Vortrag 3: Lokale Reproduktion von Polynomen

Seminar: Gitterfreie Methoden

Dozent: Prof. Dr. S. Rjasanow

Eric Lubjuhn

05.11.2013

Frage Warum überhaupt Polynome?

Frage Warum überhaupt Polynome?

Antwort Polynome erlauben eine einfache Fehleranalyse.

Beispiel

Betrachte die Funktion $f \in C^k(\mathbb{R})$.

Das Taylorpolynom p um $x_0 \in \mathbb{R}$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

hat für $|x - x_0| \leq h$ und $\xi \in (x, x_0)$ den lokalen Approximationsfehler

$$|f(x) - p(x)| = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}|x - x_0|^k \leq Ch^k.$$

Gegeben sei $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, x_i \neq x_j$ für $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ und Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_N)$. Wähle $u_j : \Omega \to \mathbb{R}, 1 \leq j \leq N$ abhängig von X und bilde

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} f(x_j) u_j(x)$$

- Gilt z.B. $u_j(x_k) = \delta_{j,k}$ für $1 \leq j, k \leq N$, so folgt etwa die Lagrange-Interpolation.
- u_j nicht natürlich
  $\Rightarrow$ Quasi-Interpolierende

Definition 1.

Ein Prozess, der für jede Menge $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq \Omega$ *eine Familie von Funktionen* $u_j = u_j^X : \Omega \to \mathbb{R}, 1 \leq j \leq N$ *definiert, liefert eine lokale Reproduktion von Polynomen vom Grad* l *auf* Ω *falls Konstanten* $h_0, C_1, C_2 > 0$ *existieren, so dass*

1. $\sum_{j=1}^{N} p(x_j)u_j(x) = p(x) \ \forall \ p \in \pi_l(\mathbb{R}^d)|\Omega$
2. $\sum_{j=1}^{N} |u_j(x)| \leq C_1 \ \forall \ x \in \Omega$
3. $u_j(x) = 0$ *falls* $\|x - x_j\|_2 > C_2 h_{X,\Omega}$ *und* $x \in \Omega$

erfüllt sind für alle X *mit* $h_{X,\Omega} \leq h_0$.

Anmerkungen

- $h_{X,\Omega}$ ist die fill distance, $h_{X,\Omega} = \sup_{x \in \Omega} \min_{1 \leq j \leq N} \|x - x_j\|_2$
- die u_j bilden eine lokale Reproduktion von Polynomen vom Grad l
- h_0, C_1, C_2 unabhängig von X
- Punkt 1 zeigt Polynomcharakter
- Punkt 2 ist ein Maß für die Güte der Approximation
- Punkt 3 spiegelt den lokalen Charakter wider

Theorem 1.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ begrenzt. Definiere Ω^* als Abschluss von $\bigcup_{x \in \Omega} B(x, C_2 h_0)$. Definiere $s_{f,X} = \sum_{j=1}^{N} f(x_j) u_j$, wobei u_j eine lokale Reproduktion von Polynomen der Ordnung m auf Ω ist. Wenn $f \in C^{m+1}(\Omega^*)$, dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den Konstanten in Definition 1 abhängt, so dass

$$|f(x) - s_{f,X}(x)| \leq C h_{X,\Omega}^{m+1} |f|_{C^{m+1}(\Omega^*)}$$

für alle X mit $h_{X,\Omega} \leq h_0$. Die Halbnorm ist definiert durch

$$|f|_{C^{m+1}(\Omega^*)} := \max_{|\alpha|=m+1} \|D^\alpha f\|_{L_\infty(\Omega^*)}.$$

- lokal
- gibt Approximationsordnung an, die durch Reproduktion durch Polynome erreicht wird
- falls f in einem Teilgebiet von Ω weniger glatt ist, also nur $l \leq m$ stetige Ableitungen besitzt, hat der Approximant immer noch Ordnung $l-1$ in diesem Gebiet.

Was kann man über die Existenz von Polynomreproduktionen sagen?

Fall $m = 0$

- konstante Polynome
- wähle für $x \in \Omega$ den Index j so, dass $\|x - x_j\|_2$ minimal ist: dann erfüllen $u_j(x) = 1$ und $u_k(x) = 0$ für $k \neq j$ mit $C_1 = C_2 = 1$ und h_0 beliebig die Definition 1.

