# Black Jack - Kartenzählen

**Michael Gabler**

**24.01.2012**

Literatur: N. Richard Werthamer:
*Risk and Reward - The Science of Casino Blackjack,*
Springer

# Ziel des Vortrags

- Welche Möglichkeiten des Zählens gibt es?
- Was sind der Running Count und True Count?
- Welche Vorteile habe ich als Spieler?

- Früher wurde Black Jack in den Casinos mit einem Deck (52 Karten) gespielt
- War das Deck zu etwa Dreivierteln gespielt, wurde neu gemischt
- Durch Merken der gespielten Karten war es möglich, die Zusammensetzung gegen Ende eines Decks sehr genau zu kennen
- Veröffentlichung von Thorpe im Jahre 1962: *Beat the dealer*

- Reaktion der Casinos: Black Jack wird heute zumeist mit 6 Decks (312 Karten) gespielt und etwa nach der Hälfte neu gemischt
- In manchen Casinos sogar ein Reshuffle nach jeder Runde
- Kartenzählen ist **nicht** strafbar, mit Hausverbot muss jedoch gerechnet werden

**Warum wurde mit dem Kartenzählen begonnen?**

- Wenn man die Verteilung der verbleibenden Karten kennt, kann man die Wahrscheinlichkeiten genauer berechnen
- Der Vorteil des Spielers besteht nun darin, dass er seine Strategie und Einsätze daran anpassen kann
- **Beispiel:** Bei einer sogenannten *Stiff Hand* mit 10 und 6 und vielen verbleibenden hohen Karten wird der kartenzählende Spieler keine Karte mehr nehmen, während der Geber eine Karte ziehen muss

**Wie zählt man die Karten?**

- Am weitesten verbreitet ist die **High/Low-Strategie**
- Einführung eines Zählvektors

| i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_i$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |

oder

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Es fallen nacheinander die Karten 7, 2, 5, 3, K, 5, 9, J, 4, Q
- Bei Kartenwert i wird die i-te Komponente des Zählvektors addiert, gestartet wird bei 0.
- Man erhält also den Wert 0+1+1+1-1+1+0-1+1-1=2
- Dieser Wert heisst **Running Count** und berechnet sich mit $\alpha \cdot \boldsymbol{m}$

**Notationen**

Man bezeichnet

- den Wert der Karte mit j
- die Wahrscheinlichkeit, eine Karte mit Wert j zu ziehen mit d(j)
- die Anzahl der Decks mit D
- die Anzahl der Karten vom Wert j zu Beginn mit $v_j = 52Dd_0(j)$
- die Karten vom Wert j, die gezogen werden mit $m_j$
- die Karten, die insgesamt gezogen werden mit M
- die Karten vom Wert j, die noch im Spiel sind mit $\tilde{m}_j$
- die Karten, die noch im Spiel sind mit $\tilde{M} = 52D - M$
- den Anteil der bereits gespielten Karten mit

$$f = \frac{M}{52D}$$

**Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der verbleibenden Karten erhalten wir:**

$$p(\tilde{\boldsymbol{m}}) = \delta\left(\sum_j \tilde{m}_j, \tilde{M}\right) \frac{\tilde{M}!(52D - \tilde{M})!}{(52D)!} \prod_j \frac{v_j!}{\tilde{m}_j!(v_j - \tilde{m}_j!)}$$

oder einfacher

$$p(\tilde{\boldsymbol{m}}) = \delta\left(\sum_j \tilde{m}_j, \tilde{M}\right) \prod_j \frac{\binom{v_j}{\tilde{m}_j}}{\binom{52D}{\tilde{M}}}$$

- Dies ist eine Verallgemeinerung der hypergeometrische Verteilung.
- Im Folgenden wird der Einfachheit halber jedoch der Fall für unendlich große $v_j$ betrachtet.

