Evolutionär stabile Strategien

Thomas Luxenburger

06.12.2011

LITERATUR: Josef Hofbauer, Karl Sigmund:
Evolutionary Games and Population Dynamics,
Kapitel 6: Evolutionary stable strategies

Falke-Taube-Spiel

zwei Spielertypen:

- **Falken**: aggressives Verhalten, Kampf bis zum Sieg/Niederlage
- **Tauben**: friedliches Verhalten, Rückzug vor Eskalation

Gewinnparameter:

- G: Fitness, die bei Sieg gewonnen wird
- $-C$: Schaden durch zugefügte Verletzungen , $C > G$

Auszahlungstabelle:

	Konflikt mit Falke	Konflikt mit Taube
Falke erhält	$\frac{G-C}{2}$	G
Taube erhält	0	$\frac{G}{2}$

Zusammensetzung:

- x : Anteil der Falken,
- $1 - x$: Anteil der Tauben.

durchschnittlicher Fitnesszuwachs:

- für Falken: $F_F = x \cdot \frac{G-C}{2} + (1-x) \cdot G$,
- für Tauben: $F_T = x \cdot 0 + (1-x) \cdot \frac{G}{2}$.

stabiler Punkt: $F_F = F_T \Leftrightarrow x = \frac{G}{C}$:

- für $x < \frac{G}{C}$: $F_F > F_T$,
- für $x > \frac{G}{C}$: $F_F < F_T$.

Definition

Unter evolutionär stabilem Verhalten versteht man ein Verhalten, das von allen Mitgliedern einer Population angenommen wird und das durch kein anderes Verhalten unterwandert werden kann.

Wird in eine Population mit Spielern evolutiuonär stabilen Verhaltens eine kleine Anzahl von Spielern mit abweichendem Verhalten eingeführt, so können diese Spieler nicht in die Population einfallen.

- $W(I, Q)$: Fitness des Individuums vom Typ I in Population der Zusammensetzung Q,
- Annahme einer gemischten Population $xJ + (1 - x)I$.

Definition

Eine aus I Typen bestehende Population ist evolutionär stabil, wenn für alle $J \neq I$

$$W(J, \varepsilon J + (1 - \varepsilon)I) < W(I, \varepsilon J + (1 - \varepsilon)I)$$

für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ gilt.

Evolutionäre Stabilität im Falke-Taube-Spiel

- Beide Verhaltensweisen (Falke, Taube) können von der anderen unterwandert werden.
  $\rightarrow$ Keine der beiden Verhaltensweisen ist evolutionär stabil.

- Verhaltensweise, mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{G}{C}$ zu eskalieren, ist evolutionär stabil.

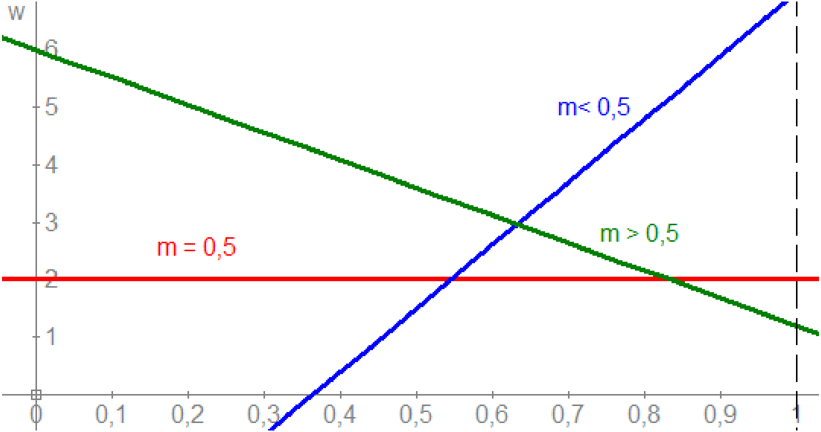
- m : durchschnittliche Anteil männlicher Nachkommen bei Geburt in einer Population (Geburtenverhältnis),
- N_1 : Größe der Population in der Tochtergeneration F_1 (davon mN_1 männlich, $(1-m)N_1$ weiblich),
- N_2 : Größe der Population in der Folgegeneration F_2,
- für Mitglied aus F_2 : Wahrscheinlichkeit, dass gegebenes Männchen aus F_1 Vater ist: $\frac{1}{mN_1}$

