Logistische Gleichung

Marius Bohn

Fakultt6.1MathematikderUniversittSaarbr cken

22.11.2011

Übersicht

Bei der Untersuchung von dynamischen Systemen in der Ökologie haben wir verschiedene Modelle zu berücksichtigen

1. exponentielles Wachstum einer Population
2. logistische Gleichung
3. Interaktion von Populationen: Symbiose und Konkurrenz
4. Wechselwirkung von Räuber-Beute-Populationen: Lotka-Volterra-Gleichungen
5. Diskussion der Lotka-Volterra-Gleichungen
6. Stabilitätsanalyse
7. Verfeinerung des Räuber-Beute-Modells

Wachstumsmodelle

Wir unterscheiden grundsätzlich zwischen zwei Hauptmodellen bei der Beschreibung des Wachstums von Populationen:

1. exponentielles Wachstum
2. logistisches Wachstum

Wir betrachten zunächst die Entwicklung der Größe lediglich einer Population in Abhängigkeit von den jeweiligen Umweltbedingungen und der Reproduktionsrate.

1. exponentielles Wachstum

Wir gehen hier von einem von natürlichen Umweltbedingungen unabhängigen unbeschränkten Wachstum aus.

$f := \frac{\textit{Nachkommenzahl}}{\textit{Zeiteinheit}}$

$m := \frac{\textit{Gestorbene}}{\textit{Zeiteinheit}}$

Wir gehen nun davon aus, dass $\lambda = f - m = const$. Damit ergibt sich mit der Populationsgröße $x(t)$ beim Übergang von der mittleren Änderungsrate $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ zum Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t)$$

$$\dot{x}(t) = \lambda x$$

mit $x(t_0) = x_0$ ergibt sich als Lösung des Anfangswertproblemes die dynamische Entwicklung der Population zu:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

2. logistisches Wachstum

Wir gehen nun von einem realistischeren Wachstumsmodell aus:
$\lambda = \lambda(x) = \lambda(1 - \frac{x}{K})$
wobei K die Kapazität, also die Maximalgröße der Population angibt. Damit ergibt sich die logistische Differentialgleichung:

$$\dot{x} = \lambda x(1 - \frac{x}{K})$$

Wie man sich leicht überzeugt haben wir folgendes Wachstumsverhalten:
$\dot{x} = 0 \; mit \; x = 0 \; und \; x = K$
$\dot{x} > 0 \; mit \; 0 < x < K$
$\dot{x} < 0 \; mit \; x > K$
Mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ ist die Lösung für das Anfangswertproblem gegeben durch:

$$x(t) = \frac{Kx_0 e^{\lambda t}}{K + x_0(e^{\lambda} t - 1)}$$

3. mathematische Diskussion der logistischen Gleichung

Wir geben nun die Populationsgröße x als Bruchteil der Maximalgröße K an, d.h. wir erhalten mit $y = \frac{x}{K} \Rightarrow \dot{y} = \frac{\dot{x}}{K}$ dann folgende vereinfachte Differentialgleichung:

$$\dot{y} = \lambda y(1 - y)$$
$$0 \leq x \leq 1$$

Damit ist die Populationsgröße y auf das Intervall $[0, 1]$ beschränkt und abhängig vom Parameter λ. Wir betrachten im Folgenden die nichtlinearen Gleichung $F(x) = \lambda x(1 - x)$.

Die Funktion nähert sich mit wachsender Zeit t bzw. (im diskretisierten Fall mit wachsender Iterationszahl) einem Grenzwert x_f an, welcher der Fixpunktgleichung $F(x) = x$ genügt. Die Lösung ergibt sich zu:

$$x_f = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

Da x auf das Itervall $[0, 1]$ eingeschränkt ist muss der Parameter λ auf den Bereich $0 < \lambda \leq 1$ beschränkt werden. Es gibt prinzipiell keine obere Schranke für λ. Meist wird jedoch der Bereich $1 \leq \lambda \leq 4$ betrachtet.

