Blackjack

Das Spiel und die "Basic Strategy"

Ruwen Hollenbach

24.01.2012

Übersicht

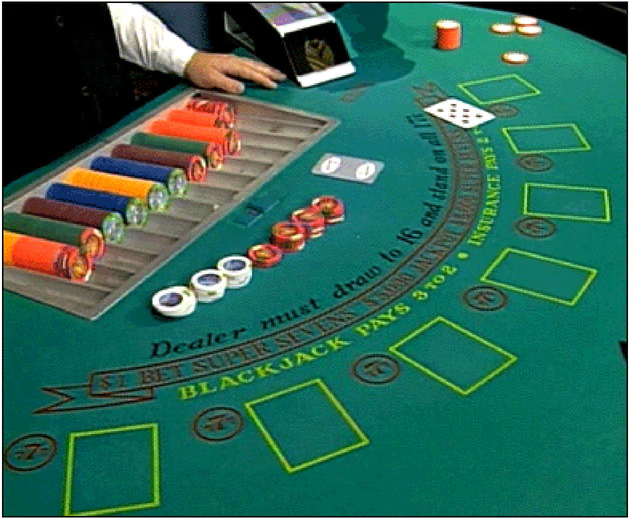

Abbildung: http://oranges-world.com/black-jack-table.html

Umriss

Ziel des Spiels:
Spielkarten sammeln mit Gesamtkartenwert ≤ 21
Grundsätzlich gilt:

- Dealer am Tisch
- 1-7 Spieler
- Spieler erhalten Karten vom Dealer:
  - 1-2 Decks: Karten aus der Hand
  - 2-8 Decks: Karten aus Vorrichtung

Kartenschlitten

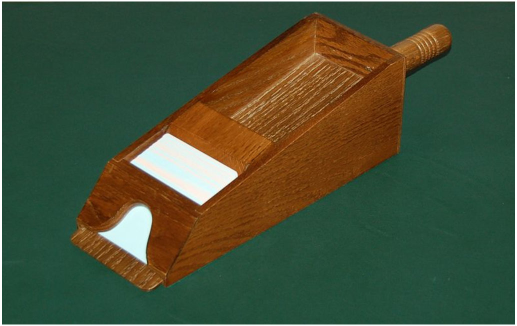

Abbildung:
http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Kartenschlitten.jpg&filetimestamp=20110903011147

Kartenwerte

- Asse zählen nach Belieben ein oder elf Punkte.
- Zweier bis Zehner zählen entsprechend ihren Augen
- Bildkarten (Buben, Damen, Könige) zählen zehn Punkte, kurz die **10er**

Eine Hand bestehend aus einem Ass und einer 10 heißt "Blackjack"

Spielablauf

1. Spieler platziert Einsatz.

Spielablauf

1. Spieler platziert Einsatz.
2. Spieler bekommt offene Karte.

Spielablauf

1. Spieler platziert Einsatz.
2. Spieler bekommt offene Karte.
3. Dealer bekommt offene Karte üpcard".

Spielablauf

1. Spieler platziert Einsatz.
2. Spieler bekommt offene Karte.
3. Dealer bekommt offene Karte üpcard".
4. Spieler bekommt weitere offene Karte.

Spielablauf

1. Spieler platziert Einsatz.
2. Spieler bekommt offene Karte.
3. Dealer bekommt offene Karte üpcard".
4. Spieler bekommt weitere offene Karte.
5. Dealer bekommt verdeckte Karte "hole card".

Spielablauf

1. Spieler platziert Einsatz.
2. Spieler bekommt offene Karte.
3. Dealer bekommt offene Karte üpcard".
4. Spieler bekommt weitere offene Karte.
5. Dealer bekommt verdeckte Karte "hole card".
6. Spieler spielt Hand aus.

Spielablauf

1. Spieler platziert Einsatz.
2. Spieler bekommt offene Karte.
3. Dealer bekommt offene Karte üpcard”.
4. Spieler bekommt weitere offene Karte.
5. Dealer bekommt verdeckte Karte ”hole card”.
6. Spieler spielt Hand aus.
7. Dealer spielt Hand aus.