Beispiel

Gegeben seien die Punkte $(1,3),(2,1),(3,3),(5,13),(6,-8)$. Also

$$x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 6$$

und

$$p(x_0) = 3,\ p(x_1) = 1,\ p(x_2) = 3,\ p(x_3) = 13,\ p(x_4) = -8.$$

$$p(x) = \begin{cases} 3 & ,\ x \leq 1,5 \\ 1 & ,\ 1,5 < x \leq 2,5 \\ 3 & ,\ 2,5 < x \leq 4 \\ 13 & ,\ 4 < x \leq 5,5 \\ -8 & ,\ 5,5 < x \end{cases}$$

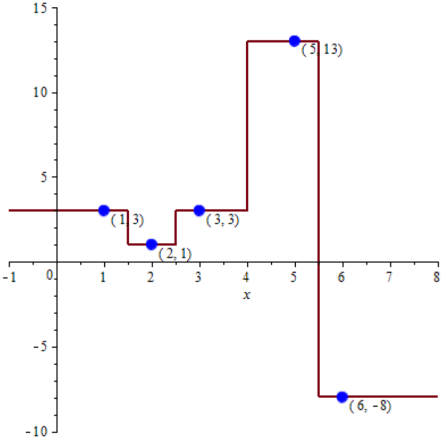

Abbildung : Interpolation mit konstanten Polynomen

Zum Vergleich die Lagrange-Interpolation:

$$u_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{4} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{4} p(x_j) u_j(x)$$

Konkret:

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= \tfrac{1}{40}(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)\\
u_1(x) &= \tfrac{-1}{12}(x-1)(x-3)(x-5)(x-6)\\
u_2(x) &= \tfrac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)\\
u_3(x) &= \tfrac{-1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)\\
u_4(x) &= \tfrac{1}{60}(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)
\end{aligned}
$$

$$p(x) = 3u_0(x) + 1u_1(x) + 3u_2(x) + 13u_3(x) - 8u_4(x)$$

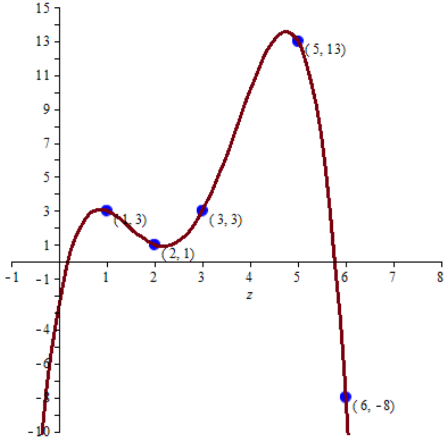

Abbildung : Lagrange-Interpolation

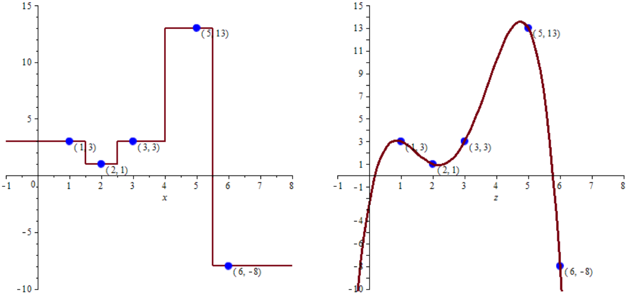

Abbildung : Vergleich

Fall $m \geq 1$

- Existenz wird im Folgenden gezeigt
- Konstanten ergeben sich explizit
- nicht-konstruktive Herangehensweise

Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum versehen mit der Norm $\|\cdot\|_V$ und sei $Z \subseteq V^*$ eine endliche Menge aus N Funktionalen (V^* Dualraum von V).

Definition 2.

Z ist eine normierende Menge für V, falls die Abbildung $T : V \to T(V) \subseteq \mathbb{R}^N$ definiert durch $T(v) = (z(v))_{z \in Z}$ injektiv ist. T heißt dann sampling operator.

Konsequenzen, falls Z normierende Menge für V

- $T^{-1} : T(V) \to V$ existiert auf $Bild(T)$
- $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ Norm auf $\mathbb{R}^N$, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{N*}}$ Norm auf $\mathbb{R}^{N^*} \cong \mathbb{R}^N$, $\|\cdot\|$ induzierte Norm auf $T(V)$. Dann ist
$$\|T^{-1}\| := \sup_{x \in T(V)\setminus\{0\}} \frac{\|T^{-1}x\|_V}{\|x\|_{\mathbb{R}^N}} = \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\|v\|_V}{\|Tv\|_{\mathbb{R}^N}}$$
die normierende Konstante der normierenden Menge.
- $\|\cdot\|_V$ und $\|T(\cdot)\|_{\mathbb{R}^N}$ sind äquivalent auf V
  - $\|Tv\|_{\mathbb{R}^N} \le \|T\| \|v\|_V$
  - $\|v\|_V = \|T^{-1}(Tv)\|_V \le \|T^{-1}\| \|Tv\|_{\mathbb{R}^N}$
- $N \ge dimV$ Funktionale nötig, um T injektiv zu machen, allerdings reichen $N = \dim(V)$
  - es ist eine gegebene Familie von Funktionalen gegeben
  - Wie viele Funktionale sind nötig, um T injektiv zu machen und die Norm von T und T^{-1} zu kontrollieren?