4. Fixpunktuntersuchungen

Die vorangehenden Betrachtungen lieferten uns einen Fixpunkt für die logistische Gleichung. Interessant ist es nun zu untersuchen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit der Fixpunkt stabil ist. Stabilität bedeutet dabei, dass ein Punkt x_n in der Nähe des Fixpunktes x_f von einem Wert x_{n+1} gefolgt wird, der näher an x_f liegt als x_n. Aus den Mittelwertsatz erhalten wir:

$$F(x) - F(x_f) = F(x) - x_f = (x - x_f)F'(c)$$

für ein c zwischen x und x_f. Falls nun $|F'(x_f)| < 1$ und somit $|F'(c)| < 1$ für x nahe bei x_f, d.h. $x_n = x_f \pm \delta$ wobei $\delta \ll 1$.
Dann gilt:

$$|F(x) - x_f| < |x - x_f|$$

Für die diskretisierte Rekursionsgleichung $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ ergibt sich:

$$x_{n+1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \pm \delta(2 - \lambda)$$

Damit dieser Ausdruck gegeben x_f konvergiert, muss der Koeffizient $(2 - \lambda)$ einen Betrag kleiner 1 besitzen, d.h. für einen solchen Fixpunkt gilt $1 < \lambda < 3$. Wir sagen dann auch: x_f ist asymptotisch stabil bzw. ein Attraktor, da die Werte von x_n zu ihm hingezogen werden.

5. Instabilität

Nun stellt sich aber die Frage was passiert, wenn $|F'(x_f)| > 1$ bzw. wenn wir die logistische Gleichung jenseits des Kontrollparamters $\lambda = 3$ auswerten. Es ergibt sich:

$$|F(x) - x_f| > |x - x_f|$$

Der Graph von x entfernt sich vom Fixpunkt x_f . In einem solchen Fall nennen wir den Punkt instabil und den Paramterwert $\lambda = 3$ einen Bifurkationspunkt.
Im "normalen Fall"$1 < \lambda \leq 3$ (asymptotische Stabilität) gibt es nur einen Schnittpunkt des Graphen $F^2(x)$ mit der Funktion $F(x) = x$.
Im ïnstabilen Fall"$3 < \lambda < 4$ gibt es zwei Schnittpunkte p_1 und p_2 mit $F^2(p_1) = p_1$ und $F^2(p_2) = p_2$. Allgemeiner definieren wir: Ein Punkt x heißt periodischer Punkt der Abbildung $T : X \to X$ falls ein $k > 1$ existiert, sodass $T^k(x) = x$, aber $T^j(x) \neq x$ für $j = 1, ..., k - 1$.

6. chaotisches Verhalten

Hier wollen wir nun den interessanten Spezialfall $0 < \lambda \leq 4$ näher untersuchen: Bei den meisten Parametern zwischen 3 und 4 erhalten wir chaotisches Verhalten für fast alle Anfangswerte, d.h. die x-Werte springen hin und her ohne erkennbares Konvergenzverhalten. Für $\lambda = 3.55$ existiert ein Achterzyklus
Für $\lambda = 3.566$ haben wir einen Sechzehnerzyklus
Die sogenannten Feigenbaum-Diagramme, in denen x_f gegen den Parameter λ aufgetragen ist, zeigen sehr schön, wie sich die Anzahl der Attraktoren x_f mit steigendem λ sukzessive verdoppelt: $1, 2, 4, 8, ...2^n$ bis schließlich der Feigenbaum-Punkt $\lambda_f = 3.5699...$ erreicht ist, jenseits dessen das Verhalten chaotisch verläuft. Die fraktale Eigenschaft der Selbstähnlichkeit ist hier offensichtlich. Das Verhältnis der horizontalen Abstände zweier aufeinander folgender Bifurkationen konvergiert gegen die Feigenbaum-Zahl 4.69920 Das Verhältnis der vertikalen Abstände zweier aufeinander folgender Bifurkationspunkte konvergiert ebenf:

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = 2.50290...$$

Ökologische Modelle

Man findet in der Natur häufig eine der folgenden Situtation bei der Interaktion von Organismen:

1. Symbiose
2. Konkurrenz
3. Schmarotzertum

Ziel der mathematischen Durchleuchtung von solchen in der Natur empirisch nachweisbaren Korrelationen ist es nun ein möglichst allgemeingültiges Modell anhand der empirischen Daten zu entwerfen, welches vom Spezialfall abstrahiert aber zugleich wiederum die deduktive Anwendung auf andere Fälle (z.B. der Entwurf umfassender demografischer Modelle) gestattet.