# Wahrscheinlichkeitsdichte

- Definiere zunächst die Größe Δ

$$\Delta = \sqrt{\frac{f}{52D(1-f)}}$$

- und betrachte nun die Dichte des Wahrscheinlichkeits-vektors **d**:

$$\rho(\boldsymbol{d}) = \sqrt{2\pi}\Delta\delta\left(\sum_{j=1}^{10} d(j) - 1\right)$$

$$x\prod_{j=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi d_0(j)}\Delta} exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(d(j)-d_0(j))^2}{d_0(j)\Delta^2}\right]$$

# Wahrscheinlichkeitsdichte

- Die Dichte einer Gaussverteilung ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$\sigma^2$ ist die Varianz und $\mu$ der Erwartungswert

- Betrachten wir nun wieder $\rho(\boldsymbol{d})$

$$\rho(\boldsymbol{d}) = \sqrt{2\pi}\Delta\delta\left(\sum_{j=1}^{10} d(j) - 1\right)$$

$$x\prod_{j=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi d_0(j)}\Delta} exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(d(j)-d_0(j))^2}{d_0(j)\Delta^2}\right]$$

$$\sigma^2 = d_0(j)\Delta^2,\ \mu = d_0(j)$$

- Wir erinnern uns an die High/Low-Strategie:
- Die laufende Zahl nennt man **Running Count**
- Diese Zahl berücksichtigt nicht die Anzahl der Karten, die noch im Spiel sind
- Einführung einer neuen Zahl: Der **True Count** $\gamma$

$$\gamma = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{m}}{D(1-f)}$$

- Allgemein führt man nun 9 Zählvektoren ein:

$$\boldsymbol{\alpha}_n, n = 1, ..., N \leq 9$$

- Für den True Count ergibt sich hiermit:

$$\gamma_n = \boldsymbol{\alpha_n} \cdot \boldsymbol{m}$$

- **Beispiele**

vom Anfang (10 gespielte Karten) beim Spiel mit zwei Decks

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{m} = 2$$

$$f = \frac{M}{52D} = \frac{10}{104} = 0.096$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{2}{2 \cdot (1 - 0.096)} = 1.106$$

vom Anfang mit der Annahme 50 gespielter Karten

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{m} = 2$$

$$f = \frac{M}{52D} = \frac{50}{104} = 0.481$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{2}{2 \cdot (1 - 0.481)} = 1.927$$

Einführung normierter Grössen, um eine normalisierte, skaleninvariante Basis zu erhalten:

$$\hat{d}(i) = \sqrt{(d_0(i))}$$

$$\hat{\alpha}(i) = 52\hat{d}(i)\sum_{n'} A^{-1}_{n,n'}(\alpha_{n'}(i) - \boldsymbol{\alpha}_{n'} \cdot \boldsymbol{d}_0)$$

$$\hat{\gamma}_n = \sum_{n'} A^{-1}_{n,n'}(\gamma_{n'} - \langle\gamma_{n'}\rangle)$$

Einführung einer Richtungsableitung

$$\hat{\nabla}_i = \hat{d}(i)\left(\frac{\partial}{\partial d_0(i)} - \sum_j d_0(j)\frac{\partial}{\partial d_0(j)}\right)$$

sodass

$$\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \hat{\nabla} = 0$$

**Expected Return** bezeichnet den Anteil des Einsatzes, den man pro Spielrunde bekommt (gewinnt oder verliert)

$$\langle R_f(\boldsymbol{d})\rangle_\gamma = exp\left[-\sum_n \left(\hat{\gamma}_{\boldsymbol{n}}\hat{\alpha}_{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2}\Delta^2 \left(\hat{\alpha}_{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\nabla}\right)^2\right)\right] R_o(\boldsymbol{d}_0)$$

