# Spieldynamik

Josef Hofbauer and Karl Sigmund: *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge, Kap. 8

Simon Maurer

Saarbrücken, den 13.12.2011

# Ablauf

# Imitationsdynamik

**Voraussetzungen:**

- Symmetrische Spiele mit ($n$ x $n$) - Auszahlungsmatrix
- eine (große) Population von Spielern
- reine Strategien $R_1$ bis $R_n$ werden mit einer Wiederholungsrate $x_i(t)$ gewählt

**Voraussetzungen:**

- Symmetrische Spiele mit ($n$ x $n$) - Auszahlungsmatrix
- eine (große) Population von Spielern
- reine Strategien $R_1$ bis $R_n$ werden mit einer Wiederholungsrate $x_i(t)$ gewählt

$\Rightarrow$ Zustand ist zu jedem Zeitpunkt durch einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{S}_n$ gegeben

# Imitationsdynamik

**Voraussetzungen:**

- Symmetrische Spiele mit ($n$ x $n$) - Auszahlungsmatrix
- eine (große) Population von Spielern
- reine Strategien $R_1$ bis $R_n$ werden mit einer Wiederholungsrate $x_i(t)$ gewählt

$\Rightarrow$ Zustand ist zu jedem Zeitpunkt durch einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{S}_n$ gegeben

**Auszahlung:**

- Strategie $R_i$ erhält dann $(A\mathbf{x})_i = \sum a_{ij} x_j$ pro Spiel
- die durchschnittliche Auszahlung der Population ist $\mathbf{x} A\mathbf{x}$

# Imitationsdynamik

- Gelegentliche Auswahl eines Spielers der Population,
- Möglichkeit, die Strategie zu wechseln,
- Wahlprozess zufällig,
- übernimmt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit dessen Strategie.

# Imitationsdynamik

- Gelegentliche Auswahl eines Spielers der Population,
- Möglichkeit, die Strategie zu wechseln,
- Wahlprozess zufällig,
- übernimmt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit dessen Strategie.

Ein genereller Ansatz wird durch das *Input-Output-Modell* repräsentiert:

**Input-Output-Modell**

$$\dot{x}_i = x_i \sum_j \Big( f_{ij}(\mathbf{x}) - f_{ji}(\mathbf{x}) \Big) x_j.$$

# Imitationsdynamik

- Gelegentliche Auswahl eines Spielers der Population,
- Möglichkeit, die Strategie zu wechseln,
- Wahlprozess zufällig,
- übernimmt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit dessen Strategie.

Ein genereller Ansatz wird durch das *Input-Output-Modell* repräsentiert:

**Input-Output-Modell**

$$\dot{x}_i = x_i \sum_j \big(f_{ij}(\mathbf{x}) - f_{ji}(\mathbf{x})\big) x_j.$$

Klar: Ist $\sum \dot{x}_i = 0$, so ist $\mathbf{S}_n$ invariant unter obiger Formel.

# Imitationsdynamik

Die Änderungsrate von $R_j$ zu $R_i$ ist gegeben durch

$$x_i \, x_j \, f_{ij} \, \triangle t$$

mit
$x_i x_j$ = Wahrscheinlichkeit für das Auswählen eines Spielers mit Strategie $R_j$ bzw. $R_i$,
$f_{ij}$ = Rate mit der ein $R_j$-Spieler zu $R_i$ umschwenkt

# Imitationsdynamik

Die Änderungsrate von $R_j$ zu $R_i$ ist gegeben durch

$$x_i \, x_j \, f_{ij} \, \triangle t$$

mit $x_i x_j$ = Wahrscheinlichkeit für das Auswählen eines Spielers mit Strategie $R_j$ bzw. $R_i$,
$f_{ij}$ = Rate mit der ein $R_j$-Spieler zu $R_i$ umschwenkt

Diese Rate hängt natürlich von der momentanen Auszahlung $(A\mathbf{x})_i$ und $(A\mathbf{x})_j$ ab.

$$f_{ij}(\mathbf{x}) = f\big((A\mathbf{x})_i, A\mathbf{x})_j\big)$$

mit $f = f(u, v)$ Funktion, welche die *Imitationsvorschrift* angibt.