1. Symbiose

Definition

Unter einer Symbiose versteht man das wechselseitiges förderliches Zusammenleben zweier Populationen X und Y. Es bezeichne x(t) und y(t) die jeweilige Populationsgröße in Abhängigkeit von der Zeit t. Dann gilt für einen gegenseitigen wachstumsfördernden Prozess:

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \alpha y(t)\Delta t$$
$$y(t+\Delta t) - y(t) = \beta x(t)\Delta t$$

Im Grenzübergang $\Delta t \to 0$ ergibt sich mit den Differentialquotienten bei hinreichend oft differenzierbaren Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ dann folgendes Modell für die Dynamik des symbiotischen Prozesses:

$$\dot{x} = \alpha y$$

$$\dot{y} = \beta x$$

mit $\alpha, \beta > 0$

Nach einer weiteren Differentiation ergibt sich mit $\ddot{x} = \alpha\dot{y}$ $\dot{y} = \alpha\beta x$, also die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{x} = \omega^2 x \quad \omega = \sqrt{\alpha\beta}$$

Diese Differentialgleichung unterscheidet sich vom harmonischen Oszillator nur durch das Vorzeichen: Wie man sich leicht überzeugt ist die Menge aller Lösungen gegeben durch:

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{\omega t} \quad \omega = \sqrt{\alpha\beta}$$

Die beiden Konstanten A und B werden durch zwei Anfangsbedingungen festgelegt: $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = v_0$

Fazit

Symbiose führt zu einem nur durch Ressourcen begrenzten exponentiellen Wachstum der Population, sodass die Populationsentwicklung in groben Zügen der einer einzelnen Spezies ähnelt und daher nicht näher betrachtet werden soll

2. Konkurrenz

Definition

Unter Konkurrenz versteht man die gegenseitige Schädigung von zwei unterschiedlichen Populationen der Größe x(t) und y(t) beim Ringen um ein öffentliches Gut, eine natürliche Ressource oder ähnliches (z.B. auch anwendbar auf kriegsführende Parteien).

In analoger Weise zur Symbiose erhalten wir für Prozesse wechselseitiger Zerstörung das System von Differentialgleichungen:

$$\dot{x} = -\alpha y$$

$$\dot{y} = -\beta x$$

mit $\alpha, \beta > 0$
Die Überlegungen, die wir bezüglich des symbiotischen Prozesses angestellt haben, gelten im wesentlichen unverändert auch für das mit den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $y(t_0) = y_0$ vorliegende Anfangswertproblem, nur ist α durch $-\alpha$ zu ersetzen.

Fazit

Wir haben hier nur das Grundmodell für die zerstörerische Koexistenz zweier Populationen P und Q aufgezeigt, wobei von exponentiellem Populationswachstum ausgegangen wird. Eine realistichere Verfeinerung liefert das auf Vito-Volterra zurückgehende Räuber-Beute Modell.

3. Lotka-Volterra-Gleichungen für Räuber-Beute Modelle

Wir wollen nun ein möglichst allgemeingültiges realitätsnahes Modell für die Wechselwirkung einer Räuber- und Beutepopulation aufstellen. Hierzu bezeichne $x(t)$ die Anzahl der Lebewesen einer Beutepopulation X und $y(t)$ die Stärke einer Räuberpopulation Y. Weiterhin seien $a, b, c, d > 0$ jeweils Parameter die die Interaktion von Räuber und Beutelebewesen wie folgt charakterisieren:

- a: Reproduktionsrate der Beutepopulation ohne Fressfeinde bei ausreichendem Nahrungsangebot
- b: Fressrate der Räuber pro Beutelebewesen, d.h. Sterberate der Beute pro Räuber
- c: Sterberate der Räuberpopulation ohne Beutelebewesen
- d: Reproduktionsrate der Räuber pro Beutelebewesen

Nach Übergang von mittleren Änderungsraten zu Differentialquotienten ergibt sich folgendes System von nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\dot{x} = x(a - by)$$

$$\dot{y} = -y(c - dx)$$

Unter Räubern und Beute sind dabei zwei Klassen von Lebewesen gemeint, wobei sich die eine von der anderen ernährt.

