Markov-Prozesse

Franziskus Diwo

Literatur: Ronald A. Howard:
Dynamic Programming and Markov Processes

18.10.2011

Gliederung

Was ist ein Markov-Prozess?

- mathematisches Modell zur Untersuchung komplexer Systeme
- *Kernbegriffe:*
  - **Zustand eines Systems:**
    Ein System befindet sich in einem Zustand, wenn es komplett mit Variablenwerten, die diesen Zustand definieren, beschrieben werden kann.
  - **Zustandswechsel:**
    Ein Zustandswechsel findet dann statt, wenn sich die systembeschreibenden Variablen von Werten des einen Zustands zu Werten des anderen Zustands ändern.

Beispiel: Frosch im Seerosenteich

- Frosch springt in fortlaufender Zeit von einem Blatt auf ein anderes.
  Die Blätter werden dabei zufällig nach aktueller Laune ausgewählt.
- *Zustand:* Nummer des derzeit belegten Blattes
- *Zustandswechsel:* Der Sprung zum nächsten Blatt
- Anzahl der Blätter endlich
  $\rightarrow$ Prozess mit endlich vielen Zuständen
  (alle weitere Bemerkungen gehen von solch einem Prozess aus)

Beispiel: Frosch im Seerosenteich

- *Annahmen:*
  - *zeit-diskreter Prozess:*
    Zeit zwischen den Wechseln ist eine Konstante
  - Es gibt *N Zustände*, welche mit $1, .., N$ nummeriert sind
- Falls das System ein einfacher **Markov-Prozess** ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit von Zustand *i* zu Zustand *j* zu gelangen eine Funktion, die nicht von den Zuständen vor Zustand *i* abhängt.

Folgerungen

- Man kann also eine Reihe bedingter Wahrscheinlichkeiten, dass sich ein in Zustand i befindliches System nach dem nächsten Wechsel in Zustand j befindet, angeben.

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$$

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$$

Beispiel: Spielzeugmacher

- Der Spielzeugmacher befindet sich immer in einem der folgenden zwei Zuständen:
  - *Zustand 1:* Das Spielzeug ist beliebt.
  - *Zustand 2:* Das Spielzeug ist unbeliebt.

Beispiel: Spielzeugmacher

- Wahrscheinlichkeiten:
  - Wenn er im Zustand 1 ist, hat er eine Wahrscheinlichkeit von 50%, dass er am Ende der nächsten Woche immer noch im ersten Zustand ist (ebenso 50% für Zustand 2)
  - Wenn er in Zustand 2 ist, hat er eine Chance von $\frac{2}{5}$ wieder in Zustand 1 zu gelangen, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{5}$ bleibt er im zweiten Zustand
- Also:

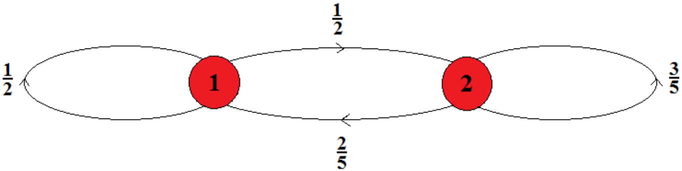
$$p_{11} = \frac{1}{2} \qquad p_{12} = \frac{1}{2} \qquad p_{21} = \frac{2}{5} \qquad p_{22} = \frac{3}{5}$$

Beispiel: Spielzeugmacher

Man definiert:

$$\mathbf{P} = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Veranschaulichung:



Beispiel: Spielzeugmacher

- Mit Hilfe der Matrix kann man alle Fragen über den Prozess beantworten:
  - Beispielsweise interessiert uns die Wahrscheinlichkeit, dass er sich im Zustand 1 nach n Wochen befindet, wenn er zu Beginn im ersten Zustand war
- Zu diesem Zweck definieren wir eine **Zustandswahrscheinlichkeit** $\pi_i(n)$, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass sich das System nach n Wechseln im Zustand i befindet und der Zustand bei $n = 0$ bekannt ist.