***Imitiere den Besseren***

Erste Idee:

$$f(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } u < v \\ 1, & \text{wenn } u > v \end{cases}$$

# Imitationsdynamik

***Imitiere den Besseren***

Erste Idee:

$$f(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } u < v \\ 1, & \text{wenn } u > v \end{cases}$$

**Problem:** Diese Funktion ist unstetig.

# Imitationsdynamik

***Imitiere den Besseren***

Erste Idee:

$$f(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } u < v \\ 1, & \text{wenn } u > v \end{cases}$$

**Problem:** Diese Funktion ist unstetig.

**Ausweg:** Man definiert sich eine Funktion, die von der Auszahlungsdifferenz abhängig ist.

# Imitationsdynamik

Definiere z.B. $f(u, v)$ als

$$f(u, v) = \phi(u - v)$$

mit $\phi$ monoton wachsend.

# Imitationsdynamik

Definiere z.B. $f(u, v)$ als

$$f(u, v) = \phi(u - v)$$

mit $\phi$ monoton wachsend.

Das Input-Output-Modell kann dann mit $\psi(u) = \phi(u) - \phi(-u)$ (ungerade, monoton wachsend) geschrieben werden als:

$$\dot{x}_i = x_i \sum_j x_j \psi\Big((A\mathbf{x})_i - A\mathbf{x})_j\Big)$$

# Imitationsdynamik

## Beispiel

Setze $\phi(u) := u_+^\alpha$, $\alpha \geq 0$ und $\psi(u) := |u|_+^\alpha sgn(u)$.

Für $\alpha = 1$ ergibt sich $\psi(u) = u$. Diese Imitationsvorschrift ist proportional und bedeutet im Endeffekt *imitiere Verhalten mit höherem Profit, gewichtet mit einer Wahrscheinlichkeit, die proportional zum erwarteten Gewinn ist*. Das Input-Output-Modell reduziert sich dann zur gewohnten *Replikatordynamik*:

$$\dot{x}_i = x_i \big( (A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}\, A\mathbf{x} \big).$$

Im Grenzfall $\alpha \to 0$ entsteht nun aus dem Input-Output-Modell die zuvor angesprochene *Imitiere den Besseren*-Strategie.

# Imitationsdynamik

Das Input-Output-Modell lässt sich auch wie folgt darstellen:

$$\dot{x}_i = x_i\left(f\Big((A\mathbf{x})_i\Big) - \bar{f}\right) \quad mit \quad \bar{f} = \sum x_i\, f\Big((A\mathbf{x})_i\Big)$$

Dieser Fall tritt dann auf,

- wenn ein Spieler zu einer besseren Strategie wechselt, die proportional zur Differenz $[f((A\mathbf{x})_i) - f((A\mathbf{x})_j)]_+$ ist,
- wenn $f_{ij} = f((A\mathbf{x})_i)$ , d.h. der Wechsel ist nur vom imitierten Spieler abhängig,
- wenn $f_{ij} = -f((A\mathbf{x})_j)$ , d.h. der Wechsel ist nur von der Auszahlung an der imitierenden Spieler abhängig (*Imitation aufgrund Unzufriedenheit* , mit der Annahme, dass unerfolgreiche Spieler öfters und blind imitieren).

# Monotone Auszahlung

Nun interessieren uns Spieldynamiken der Form

$$\dot{x}_i = x_i \, g_i(\mathbf{x})$$

mit $g_i \in C^1$ und $\sum x_i \, g_i(\mathbf{x}) = 0 \; \forall \; \mathbf{x} \in \mathbf{S}_n$.

