Einführung, Spieldynamik und soziales Lernen

Vsevolod Shashkov

25.10.2011

Inhalt

Soziales Tier

- Aristotle
- Städten und Länder wurden mit Ameisenhaufen vergliechen
- Methologischer Individualismus

Die unsichtbare Hand

- Thomas Hobbes
- Adam Smith
- Voltaire - lettres philosophiques

DAS GEFANGENENDILEMMA (engl. Prisoners Dilemma)

Beispiel:

- Spender spendet 5 euro => Empfänger kriegt 15 euro
- Spender spendet nicht => Empfänger kriegt nichts

		Spieler 2	
		spendet	nicht
Spieler 1	spendet	10	-5
	nicht	15	0

DAS GEFANGENENDILEMMA (engl. Prisoners Dilemma)

Notation:

- C - Spieler macht ein Zug
- D - Spieler passt

		Spieler 2	
		C	D
Spieler 1	C	R	S
	D	T	P

$$T > R > P > S$$

Widerholtes Gefangenendilemma
(engl. Repeated Prisoners Dilemma)

- Backward Induction
- Welche Strategie sollte man wählen?
- Robert Alexrod

TFT - Tit for Tat

- Man fängt mit C an
- Widerholt die züge vom Gegner

Künstliche Gesellschaft

- Fiktive Personen
- Vorprogrammierte Strategien
- Sie traten gegeneinander auf
- Bessere verbreiten sich

Beispiel: 2 Strategien TFT und AllD, 6 Runden

		Gegner	
		TFT	AllD
Ich	TFT	60	-5
	AllD	15	0

Falls mehr als 10% TFT spieler sind, werden sie dominieren

Die Menschen sind die Sieger der Gegenseitigkeit

- Einzige Tiere die auf andere Achten
- In der Lage sich in die Schuhen des anderen zu versetzen
- Sympatisieren mit den Fremden

Eintretten zu den Dritten (engl. Third Party)

- Dies sind sogenante zuschauer
- Ich tue was für dich, weil du was für die anderen getan hast
- Indirekte Gegenseitigkeit
- Ausbeuter
- Sie unterscheiden sich in 2 Gruppen: die einige helfen allen inkl. Ausbeutern und andere nicht
- Reputation

VERTRAUENSSPIEL

- auf dem Prinzip der Spendespielen gebaut
- Spender kann an Empfänger 1 euro spenden dabei kriegt der Empfänger das 3- fache
- danach kann der der Empfänger an Spender 1 euro zurückgeben
- im reeellen Leben gibt es sehr viele Elemente des Vertauensspiels

ULTIMATUMEXPERIMENT

- 2 Spieler: Proposer und Responder
- Proposer kriegt 10 euro und darf sie teilen
- Responder kann entweder das Angebot annehmen oder ablehnen, dabei kriegen die beiden nichts

- Offensichtlich dass als Responder muss man immer annehmen sobald die Anteil grösser 0 ist und als Proposer sollte man wenig anbieten. Experemintell wurde aber meistens um die 50% angeboten, und die Angebote weniger als 20 % wurden fast immer abgelehnt.
- Menschliche Gehirn besteht aus 2 Teilen: das eine ist für rationales Denken zuständig und das andere für gefühle
- Mensch hat sich betrogen gefühlt

Gerechtigkeitsnormen

- viele Nutzen das Ultimatumexperement um die Gerechtigkeitsnormen zu studieren '
- Woher kommen die Normen?
- Reputation

PUBLIC GOODS GAMES

Alle Spiele die wir bisher betrachtet haben handelten von 2 Personen. Viele ökonomische Vorgehen bestehen aber aus mehr wie 2 Personen. Was soll man dann machen wenn sowohl ein passer als auch ein nichtpasser dabei sind?

Ein typischer Muster solches Experements:

- 6 Spieler haben jeweils 10 euro
- Sie können das Geld auf ein gemeinsames Konto legen dabei wird es verdreifacht, durch 6 geteilt und zurückbezahlt

Fals alle investieren kriegt jeder am schluss 30 euro, aber falls einer nicht mitmacht kriegt jeder 25 euro, also wird der eine 35 haben - 10 euro mehr als die anderen Die meisten investieren aber mehr als die hälfte.
Falls wir das Experiment widerholen wird es mit jedem Versuch immer weniger

Punish or Perish?

- Bestrafung = man bezahlt 1 euro und es werden 3 euro vom Konto des anderen abgezogen
- Mit Bestrafung investieren die Menschen mehr
- Man möchte dass die Person sich verbessert, deshalb bezahlt man
- Man hat gemerkt, dass viele, obwohl sie genau wissen, dass sie nie wider mit gegen unfairen Spieler auftretten, neigen dafür ihn zu bestraffen
- Wieso?!?! - Aus Prinzip und wegen den Dritten!

