Heteroklinische Zyklen

Julia-Carina Stolz

10.01.2012

Josef Hofbauer and Karl Sigmund: Evolutionary Games and Population Dynamics, Cambridge, Kapitel 17

- Definition Heteroklinischer Zyklus
- Bestimmung charakteristischer Matrizen von heteroklinischen Zyklen
- Stabilitatseigenschaften heteroklinischer Zyklen

Einstieg: Heteroklinische Zyklen

- Untersuchung von Systemen mit drei Spezies
- dreidimensionale Lotka-Volterra-Gleichungen:

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i + \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \right) \qquad i = 1, 2, 3$$

$\rightarrow$ Auftauchen heteroklinischer Zyklen

- d.h. zyklische Anordnungen von stationären Punkten und Sattelverbindungen (Bahnen, die einen Sattel als α-Limes und den nächsten als ω-Limes haben)
- Sattel $=$ stationäre Ein-Spezies-Punkte $\mathbf{F}_i$
- treten in biologisch sinnvoller Weise nur auf, falls $r_i > 0$ und $a_{ii} < 0$.

Unter dieser Annahme kann man die Gleichung

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i + \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \right) \qquad i = 1, 2, 3$$

folgendermaßen umschreiben:

$$\dot{x}_i = r_i x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_j \right) \qquad i = 1, 2, 3$$

(mit $c_{ii} > 0$). Der transversale Eigenwert in $\mathbf{F}_i$ in Richtung e_j ist durch

$$\left. \frac{\dot{x}_j}{x_j} \right|_{\mathbf{F}_i} = r_j \left(1 - \frac{c_{ji}}{c_{ii}} \right)$$

gegeben.

- Ziel: heteroklinischer Zyklus $\mathbf{F_1} \to \mathbf{F_2} \to \mathbf{F_3} \to \mathbf{F_1}$
- Voraussetzungen:
  - jedes $\mathbf{F_i}$ muss einen positiven und einen negativen transversalen Eigenwert haben
  - Anordnung in einem zyklischen Muster:

$$\begin{array}{ccccc} c_{31} & > & c_{11} & > & c_{21} \\ c_{12} & > & c_{22} & > & c_{32} \\ c_{23} & > & c_{33} & > & c_{13} \end{array}$$

- Kapitel über Lotka-Volterra-Gleichungen:
  $\rightarrow$ im Fall $x_3 = 3$ schneiden sich die Isoklinen nicht
  $\Rightarrow$ eine Bahn, die in $(x_1, x_2, 0)$ (mit $x_1, x_2 > 0$) startet konvergiert gegen $\mathbf{F_2}$
- Insbesondere enthält dieser Fall eine Bahn mit α-Limes $\mathbf{F_1}$ und ω-Limes $\mathbf{F_2}$.
- ebenso:
  - Bahn von $\mathbf{F_2}$ nach $\mathbf{F_3}$ und
  - Bahn von $\mathbf{F_3}$ nach $\mathbf{F_1}$.

Definition

Heteroklinischer Zyklus

Diese Bahnen zusammen mit den $\mathbf{F_i}$ ergeben den heteroklinischen Zyklus Γ.

Theorem

a) *Ist* $\det(C) > 0$ *und*

$$\prod_{i=1}^{3}(\alpha_i - 1) < \prod_{i=1}^{3}(1 - \beta_i),$$

dann ist $\dot{x}_i = r_i x_i (1 - \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_j)$ *permanent.*

b) *Ist*

$$\prod_{i=1}^{3}(\alpha_i - 1) > \prod_{i=1}^{3}(1 - \beta_i),$$

dann ist der heteroklinische Zyklus ein Attraktor.

Annahme:
Der Zustandsraum unseres dynamischen Systems ist ein Polyeder X in $\mathbb{R}^N$, der als der Durchschnitt von endlich vielen Halbebenen $\{x \in \mathbb{R}^N : x_j \geq 0\}$, $j = 1, ..., n$ definiert ist.
Hierbei bezeichnet x_j ein lineares Funktional in $\mathbb{R}^N$, das auf der tragenden Hyperebene von X verschwindet.

Bez.:

- $\text{bd}(X) =$ der Rand von X
- $\text{int}(X) = X \setminus \text{bd}(X) =$ das Innere von X

- bd(X) invariant unter der Dynamik
  $\rightarrow$ DGL umschreiben:

$$\dot{x}_j = x_j f_j(x), \qquad j = 1, ..., n,$$

- <u>Annahme:</u>
  $n \geq N$ und der Punkt $\mathbf{x} \in X$ ist eindeutig durch seine Koordinaten x_j bestimmt
- Betrachte den Fixpunkt $\hat{\mathbf{x}}$ der obigen Gleichung und ordne die Indizes so um, dass die Null-Koordinaten zuerst kommen.

$\Rightarrow$ Jacobi-Matrix in $\hat{\mathbf{x}}$ von folgender Form:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

wobei E eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge die externen Eigenwerte $\left.\frac{\dot{x}_j}{x_j}\right|_{\hat{\mathbf{x}}} = f_j(\hat{\mathbf{x}})$ sind.