# Monotone Auszahlung

Nun interessieren uns Spieldynamiken der Form

$$\dot{x}_i = x_i \, g_i(\mathbf{x})$$

mit $g_i \in C^1$ und $\sum x_i \, g_i(\mathbf{x}) = 0 \; \forall \; \mathbf{x} \in \mathbf{S}_n$.

**Definition:** ***Auszahlungsmonoton***

Eine Spieldynamik wird als *auszahlungsmonoton* bezeichent, falls sich die Wachstumsrate der verschiedenen Strategien direkt proportional zur erwarteten Auszahlung verhält:

$$g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}) \iff (A\mathbf{x})_i > (A\mathbf{x})_j$$

# Monotone Auszahlung

Informationen zur monotonen Auszahlung:

- Die Replikatordynamik ist auszahlungsmonoton.
- Auszahlungsmonotone Spiele haben die gleichen stationären Punkte, wie die Replikatordynamik.
- Für auszahlungsmonotone Spiele sind die Lyapunov-stabilen Gleichgewichte Nash-Gleichgewichte.
- Die strikten Nash-Gleichgewichte sind asymptotisch stabil.

# Monotone Auszahlung

**Schwach auszahlungspositiv:**

- Reine Strategie mit einer höheren Auszahlung als der Durchschnitt der Population.
- Die Strategie hat eine streng monoton wachsende Wachstumsrate.

$$B(\mathbf{x}) \coloneqq \left(i : (A\mathbf{x})_i > \mathbf{x}\, A\mathbf{x}\right) \neq \emptyset \Rightarrow \; g_i(\mathbf{x}) > 0$$

# Entscheidung gegen iterativ dominierte Strategien

**Definition:** *strikt dominiert*

Die reine Strategie $R_i$ wird als *strikt dominiert* bezeichnet, wenn es eine Strategie $\mathbf{y} \in \mathbf{S}_n$ gibt, sodass $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{S}_n$ gilt:

$$(A\mathbf{x})_i < \mathbf{y}\, A\mathbf{x}.$$

# Entscheidung gegen iterativ dominierte Strategien

- Spiel wird von rational denkenden Menschen gespielt,
- die Strategie $R_i$ wird nicht benutzt,
- alle strikt dominierten Strategien verschwinden aus dem Spiel,
- es bleiben reine Strategien übrig, die im nächsten Spiel strikt dominiert werden.

# Entscheidung gegen iterativ dominierte Strategien

## Beispiel

Es sei die Auszahlungsmatrix $A$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

- $R_2$ ist strikt dominiert,
- im nächsten Spiel ist $R_3$ strikt dominiert,
- man erhält also eine nichtleere Menge von reinen Strategien,
- diese Menge hängt nicht vom Eliminationsprozess selbst ab.

# Entscheidung gegen iterativ dominierte Strategien

## Definition: *konvex monoton*

Eine auszahlungsmonotone Spieldynamik wird als *konvex monoton* bezeichnet, falls $\forall i$ und $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbf{S}_n$ gilt:

$$\mathbf{y}\, A\mathbf{x} > (A\mathbf{x})_i \Rightarrow \sum y_i\, g_j(\mathbf{x}) > g_i(\mathbf{x})$$

# Entscheidung gegen iterativ dominierte Strategien

### Definition: *konvex monoton*

Eine auszahlungsmonotone Spieldynamik wird als *konvex monoton* bezeichnet, falls $\forall i$ und $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbf{S}_n$ gilt:

$$\mathbf{y}\, A\mathbf{x} > (A\mathbf{x})_i \Rightarrow \sum y_i\, g_j(\mathbf{x}) > g_i(\mathbf{x})$$

### Satz 1

Ist eine monotone Spieldynamik konvex monoton und ist die reine Strategie $R_i$ iterativ strikt dominiert, so konvergiert die Frequenz $x_i(t)$ gegen 0.

