Niedrigdimensionale ökologische Systeme

Dominik Rupp

10.01.2012

Joseph Hofbauer und Karl Sigmund: Evolutionary Games and Population Dynamics, Kap.16

Übersicht

- Die dreidimensionale Lotka-Volterra Gleichung lautet

$$\dot{x}_i = x_i(r_i + \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j) \qquad i = 1, 2, 3$$

- Ein heteroklinischer Zykel ist eine zyklische Verbindung von Sattelpunkten. Hier sind dies die Ruhepunkte F_i der Spezies i.
- Damit alle 3 Spezies einen biologisch sinnvollen Ruhepunkt besitzen, müssen die $r_i > 0$ sein und die $a_{ii} < 0$.
- Damit ergibt sich eine einfachere Form

$$\dot{x}_i = r_i x_i(1 - \sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_j) \qquad i = 1, 2, 3$$

(mit $c_{ii} > 0$)

- Die Eigenwerte in F_i in Richtung e_j sind durch

$$\frac{\dot{x}_j}{x_j} = r_j \left(1 - \frac{c_{ji}}{c_{ii}}\right)$$

- Damit man einen heteroklinischen Zykel der Form

$$\mathbf{F_1} \longrightarrow \mathbf{F_2} \longrightarrow \mathbf{F_3} \longrightarrow \mathbf{F_1}$$

erhält, muss an jedem Ruhepunkt ein Eigenwert positiv und einer negativ sein.Damit erhält man:

$$c_{31} > c_{11} > c_{21}$$
$$c_{12} > c_{22} > c_{32}$$
$$c_{23} > c_{33} > c_{13}$$

Mit

$$\alpha_i = \frac{c_{i-1,i}}{c_{ii}} \quad \beta_i = \frac{c_{i+1,i}}{c_{ii}}$$

wird dieser Ausdruck zu

$$\alpha_i > 1 > \beta_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Theorem 1:

- Falls $detC > 0$ ist und

$$\prod_{i=1}^{3}(\alpha_i - 1) < \prod_{i=1}^{3}(1 - \beta_i)$$

dann ist das System

$$\dot{x}_i = r_i x_i(1 - \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_j) \qquad i = 1, 2, 3$$

permanent.

- Falls

$$\prod_{i=1}^{3}(\alpha_i - 1) > \prod_{i=1}^{3}(1 - \beta_i)$$

dann ist der heteroklinische Zykel ein Attraktor.

2. Permanenz für dreidimensionale Lotka-Volterra Systeme

Wir haben in vorigen Kapiteln bereits gesehen, dass das n-dimensionale Lotka-Volterra System genau dann persistent und permanent ist, wenn

a) ein innerer Ruhepunkt $\overline{x}$ existiert;
b) $det(-A) > 0$
c) das reduzierte System ohne Spezies k genau einen Ruhepunkt besitzt und der dazugehörende Minor von $-A$ positiv ist.

2. Permanenz für dreidimensionale Lotka-Volterra Systeme

- Betrachtet man den dreidimensionalen Fall, so erkennt man, dass c) die zwei-Spezies Untersysteme, deren Ruhepunkt ein Sattelpunkt ist, ausschließt.
- Die Bedingung c) kann daher ein wenig modifiziert werden:
  - c') Das zwei-Spezies Untersystem ist einheitlich begrenzt und nicht bistabil
- zusätzlich betrachten wir die Bedingung:
  - d) Falls das System einen heteroklinischen Zyklus zulässt, gilt

$$\prod_{i=1}^{3}(\alpha_i - 1) < \prod_{i=1}^{3}(1 - \beta_i)$$

Theorem 2:
Betrachtet man die drei-dimensionale Lotka-Volterra Gleichung mit intraspezifischer Konkurrenz ($a_{ii} < 0$)

$$\dot{x}_i = x_i(r_i + \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j) \qquad i = 1, 2, 3$$

- Das System ist genau dann einheitlich begrenzt und persistent, wenn a), b) und c') gelten.
- Das System ist genau dann einheitlich begrenzt und permanent, wenn a), b), c') und d) gelten.

- Allgemeines System mit 3 Spezies:

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad i = 1, 2, 3$$

- Annahmen:
  - H1 Die Lösungen in $\mathbb{R}^3_+$ sind für $t \longrightarrow +\infty$ einheitlich begrenzt.
  - H2 Das ω -Limit jedes Orbits in bd $\mathbb{R}^3_+$ ist ein Ruhepunkt.
  - H3 Der Ursprung ist hyperbolisch, also ist $f_i(\mathbf{0}) \neq 0$ und auf jeder Achse ist mindestens ein weiterer Ruhepunkt.
- Falls das System bezüglich Spezies i einen Ruhepunkt F_i besitzt, dann ist λ_{ij} der Eigenwert $f_j(\mathbf{F_i})$ in F_i in Richtung $e_j (j \neq i)$.

