Asymmetrische Spiele

Eric Barré

13. Dezember 2011

Gliederung

Symmetrische Spiele:

- gleiche Anzahl von Strategien
- gleiche Auszahlungen

Bei Anwendungen der Evolutionären Spieltheorie auf ökonomische Spiele oder auf biologische Populationen, so sind Konfliktsituationen mit asymmetrischen Gegnern häufig anzutreffen.

Revierkämpfe z. B. finden nur selten unter gleich starken Gegnern statt.

$\Rightarrow$ Annahme asymmetrischer Spieler ist gerechtfertigt.

Sei A die Auszahlungsmatrix von *Spieler* 1 (Zeilenspieler) und B die Auszahlungsmatrix von *Spieler* 2 (Spaltenspieler).

Ein asymmetrisches Spiel ist gegeben, wenn:

$$A \neq B^T,$$

oder anders geschrieben, wenn:

$$u_1(p, q) \neq u_2(p, q)$$

für alle Strategien (p, q) gilt.

- Die Entscheidungssituation als solche ist asymmetrisch, da die Anzahl der reinen Strategien von Zeilenspieler $E_1, E_2, \ldots, E_n$ und Spaltenspieler $F_1, F_2, \ldots, F_m$ verschieden sind.
- Bei gleicher Anzahl von reinen Strategien besteht die Population aus zwei verschiedenen Gruppen von Spielern (z.B. Mann/Frau, Jäger/Gejagter, usw.), die nur mit Vertretern der jeweils anderen Gruppe aufeinandertreffen.

Das Paar **(p,q)** ϵ S_n *x* S_m befindet sich im Nash-Gleichgewicht, falls **p** beste Antwort zu **q** und **q** beste Antwort zu **p** ist.

Beispiel: Wenn bzgl. der Auszahlungsmatrizen A und B gilt:

$$\mathbf{p}A\mathbf{q} \geq \mathbf{x}A\mathbf{q} \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in S_n$$
$$\mathbf{q}B\mathbf{p} \geq \mathbf{y}B\mathbf{p} \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \in S_m$$

Das Paar **(p,q)** befindet sich im strikten Nash-Gleichgewicht, falls:

$$\mathbf{p} \neq \mathbf{x} \text{ bzw. } \mathbf{q} \neq \mathbf{y}$$

$\Rightarrow$ Es gelten ähnliche Aussagen wie im symmetrischen Fall.
Zu beachten ist jedoch, dass wie bereits erwähnt $u_1(p,q) = u_2(p,q)$ nicht mehr gilt.

Hierbei geht es um das Engagement bei der Aufzucht der Nachkommen.

Strategien in der Population:

- Männchen sind entweder *treu* ($E_1 = T$), d. h. sie sind zur einer langen Verlobungszeit bereit und betreuen den Nachwuchs, oder *flatterhaft* ($E_2 = F$) d. h. sie wollen nur eine rasche Paarung und verschwinden anschließend.
- Weibchen sind entweder *willig* ($F_1 = W$), d. h. sie sind zur raschen Paarung bereit, oder *spröde* ($F_2 = S$) d. h. sie bestehen auf eine lange Verlobungszeit vor der Paarung.

Kampf der Geschlechter - Auszahlungsmatrix

Treffen *F* und *S* aufeinander entstehen keine Nachkommen, in allen anderen Fällen schon (Gewinn pro Partner: *G*).
Die Brutpflege verursacht Kosten von *2K* (wird von einem T-Männchen zur Hälfte getragen), und eine lange Verlobungszeit kostet jeden Partner V.

Daraus ergeben sich die beiden Auszahlungsmatrizen *A* (aus Sicht des Männchen) und *B* (aus Sicht des Weibchen) :

A	W (willig)	W (spröde)
M (treu)	G - K	G - K -V
M (flatterhaft)	G	0

B	M (treu)	M (flatterhaft)
W (willig)	G - K	G - 2K
W (spröde)	G - K - V	0

Kampf der Geschlechter - Nash-Gleichgewicht

Man erhält durch Lösen des Gleichungssystems:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \qquad \text{wobei } (q_2 = 1 - q_1)$$
$$b_{11}p_1 + b_{12}p_2 = b_{21}p_1 + b_{22}p_2 \qquad \text{wobei } (p_2 = 1 - p_1)$$

für K + V < G < 2K, (G, K, V > 0) die Nash-Gleichgewichte:

$$N(A(p_1, p_2)) = \{(\frac{2K - G}{V + 2K - G}), (\frac{V}{V + 2K - G})\}$$

$$N(B(q_1, q_2)) = \{(\frac{G - K - V}{G - V}), (\frac{K}{G - V})\}$$

Kampf der Geschlechter - Beispiel

Spielregeln:

- Jedes erfolgreich gezeugte und aufgezogene Kind ist für die Eltern ein Gewinn von +30 Punkte (+15 für jeden).
- Eine vorhergegangene Verlobungszeit kostet -6 Punkte.
- Die Brutpflege kostet -20 Punkte.

Daraus ergeben sich die beiden Auszahlungsmatrizen *A* und *B*:

A	W (willig)	W (spröde)
M (treu)	5	2
M (flatterhaft)	15	0

B	M (treu)	M (flatterhaft)
W (willig)	5	-5
W (spröde)	2	0

Beispiel: M (treu) und W (spröde): $0,5 \cdot (+30 - 20 - 6) = 2$

Kampf der Geschlechter - Beispiel

Es sei nun:

- p_1 : Der Anteil der Männchen mit der Strategie *'flatterhaft'*
- p_2 : Der Anteil der Männchen mit der Strategie *'treu'*
- q_1 : Der Anteil der Weibchen mit der Strategie *'spröde'*
- q_2 : Der Anteil der Weibchen mit der Strategie *'willig'*

Es gilt: $p_1 + p_2 = 1$

Die Auszahung für ein Männchen hängt von der gewählten Strategie des Weibchen ab und umgekehrt. Daraus folgt:

$$P_M(treu) = 5q_1 + 2q_2$$
$$P_M(flatterhaft) = 15q_1$$
$$P_W(willg) = 5p_1 - 5p_2$$
$$P_W(spr\ddot{o}de) = 2p_1$$

Eine höhere Auszahlung ist nun mit einer Begünstigung der Gene für den entsprechenden Spieler zu deuten. Daher existiert ein Gleichgewicht:

$$P_M(treu) = P_M(flatterhaft)$$
$$P_W(willg) = P_W(spr\ddot{o}de)$$

$\Rightarrow$

$$5q_1 + 2q_2 = 15q_1$$
$$5p_1 - 5p_2 = 2p_1$$

$\Longleftrightarrow$

$$p_1 = 5/8, p_2 = 3/8$$
$$q_1 = 1/6, q_2 = 5/6$$

Dies gilt also genau dann, wenn der Anteil der treuen Männchen 5/8 und der Anteil der willigen Weibchen 1/6 beträgt.

Herleitung:

Seien $x \in S_n$ und $y \in S_m$ die Spielstrategien von *Spieler* 1 bzw. *Spieler* 2.

Sind Wachstumsrate $\dot{x}/x$ der Strategie i gleich dem Unterschied ihrer Auszahlung $(Ay)_i$ und der durchschnittlichen Auszahlung $x \cdot Ay$ in der Population X, dann lassen sich folgende Differentialgleichungen auf dem Raum S_n x S_m aufstellen:

$$\dot{x}_i = x_i \cdot ((Ay)_i - x \cdot Ay) \qquad i = 1, ..., n$$

$$\dot{y}_i = y_j \cdot ((Bx)_j - y \cdot Bx) \qquad j = 1, ..., m$$

Bedeutung:

- Besteht mindestens eine Population besteht nur aus einem Phänotyp, dann ist:

$$x_i \equiv 1 \text{ oder: } y_j \equiv 1 \text{ für beliebige } i, j$$

  oder allgemein:

$$S_n\, x\, \{f_1\} \text{ für } f_1 = \{1, 0, ..., 0\} \,\epsilon\, S_m$$

- Bestehen beide Populationen aus mehreren Phänotypen, dann ist:

$$x_i > 0 \text{ für beliebige } i, \text{ und } y_j > 0 \text{ für beliebige } j.$$

  oder allgemein:

$$int\, S_n\, x\, S_m.$$

Differentialgleichung - 2 Spieler 2 Strategien

Für den Fall $n = m = 2$, wie im Beispiel “Kampf der Geschlechter“, können wir durch hinzufügen einer Konstanten in der Auszahlungsmatrix die Hauptdiagonale eliminieren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Da $x_2 = 1 - x_1$ und $y_2 = 1 - y_1$ können wir die Differentialgleichung für die Variablen x_1 und y_1 betrachten und durch x bzw. y beschreiben:

$$\dot{x} = x \cdot (1 - x) \cdot (a_{12} - (a_{12)} + a_{21}) \cdot y)$$

$$\dot{y} = y \cdot (1 - y) \cdot (b_{12} - (b_{12)} + b_{21}) \cdot x)$$

Auf dem Quadrat $Q = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\} \cong S_2 \; x \; S_2$