4. Diskussion der Lotka-Volterra Differentialgleichungen

Aufgrund der Nichtlinearität und Kopplung können wir zunächst keine analytische Lösung angeben. Daher zunächst einige elementare Dinge zu Differentialgleichungen:

Definition

Wir schreiben $\mathbf{x(t)} = \mathbf{f(t, x)}$ für das System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen:
$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ für $i = 1, ..., n$. Die Funktionen f_i seien hierbei auf offenen Teilmengen des R^{n+1} definiert und in allen Variablen stetig differenzierbar.
Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine Abbildung der Form $t \to \mathbf{x(t)} = (x_1(t), ..., x_n(t))$ von Intervallen $I \subset R$ nach R^n, sodass die Komponentenfunktionen $x_i(t)$ für alle $i = 1, ..., n$ und für alle $t \in I$ gilt:
$\dot{x}_i t) = f_i(t, x_1(t), ..., x_n(t))$.

Mit den Vorgaben $\mathbf{x(t_0)} = \mathbf{x_0} = (x_1(t_0), ..., x_n(t_0))$ liegt ein Anfangswertproblem vor.

Einige Bezeichnungen Lösungen des Differentialgleichungssystems:

- Falls $\mathbf{x(t)} = \mathbf{x}$ für alle $t \in R$, so ist $\mathbf{f(x)} = \mathbf{0}$ und wird stationärer Punkt genannt.
- Falls $\mathbf{x(t+T)} = \mathbf{x(t)}$ für ein $T > 0$ und $\mathbf{x(t)} \neq \mathbf{x}$ für alle $t \in (0, T)$, so wird $\mathbf{x}$ periodischer Punkt und T Periode genannt: Das dynamische System beschreibt eine oszillierende Bewegung.
- Falls die Abbildung $t \rightarrow \mathbf{x(t)}$ injektiv ist, so schneidet die Trajektorie doppelpunktfrei

Man kann ferner 3 spezielle Lösungen direkt angeben:

- $x(t) = y(t) = 0$
- $x(t) = 0;\ y(t) = y_0 e^{-ct}$ wobei $y_0 > 0$
- $y(t) = 0;\ x(t) = x_0 e^{at}$ wobei $x_0 > 0$

wobei man an den vorliegenden Lösungen sieht:

- triviale Lösung: Es gibt weder Räuber- noch Beutetiere
- Falls keine Beutetiere vorhanden sind, stirbt die Räuberpopulation aus
- Falls es keine Räuber gibt, vermehrt sich die Beutepopulation exponentiell

Phasenraumdiskussion

Die konstanten Lösungen bzw. Gleichgewichtspunkte erhält man, in dem man die rechten Seiten der Lotka-Volterra-Gleichungen null setzt: Der triviale Gleichgewichtspunkt $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ ist klar.

$$x(a - by) = 0$$
$$y(-c + dx) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \tilde{x} = \frac{c}{d} \quad \tilde{y} = \frac{a}{b}$$

da hier $x(t) > 0, y(t) > 0$ vorausgesetzt wird. Somit erhält man den zweiten inneren Gleichgewichtspunkt $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

Integrale der Bewegung

Wir multiplizieren die erste Gleichung nun mit $\frac{c-dx}{x}$ und die zweite Gleichung mit $\frac{a-by}{y}$ und addieren beide Gleichungen. Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{c}{x} - d)\dot{x} + (\frac{a}{y} - b)\dot{y} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{d}{dt}[c\ log(x) - dx + a\ log(y) - by] = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &V(x(t), y(t)) = 0
\end{aligned}
$$

V ist offenbar auf den Lösungen der Grundgleichungen konstant: Eine Lösung der Lotka-Volterra-Gleichung kann also die Niveaulinien von V nicht verlassen.