- Mit diesen Bedingungen kann es zu drei Fällen kommen:
  - A Nur eine selbstunterstützende Spezies, z.B. $f_1(\mathbf{0}) > 0, \quad f_2(\mathbf{0}) < 0, \quad f_3(\mathbf{0}) < 0$
  - B Zwei Spezies sind selbstunterstützend, z.B. $f_1(\mathbf{0}) > 0, \quad f_2(\mathbf{0}) > 0, \quad f_3(\mathbf{0}) < 0$
  - C Alle drei Spezies sind selbstunterstützend: $f_i(\mathbf{0}) > 0$ für i=1,2,3.
    Hierbei gibt es wiederum drei Fälle
    - C1 Eine Spezies i besiegt beide anderen: $\lambda_{ji} > 0$ und $\lambda_{ki} > 0$
    - C2 Eine Spezies wird von beiden anderen besiegt: $\lambda_{ij} > 0$ und $\lambda_{ik} > 0$
    - C3 Es gilt $\lambda_{12}, \lambda_{23}, \lambda_{31} > 0$ und $\lambda_{21}, \lambda_{32}, \lambda_{13} \leq 0$ oder umgekehrt.
- Damit muss man die Bedingungen noch um eine Bedingung erweitern:
  - H4 Falls C3 zutrifft, dann gilt $\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31} + \lambda_{21}\lambda_{32}\lambda_{13} > 0$

Theorem 3:
Wenn das System

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad i = 1, 2, 3$$

die Bedingungen H1) bis H4) erfüllt und die Ruhepunkte auf den Grenzen nicht zwei negative Eigenwerte besitzt, dann ist das System permanent.

4. Das Zwei-Beute Zwei-Räuber System

- Je höher die Dimension der ökologischen Systeme wird, umso wahrscheinlicher wird es einen heteroklinischen Zykel durchlaufen.
- In diesem Teil betrachten wir ein einfaches Lotka-Volterra Modell mit zwei Räubern und zwei Beutetieren:

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - b_1 y_1)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - b_2 y_2)$$

$$\dot{y}_1 = y_1(-c_1 + d_1 x_1)$$

$$\dot{y}_2 = y_2(-c_2 + d_2 x_2)$$

- Die Ruhepunkte werden mit $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_{12}}, \mathbf{F_1^1}$ usw. benannt, die Zahlen unten stehen für die Beutetiere, die Zahlen oben für die Räuber.

Theorem 4:
Wenn der innere Ruhepunkt $F_{12}^{12} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y_1}, \overline{y_2})$ des Systems existiert und das (x_1, x_2)-Untersystem bistabil ist. Dann ist das System genau dann permanent, wenn

$$\frac{a_{21}}{r_2}\overline{x_1} + \frac{a_{12}}{r_1}\overline{x_2} < 1\,.$$

Im letzten Teil betrachten wir ein System mit 2 Parasiten. Es gilt:

- x sind die gesunden Personen, y_i die mit Parasit i befallenen Personen.
- Die Sterberate von gesunden Personen sei u_x, die der an Parasit i befallenen u_i.
- b_x, bzw. b_i sind die Geburtenraten der gesunden bzw. mit Parasit i befallenen Personen.
- K ist die maximale Kapazität an Menschen.
- β_i sind die Infektionsraten der Parasiten 1 und 2.

$$\dot{x} = x(b_x(1 - \frac{x + y_1 + y_2}{K}) - u_x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2)$$

$$\dot{y}_1 = y_1(b_1(1 - \frac{x + y_1 + y_2}{K}) - u_1 + \beta_1 x)$$

$$\dot{y}_2 = y_2(b_2(1 - \frac{x + y_1 + y_2}{K}) - u_2 + \beta_2 x)$$

- Zuerst betrachten wir einen einzelnen Parasiten ($y_2 = 0$)
- Der Ruhepunkt der Gesunden ist $\overline{x} = K(1 - \dfrac{u_x}{b_x})$
- Der Parasit 1 kann einfallen, wenn

$$H_1 + V_1 > 1$$

Mit $H_1 = \frac{\beta_1}{u_1}\overline{x}$ und $V_1 = \frac{b_1 u_x}{b_x u_1}$

- Wenn man ökologische Systeme betrachtet, deren Dimension größer als zwei ist, wird es sehr kompliziert und es müssen viele Annahmen und Einschränkungen vorgenommen werden um Aussagen treffen zu können.

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit