# $1D \neq 2D$

Florian Hewener

29. Oktober 2013

# Gliederung

# Gliederung

# Problemstellung

Gegeben sind

- $N$ Stützpunkte $(x_i, f_i)$ mit
- $x_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und
- $f_i \in \mathbb{R}$

Für $n = 1$:

- Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:
  $X : a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < b$

Ziel: Interpolation der Werte durch eine Funktion $s\colon \Omega \to \mathbb{R}$, die die Interpolationsbedingung

$$s(x_j) = f_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, N\}$$

erfüllt.

# Beispiele

Beispiele:

- 1D: Interpolation der Wurzelfunktion durch die Werte $(0,0),(1,1),(4,2),(9,3),(16,4)$
- 2D: Landkarte – Höhe in Abhängigkeit von x- und y-Koordinate

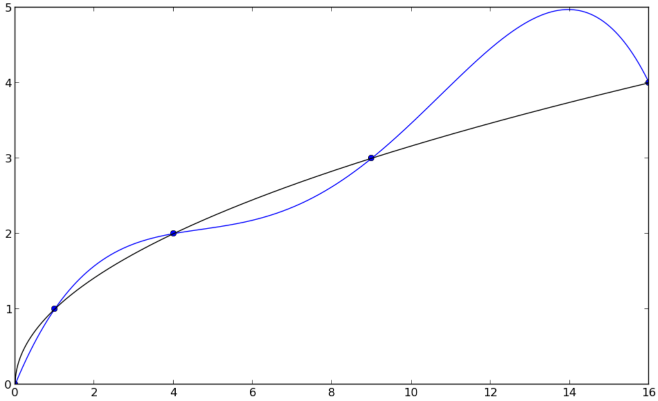
Mögliche Methoden (1D):

- Polynominterpolation
- Splines

Allgemeiner:

$$s(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k B_k(x)$$

# Polynominterpolation der Wurzelfunktion



# Gliederung

# Haar-Räume

## Definition

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beinhalte mindestens $N$ Punkte.
Sei $V \subseteq C(\Omega)$ N-dimensionaler Vektorraum. V heißt *Haar-Raum* der Dimension $N$ auf $\Omega$, wenn

- für beliebige, paarweise verschiedene $x_1, \ldots, x_N \in \Omega$ und beliebige $f_1, \ldots, f_N \in \mathbb{R}$
- genau ein $s \in V$ existiert, sodass
- $s(x_j) = f_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, N\}$

$\rightarrow$ Per Definition ist das Problem in Haar-Räumen eindeutig lösbar

$\rightarrow$ Insbesondere: Keine Abhängigkeit von den $x_j$

# Haar-Räume

Wie lassen sich Haar-Räume identifizieren?

**Satz**

Es sind äquivalent

1. V ist N-Dimesionaler Haar-Raum
2. $\forall u \in V \setminus \{0\}$ : u hat höchstens $N - 1$ Nullstellen
3. Für voneinander verschiedene Punkt $x_1, \ldots, x_N \in \Omega$ und jede Basis $u_1, \ldots, u_N$ von $V$ gilt:

$$det(u_j(x_i)) \neq 0$$

# Beispiel: Haar-Raum

- $\pi_n(\mathbb{R}) = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ ist $(n+1)$-dimensionaler Haar-Raum
- $\text{span}\{x, x^2, \dots, x^n\}$ ist kein Haar-Raum

Existenz von Haar-Räumen auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$?

# Mairhuber-Curtis

**Satz (Mairhuber-Curtis)**

Sei

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$
- und $\text{int}(\Omega) \neq \emptyset$

Dann existiert kein Haar-Raum auf $\Omega$ mit Dimension $N \geq 2$.

# Gliederung

# Beispiel

Interpolationsproblem i.A. nicht mehr eindeutig lösbar (Mairhuber-Curtis).

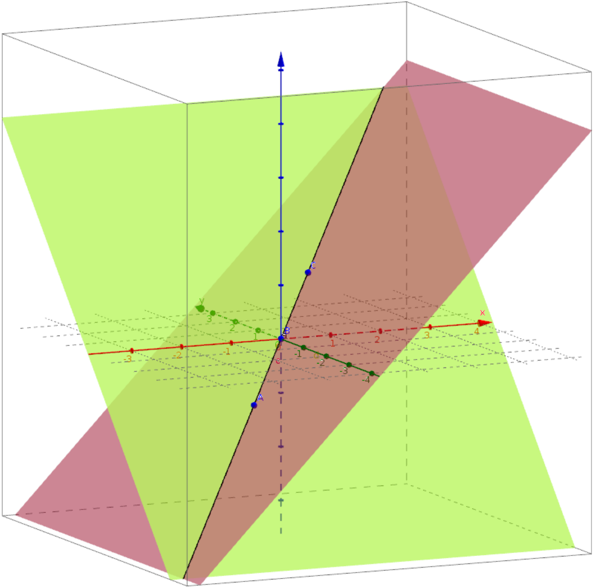
Beispiel:

- $\Omega = \mathbb{R}^2$, N=3

| $j$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $x_j$ | $(-1,-1)^\top$ | $(0,0)^\top$ | $(1,1)^\top$ |
| $f_j$ | -1 | 0 | 1 |

- $\rightarrow$ Gesucht: $s \in \pi_1(\mathbb{R}^2)$ (da $\dim \pi_1(\mathbb{R}) = 3$)
- Lösungen: $s(x,y) = x$, $s(x,y) = y$, ...
- Nicht eindeutig lösbar, da Punkte auf einer Geraden

## $s(x, y) = x$, $s(x, y) = y$, ...



# Unisolvente Mengen

Wann ist das Interpolationspolynom eindeutig bestimmt?

## Definition

Eine Punktmenge $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $N \geq \dim \pi_m(\mathbb{R}^d)$ heißt $\pi_m(\mathbb{R}^d)$-unisolvent, wenn das Nullpolynom das einzige Polynom ist, für das jedes $x \in X$ Nullstelle ist.

Stützstellenmenge unisolvent $\rightarrow$ Interpolationspolynom eind. bestimmt (vgl. Haar-Raum)

## Beispiel

Drei Punkte des $\mathbb{R}^2$, die nicht kollinear sind, sind $\pi_1(\mathbb{R}^2)$-unisolvent.

# Beispiel für unisolvente Menge

Seien

- $\{L_0, \dots, L_m\}$ eine Menge paarweise verschiedener Geraden in $\mathbb{R}^2$
- $X = \{x_1, \dots, x_Q\}$ paarweise verschiedene Punkte mit $Q = (m+1)(m+2)/2$, sodass
  - $x_1 \in L_0$
  - $x_2, x_3 \in L_1 \ \wedge \ x_2, x_3 \notin L_0$
  - $\dots$
  - die letzten $(m+1)$ Punkte auf $L_m$, aber nicht auf $L_0, \dots, L_{m-1}$

Dann ist X $\pi_m(\mathbb{R}^2)$-unisolvent.

# Gliederung

# Kubische Splines

## Definition

Menge der kubischen Splines:

$$S_3(X) = \{s \in C^2[a,b] \colon s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \pi_3,\ 0 \leq i \leq N\}$$

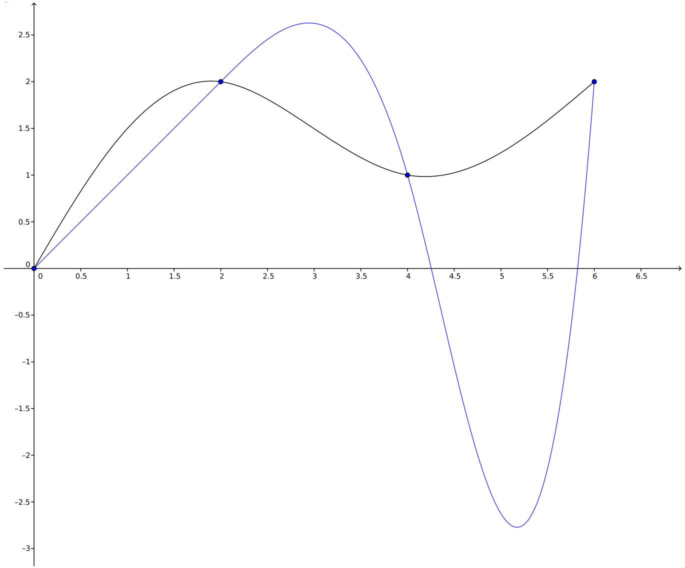
wobei $x_0 = a$, $x_{N+1} = b$.

Das heißt für $s \in S_3(X)$:

- $s$ ist zweimal stetig differenzierbar
- $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ ist Polynom dritten Grades für alle Teilintervalle von $X$

Wesentlicher Unterschied zur Polynominterpolation: $S_3$ hängt von $X$ ab

# Beispiel: Kubische Splines



# Eindeutigkeit

- Es gilt: $dim(S_3(X)) = N + 4$
- Aber es existieren wegen

$$s(x_j) = f_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, N\}$$

  nur $N$ Bedingungen.

  $\rightarrow$ Keine eindeutige Lösung.