### Invarianztheorem

*Wenn nicht gezählt wird, ist der erwartete Gewinn unabhängig von der verbliebenen Anzahl der Karten.*

$$\langle R_f(\boldsymbol{d})\rangle = R_0(d_0)$$

Betrachten wir im Folgenden, welche Vorteile der Kartenzähler gegenüber dem Nichtkartenzähler hat:

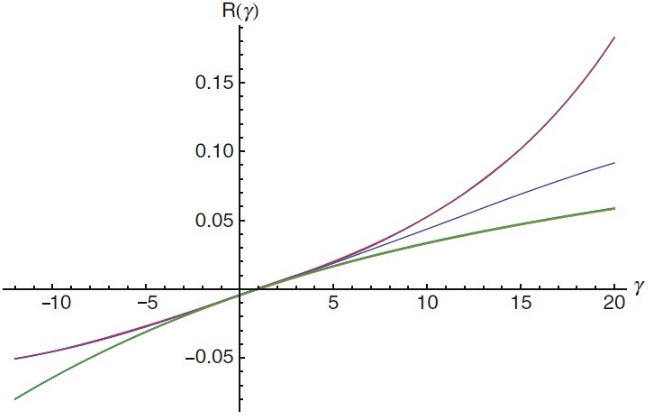


**Fig. 8.1** Expected return vs. true count, reshuffle round, six decks: *upper pair of curves* for count-dependent play, the *topmost* with DAS, the *middle* without; the *lowest curve* is for count-independent Optimal Basic play

Der Vergleich zum Spiel mit einem Deck.

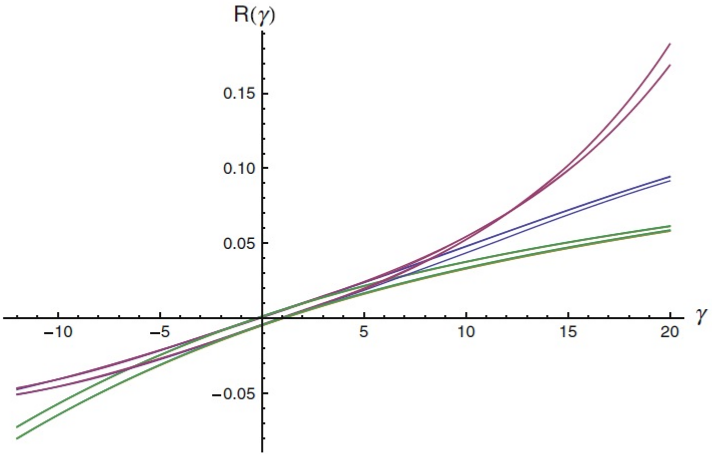


**Fig. 8.2** Expected return vs. true count as in Fig. 8.1, but superimposing onto the six-deck res
those for single deck as well, the latter set with a slight upward shift vs. the former

Betrachtet man die Differenzenquotienten $(R(\gamma) - R(0))/(\gamma - 0)$, so tauchen bei der zählabhängigen Strategie zwei Knicks in der Nähe der 0 auf.

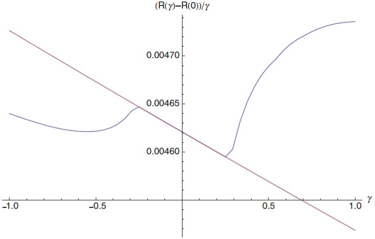


**Fig. 8.3** Count-dependent (*kinky curve*) and Optimal Basic (*smooth curve*) first differentials at small values of true count; six decks

**Ursache:**

- Der Knick für leicht positive true counts wird verursacht vom Wechsel von s=16 zu s=17 bei upcard 10
- Der Knick für leicht negative true counts wird verursacht vom Wechsel von s=12 zu s=13 bei upcard 4