(Beweis siehe Anhang.)

# Entscheidung gegen iterativ dominierte Strategien

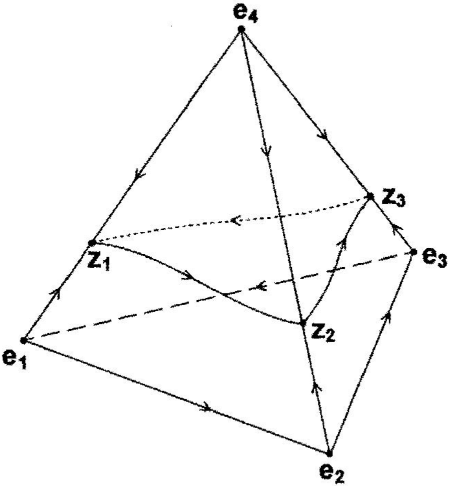
## Beispiel

Folgende Auszahlungsmatrix soll betrachtet werden:

$$A = \begin{pmatrix} a & c & b & \gamma \\ b & a & c & \gamma \\ c & b & a & \gamma \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta & \alpha+\beta & 0 \end{pmatrix}$$

mit $c < a < b$, $0 < \beta < b - a$ und $\gamma > 0$.

# Entscheidung gegen iterativ dominierte Strategien




J. Hofbauer, K. Sigmund: *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge, Seite 90

# Beste-Antwort-Dynamik

- Diskrete Generationen von Spielern,
- in jeder Runde soll ein Spieler zur Generation hinzustoßen,
- dieser Spieler nimmt eine Strategie der besten Antwort auf den bestehenden Strategien-Mix ein,
- dieser Spieler muss seine Strategie für das gesamte Spiel beibehalten,

d.h.

- in der Generation $k + 1$ nimmt dieser Spieler eine Strategie $\mathbf{r}_{k+1} \in \{\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n\}$ ein
- $\mathbf{r}_{k+1}$ maximiert die erwartete Auszahlung gegenüber $\mathbf{s}_k = \frac{1}{k} \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbf{r}_k$

# Beste-Antwort-Dynamik

Die Änderung in der „Durchschnittsstrategie“ kann mit Hilfe der Differenzengleichung

$$\mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{s}_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{s}_k}{k+1}$$

berechnet werden. Dabei ist $\mathbf{r}_{k+1} \in \beta(\mathbf{s}_k)$, wobei $\beta(\mathbf{s}_k)$ die Menge der besten Antworten auf $\mathbf{x} \in \mathbf{S}_n$ repräsentiert.

Übergang zu einer kontinuierlichen Betrachtungsweise:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \tfrac{1}{t}\Big(\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)\Big) \qquad \text{mit } \mathbf{r}(t) \in \beta(\mathbf{s}(t))$$

bzw. in integraler Form:

$$\mathbf{s}(t) = t^{-1} \int_0^t \mathbf{r}(\tau)\, d\tau.$$

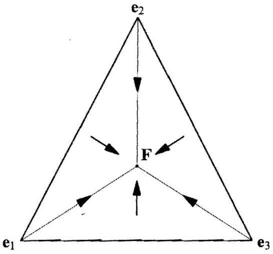
Die Betrachtung von stückweise linearen Lösungen führt zur *Beste-Antwort-Dynamik*:

$$\dot{\mathbf{x}} = \beta(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$$

## Beispiel

Folgende Auszahlungsmatrix soll betrachtet werden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$




J. Hofbauer, K. Sigmund: *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge, Seite 92

# Beste-Antwort-Dynamik

## Allgemeine Konstruktion der stückweise linearen Lösungen der Beste-Antwort-Dynamik

- Anfangspunkt $\mathbf{x}$,
- die Strategie $\mathbf{b} \in \beta((1-\epsilon)\mathbf{x} - \epsilon\mathbf{b})$ fungiert als beste Antwort ($\epsilon \geq 0$),
- Iteration führt auf eine stückweise lineare Lösung für alle Zeiten $t > 0$.