Spielablauf

1. Spieler platziert Einsatz.
2. Spieler bekommt offene Karte.
3. Dealer bekommt offene Karte üpcard".
4. Spieler bekommt weitere offene Karte.
5. Dealer bekommt verdeckte Karte "hole card".
6. Spieler spielt Hand aus.
7. Dealer spielt Hand aus.
8. Hände werden verglichen.

Wichtige Variation in manchen Casinos

Hat der Dealer eine 10 oder ein Ass als 'upcard', überprüft er den Wert seiner 'hole card'.
Hat er einen Blackjack so zeigt er es den Spielern zahlt alle Versicherungen aus und die Runde ist beendet.

Versicherung/Insurance:
Spieler wettet das der Dealer einen Blackjack hat, dazu setzt er zusätzlich nochmals seinen vorherigen Einsatz.
Bei Blackjack des Dealers wird der Spieler 2:1 ausbezahlt.

Optionen

- **Blackjack**: Hand hat den Wert 21 mit 10 und Ass.
- **Stand**: Spieler bekommt keine Karten mehr.
- **Double down**: Spieler verdoppelt seinen Einsatz und bekommt nur noch eine Karte.
- **Split**: Paare gleicher Karten können in zwei Einzelhände geteilt werden.
- **Hit**: Spieler bekommt weitere Karten bis er zufrieden ist, oder der Wert der Hand größer als 21 ist ("busting").

Dealer

Im Gegensatz zum Spieler hat der Dealer keine Optionen. Er spielt nach folgenden Regeln:

- Stand wenn der Wert der Hand ≥ 17
- Hit wenn der Wert der Hand ≤ 16 bis der Wert im Stand-Bereich ist

Spieler gewinnt, falls... (Auszahlungsverhältnis)

- er einen Blackjack hat (3:2).
- seine Hand näher an 21 ist, als die des Dealers (1:1).
- der Dealer, nicht aber der Spieler 21 Punkte überschreitet (1:1).

Spieler verliert, falls...

- seine Hand 21 Punkte überschreitet.
- der Dealer, nicht aber der Spieler einen Blackjack hat.
- die Hand des Dealers näher an 21 ist.

Die Runde ist unentschieden, falls die Hände gleich stark sind.

Übersicht

Unendlich viele Decks

- $d(i)$: Wahrscheinlichkeit die Karte mit dem Wert i zu ziehen, $1 \leq i \leq 10$.
- $d_0(i)$: $d(i)$ für den ersten Zug

Also in dem vorliegenden Fall gilt:

$$d(i) = d_0(i)$$

Hände ohne Ass mit dem Wert 11 nennt man *hart*.

Hände mit Ass mit Wert 11 nennt man *weich*.

- s: Wert ab dem ein Spieler mit einer harten Hand keine Karte mehr nimmt.
- s': Wert ab dem ein Spieler mit einer weichen Hand keine Karte mehr nimmt.

$P(j|c)$: Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler von c im Hit-Bereich, durch Ziehen von einer oder mehrerer Karten zu j im Stand-Bereich kommt für harte Hände.

$P'(j|c)$: ... für weiche Hände.

- $11 \leq c \leq s-1$:

$$P(j|c) = d(j-c) + \sum_{k=1}^{s-c-1} d(k) \cdot P(j|c+k)$$

Die analoge Relation für $P'(j|c)$ hängt von der Größe j relativ zu s' ab. Definiere dazu

$$\hat{j} \equiv \begin{cases} j, & \text{wenn } s' \leq j \leq 21 \\ j + 10, & \text{wenn } s \leq j \leq s' - 1 \end{cases}$$

Damit gilt:

$$P'(j|c) = d(\hat{j} - c) + \sum_{k=1}^{s'-c-1} d(k) \cdot P'(j|c+k) + \sum_{k=22-c}^{s+9-c} d(k) \cdot P(j|c-10+k).$$

Wieder zurück zu $P(j|c)$ im verbliebenen Bereich $2 \leq c \leq 10$:

$$P(j|c) = d(j-c) + d(1) \cdot P'(j|c+11) + \sum_{k=2}^{s-c-1} d(k) \cdot P(j|c+k)$$

$P(j|u)$: Das Analogon von $P(j|c)$ für den Dealer.