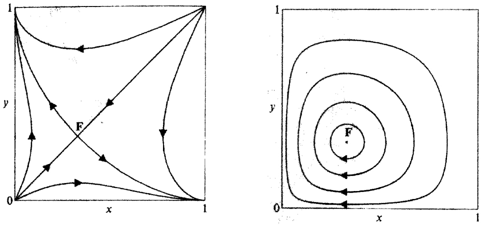
Fallunterscheidung:

- Für $a_{12}a_{21} \leq 0$ bzw. $b_{12}b_{21} \leq 0$:
  Ändert sich das Vorzeichen von $\dot{x}$ auf Q nicht. Eine der zwei Strategien dominiert die andere. In diesem Fall ist x konstant und konvergiert monoton gegen 1 oder 0.
- Für $a_{12}a_{21} > 0$ bzw. $b_{12}b_{21} > 0$:
  Liefert die Gleichung den einzigen Ruhepunkt F in $int\ Q$:

$$F = (\frac{b_{12}}{b_{12} + b_{21}}, \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{21}})$$

Fallunterscheidung:

- Für $a_{12}b_{12} > 0$:
  Hat F einen Sattelpunkt und alle Bahnen in *int Q* konvergieren gegen eine gegenüberliegende Kante von Q. *(Siehe linke Grafik)*.
- Für $a_{12}b_{12} < 0$:
  Sind alle Eigenwerte Imaginär und alle Bahnen in *int Q* sind periodisch um F. *(Siehe rechte Grafik)*.



Kampf der Geschlechter:

Die Auszahlungstabelle für die Männchen sei nun eine 2x2-Matrix A, und für die Weibchen sei B.

Die mittlere Auszahlung ist mit P(treu), P(flatterhaft), P(i) bzw. mit P(willig), P(spröde), P(j) festgelegt:

$P(i) = (Ay)_i$, i=1 (treu) oder i=2 (flatterhaft) mit $y = (y_1, y_2)$

$P(j) = (Bx)_j$, j=1 (willig) oder j=2 (spröde) mit $x = (x_1, x_2)$

Kampf der Geschlechter:

Elimination der Hauptdiagonalen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufstellen der Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \cdot (1-x) \cdot (2-12y) \\ \dot{y} &= y \cdot (1-y) \cdot (-5+8x) \end{aligned}$$

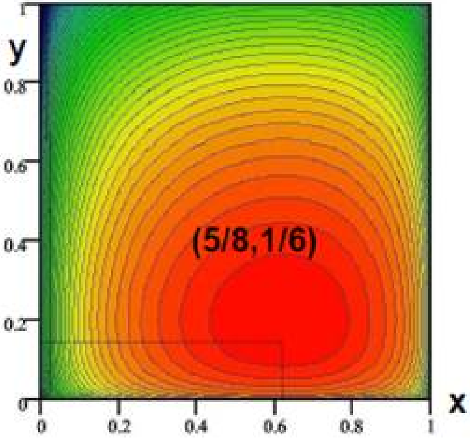
Lösen der Differentialgleichungen:

$$0 = [\frac{-5}{x} + \frac{3}{1-x}]dx + [\frac{2}{y} - \frac{10}{1-y}]dy$$

$$\Longrightarrow F(x,y) = -5\ln(x) - 3\ln(1-x) + 2\ln(y) + 10\ln(1-y)$$

Kampf der Geschlechter:

Darstellung des Fixpunktes:



Bei asymmetrischen Spielen bestimmen wir die erwarteten Nutzen der Spieler 1 und 2.

Diese enthalten die Wahrscheinlichkeiten p und q, mit der die beiden Spieler ihre Strategie x bzw. y wählen.

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen findet man in diesem Fall die Maxima der Nutzenfunktionen.

Davon sind nur jene Maxima Nash-Gleichgewichte, bei denen sich für keinen Spieler eine Abweichung lohnt.

Literatur

- Josef Hofbauer and Karl Sigmund: *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge
- http://wikiludia.mathematik.uni-muenchen.de
- Manfred J. Holler, Gerhard Illing: *Einführung in die Spieltheorie*, Springer
- Siegfried K. Berninghaus, Karl-Martin Ehrhart, Werner Güth: *Strategische Spiele*, Springer