- Anfangspunkt $\mathbf{x}$,
- die Strategie $\mathbf{b} \in \beta((1-\epsilon)\mathbf{x} - \epsilon\mathbf{b})$ fungiert als beste Antwort ($\epsilon \geq 0$),
- Iteration führt auf eine stückweise lineare Lösung für alle Zeiten $t > 0$.

### Satz 2

Sei $\mathbf{p}$ eine innere ESS für ein Spiel mit Auszahlungsmatrix A.
Dann ist $\mathbf{p}$ für die *Beste-Antwort-Dynamik* global asymptotisch stabil. Alle stückweise linearen Pfade erreichen $\mathbf{p}$ in einer endlichen Zeit.

(Beweis siehe Anhang.)

# Fazit

Wir haben:

# Fazit

Wir haben:

- gelernt den Imitationsprozess mathematisch zu modellieren,

# Fazit

Wir haben:

- gelernt den Imitationsprozess mathematisch zu modellieren,
- die Auswirkungen der Dominanz auf statische Spiele untersucht,

# Fazit

Wir haben:

- gelernt den Imitationsprozess mathematisch zu modellieren,
- die Auswirkungen der Dominanz auf statische Spiele untersucht,
- die Möglichkeit einer *besten Antwort* auf bestehende Strategien besprochen.

## Beweis zu Satz 1

Sei $R_i$ strikt dominiert von einem $\mathbf{y} \in \mathbf{S}_n$. Aufgrund der Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$, sodass $g_i(\mathbf{x}) - \sum y_i\, g_j(\mathbf{x}) < -\delta \;\; \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{S}_n$.
Mit $P(\mathbf{x}) := x_i \prod_j x_j^{-y_j}$ erreichen wir für jede innere Lösung mit $t \to \mathbf{x}(t)$, dass

$$\dot{P}(\mathbf{x}) = \sum \frac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial x_j}\, \dot{x}_j = P(\mathbf{x})\left(g_i(\mathbf{x}) - \sum y_i\, g_j(\mathbf{x})\right).$$

Daher ist $\dot{P}(\mathbf{x}) < -\delta\, P(\mathbf{x})$. Daraus folgt, dass $x_i(t)$, welches kleiner als $P(\mathbf{x}(t))$ ist, exponentiell abnimmt. Es reicht nun, dieses Argument zu wiederholen: ist das $x_i$ klein genug, so gibt es eine Ungleichung, die analog zur konvexen Monotonität für alle Strategien gilt, die in der nächsten Runde eliminiert werden, usw..
Also konvergiert die Frequenz $x_i(t)$ für die reinen Strategien $R_i$, welche strikt dominiert sind, gegen 0. $\square$

## Beweis zu Satz 2

Betrachte die Funktion $V(\mathbf{x}) = max_i(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}\ A\mathbf{x}$ mit $V(\mathbf{x}) \geq 0$ und $V(\mathbf{x}) = 0$, falls $\mathbf{x} = \mathbf{p}$.

Entlang eines geraden Stückes $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b\text{-}x}$ ist dann $V = (\mathbf{b\text{-}x})\ \mathbf{x}\ A\mathbf{x}$ und $\dot{V} = -\dot{\mathbf{x}}\ A\mathbf{x} + (\mathbf{b\text{-}x})\ A\dot{\mathbf{x}} = -(\mathbf{b\text{-}x})\ A\mathbf{x} + (\mathbf{b\text{-}x})\ A(\mathbf{b\text{-}x})$.

Für $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ist der erste Term nach Def. negativ und der zweite Term ist aufgrund Gleichung *(6.19)* und sogar nach unten durch 0 begrenzt.

Also fällt $V(\mathbf{x}(t))$ und erreichet den Wert 0 in einer endlichen Zeit. □