixel rekonstruiert und dann zu dieser Darstellung zusammengesetzt. Das Verfahren ist parallel auf einer Challenge von Silicon Graphics mit vier Prozessoren implementiert worden. Die Rekonstruktion zeigt die poröse Struktur dieses Knochens sehr deutlich.

Alle Daten wurden vom Fraunhofer – Institut für zerstörungsfreie Prüfverfahren in Saarbrücken zur Verfügung gestellt.

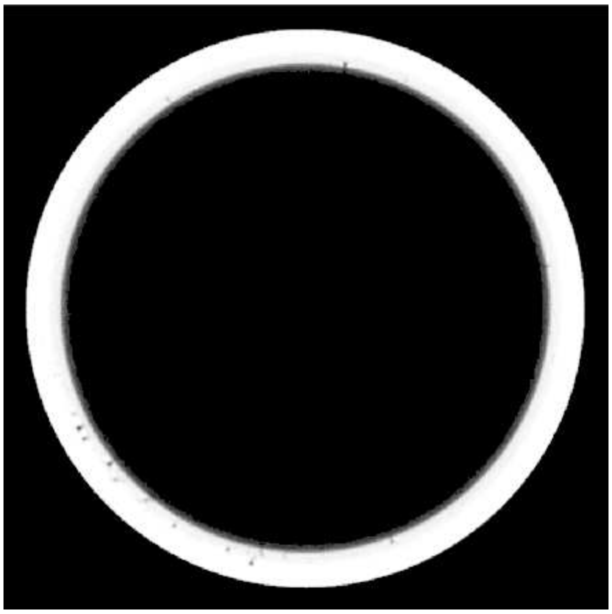

Fig.1 : Rekonstruktion eines Schnittes durch ein lasergeschweißtes Rohr aus 3D – Daten mit dem Verfahren von Feldkamp, aus [1].

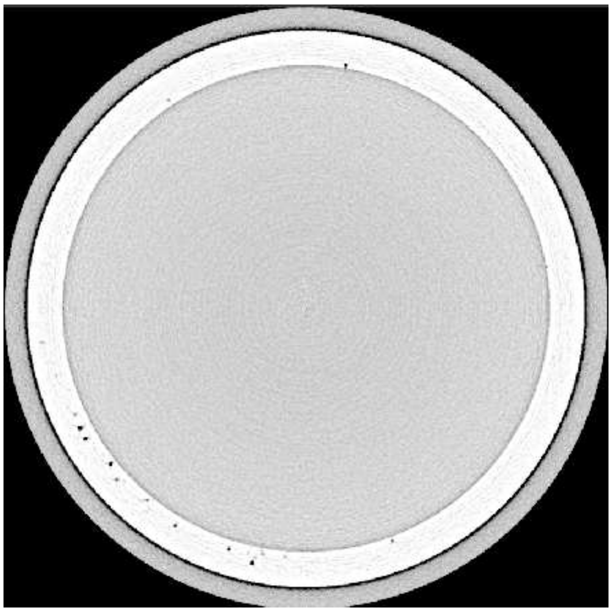

Fig.2 : Rekonstruktion eines Schnittes durch ein lasergeschweißtes Rohr aus 3D – Daten mit dem hier vorgestellten Verfahren.

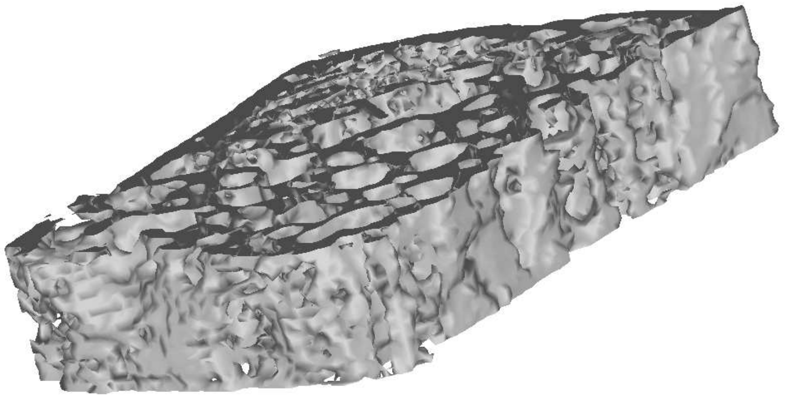

Fig.3 : Rekonstruktion eines Lammknochens und dreidimensionale Darstellung.

Dank
Abschließend soll dem BMBF für die Förderung dieses Projektes unter Nummer 03 – LO7SAA sowie den Herren Dr. Buck und Dr. Maisl vom Institut für zerstörungsfreie Prüfvahren der Fraunhofer Gesellschaft in Saarbrücken und den Herren Reininger und Dr. Mattis von Siemens Energiewirtschaft (KWU) in Erlangen gedankt werden.

Literatur

1. Buck, J.: Interner Bericht des FHG IzfP, Saarbrücken, 1996
2. Faridani, A:, Ritman, E.L., Smith, K.T.: Local Tomography. SIAM J. Appl. Math. **52** (1992), 459–484
3. Feldkamp, L.A., Davis, L.C., Smith, J.W.: Practical cone beam algorithm. J. Opt. Soc. Am. **1** (1984) 612–619
4. Grangeat, P.: Mathematical framework of cone beam 3–D reconstruction via the first derivative of the Radon transform in Herman, G.T., Louis, A.K., Natterer, F.(eds.): Mathematical Methods in Tomography, Springer LNM 1497 (1991) 66—97
5. Kirillov, A.A.: On a problem of I.M. Gel'fand. Soviet Math. Dokl. **2** (1961) 268–269
6. Lewitt, R.M., Muehllehner, G., Karp, J.S.: Three–dimensional image reconstruction for PET by multi-slice rebinning and axial image filtering. Phys.

Med. Biol. **39** (1994) 321–339

7. Louis, A.K.: Orthogonal functions series expansions and the null space of the Radon transform. SIAM J. Math. Anal. **15** (1984) 621–633
8. Louis, A:K.: Nonuiniqueness in inverse Radon problems : the frequency distribution of the ghosts. Math. Z. **185** (1984) 429–440
9. Louis, A.K.: Medical imaging : state of the art and future development. Inverse Problems **8** (1992) 709–738
10. Louis A.K.: Inverse und schlecht gestellte Probleme. Stuttgart: Teubner, 1989
11. Louis, A.K.: Approximate inverse for linear and some nonlinear problems. Inverse Problems **12** (1996) 175–190
12. Louis, A.K., Maaß, P.: Contour reconstruction in 3–D X–ray CT. IEEE Trans. Med. Imag. **TMI 12** (1993) 764–769
13. Louis, A.K., Maaß, P., Rieder, A.: Wavelets. Stuttgart: Teubner, 1994
14. Louis, A.K., Schuster, Th.: A novel filter design technique in 2D x–ray CT. Inverse Problems (to appear)
15. Louis, A.K., Schwierz, G.: Rekonstruktionsverfahren in der medizinischen Bildgebung. ZAMM **70** (1990) T533-T539
16. Maaß, P.: The x–ray transform :singular value decomposition and resolution. Inverse Problems **3** (1987) 729–741
17. Natterer, F.: The mathematics of computerized tomography. Stuttgart-New York: Teubner-Wiley 1986
18. Smith, B.: Cone–beam tomography: recent advances and a tutorial review. Opt. Eng. J. **29** (1990) 524–534
19. Tuy H.K.: An inversion formula for cone–beam reconstruction. SIAM J. Appl. Math. **43** (1984) 546–552