Theorem 2.

V sei endlicher, normierter Vektorraum und $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$ eine normierende Menge für V, T der korrespondierende sampling operator. Für alle $\psi \in V^*$ existiert ein Vektor $u \in \mathbb{R}^N$, der nur von ψ abhängt, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$\psi(v) = \sum_{j=1}^{N} u_j z_j(v)$$

und

$$\|u\|_{\mathbb{R}^{N*}} \leq \|\psi\|_{V^*} \|T^{-1}\|.$$

Schlussfolgerung

- Die Funktionale in Z bestimmen die normierende Menge.
- Die Existenz von u hängt nur von Z ab, das Aussehen von u richtet sich dagegen nach dem spezifischen ψ.
- Wenn Z eine normierende Menge ist, dann können wir jedes Funktional ψ auf diese Art und Weise repräsentieren.

Wähle $V = \pi_m(\mathbb{R}^d)|\Omega$ und $Z = \{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_N}\}$, wobei die δ_x die Punktauswertungsfunktionale symbolisieren mit $\delta_x(f) = f(x)$.

Proposition 1.

Die Funktionale $Z = \{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_N}\}$ bilden eine normierende Menge für $\pi_m(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn X $\pi_m(\mathbb{R}^d)$ unisolvent ist.

- $\mathbb{R}^N$ wird mit der l_∞-Norm versehen
- wähle $\psi = \delta_x$, dann liefert das Theorem 2 ein einen Vektor $u(x) \in \mathbb{R}^N$, der
  - Polynome nach Punkt 1 in Definition 1 liefert.
  - Punkt 2 der Definition 1 erfüllt, da $\sum_{j=1}^{N} |u_j(x)|$ l_1-Norm besitzt.
- Aber welche Voraussetzungen muss die Datenmenge X erfüllen, dass Z eine normierende Menge ist?

Definition 3.

Eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ erfüllt eine innere Kegelbedingung, falls ein Winkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und ein Radius $r > 0$ existieren, so dass für alle $x \in \Omega$ mit Einheitsvektor $\xi(x)$ der Kegel

$$C(x, \xi(x), \theta, r) := \{x + \lambda y \ : \ y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_2 = 1, y^\top \xi(x) \leq \cos(\theta), \lambda \in [0, r]\}$$

ganz enthalten ist in Ω.

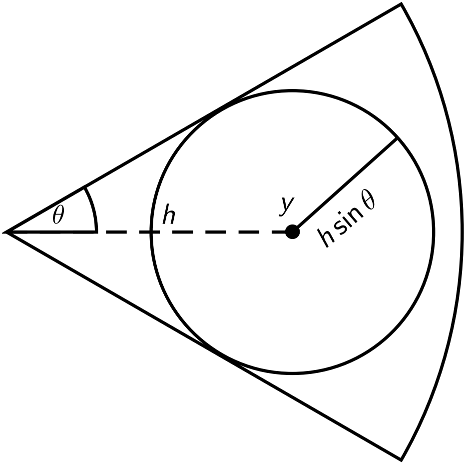

Abbildung : Kegel

Lemma 1.

Sei $C(x,\xi,\theta,r)$ ein Kegel wie in Definition 3. Dann ist für jedes $h \leq \frac{r}{1+\sin(\theta)}$ die abgeschlossene Kugel $B = B(y, h\sin(\theta))$ mit Mittelpunkt $y = x + h\xi$ und Radius $h\sin(\theta)$ in $C(x,\xi,\theta,r)$ enthalten.
Für $z \in B$ ist die gesamte Strecke $x + \frac{t(z-x)}{\|z-x\|_2}$, $t \in [0,r]$ enthalten in $C(x,\xi,\theta,r)$.

Schritte, um die Eigenschaft der normierenden Menge zu beweisen:

- multivariate Polynome reduzieren sich auf univariate Polynome auf einer Geraden
- Chebyshev Norm von univariaten Polynomen auf einer Strecke in Beziehung setzen zu Chebyshev Norm von multivariaten Polynomen
  - M nichtleere Menge, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierter Raum, $B(M, Y)$ Funktionenraum der beschränkten Funktionen von M nach Y
  - Chebyshev Norm (Supremumsnorm):
  $$\|\cdot\|_\infty : B(M, Y) \to (R) \text{ mit } \|f\|_\infty := \sup_{x \in M} \|f(x)\|_Y$$
- sicherstellen, dass die Strecke komplett in Ω liegt

Theorem 3.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und erfüllt eine innere Kegelbedingung mit Radius $r > 0$ und Winkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Angenommen, $h > 0$ und die Menge $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \Omega$ und es gelten

1. $h \leq \frac{r \sin(\theta)}{4(1+\sin(\theta))m^2}$,
2. *für alle $B(x, h) \subseteq \Omega$ existiert ein Mittelpunkt $x_j \in X \cap B(x, h)$.*

Dann ist $Z = \{\delta_x : x \in X\}$ eine normierende Menge für $\pi_m(\mathbb{R}^d)|\Omega$ und die Norm der Inversen des zugehörigen sampling operators ist beschränkt durch 2.