- Weitere Bedingungen notwendig

# Natürliche Splines

## Definition

Die Menge der natürlichen kubischen Splines:

$$\mathcal{N}S_3(X) := \{s \in S_3(X) \colon s|_{[a,x_1]}, s|_{[x_N,b]} \in \pi_1\}$$

- Es gilt:

$$\begin{aligned} s \in \mathcal{N}S_3(X) \iff\ & s \in S_3(X) \\ & \wedge\ s''(x_1) = s^{(3)}(x_1) = 0 \\ & \wedge\ s''(x_N) = s^{(3)}(x_N) = 0 \end{aligned}$$

- $\dim(\mathcal{N}S_3(X)) = N$
- Interpolationsproblem eindeutig lösbar

# Eigenschaften natürlicher Splines

1. Natürliche Splines sind auf jedem Teilintervall Polynome
2. Unter allen Lösungen des Interpolationsproblems im $H^2([a,b])$ minimiert der natürliche Spline $\| \cdot'' \|_{L_2[a,b]}$
3. Natürliche Splines besitzen eine lokale Basis (B-Splines)

Anmerkung:

$$\|f\|_{L_2[a,b]} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

# $d > 1$?

- (beschränktes) $\Omega$ unterteilen in disjunkte $\{\Omega_j\}_{j=1}^N$
- z.B. für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: Triangulation
- Problem:
  - Dimension des Raums unbekannt
  - $d > 2$?

# Gliederung

# Basis des $S_3(X)$

Sei

$$x_+ = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Jedes $s \in S_3(X)$ lässt sich schreiben als:

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (x - x_j)_+^3 + \sum_{j=0}^{3} \beta_j x^j$$

# Darstellung natürlicher Splines

- Ziel: Darstellung für $s \in \mathcal{N}S_3(X)$
- Für $x \in [a, x_1]$ gilt: $(x - x_j)_+ = 0 \quad \forall 1 \le j \le N$

$$\Rightarrow \quad s(x) = \sum_{j=0}^{3} \beta_j x^j \quad \forall x \in [a, x_1]$$

- Außerdem gilt nach Definition: $s|_{[a,x_1]} \in \pi_1$

$$\Rightarrow \quad \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (x - x_j)_+^3 + \beta_0 + \beta_1 x$$

# Darstellung natürlicher Splines

- Für $x \in [x_N, b]$ gilt: $(x - x_j)_+ = (x - x_j) \quad \forall 1 \leq j \leq N$
- Ausmultiplizieren und umformen:

$$\Rightarrow \quad s(x) = \sum_{l=0}^{3} \binom{3}{l} (-1)^{(3-l)} \left( \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j^{3-l} \right) x^l + \beta_0 + \beta_1 x$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j = 0 \quad \text{(Bedingung an die } \alpha_j\text{)}$$

# Darstellung natürlicher Splines

- Mit $x_+^3 = \frac{1}{2}(|x|^3 + x^3)$ folgt

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{\alpha}_j |x - x_j|^3 + \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x$$

**Ergebnis**

Natürliche kubische Splines lassen sich darstellen als

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi(|x - x_j|) + p(x)$$

mit $\phi(r) = r^3$ und $p \in \pi_1$

# Gliederung

# Radiale Basisfunktion

- Verallgemeinerung: Interpolierende der Form

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi(\|x - x_j\|_2) + p(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

- Radiale Basisfunktion: $\Phi = \phi(\|\cdot\|_2)$
- $p \in \pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$

- Bedingungen an die Koeffizienten:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j q(x_j) = 0 \quad \forall q \in \pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$$

# Lösbarkeit

- Häufig $p(x) = 0$, dann ist

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi(\|x - x_j\|_2)$$

- Bestimmung der $\alpha_j$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi(\|x_i - x_j\|_2) = f_i \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

# Lösbarkeit

Man erhält LGS

$$A_{\phi,X}\alpha = f$$

mit

- $A_{\phi,X} := (\phi(\|x_i - x_j\|_2))_{1\leq i,j\leq N}$
- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^\top$, $f = (f_1, \ldots, f_N)^\top$

Eindeutig lösbar falls $A_{\phi,X}$ nicht singulär ist.

# Geeignete $\phi(x)$

- Frage: Existiert Funktion $\phi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, sodass

$$\det A_{\phi,X} \neq 0$$

  für alle $d \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedene $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$

- Ja, z.B.
  - $\phi(r) = e^{-\alpha r^2}, \quad \alpha > 0$
  - $\phi(r) = \sqrt{c^2 + r^2}, \quad c > 0$

- Auch mit kompaktem Träger?