Lotka-Volterra-Gesetz

Wir werden im Nachfolgenden zwei wichtige Gesetze betrachten, die uns eine Diskussion der dynamischen Entwicklung von Räuber- und Beutepopulation erlauben, ohne die Lösungen der Differentialgleichungen explizit zu kennen.

1.Lotka-Volterra-Gesetz

Die Lösungen der Lotka-Volterra-Gleichungen sind periodisch mit Periode T. Die Populationen über die Zeit aufgetragen ergibt das Bild einer sinusartigen Schwingung mit einer Phasenverschiebung zwischen Räuber- und Beutepopulation

2.Lotka-Volterra-Gesetz

Die zeitlichen Mittelwerte über eine Periode T der Individuenzahlen von Räuber- und Beutepopulation sind unabhängig von deren Anfangsbedingungen gleich der Individuenzahl des entsprechenden Fixpunktes

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\; dt = \tilde{x} \qquad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\; dt = \tilde{y}$$

Stabilitätsuntersuchung autonomer Systeme

Definition

Die Gleichgewichtspunkte (singulären Punkte) des Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f(t,\ x)}$ sind alle Punkte für die $x_1(t) = \tilde{x_1}, x_2(t) = \tilde{x_2}$ eine Lösung des obigen Systems ist, also für die gilt: $f_1(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) = f_2(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) = 0$

Gleichgewichtspunkte entsprechen den konstanten Lösungen des Systems. Sie heißen daher auch Ruhelagen. Wird das System aus einer Ruhelage gestört, so kann es entweder in diese zurückkehren (stabile Ruhelage) oder es kann sich immer weiter davon entfernen (instabile Ruhelage).

Wir werden uns im Nachfolgenden auf ein lineares Differentialgleichungssystem 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten der folgenden Form fokussieren:

$$\dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Der Punkt $(0,0)$ ist offenbar ein Gleichgewichtspunkt. Für $\alpha = det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ ist $(0,0)$ offenbar der einzige Gleichgewichtspunkt. Im Falle $\alpha = 0$ sind alle Punkte der Geraden $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$ Gleichgewichtspunkte des obigen Differentialgleichungssystems. Wir interessieren uns im nachfolgenden nur für den regulären Fall mit $(0,0)$ als einzigen Gleichgewichtspunkt Wir setzten also voraus: $\alpha = det(A) \neq 0$.

Die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems ist gegeben durch die folgenden Funktionen:

- $e^{\lambda t}$ falls λ ein reeller Eigenwert von A ist
- $e^{at} cos(bt)$ und $e^{at} sin(bt)$, also der Real- und Imaginärteil für einen komplexen Eigenwert $\mu = a + ib$
- $t^j e^{\lambda t}$ mit $0 \leq j < m$ wobei m die Vielfachheit des Eigenwertes λ ist

In allen möglichen Fällen gilt jedoch: Das Verhalten des dynamischen Systems in linearer Näherung wird durch die Eigenwerte schon vollständig bestimmt. Es sei $\underline{\dot{\mathbf{x}}} = Ax$ wie gehabt das lineare Differentialgleichungssystem mit $det(A) \neq 0$. λ_1, λ_2 seien die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + det(A) = 0$$

Damit ist der Nullpunkt

- asymptotisch stabil, wenn $Re(\lambda_1) < 0$ und $Re(\lambda_2) < 0$
- stabil, aber nicht asymptotisch stabil, wenn $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$
- instabil, wenn wenigstens ein Realteil größer als 0 ist, d.h. wenn gilt $Re(\lambda_1) > 0$ oder $Re(\lambda_2) > 0$

Ist die Systemmatrix nicht singulär, so ist der Ursprung der einzige Gleichgewichtspunkt und wir haben insgesamt folgende Fälle :

- Sattel: instabil
- Knoten: asymptotisch stabil oder instabil
- Strudel: asymptotisch stabil oder instabil
- Wirbel: stabil

Für eine beliebige Lösung $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ von $\dot{x} = Ax$ kommt daher genau eine der möglichen Verhaltensweisen für Phasenkurven in Betracht:

1. $x(t) = const.$
2. $x(t) = x(t + T)$
3. $x(t)$ unbeschränkt für $t \to \infty$
4. $x(t) \to x_0$ wobei x_0 Gleichgewichtspunkt für $t \to \infty$ Damit ist also das Langzeitverhalten linearer Systeme vollständig geklärt.