Dabei ist u ist der Wert der upcard und es geht aus den Regeln für den Dealer hervor, dass $s = s' = 17$ (manchmal $s' = 18$).

Erwarteter Gewinn des Spielers = EGS

Seien c und u fest gegeben.

Der EGS $R(c, u)$ ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeit, dass er gewinnt (ausgeschlossen Blackjack), minus der Wahrscheinlichkeit, dass er verliert plus 1.5 mal die Wahrscheinlichkeit, dass er (aber nicht der Dealer) einen Blackjack hat.

Mathematisch ausgedrückt wird daraus:

$$
\begin{aligned}
R(c,u) = & \sum_{j=s}^{21} P(j|c) \sum_{k=17}^{j-1} P(k|u) \\
& + \sum_{j=s}^{21} P(j|c)[1 - \sum_{k=17}^{21} P(k|u)] \\
& - \sum_{j=s}^{20} P(j|c)[\sum_{k=j+1}^{21} P(k|u) - P(bj|u)] \\
& - [1 - \sum_{j=s}^{21} P(j|c)][1 - P(bj|u)] \\
& - P(bj|u)
\end{aligned}
$$

Für $k < 17$ gilt natürlich $P(k|u) = 0$.

Wenn der Spieler einen Blackjack hat ergibt sich der EGS als:

$$R(21, u) = 1.5[1 - P(bj|u)];$$

d.h der Spieler gewinnt, falls der Dealer nicht auch einen Blackjack hat.

Wollen wir den EGS unabhängig von c und u müssen wir:

1. R(c,u) bzgl. doubling und splitting modifizieren.
2. die Modifikation, bzgl. der Wahrscheinlichkeit den Wert c zu haben, gewichten.
3. die Parameter s/s' so bestimmen, dass die gewichteten Gewinne für jedes u maximiert werden.
4. die maximierten Gewinne noch bzgl u gewichten.

zu 1: Verdoppeln

$P^{(1)}(j|c)$: Wahrscheinlichkeit durch Ziehen einer Karte von c zu j zu kommen.

$$
\begin{aligned}
R^{(1)}(c,u) = & \sum_{j=s}^{21} P^{(1)}(j|c) \sum_{k=17}^{j-1} P(k|u) \\
& + \sum_{j=s}^{21} P^{(1)}(j|c)[1 - \sum_{k=17}^{21} P(k|u)] \\
& - \sum_{j=s}^{20} P^{(1)}(j|c)[\sum_{k=j+1}^{21} P(k|u) - P(bj|u)] \\
& - [1 - \sum_{j=s}^{21} P^{(1)}(j|c)][1 - P(bj|u)] - P(bj|u)
\end{aligned}
$$

zu 1: Verdoppeln

Ersetze $R(c,u)$ durch $\max\{R(c,u), 2R^{(1)}(c,u)\}$

Variation:
Verdoppeln ist erst möglich nachdem der Dealer nachgeschaut hat ob er einen Blackjack hat.

Dann müssen $R(c,u)$ und $R^{(1)}(c,u)$ modifiziert werden, indem man $P(bj|u)$ wieder hinzuaddiert.

zu 1: Teilen

Teilen ist möglich, wenn $c = 2i$.