# Gliederung

# Vektorraum

Betrachte

- Vektorraum

$$F_\phi[a, b] := \left\{ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \phi(|x - x_j|) : N \in \mathbb{N}, X \subseteq [a, b] \right.$$

$$\left. \text{mit } \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, p(x_j) = 0 \; \forall p \in \pi_1(\mathbb{R}) \right\}$$

- mit Skalarprodukt

$$\left( \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \phi(| \cdot - x_j|), \sum_{k=1}^{M} \beta_k \, \phi(| \cdot - y_k|) \right)_\phi$$

$$:= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \alpha_j \beta_k \phi(|x_j - y_k|$$

# Darstellbare Funktionen

- Für $\phi(r) = r^3$, $r \geq 0$ ist dann

$$\mathrm{clos}_{\|\cdot\|_\phi} F_\phi[a,b] + \pi_1(\mathbb{R}) = H^2[a,b]$$

- Verallgemeinerung auf mehrdimensionalen Fall
  - Skalarprodukt muss auf $F_\Phi(\Omega)$ definiert sein
  - Entsprechende Forderung an $\Phi$

# Gliederung

# Approximation

Problem:

- N sehr groß
- Rauschen

Ziel: Finde Funktion, die die Messwerte nur ungefähr annähert, d.h.

$$s(x_j) \approx f_j \quad \forall j \in 1, \ldots, N$$

# Kleinste Fehlerquadrate

- Sei $S \subseteq C(\mathbb{R}^d)$ endlichdimensional. Finde $s \in S$, sodass

$$\sum_{j=1}^{N} [s(x_j) - f_j]^2$$

  minimiert wird.

- Jeder Stützpunkt hat Einfluss auf die Lösung $\rightarrow$ global

# Moving least squares

- Gewichtsfunktion
  - $w \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
  - z.B. $w(x, x_j) = w_0(x - x_j)$, wobei $w_0$ kompakten Träger hat

- Auswertung an der Stelle $x$ durch $s(x)$ wobei $s$

$$\sum_{j=1}^{N} [s(x_j) - f_j]^2 w(x, x_j)$$

  minimiert
- Nur Nachbarn von x relevant $\to$ lokal

# Gliederung

# Approximationsfehler bei Splines

Wie gut ist die Approximation von $f \in H^2[a,b]$ durch $s_{f,X}$?

- $h_X := \max_{1 \leq j \leq N-1} (x_{j+1} - x_j)$
- Fehler:

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_\infty([a,b])} \leq c h_X^{3/2} \|f''\|_{L_2([a,b])}$$

  mit $c > 0$

- Für mehrdimensionalen Fall?

# Gitternorm

## Definition

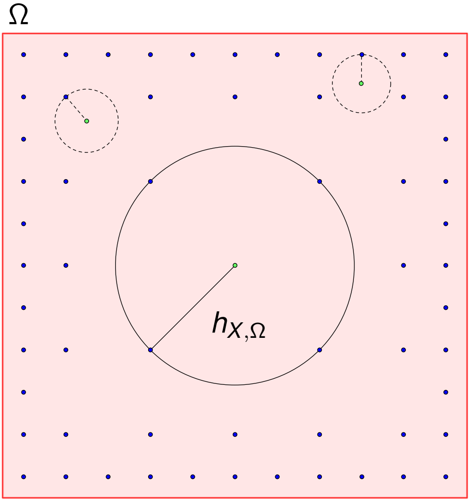
Sei $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \Omega$ und $\Omega$ beschränktes Gebiet. Dann heißt

$$h_{X,\Omega} := \sup_{x \in \Omega} \min_{1 \leq j \leq N} \|x - x_j\|_2$$

Gitternorm (fill distance).

Anschaulich: Radius der größten offenen Kugel $B$ in $\Omega$, sodass $X \cap B = \emptyset$

# Veranschaulichung von $h_{X,\Omega}$ in $\mathbb{R}^2$



# Konvergenzordnung

## Definition

Eine Approximation $(f, X) \mapsto s_{f,X}$ hat für den Funktionsraum $\mathcal{F}$ ...

- $L_\infty$ Konvergenzordnung k, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass für alle $f \in \mathcal{F}$:

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c h_{X,\Omega}^k \|f\|_{\mathcal{F}}$$

- spektrale Konvergenzordnung, wenn Konstanten $c > 0$ und $\lambda \in (0, 1)$ existieren, sodass für alle $f \in \mathcal{F}$:

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c \lambda^{1/h_{X,\Omega}} \|f\|_{\mathcal{F}}$$

# Quellen


- WENDLAND Holger (2005). *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press.
- FREUND Roland W. und Roland H.W. HOPPE (2007). *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*, Springer.

# Fazit

- Verfahren für eindimensionale Interpolation
  - nicht auf mehrdimensionalen Fall übertragbar
    $\rightarrow$ Mairhuber-Curtis
  - liefern aber Ideen und Anknüpfungspunkte
- Polynominterpolation $\rightarrow$ Unisolvente Mengen
- Splines
  $\rightarrow$ Radiale Basisfunktion
  $\rightarrow$ geeignete Funktionen $\Phi$ ?

- Wie gut ist eine Approximation?
  $\rightarrow$ Approximationsordnung