Korollar 1.

Falls $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq \Omega$ *und* $h > 0$ *die Bedingungen in Theorem 3 erfüllen, dann gibt es für alle* $x \in \Omega$ *reelle Zahlen* $u_j(x)$, *dass*

$$\sum_{j=1}^{N} |u_j(x)| \leq 2$$

und

$$\sum_{j=1}^{N} u_j(x)p(x_j) = p(x) \; \forall \; p \in \pi_m(\mathbb{R}^d).$$

Lemma 2.

Jede Kugel mit Radius $\delta > 0$ genügt einer inneren Kegelbedingung mit Radius $\delta > 0$ und Winkel $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Korollar 2.

Definiere für $m \in \mathbb{N}$

$$c_m = \frac{\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})m^2}.$$

Falls $Y = \{y_1, \ldots, y_M\} \subseteq B = B(x_0, \delta)$ die Bedingung $h_{Y,B} \leq c_m \delta$ erfüllt, dann ist span$\{\delta_x : x \in Y\}$ eine normierenden Menge für $\pi_m(\mathbb{R}^d)|B$ mit Normierendenkonstante $c = 2$.
Im Besonderen gibt es für alle $x \in \Omega$ reele Zahlen $u_j(x)$ mit

$$\sum_{j=1}^{N} |u_j(x)| \leq 2$$

und

$$\sum_{j=1}^{N} u_j(x) p(y_j) = p(x) \; \forall \; p \in \pi_m(\mathbb{R}^d).$$

- bisher globale Betrachtung, also keine Information darüber, ob die u_j außerhalb eines bestimmten Bereichs verschwinden
- Idee für lokale Version:
  1. Ω genügt inneren Kegelbedingung
  2. für alle $x \in \Omega$ gibt es dann einen Kegel mit Eckpunkt x, der vollständig in Ω enthalten ist
  3. wende Korollar 1 auf diesen Kegel an, was möglich ist, da ein Kegel einer inneren Kegelbedingung genügt

Lemma 3.

Sei $C = C(x_0, \xi, \theta, r)$ ein Kegel mit Winkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{5}]$ und Radius $r > 0$. Definiere

$$z = x_0 + \frac{r}{1+\sin(\theta)}\xi.$$

Dann gilt für alle $x \in C$

$$\|x - z\|_2 \leq \frac{r}{1+\sin(\theta)}.$$

Proposition 2.

Sei $C = C(x_0, \xi, \theta, r)$ *ein Kegel mit Winkel* $\theta \in (0, \frac{\pi}{5}]$ *und Radius* $r > 0$*. Dann genügt* C *einer inneren Kegelbedingung mit Winkel* $\tilde{\theta} = \theta$ *und Radius*

$$\tilde{r} = \frac{3\sin(\theta)}{4(1+\sin(\theta))} r.$$

Lokale Version von Korollar 1

Theorem 4.

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und genüge einer inneren Kegelbedingung, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $r > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ fest. Dann existieren Konstanten $h_0, C_1, C_2 > 0$, die nur von m, θ, r abhängen, so dass für alle $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \Omega$ mit $h_{X,\Omega} \leq h_0$ und für alle $x \in \Omega$ reelle Zahlen $\tilde{u}_j(x), 1 \leq j \leq N$ gefunden werden können mit

1. $\sum_{j=1}^{N} p(x_j)\tilde{u}_j(x) = p(x) \; \forall \; p \in \pi_m(\mathbb{R}^d)$
2. $\sum_{j=1}^{N} |\tilde{u}_j(x)| \leq C_1$
3. $\tilde{u}_j(x) = 0$ *falls* $\|x - x_j\|_2 > C_2 h_{X,\Omega}$

Bewertung

- Alle Konstanten können verbessert werden, falls die Kegelbedingungen besser abgeschätzt werden können.
- Je mehr Informationen über ein Gebiet bekannt sind, desto besser können die Konstanten bestimmt werden.
- $\sum_{j=1}^{N} |\tilde{u}_j(x)| \leq 2$ bedeutet, dass die Lesbesgue-Funktion der entsprechenden Quasi-Interpolierenden gleichmäßig beschränkt ist durch 2.
- Der Preis der gleichmäßgen Beschränkheit ist, dass wesentlich mehr Punkte als $\dim(\pi_m(\mathbb{R}^d))$ benötigt werden.

Quellen

- Wendland Holger (2005). *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press.
- Wolff Manfred, Hauck Peter, Küchlin Wolfgang (2004). *Mathematik für Informatik und Bioinformatik*, Springer.