  $\rightarrow$ Anzahl der Kinder von Männchen aus F_1 : $\frac{N_2}{mN_1}$

  $\rightarrow$ Anzahl der Kinder von Weibchen aus F_1 : $\frac{N_2}{(1-m)N_1}$
- Anzahl der Enkel eines Individuums mit Geburtenverhältnis $p \sim p\frac{N_2}{mN_1} + (1-p)\frac{N_2}{(1-m)N_1}$

  $\rightarrow$ Fitness $\sim w(p,m) = \frac{p}{m} + \frac{1-p}{1-m}$, $m \neq 1, 0$.

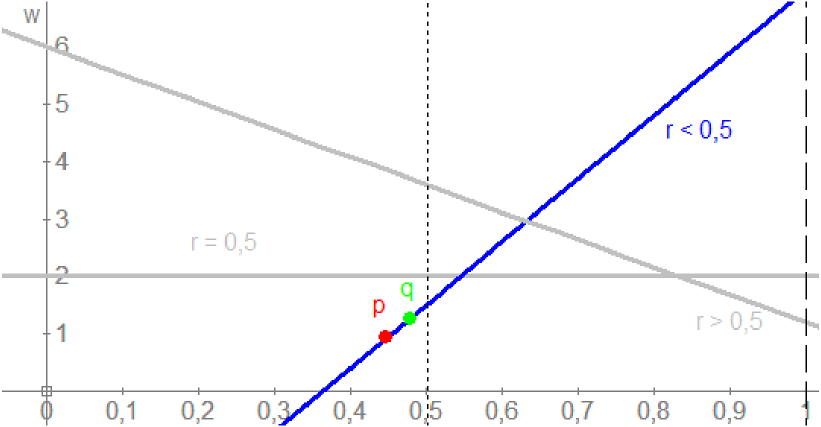
$$w(p) = \frac{p}{m} + \frac{1-p}{1-m}$$



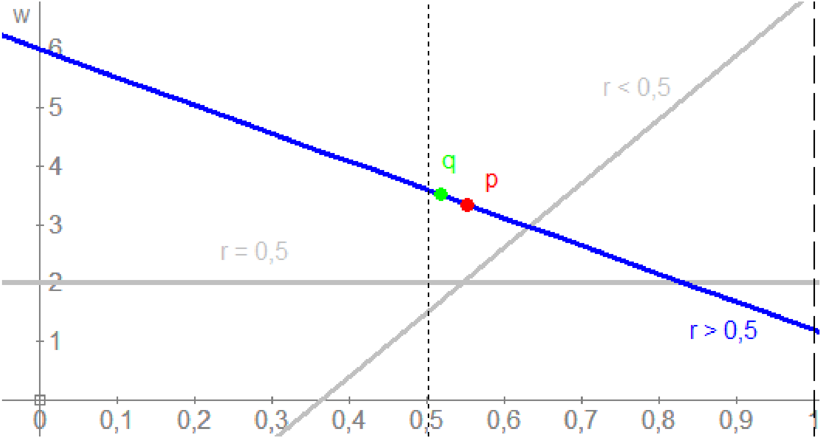
Wann ist ein Geburtenverhältnis p evolutionär stabil?

- Betrachte die Funktion
$$p \to w(p, m) = \frac{p}{m} + \frac{1-p}{1-m}.$$
- Sei
$$r = \varepsilon q + (1 - \varepsilon)p$$
das durchschnittliche Geburtenverhältnis in der Population.
- p ist evolutionär stabil, wenn
$$w(q, r) < w(p, r)$$
für alle $q \neq p$.

$p < 0{,}5 \Rightarrow p$ nicht evolutionär stabil



$p > 0{,}5 \Rightarrow p$ nicht evolutionär stabil



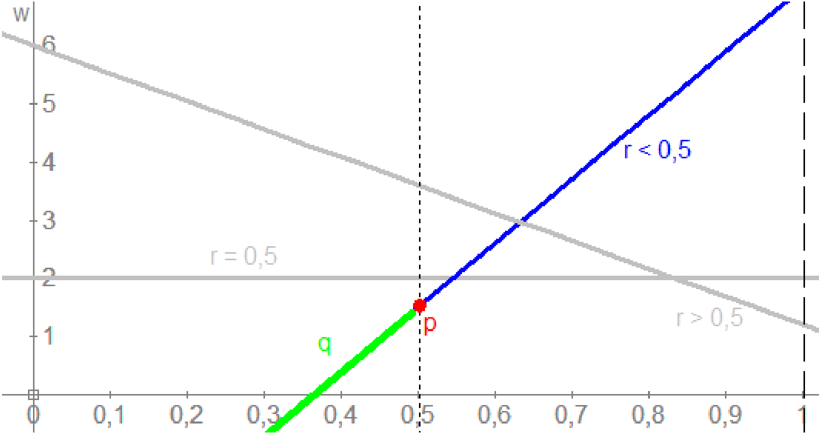
Geburtenverhältnis $p \neq 0{,}5$ nicht evolutionär stabil.

Was passiert im Fall $p = 0{,}5$?

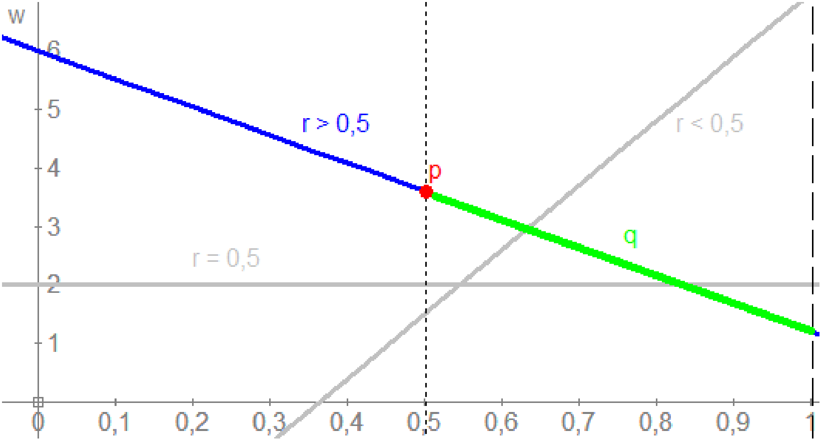
- durchschnittliches Geburtenverhältnis in der Population:

  $r = \varepsilon q + (1 - \varepsilon)p \Leftrightarrow r = \varepsilon(q - p) + p$
- im Fall $p = 0{,}5$: $r = \varepsilon(q - 0{,}5) + 0{,}5$
  - $q < 0{,}5 \Leftrightarrow r < 0{,}5$
  - $q > 0{,}5 \Leftrightarrow r > 0{,}5$

$p = 0{,}5$ und $q < 0{,}5 \Rightarrow w(q,r) < w(p,r)$



$p = 0{,}5$ und $q > 0{,}5 \Rightarrow w(q, r) < w(p, r)$



$\Rightarrow p = 0{,}5$ einziges evolutionär stabiles Geburtenverhältnis

Merkmale:

- Teilnehmer benutzen keine reinen Strategien mehr, sondern Verhalten setzt sich aus endlich vielen reinen Strategien $R_1, ..., R_N$ mit zugeteilten Wahrscheinlichkeiten $p_1, ..., p_N$ zusammen.
- Strategie eines Spielers entspricht Vektor **p** in

  $$S_N = \{\mathbf{p} = (p_1, ..., p_N) \in \mathbb{R}^N : p_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^N p_i = 1\}.$$

- Im Folgenden werden Normalformspiele mit **zwei Spielern** betrachtet.

- u_{ij} : Gewinn von Spieler mit reiner Strategie R_i gegen Spieler mit reiner Strategie R_j,
  $U = (u_{ij})$ ist die Gewinnmatrix $\rightarrow$ R_i-Stratege erhält Gewinn
  $$(U\mathbf{q})_i = \sum u_{ij} q_j$$
  gegen **q**-Stratege.
- Gewinn **p**-Stratege gegen **q**-Stratege:
  $$\mathbf{p} \cdot U\mathbf{q} = \sum_{ij} u_{ij} p_i q_i$$

Welche sind die besten Antworten auf die Strategie **q**?
$\rightarrow$ Strategie **p** , für die $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \cdot U\mathbf{q}$ ihren maximalen Wert erreicht.

- NASH-GLEICHGEWICHT:
  Strategie $\mathbf{q}$, die beste Antwort auf sich selbst ist:

  $$\mathbf{p} \cdot U\mathbf{q} \leq \mathbf{q} \cdot U\mathbf{q}$$

  für alle Strategien $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$.

- STRIKTES NASH-GLEICHGEWICHT:
  Strategie $\mathbf{q}$, die **einzige** beste Antwort auf sich selbst ist:

  $$\mathbf{p} \cdot U\mathbf{q} < \mathbf{q} \cdot U\mathbf{q}$$

  für alle Strategien $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$.

Definition

Eine Strategie $\hat{\mathbf{p}} \in S_N$ heißt evolutionär stabil, wenn für alle $\mathbf{p} \in S_N$ mit $\mathbf{p} \neq \hat{\mathbf{p}}$ gilt

$$\mathbf{p} \cdot U(\varepsilon \mathbf{p} + (1 - \varepsilon)\hat{\mathbf{p}}) < \hat{\mathbf{p}} \cdot U(\varepsilon \mathbf{p} + (1 - \varepsilon)\hat{\mathbf{p}})$$

für alle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.

Evolutionär stabile Strategie und Nash-Gleichgewicht

$$\mathbf{p} \cdot U(\varepsilon\mathbf{p} + (1-\varepsilon)\hat{\mathbf{p}}) < \hat{\mathbf{p}} \cdot U(\varepsilon\mathbf{p} + (1-\varepsilon)\hat{\mathbf{p}})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(1-\varepsilon)(\hat{\mathbf{p}} \cdot U\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p} \cdot U\hat{\mathbf{p}}) + \varepsilon(\hat{\mathbf{p}} \cdot U\mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot U\mathbf{p}) > 0$$

$\hat{\mathbf{p}}$ ist also genau dann eine ESS, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. GLEICHGEWICHTSBEDINGUNG: $\mathbf{p} \cdot U\hat{\mathbf{p}} \leq \hat{\mathbf{p}} \cdot U\hat{\mathbf{p}}$ für alle $\mathbf{p} \in S_N$,
2. STABILITÄTSBEDINGUNG:
   falls $\mathbf{p} \neq \hat{\mathbf{p}}$ und $\mathbf{p} \cdot U\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} \cdot U\hat{\mathbf{p}}$, dann $\mathbf{p} \cdot U\mathbf{p} < \hat{\mathbf{p}} \cdot U\mathbf{p}$.

Evolutionär stabile Strategie und Nash-Gleichgewicht

1. GLEICHGEWICHTSBEDINGUNG:
   $\mathbf{p} \cdot U\hat{\mathbf{p}} \leq \hat{\mathbf{p}} \cdot U\hat{\mathbf{p}}$ für alle $\mathbf{p} \in S_N$,
2. STABILITÄTSBEDINGUNG:
   falls $\mathbf{p} \neq \hat{\mathbf{p}}$ und $\mathbf{p} \cdot U\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} \cdot U\hat{\mathbf{p}}$, dann $\mathbf{p} \cdot U\mathbf{p} < \hat{\mathbf{p}} \cdot U\mathbf{p}$.

Interpretation:

1. GLEICHGEWICHTSBEDINGUNG $\widehat{=}$ Definition eines Nash-Gleichgewichtes ($\hat{\mathbf{p}}$ ist beste Antwort auf sich selbst)
2. STABILITÄTSBEDINGUNG: Falls es eine weitere beste Antwort auf $\hat{\mathbf{p}}$ gibt, so schneidet $\hat{\mathbf{p}}$ besser gegen $\mathbf{p}$ ab, als $\mathbf{p}$ gegen sich selbst.

- Eine **evolutionär stabile Strategie** schützt eine Population vor Invasion. Kein Eindringling kann mit einer fremden Strategie in die Population eindringen.

- Eine evolutionär stabile Strategie ist ein **Nash-Gleichgewicht**. Ist eine Strategie ein striktes Nash-Gleichgewicht, so ist sie evolutionär stabil.