Definition

Charakteristische Matrix

- $\Gamma \subset \text{bd}(X)$ heteroklinischer Zyklus, der aus m Fixpunkten $\mathbf{F}_k$ besteht, die durch heteroklinische Bahnen verbunden sind
- $\Gamma \rightsquigarrow$ rechtwinkliges System von externen Eigenwerten $f_j(\mathbf{F}_k)$ (es ist 0, falls $x_j > 0$ in $\mathbf{F}_k$)
- **Wir nennen dieses System die charakteristische Matrix C von Γ.**
- Da die Nummerierung der Hyperebenen (oder Spalten) und der Fixpunkte $\mathbf{F}_k$ (oder Zeilen von C) beliebig ist, ist die charakteristische Matrix bis auf Permutationen von Zeilen und Spalten eindeutig bestimmt.

Die charakteristische Matrix des Schere-Stein-Papier-Spiels:

$$\begin{pmatrix} 0 & + & - \\ - & 0 & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}$$

mit Spalten x_i und Zeilen $\mathbf{F}_j$.

Die charakteristische Matrix des Zwei-Beutetiere-Zwei-Räuber-Systems:

$$\begin{pmatrix} 0 & - & + & - \\ 0 & + & 0 & - \\ - & 0 & - & + \\ + & 0 & - & 0 \end{pmatrix}$$

mit Spalten x_i und Zeilen $\mathbf{F}_j$.

Die charakteristische Matrix C enthält die notwendigen Informationen über Γ. Insbesondere können die Stabilitätseigenschaften von Γ in vielen Fällen von C abgelesen werden, was im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

Definition

Einfacher heteroklinischer Zyklus

- a priori ist C eine $(m \times n)$-Matrix (m Anzahl der Fixpunkte, n Anzahl der Randhyperebenen des Polyeders X)
- $\rightsquigarrow$ Nullspalten weglassen (diejenigen Hyperebenen ignorieren, die Γ nicht berühren)
- jede Zeile von C enthält wenigstens einen positiven Eintrag
- **Wenn jede Zeile und jede Spalte von C nur <u>einen</u> positiven Eintrag enthält, nennen wir Γ einen einfachen heteroklinischen Zyklus.**

Die gezeigten Beispiele (Schere-Stein-Papier, two-prey-two-predator) sind einfache Zyklen mit quadratischer Matrix C.

Sei Γ ein heteroklinischer Zyklus auf $\mathrm{bd}(X)$ mit Scheiteln $\mathbf{F}_k$ und charakteristischer Matrix C. Wie zuvor lassen wir die Spalten weg, die nur aus Nulleinträgen bestehen, ignorieren also Hyperebenen, die Γ nicht berühren.

Theorem

a) *Gibt es einen Vektor* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$*, sodass* $\mathbf{p} > 0$ *und* $C\mathbf{p} > 0$*, dann ist* $bd(X)$ *nahe* Γ *abstoßend.*

b) *Ist* Γ *in* $bd(X)$ *asymptotisch stabil und gibt es ein* $\mathbf{p} < 0$*, sodass* $C\mathbf{p} > 0$*, dann ist* Γ *in* X *asymptotisch stabil.*

c) *Ist* Γ *in* $bd(X)$ *asymptotisch stabil und gibt es ein* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$*, sodass* $p_i < 0$ *für mindestens ein* i *und* $C\mathbf{p} > 0$*, dann zieht* Γ *mindestens einen (eigentlich eine offene Menge von) innere(n) Orbit(s) von* X *an.*

Lemma

Angenommen es gibt ein $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, sodass $p_i < 0$ für wenigstens ein i und $C\mathbf{p} > 0$ und Γ_0 in X_0 asymptotisch stabil ist. Dann konvergieren alle Bahnen, die in einer Menge $\{\mathbf{x} \in intX : P(\mathbf{x}) < \delta\}$ starten und nahe genug an Γ_0 sind, gegen Γ_0.

Theorem

Sei Γ in $bd(X)$ asymptotisch stabil und $m = n'$ (die Anzahl der Spalten $\neq 0$), sodass die (reduzierte) charakteristische Matrix C eine quadratische Matrix ist. Außerdem sei $\det(C) \neq 0$. Dann ist $bd(X)$ nahe Γ abstoßend genau dann, wenn $C^{-1} \geq 0$, d.h. die Inverse von C hat nur nichtnegative Einträge.

- Der Fall, in dem C nicht quadratisch ist ($m \neq n'$) größtenteils ungelöst.
- Obiges Theorem gibt in diesem Fall nur ein Teilergebnis.
- Für einfache heteroklinische Zyklen ist die Situation wesentlich einfacher, da Teil c) des Theorems ignoriert werden kann:
  Wir können die Theorie der M-Matrizen anwenden, um die lineare Ungleichung zu lösen, die auftritt.

- angenommen Γ ist ein einfacher heteroklinischer Zyklus, der in $\mathrm{bd}(X)$ asymptotisch stabil ist
$\Rightarrow C$ quadratisch (nach der Eliminierung überflüssiger Spalten) mit positiven Einträgen, die nur in der Hauptdiagonalen auftreten (nach einer entsprechenden Umordnung der Zeilen und Spalten)

- Sei $\det(C) \neq 0$.
    - Wenn C eine M-Matrix ist, dann ist Γ abstoßend,
    - wenn C keine M-Matrix ist, dann ist Γ asymptotisch stabil.

Wir haben heute über

- heteroklinische Zyklen allgemein,
- die charakteristische Matrix eines heteroklinischen Zyklus und
- die Stabilitätseigenschaften heteroklinischer Zyklen

gesprochen.

Wir haben heute über

- heteroklinische Zyklen allgemein,
- die charakteristische Matrix eines heteroklinischen Zyklus und
- die Stabilitätseigenschaften heteroklinischer Zyklen

gesprochen.

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!!!