Wenn *Resplits* (wiederholtes Teilen) nicht erlaubt ist, dann ist $R(c, u)$ durch $\max\{R(2i, u), 2R(i, u), 2R^{(1)}(2i, u)\}$

Variation:
Falls der Dealer vorher noch überprüft ob er einen Blackjack hat und er keinen hat, so muss wie beim Verdoppeln $P(bj|u)$ wieder hinzuaddiert werden.

zu 1: Teilen (Resplits)

$R_{sp}(i,u)$: erwarteter Gewinn für jede Karte des geteilten Paares
Es gilt:

$$R_{sp}(i,u) = \sum_{k \neq i} d(k)R(i+k,u) + 2d(i)R_{sp}(i,u)$$
$$= \frac{\sum_k d(k)R(i+k,u) - d(i)R(2i,u)}{1-2d(i)}$$

Nun gilt aber $\sum_k d(k)R(i+k,u) = R(i,u)$, sodass

$$R_{sp} = \frac{2(R(i,u) - d(i)R(2i,u)}{1 - 2d(i)}$$

Es gilt zudem:

$$[2R_{sp}(i,u) \geq R(2i,u)] \Leftrightarrow [2R(i,u) \geq R(2i,u)]$$

d.h die Entscheidung zu teilen wird **unabhängig** davon getroffen, ob *Resplits* möglich sind!

zu 2: nach c gewichten

Die bisher gewonnene Modifikation, gewichtet nach der Wahrscheinlichkeit den Wert $c = c_1 + c_2$ zu erreichen, ergibt sich zu:

$$R(u) = \sum_{c_1=2}^{11} d(c_1) \sum_{c_2=2}^{11} d(c_2) R_{max}(c_1 + c_2, u).$$

zu 3 und 4

Vergleicht man nun R(u) für alle möglichen Hit/Stand-Strategien die der Spieler hat, erhält man den optimalen Gewinn $\max_{s,s'} \{R(u)\}$ für die jeweilige Dealer upcard u.

Gewichtet nach den Wahrscheinlichkeiten der möglichen upcard Werten ergibt sich:

$$R = \sum_{u=1}^{10} d(u) \max_{s,s'} \{R(u)\}$$

Unentschieden

Obwohl die meisten Hände gewonnen oder verloren werden, zieht der Dealer häufig mit einem gleich und es wird weder Geld verloren, noch gewonnen.
Dieses Ereignis trifft in 10% aller Runden auf.

Die Kenntnis über die Wahrscheinlicheit solcher Hände ist wichtig für die richtige Einsatzstrategie.

k: endgültiger Wert der Hand des Dealers

$\xi_k(\omega)$: Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler ω Einheiten gegen die Dealer-Hand mit Wert k gewinnt/verliert.
ω nimmt die Werte $0, \pm 1$, $+3/2$, ± 2 an

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit gleichzuziehen, zu:

$$T = \sum_u d(u) \sum_k P(k|u)\xi_k(0)$$

P(c): Wahrscheinlicheit, dass der Spieler den Wert c mit den beiden ersten Karten hat.
$\Rightarrow P(c) = \sum_{c_1,c_2} d(c_1)d(c_2)\delta(c_1 + c_2, c)$

Zudem wird noch zwischen Werten c_d bei denen verdoppelt wird, Werten $c_s = 2i$ bei denen geteilt wird und Blackjack unterschieden.

$\xi_k(\omega|c)$: Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler ω Einheiten gegen die Dealer-Hand mit Wert k gewinnt/verliert, abhängig von seiner Start-Hand mit Wert c.

Damit ergibt sich T zu:

$$T = \sum_{u} d(u) \sum_{k} P(k|u) \left[\begin{array}{l} \sum_{c} P(c)\xi_k(0|c) + \sum_{c_d} P(c_d)\xi_k(0|c_d) \\ +P(bj)\xi_k(0|bj) \\ +\sum_{c_s} P(c_s)\left(\xi_k(0|i)^2 + 2\xi_k(1|i)\xi_k(-1|i)\right) \end{array} \right]$$

Nach Modifikation der obigen Formel, lässt sich T leicht am Computer berechnen und ergibt sich zu T=0,0982.