SPIELE

Beispiel:

- 2 Personen zeigen gleichzeitig 1 oder 2 Finger '
- Falls die Summe ungerade ist gewinnt der 1 Spieler, wenn die Summe gerade ist gewinnt der 2 Spieler

Formalisierung:

- Angenommen Spieler 1 muss sich zwischen n Strategien entscheiden $e_1 \ldots e_n$ und Spieler 2 zwischen m Strategien $f_1 \ldots f_m$.
- Falls der 1 Spieler sich für e_i und der 2 Spieler Für f_j entscheiden kriegt der 1 Spieler a_{ij} und der 2 Spieler b_{ij} ausgezahlt.

- Also kann das Spiel durch 2 Matrizen A und B beschrieben werden, bzw durch die Matrix (a_{ij}, b_{ij}).

- Also in unserem Beispiel: Angenommen man setzt 1 euro ein, $e_1 = f_1 =$ gerade, $e_2 = f_2 =$ ungerade. Die Auszahlungsmatrix ist dann:

$$\begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix}$$

Gemischte Strategien

- Für beide seiten ist es wichtig dass der Gegner die Züge nicht kennt. Lösung - zufällig entscheiden.
- Angenommen, der Spieler 1 entscheidet sich mit einer Wahrscheinlichkeit x_i für Strategie e_i. Diese gemischte Strategie für Spieler 1 ist dann gegeben durch $x = (x_1 \ldots x_n)$, wobei

  $x_i \geq 0 \; \forall i \in \{1 \ldots n\}$ und $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$

  Sei S_n die Menge aller solche Strategien. S_n ist ein Simplex (n - dimensionales Polytop) in $\mathbb{R}^n$ gespannt von der Einheitsvektoren e_i.

- Analog, die gemischte Strategie für Spieler 2 ist ein Element y von Simplex S_m.
- Falls Spieler 1 eine einfache Strategie e_i benutzt und Spieler 2 Strategie y, dann ist das Ergebnis für Spieler 1

$$(Ay)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

- Angenommen, Spieler 1 hat eine gemischte Strategie x und Spieler 2 eine gemischte Strategie y. Für den 1 Spieler ergibt sich dann:

$$x \cdot Ay = \sum_i x_i (Ay)_i = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

- Für Spieler 2:

  $$x \cdot By = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$$

- Falls man die Strategie y vom 2 Spieler kennt, sollte Spieler 1 die am besten passende Strategie benutzen. Die Menger solcher Strategien ist eine Menge

  $$BR(y) = \arg\max_x x \cdot Ay$$

  d.h. die Menge solcher $x \in S_n$ so, dass

  $$z \cdot Ay \leq x \cdot Ay \text{ für alle } z \in S_n$$

- Die Funktion $z \to z \cdot Ay$ ist stetig. Da S_n kompakt ist die Menge nicht Leer. Die Menge ist konvex. Mehr als das, falls $x \in BR(y)$ dann sind auch alle $e_i \in BR(y)$ für die $\mathrm{x}_i > 0$.

  In der Tat, für alle i gilt: $(Ay)_i = e_i \cdot Ay \leq x \cdot Ay$
  falls für ein i mit x_i die Ungleichung streng kleiner wäre, gälte dann $x_i(Ay)_i < x_i(x \cdot Ay)$
  $\sum_{i=1}^{n} x_i(Ay)_i < \sum_{i=1}^{n} x_i(x \cdot Ay)$
  Dies ist ein Widerspruch. Daraus folgt dass BR(y) eine Unterraum von S_n ist, gespannt von Einfachstrategien von BR(y)

NASH'SCHE GLEICHGEWICHT (engl. Nash Equilibrium)

- 2 Strategien befinden sich in einer Nash'sche Gleichgewicht, wenn $x \in BR(y)$ und $y \in BR(x)$
- Äquivalent :
  $z \cdot Ay \leq x \cdot Ay$ für alle $z \in S_n$ und $x \cdot Bw \leq x \cdot By$ für alle $w \in S_m$
- Später wird bewiesen dass für alle Spiele (A,B) existiert so ein Paar.

- Wir betrachten jetzt eine bevölkerung, jedes Mitglied hat eine Strategie
- Um es zu vereinfachen, betrachten wir zuerst nur symmetrische Spiele
- Dabei ist n = m, $e_j = f_j \forall j$, $a_{ij} b_{ji}$ oder mit anderen Worten $B = A^T$
- Ein Symmetrisches Spiel ist also durch (A, A^T) gegeben, also durch eine einzige Matrix A

- Interessant ist sogenante symmetrische Nash'sche Gleichgewicht (engl. symmetric Nash equilibrium), d.h. ein Tupel (x,y) mit x=y.
- x ist dann die beste Strategie zu sich selbst, $x \in BR(x)$ Mit anderen Worten
  $z \cdot Ax < x \cdot Ax$ für alle $z \neq x$

Symmetrierung eines Spiels

- Es gibt ein einfacher weg das nicht symmetrische Spiel (A,B) zu symmetrisieren.
- Einfach zufällig Spieler 1 aussuchen
- Strategie dieses symmetrisches Spiels muss aber die Strategie von beider enthalten. Eine Strategie ist dann gegeben durch ein Paar (e_i, f_j).
- Eine gemischte Strategie ist dann gegeben durch ein Element $z = z_{ij} \in S_{mn}$, wobei z_{ij} beschreibt die Wahrscheinlichkeit von e_i bei dem 1 Spieler und f_j bei dem 2 Spieler.

- Die Rände der Wahrscheinlichkeitsverteilung z sind $x_i = \sum_j z_{ij}$ und $y_j = \sum_i z_{ij}$
- Die Vektoren $x = (x_i)$ und $y = (y_j)$ liegen in S_n und S_m
- Es ist klar, dass für alle x und y existiert so ein $z \in S_{nm}$, so dass x und y die Rände sind, z.B. $z_{ij} = x_i y_j$
- Das ergebnis für einen Spieler (e_i, f_j) gegen einen Spieler (e_k, f_l) hängt von dem Münzenwurf ab und ist gegeben durch $c_{ij,kl} = \frac{1}{2} a_{il} + \frac{1}{2} b_{kj}$
- Wir nehmen an, dass jedes symmetrisches Spiel ein Nash'schen Gleichgewichtzustand besitzt. Dann besitzt auch das nicht- symetrisches Spiel ein NG.

- Beweis:

  Sei $\tilde{z} \in S_{nm}$ ein NG für symmetriezierbares Spiel (C, C^T).
  Es gilt also:

  $z \cdot C\tilde{z} \leq \tilde{z} \cdot C\tilde{z}$ für alle $z \in S_{nm}$

  Sei nun x und y die Rände von z und $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ von $\tilde{z}$. Dann gilt:

  $$z \cdot C\tilde{z} = \sum_{ijkl} z_{ij} c_{ij,kl} \tilde{z}_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} z_{ij} a_{il} \tilde{z}_{kl} + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} z_{ij} b_{kj} \tilde{z}_{kl} =$$
  $$\frac{1}{2} \sum_{il} x_i a_{il} \tilde{y}_l + \frac{1}{2} \sum_{jk} y_j b_{kj} \tilde{x}_k = \frac{1}{2} x \cdot A\tilde{y} + \frac{1}{2} y \cdot B^T \tilde{x}$$

  Da $\tilde{z}$ ein symmetrisches NG ist, folgt:
  $x \cdot A\tilde{y} + \tilde{x} \cdot By \leq \tilde{x} \cdot A\tilde{y} + \tilde{x} \cdot B\tilde{y}$

  Für $x = \tilde{x}$ und $y = \tilde{y}$ ist dann $(\tilde{x}, \tilde{y})$ NG für (A,B)

Populationsdynamik trifft Spieltheorie

Jetzt betrachten wir ein symmetrisches Spiel mit Ergebnismatrix A in einer Menge.

- Die Fraktion x_i hat eine Strategie e_i. Der Zustand der Menge wird durch ein Vektor $x \in S_n$ gegeben. Ein Spieler mit Strategie e_i erwartet also

  $$(Ax)_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

- Für die die gesamte Menge also

  $$x \cdot Ax = \sum_i x_i (Ax)_i$$

- Wichtig: x steht jetzt für den Zustand der Menge und nicht für die gemischte Strategie wie vorher.

- Der Zustand x hängt von der Zeit ab .
- Uns interessiert die Grösse

  $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$

  der Frequenzen von den Strategien
- Frage: Inwiefern spielen sie eine Rolle?
- Wir nehmen an, dass der Zustand der Menge nach der so genannten Replikatorgleichung (engl. replicator equation) $\dot{x}_i = x_i[(Ax)_i - x \cdot Ax]$
- Entsprechend, ob die Strategie e_i sich verbreitet oder verschwindet hängt von dem Durchschnitt ab.