Im Allgemeinen haben wir es jedoch mit nichtlinearen Systemen zu tun. Wir linearisieren um den Gleichgewichtspunkt $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Zur Bestimmung des Stabilitätstyps berechnen wir die Jacobimatrix des dynamischen Systems:

$$\begin{matrix} \frac{\partial f_1(\tilde{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\tilde{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\tilde{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\tilde{x})}{\partial x_2} \end{matrix}$$

indirekte Methode von Ljapunow

1. Der Gleichgewichtspunkt $(\tilde{x}, \tilde{y})$ des nichtlinearen Systems ist asymptotisch stabil oder instabil, wenn das gleiche für den Nullpunkt des linearisierten Systems zutrifft
2. Ist der Nullpunkt des linearisierten Systems ein Knoten oder Sattelpunkt, so ist der Gleichgewichtspunkt $(\tilde{x}, \tilde{y})$ des ursprünglichen nichtlinearen Systems ein singulärer Punkt vom selben Typ.

Wir müssen also die Eigenwerte der Jacobimatrix bestimmen. Aus ihrer Lage in der komplexen Ebene folgt nach vorhergehenden Überlegungen der Stabilitätstyp des Gleichgewichtspunktes. Falls z.B. der Realteil eines Eigenwertes null ist kann man mit diesem Verfahren keine Aussage treffen.

direkte Methode von Ljapunow

Zurück zum Räuber-Beute-Modell. Wir hatten eine Funktion $V(x, y)$ konstruiert auf deren Höhenschichtlinien die Lösungskurven verlaufen müssen.

Definition

Eine stetige Funktion $V : U \to R, U \subset D \subset R^n, \tilde{x} \in U$, die auf $U - \{\tilde{x}\}$ stetig differenzierbar ist und für die gilt: (a) $V(\tilde{x}) = 0$ und $V(x) > 0$ für $x \neq \tilde{x}$ und (b) $\dot{V}(x) \leq 0$ für $x \in U - \{\tilde{x}\}$ heißt Ljapunow-Funktion für $\tilde{x}$

direkte Methode von Ljapunow

Es bezeichne $\tilde{x}$ ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems.

1. Existiert eine Ljapunow Funktion V für $\tilde{x}$, dann ist $\tilde{x}$ stabil
2. Gilt für die Funktion $\dot{V}(x) < 0$ in $U - \{\tilde{x}\}$ so ist $\tilde{x}$ asymptotisch stabil

Fazit

Diese Methode liefert uns einen stabilen Fixpunkt $(\tilde{x}, \tilde{y})$ für die gewöhnlichen Lotka-Volterra-Gleichungen

Verfeinerung der Lotka-Volterra-Gleichungen

Im Allgemeinen ist es unrealistisch, dass die Beutepopulation in Abwesenheit von Räubern exponentiell wächst. Wir gehen nun von beutespezifischer Konkurrenz aus: $\dot{x} = x(a - bx)$. Ebenso gehen wir von einer räuberspezifischen Konkurrenz aus. Dies liefert uns das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x} = x(a - bx - cy)$$

$$\dot{y} = y(d - ex - fy)$$

Wir schauen uns die Isoklinenmenge an um einen Überblick über das Verhalten der Funktion zu bekommen. Wir betrachten also

$$x(a - bx - cy) = 0$$

$$y(d - ex - fy) = 0$$

Dies sind Geradengleichungen mit negativer Steigung. Außerdem überzeugt man sich leicht davon, dass xy^{-k} mit $k = \frac{a}{d}$ eine Konstante der Bewegung ist.

Zusammenfassung und Quellenangabe

Merke

Wir haben zwei Hauptmodelle beim Wachstum von Populationen berücksichtigt: exponentielles und logistisches Wachstum. Logistische Wachstumsmodelle lieferten uns eine nichtlineare Gleichung anhand derer man sich mittels eines Feigenbaumdiagramms die fraktale Eigenschaft der Selbstähnlichkeit veranschaulichen kann. Die Interaktion von Populationen lieferten uns das klassische Räuber-Beute-Modell: ein nichlineares System von Differentialgleichungen, wobei wir nur mit einer qualitativen Diskussion schon wesentliche Eigenschaften der Lösungsfunktionen angeben und eine Stabilitätsananalyse durchführen konnten.

Quellen:

1. Calculus of Selfishness: Dynamical Systems and Lotka-Volterra Equations
2. W.Metzler: Dynamische Systeme in der Ökologie
3. Wikipedia: Logistische Gleichung und Lotka-Volterra-Gleichung
4. Harro Heuser: Lehrbuch der Analysis 2

Wir wollen uns nun von der Richtigkeit der obigen Gesetze überzeugen.

- Nachweis des 1.LVG: Gesetz der periodischen Zykel
Definiert man sich die Hilfsfunktionen $H(x) = \tilde{x} log\ x - x$ und $G(y) = \tilde{y} log\ y - y$ so erhalten wir: $V(x, y) = dH(x) + bGy(y)$. Weiterhin gilt: $H(x)$ genügt $\frac{dH}{dx} = \frac{\tilde{x}}{x} - 1$ und $\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{-\tilde{x}}{x^2} < 0$. Daher nimmt H(x) sein Maximum bei $x = \tilde{x}$ und genauso sieht man: $G(y)$ hat sein Maximum bei $y = \tilde{y}$. Insgesamt haben wir ein isoliertes Maximum bei $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Die Isoklinenmenge $\{(x, y) \in R^2 : V(x, y) = const.\}$ bildet offensichtlich geschlossene Kurven um den inneren Fixpunkt $p = (\tilde{x}, \tilde{y})$, welcher den isolierten Gipfel im "Potentialfeld" $V(x, y)$ bildet. An der Struktur des Phasenraumdiagrammes sieht man dann, dass die Lösungen auf den Isoklinen zu ihrem Startpunkt zurückkehren müssen, also periodisch sind.Daher können wir ohne die explizite Lösung zu kennen, sagen, dass die Räuber und Beutepopulation periodisch schwanken wird, wobei Frequenz und Amplitude der Oszillation von den Anfangsbedingungen abhängt.

- Nachweis des 2.LVG: Gesetz von der Erhaltung der Mittelwerte
  Sei T die Periode der Lösungskurven. Dann gilt $\frac{d}{dt}(\log x) = \frac{\dot{x}}{x} = a - by$.
  Nach Integration ergibt sich: $\int_0^T \frac{d}{dt} log\ x(t)dt = \int_0^T (a - by(t))dt$ und
  damit: $log\ x(T) - log\ x(0) = aT - b\int_0^T y(t)dt$. Da $x(T) = x(0)$ folgt:
  $\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\ dt = \tilde{x} \qquad \frac{1}{T}\int\limits_0^T y(t)\ dt = \tilde{y}$

- Im einfachsten Fall hat die Matrix A schon Diagonalgestalt. Das System ist entkoppelt und jedes Paar $(x_1(0)e_1^a 1t, x_2(0)e_2^a 2t)$ ist eine Lösung des Systems.
- diagonalisierbare Matrizen: Wir können das Problem auf eines mit Diagonalmatrix zurückführen indem wir eine Koordinatentransformation in eine Basis aus Eigenvektoren durchführen: $\exists S \in Gl(2, C)$ mit $SAS^{-1} = D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$. Wir erhalten also:

$$\dot{x} = SDS^{-1}x$$

$$S^{-1}\dot{x} = DS^{-1}x$$

  ersetzen wir nun $z = S^{-1}x$, so erhalten wir die Gleichung: $\dot{z} = Dz$ mit der Diagonalmatrix D für die die Lösungen bereits bekannt sind
- nicht diagonalierbare Matrizen (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper): Wir können die Matrix A auf Jordan-Normalform bringen $\exists S \in Gl(2, C)$ mit $SAS^{-1} = J$. Wobei die Matrix J Blockdiagonalgestalt hat:

Besitzt die Systemmatrix A zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so gilt für jede Lösung $(x_1(t), x_2(t))$ des Systems:

$$x_1(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$x_2(t) = Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t}$$

mit geeigneten Koeffizienten $A, ..., D$. Gilt dagegen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, so treten $e^{\lambda t}$ und $te^{\lambda t}$ an die Stelle von $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$

Wir formulieren nun Stabilitätsbedingungen für die Ruhelage $x(t) = 0$

Definition

$\tilde{x} = (0, 0)$ sei ein isolierter Gleichgewichtspunkt, d.h. es gibt eine Umgebung $U_\rho = \{x \in R^2 \mid \| x - \tilde{x} \| < \rho\}$. Dann heißt $\tilde{x}$

- stabil, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jede Lösung $x(t)$ mit $\| x(t_0) \| < \delta$ für ein $t_0 \in R$ gilt: $x(t)$ existiert für alle $t \geq t_0$ und es ist $\| x(t) \| \leq \epsilon$ für $t_0 \leq t < infty$
- asymptotisch stabil, wenn er stabil ist und wenn (zusätzlich) ein $\eta > 0$ existiert mit der Eigenschaft: Jede Lösung $x(t)$ mit $\| x(t_0) \| < \eta$ für ein $t_0 \in R$ existiert für alle $t \geq t_0$ und es gilt $\lim_{t \to infty} x(t) = 0$.
- instabil, wenn er weder stabil, noch asymptotisch stabil ist.

Hiervon kann man sich folgendermaßen überzeugen: Für jede komplexe Zahl $\lambda = a + ib$ gilt: $e^{\lambda t} = e^{at} e^{ibt}$ mit $\mid e^{ibt} \mid = \mid cos(bt) + isin(bt) \mid = 1$. Wir erhalten mit der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ mit der Lage der Eigenwerte:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(-p + -\sqrt{p^2 - 4q})$$

Nun gilt: Wegen $det(A) \neq 0$ kann $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A sein. Außerdem sind entweder beide Eigenwerte λ_1, λ_2 reell mit $p^2 > 4q$ oder sie sind komplex-konjugiert. Fallunterscheidung:

- $q < 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ beide reell mit unterschiedlichem Vorzeichen für $t \rightarrow infty : \tilde{x_1} \rightarrow infty$, $\tilde{x_2} rightarrow 0$
  für $t \rightarrow infty : \tilde{x_1} \rightarrow 0$, $\tilde{x_2} rightarrowinfty$. Man nennt einen solchen Gleichgewichtspunkt Sattelpunkt: er ist instabil.
- Für $q > 0$, $p^2 > 4q$, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ gilt: $e^{\lambda} t \rightarrow 0$ und somit $e^{at} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Darüberhinaus gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x_2}(t)}{\tilde{x_1}(t)} = \frac{\tilde{x_2}(0)}{\tilde{x_1}(0)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = \infty$, d.h. im Ursprung bildet die x_2-Achse eine Tangente für die Lösungskurven. Man nennt einen solchen Gleichgewichtspunkt einen Knoten.
- Für $q > 0$, $p^2 > 4q$, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ gilt: Der Ursprung $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) = (0, 0)$ ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt.
- Für $q > 0$, $p^2 < 4q$, λ_1, λ_2 und $p \neq 0$ gilt

Die Stabilität des Systems ist schon vollständig durch die Lage der Eigenwerte der Systemmatrix festgelegt: Der Nullpunkt (regulärer Fall) ist

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

oder wobei frac für Brüche genutzt werden kannFür einfache Formeln $a = b$ mitten im Text. Oder unten zentriert für große Formeln