Erwartungswert für N Hände:

$$\langle R_N \rangle = \sum_u d(u) \sum_k P(k|u) \left(\prod_{n=1}^{N} \left(\sum_{\omega_k} \xi_k(\omega_n) \right) \right) \left(\sum_{n=1}^{N} \omega_n \right)$$

Da $\sum_\omega \xi_k(\omega) = 1$ für jedes k folgt:

$$\langle R_N \rangle = N \langle R_1 \rangle$$

Varianz für N Hände:

$$\begin{aligned}\sigma_N^2 &= \left\langle R_N^2 \right\rangle - \left\langle R_N^2 \right\rangle \\ &= N\sigma_1^2 + N(N-1)\Gamma\end{aligned}$$

wobei σ_1^2 die Varianz beim Spiel mit einer Hand und Γ die Kovarianz bezeichnet.

Kleine Anzahl an Decks

Die Wahrscheinlichkeit eine Karte bestimmten Typs zu ziehen schwankt jetzt im Laufe des Spiels

$\Rightarrow$ **Die Anzahl der zu bewerteten Hände steigt stark !!!**

Für Paare die geteilt werden können ist die Anzahl der Möglichkeiten > 1 Milliarde

Diese Zahl kann reduziert werden wenn man beachtet, dass:

- Hände für die sich Spieler/Dealer überbieten, können durch eine komplexere Bewertung elimiert werden
- unentschiedene Runden tragen nicht zum EGS bei
- mit einer angepassten Gewichtung der Hände spielt die Reihenfolge, in der die Karten der Hand gezogen wurden, keine Rolle und müssen daher nur einmal bewertet werden

Nehmen wir an wir haben ein Pack von $52D$ Karten von denen schon M Karten ausgespielt wurden.
Dann hat man beim erneuten Austeilen noch $52D - M$ Karten Die erste gedealte Karte hat den Wert c_1 mit der Wahrscheinlichkeit $d^{(1)}(c_1)$ und geht an den Spieler.
Die zweite Karte wird dem Dealer ausgeteilt und hat den Wert u mit Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} d^{(2)}(u; c_2) &= \frac{(52D - M)d(u) - \delta(u, c_1)}{52D - M - 1} \\ &= d(u) + \frac{d(u) - \delta(u, c_1)}{52D - M - 1} \end{aligned}$$

Die nächste Karte mit Wert c_2 geht an den Spieler mit der Wahrscheinlichkeit:

$$d^{(3)}(c_2; c_1, u) = d(c_2) + \frac{2d(c_2) - \delta(c_2, u) - \delta(c_2, c_1)}{52D - M - 2}$$

Allgemein gilt dann:

$$d^{(m)}(j_m; j_1, ..., j_{m-1}) = \frac{d(j_m) - \epsilon \sum_{k=1}^{m-1} \delta(j_m, j_k)}{1 - \epsilon(m-1)}$$

wobei $\epsilon \equiv 1/(52D - M)$

Umordnungssatz

Die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Hand zu erhalten, ist unabhängig von der Reihenfolge in der man die Karten erhält. Es kann gezeigt werden das gilt:

Umordnungssatz

$$
\begin{aligned}
&d^{(m)}(j_m; j_1, \dots, j_{m-1})\, d^{(m+1)}(j_{m+1}; j_1, \dots, j_m) \\
=&d^{(m)}(j_{m+1}; j_1, \dots, j_{m-1})\, d^{(m+1)}(j_m; j_1, \dots j_{m-1}, j_{m+1})
\end{aligned}
$$

Fazit

Hohe Anzahl an Decks:

- Basic Strategy einfach zu konstruieren
- Die Berechnungen sind einfach.
- Gute Einführung für weitere Analyse

Kleine Anzahl an Decks:

- Die Hände müssen unter zusätzlichen Aspekten untersucht werden.
- Umordnungssatz zur drastischen Reduzierung der zu bewerteten Hände

ABER trotz Basic Strategy ist das Casino immer noch im Vorteil!!!