Folgerungen

Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i(n) = 1$$

$$\pi_j(n+1) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i(n) p_{ij} \qquad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

Folgerungen

- Wir definieren einen Zeilenvektor $\pi(n)$, dessen Komponenten die Zustandswahrscheinlichkeiten $\pi_i(n)$ sind:

Es folgt:

$$\pi(n+1) = \pi(n)\mathbf{P} \qquad , n = 0, 1, 2, ...$$

Folgerungen

Durch Rekursion erhält man:

$$\pi(1) = \pi(0)\mathbf{P}$$

$$\pi(2) = \pi(1)\mathbf{P} = \pi(0)\mathbf{P}^2$$

$$\pi(3) = \pi(2)\mathbf{P} = \pi(0)\mathbf{P}^3$$

Allgemein gilt:

$$\pi(n) = \pi(0)\mathbf{P}^n \qquad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

Beispiel: Spielzeugmacher

- Unter der Annahme, dass man mit einem erfolgreichen Spielzeug beginnt, folgt:

$$\pi_1(0) = 1 \qquad \textit{und} \qquad \pi_2(0) = 0$$

sodass:

$$\pi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mittels der Formel ergibt sich:

$$\pi(1) = \pi(0)\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Beispiel: Spielzeugmacher

- Analog ergeben sich folgende Werte nach n Wochen bei Start mit einem beliebten Spielzeug:

n	0	1	2	3	4	5	...
$\pi_1(n)$	1	$0,5$	$0,45$	$0,445$	$0,4445$	$0,44445$	...
$\pi_2(n)$	0	$0,5$	$0,55$	$0,555$	$0,5555$	$0,55555$	...

- bei Start mit unbeliebtem Spielzeug:

n	0	1	2	3	4	5	...
$\pi_1(n)$	0	$0,4$	$0,44$	$0,444$	$0,4444$	$0,44444$	...
$\pi_2(n)$	1	$0,6$	$0,56$	$0,556$	$0,5556$	$0,55556$	...

Folgerungen

- Scheinbare Unabhängigkeit vom Startwert bei großem n:
  - Viele Markov-Prozesse zeigen diese Eigenschaft.
  - *streng ergodischer Prozess*
- Systeme, welche vom Startwert abhängen, werden später untersucht.

Folgerungen

- Für streng ergodische Prozesse definiert man:
  - π_i als die Wahrscheinlichkeit, dass das System den i-ten Zustand nach sehr vielen Wechseln belegt
  - den Zeilenvektor π mit Einträgen π_i als Grenzwert

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \pi(n)$$

- Aus den vorherigen Überlegungen folgt:

$$\pi = \pi \mathbf{P}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$$

Folgerungen

- Für das Spielzeugmacherbeispiel folgt also:

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_2 \quad , \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2$$

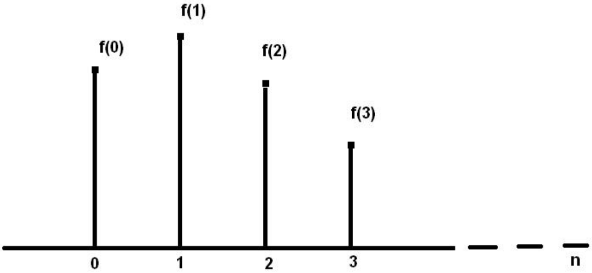
$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

- Lösen des Gleichungssystems führt zu:

$$\pi_1 = \frac{4}{9} \;\; \textit{und} \;\; \pi_2 = \frac{5}{9}$$

Z-Transformation

- Man betrachtet nun die erzeugende Funktion bzw. **Z-Transformation**.
- Zunächst betrachtet man eine nichtnegative, diskrete *Zeitfunktion* $f(n)$, die für negative Zeiten Null gesetzt wird.



Z-Transformation

- Steigt $f(n)$ nicht schneller mit wachsendem n als eine *geometrische Folge* (Zahlenfolge mit konstantem Quotienten der benachbarten Folgenglieder), kann man eine *Z-Transformation* $f(z)$ definieren, sodass:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$$

- Jede Zeitfunktion hat nur **eine** Transformation.
- Die Z-Transformation ist bei Markov-Prozessen hilfreich, da die Übergangswahrscheinlichkeiten geometrische Folgen sind.

Berechnung einer Z-Transformation

Beispiel:

Sei die Zeitfunktion:

$$f(n) = \alpha^n \qquad , n \geqslant 0$$

Dann folgt für die Z-Transformation:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^n = \frac{1}{1 - \alpha z}$$

Berechnung einer Z-Transformation

- Analoges Vorgehen für andere Zeitfunktionen ergibt:

Zeitfunktion für $n \geqslant 0$	**Z-Transformation**
$f(n)$	$f(z)$
$f_1(n) + f_2(n)$	$f_1(z) + f_2(z)$
$kf(n)$,k=const	$kf(z)$
$f(n-1)$	$zf(z)$
$f(n+1)$	$z^{-1}[f(z) - f(0)]$
α^n	$\frac{1}{1-\alpha z}$
1	$\frac{1}{1-z}$
$n\alpha^n$	$\frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}$
n	$\frac{z}{(1-z)^2}$
$\alpha^n f(n)$	$f(\alpha z)$

Z-Transformation bei Markov-Prozessen

komponentenweise Anwendung bei Vektoren und Matrizen

$$\pi(n+1) = \pi(n)\mathbf{P} \qquad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

Z-Transformation ergibt:

$$z^{-1}[\Pi(z) - \pi(0)] = \Pi(z)\mathbf{P},$$

wobei $\Pi(z)$ die Z-Transformation von $\pi(n)$ darstellt.
Umformungen ergeben:

$$\Pi(z) = \pi(0)(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$$

Z-Transformation am Beispiel des Spielzeugmachers

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}z & -\frac{1}{2}z \\ -\frac{2}{5}z & 1-\frac{3}{5}z \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I}-z\mathbf{P})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-\frac{3}{5}z}{(1-z)(1-\frac{1}{10}z)} & \frac{\frac{1}{2}z}{(1-z)(1-\frac{1}{10}z)} \\ \frac{\frac{2}{5}z}{(1-z)(1-\frac{1}{10}z)} & \frac{1-\frac{1}{2}z}{(1-z)(1-\frac{1}{10}z)} \end{bmatrix}$$

Z-Transformation am Beispiel des Spielzeugmachers

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} + \frac{1}{1-\frac{1}{10}z}\begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Rückgängigmachen der Z-Transformation liefert:

$$\mathbf{H}(n) = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{10}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} ,$$

$$\pi(n) = \pi(0)\mathbf{H}(n)$$

Folgerungen

- $\mathbf{H}(n) = \mathbf{P}(n)$
- einfachere Berechnung der Potenz der Matrix **P**
- Im Spielzeugmacherbeispiel:

bei Start mit beliebtem Spielzeug:

$$\pi(n) = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{10}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \pi_1(n) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

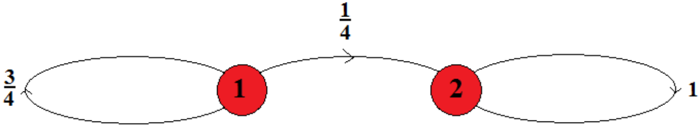
$$\pi_2(n) = \frac{5}{9} - \frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Eigenschaften von **H**(n)

- **stationäre Komponente**:
  - stochastische Matrix S
  - alle Zeilen sind gleich dem Grenzwert des Zustandsvektors
  - Bei ergodischen Prozessen: eine Matrix mit gleichen Zeilen
- **Übergangskomponente**:
  - besitzt einen Vorfaktor α^n mit $|\alpha| \leqslant 1$
  - Bezeichnung: $T(n)$ (repräsentiert die abfallende geometrische Folge)
  - alle Zeilen ergeben addiert Null
  - bei ergodischen Prozessen verschwindet $T(n)$ für große n und $\alpha < 1$

Übergangsverhalten

- Spielzeugmacherbeispiel: $0 < p_{ij} < \infty$
- bei ergodischen Prozessen: Grenzwahrscheinlichkeit kann auch Null werden