- Dies liefert ein deterministisches Modell für den Zustand der Menge.
- In der Tat, die DGL $\dot{x} = F(x)$ wobei F glatt ist, hat eine eindeutige Lösung für jeden x
- Die rechte Seite der Gleichung können wir als ein VR intepretieren $x \mapsto F(x)$

IMMITATIONSDYNAMIKEN (engl. immitation dynamics)

- Wenn wir annehmen dass die Personen sich immitieren, treffen wir auch die Replikatorgleichung
- Angenommen, eine zufällig gewälte Person ändert seine Strategie.
  Die Wahrscheinlichkeit, dass während eines Zeitraums Δt die Person seine Strategie von e_j zu e_i wechselt ist $x_i f_{ij} \Delta t$.
- Die entsprechende Gleichung ist
  $x_i(t + \Delta t) - x_i(t) = \sum f_{ij} x_i x_j \Delta t - \sum f_{ji} x_i x_j \Delta t$
- Für $\Delta t \to 0$ gilt:
  $\dot{x}_i = x_i \sum (f_{ij} - f_{ji}) x_j$

- Meistens hängt f_{ij} von Zustand x ab. z.B können wir annehmen, dass
  $f_{ij} = [(Ax)_i - (Ax)_j]_+$ (Input - Output - Gleichung)
- Das heisst, dass ein e_j Spieler beim vergleichen mit einem e_i Spieler, seine Strategie nur dann ändern wird, wenn es besser für ihn ist. Und natürlich ist die Wahrscheinlichkeit genau dann grösser wenn die differenz grösser ist.
  Und in diesem Fall, da $f_{ij} - fji = (Ax)_i - (Ax)_j$ liefert uns die IO Gleichung:
  $\dot{x}_i = \sum_j [(Ax)_i - (Ax)_j]x_j = x_i[(Ax)_i - x \cdot Ax]$

  Dies ist nichts anderes als Replikatorgleichung.

GRUNDEIGENSCHAFTEN DER REPLIKATORGLEICHUNG

- Wir können eine belibige Funktion $f(x)$ zu allen Ergebnissen $(Ax)_i$ dazuaddieren, dabei bleibt die Replikatorgleichung unverändert: was wir zu dem Ergebniss dazuaddieren, wird auch zu dem Durchschnittsergebnis dazuaddirt, da $\sum x_i = 1$ und es kürzt sich bei Differenz weg.
- Dies impliziert, wir können zu j- ten Spalte von A einfach eine konstante c_j dazuaddieren, ohne dabei die Dyamik zu verändern.
- Quotientenregel
  Fals $x_j > 0$ gilt:

  $$(\dot{\frac{x_i}{x_j}}) = (\frac{x_i}{x_j})[(Ax)_i - (Ax)_j]$$

NASH'SCHE GLEICHGEWICHTE, GESÄTTIGTE RESTPUNKTE UND DIE EXISTENZ VON NASH'SCHEN GLEICHGEWICHT

- Betrachten wir ein symmetrisches $n \times n$ Spiel (A, A^T) mit symmetrischen Nash'schen Gleichgewicht z. d.h. $x \cdot Az \leq z \cdot Az$ für alle $z \in S_n$
- Wenn $x = e_i$ gilt $(Az)_i \leq z \cdot Az$
- Wie wir schon wissen muss für alle i , s.d $z_i > 0$ die ungleichheit gelten. Dann ist z ein gesättigter Restpunkt (d.h.: falls $z_i = 0$, dann gilt $(Az)_i - z \cdot Az \leq 0$)
- Es gilt Äquivalenz (jeder gesättigter Restpunkt ist NG)

- Um die Existenz der NG zu beweisen, können wir die Existenz ger gesätteten Restpunkten der Replikatorgleichung zeigen.
- Wir addieren $\epsilon > 0$ zur jede Komponente der rechten Seite und substrahieren $n\epsilon$, damit die Summe $\sum \dot{x}_i = 0$ stimmt.
  $\dot{x}_i = x_i[(Ax)_i - x \cdot Ax - n\epsilon] + \epsilon$
- Es gibt mindestens ein Restpunkt, der die Gleichung erfült, nennen wir ihn z. Es gilt:
  $(Az_\epsilon)_i - z_\epsilon \cdot Az_\epsilon = \epsilon(n - \frac{1}{(z_\epsilon)_i})$
- wenn wir zu den Grenzwerten übergehn, kriegen wir dass z ein gesättigter Restpunkt ist.

Sperner's Lemma

- Betrachte n-1 dim. Simplex S (eine geschlossene "Hülle"von n Punkten $y_1, \ldots y_n$, s.d. $y_i - y_n$ unabhänig sind.
- eine nicht-triviale Teilmenge spannt Untersimplex.
- Zerlegung besteht aus n-1 dim. disjunkten Simplexen, s.d die Vereinigung S ergibt
- Wir bemalen die Eckpunkten mit n Farben, angenommen y_i hat Farbe i
- In jedem Untersimplex werden nur die Farben der Eckpunkte, von welchen er gespannt wird benutzt
- Spernener's Lemma: Es gibt nur gerade Anzahl von Untersimlexen so dass die Ecken unterschiedlich gefärbt sind.
- Beweis geht mit Hilfe der Induktion