- **einfangender Zustand**: Zustand i, wobei $p_{ii} = 1$
- **Übergangszustand**: Zustand, der nach langer Zeit mit Gewissheit nicht belegt wird

Übergangsverhalten

Beispiel:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rechnung mit Z-Transformation wie oben ergibt:

$$\mathbf{H}(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Übergangsverhalten

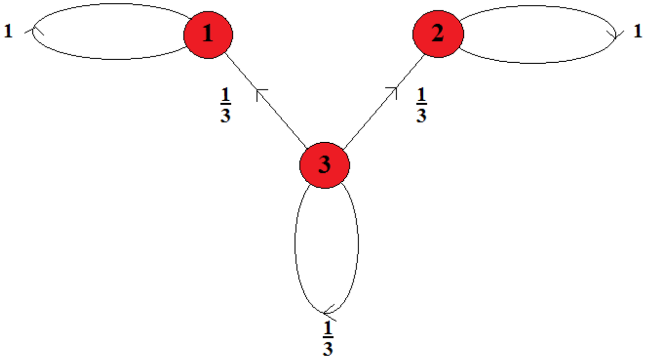
- Ein *Übergangszustand* führt nicht immer zu einem *einfangenden Zustand*.
- Das System kann in eine Kette eintreten, die in sich geschlossen ist (**rekurrente Kette**).
- Jede geschlossene Kette kann man somit als *verallgemeinerten einfangenden Zustand* auffassen.
- Jeder Markov-Prozess muss eine solche Kette besitzen.
- Gibt es genau eine solche Kette, ist der Prozess **streng ergodisch**.

mehrfach verkettetes Verhalten

- Möglichlichkeit, dass mehrere rekurrente Ketten auftreten $\rightarrow$ Erweiterung der Möglichkeiten von S
- Startpunkt ist entscheidend für die Grenzwahrscheinlichkeit
- Zeilen sind nicht mehr gleich
- i-te Zeile stellt die Zustände mit Startwert i dar

mehrfach verkettetes Verhalten

Diagramm zum mehrfach verketteten Verhalten



mehrfach verkettetes Verhalten

Beispiel:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

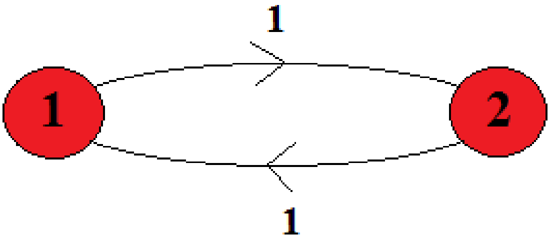
Mit der Z-Transformation erhält man:

$$\mathbf{H}(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Periodisches Verhalten

- **periodische Kette** = rekurrente Kette, wobei das System nach $p, 2p, 3p, ...$ Übergängen wieder den Ausgangszustand belegt ($p \in \mathbb{N}$)

Diagramm zum periodischen Verhalten



Periodisches Verhalten

Beispiel:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mit der Z-Transformation erhält man:

$$\mathbf{H(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Periodisches Verhalten

$$\pi_1(n) = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$$

und

$$\pi_2(n) = \frac{1}{2}[1 - (-1)^n]$$

Interpretation:

- Falls n ungerade ist, wird immer Zustand 1 angenommen
- Falls n gerade ist, wird immer Zustand 2 angenommen

Periodisches Verhalten

- *Interpretation von $T(n)$:*
  Verschwindet nicht, sondern oszilliert, Störung von S
- *Interpretation von S:*
  Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in jedem seiner Zustände zu einem zufälligem Zeitpunkt befindet

Zusammenfassung

- Der **Markov-Prozess** ist ein spezieller stochastischer Prozess mit dem Ziel Wahrscheinlichkeitsaussagen über zukünftige Ereignisse zu machen
- Dabei ist die **Z-Tranformation** ein wichtiges Hilfsmittel
- Markov-Ketten können ein **periodisches, Übergangs-** oder **mehrfach verkettetes Verhalten** aufweisen