- Da der Zählvektor im Verlauf einer Runde fixiert ist, muss eine andere Grösse maximiert werden
- Hierzu definiert man sich den **Ertrag Y** (yield)
- Dieser ist gegeben durch den durchschnittlichen **Expected Return** in Abhängigkeit der **Wahrscheinlichkeits-verteilung** von $\gamma$, gewichtet mit dem **Wetteinsatz B** und darüber hinaus gemittelt über alle **Deckdicken f** bis zum Einstich **F**

$$Y = \frac{1}{F}\int_0^F df \int d\hat{\gamma}\hat{p}(\hat{\gamma})B(\hat{\gamma})\langle R_f(\boldsymbol{d})\rangle_{\hat{\gamma}}$$

$$= \langle\langle B(\hat{\gamma}\langle R_f(\boldsymbol{d})\rangle_{\hat{\gamma}}\rangle\rangle$$

Ziel ist nun die Maximierung von Y

- Um Y zu maximieren, muss man seine stationären Punkte suchen, d.h. die Nullstellen der ersten Ableitungen in Abhängigkeit von $\alpha_{\boldsymbol{n}}$.

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_{\boldsymbol{n}}} = \langle\langle B(\hat{\gamma})(-\hat{\gamma}_{\boldsymbol{n}}\hat{\nabla} - \Delta^2 \hat{\alpha}_{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\nabla}\hat{\nabla})\langle R_f(\boldsymbol{d})\rangle_{\hat{\gamma}}\rangle\rangle$$

- Da $\langle R_f(d)\rangle_{\hat{\gamma}}$ keine lineare Funktion bzgl. $\alpha$ ist, ist eine explizite Darstellung von $\alpha_{\boldsymbol{n}}$ nicht möglich.
- **Lösung:** Annahme unendlich vieler Karten im Spiel und Linearisierung durch Hermite-Entwicklung

- Betrachtung der Terme der Ordnung 0 und 1, da $\Delta^2$ vernachlässigbar klein ab 4 Decks

$$Y = \langle\langle B(\hat{\gamma}) \left(1 - \sum_n \hat{\gamma}_n \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n \cdot \hat{\nabla}\right) R_0(\boldsymbol{d}_0)\rangle\rangle$$

- Die partielle Ableitung lautet dann

$$\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\alpha_n}} = -\langle\langle B\gamma_n\rangle\rangle \hat{\nabla} R_0(\boldsymbol{d}_0)$$

## Optimierung des Zählvektors

- Diese Gleichung ist linear und kann exakt gelöst werden.
- Bei Vorgabe eines $n^*$ ergibt sich

$$\boldsymbol{\alpha}^* \equiv \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n*}} = \frac{-\hat{\nabla} R(d_0)}{\left|\hat{\nabla} R(d_0)\right|} \equiv \boldsymbol{v_b},$$

- die übrigen $\Lambda - 1$ Vektoren stehen orthogonal zu diesem.

Für den **Expected Return** ergibt sich hiermit

$$\langle R_f(d) \rangle_{\hat{\gamma}} = R_0 + C_b \hat{\gamma} \left| \hat{\nabla} R_0 \right|,$$

wobei

$$C_b = \hat{\alpha} \cdot \boldsymbol{v_b}$$

die **Korrelation** zwischen dem echten Zählvektor $\hat{\alpha}$ und dem optimalen Vektor $\boldsymbol{v_b}$ angibt.
Offensichtlich ist $C_b \leq 1$ und $C_b = 1$ bei optimalem Zählvektor.

Eingesetzt in den Ausdruck für den **Ertrag** ergibt sich vereinfacht:

$$Y = Y_0 + C_b \cdot Y_1,$$

wobei

- $Y_0$ der stets negative erwartete Ertrag bei der Basic Strategy ohne Kartenzählen ist und
- $C_b \cdot Y_1$ den erwarteten wachsenden Ertrag mittels Kartenzählen bei Anpassung des Wetteinsatzes darstellt.

**Konsequenz**

*Zählen verbessert den Ertrag nicht, wenn nicht die Einsätze an den True Count angepasst werden.*

- Kartenzählen erfordert Höchstmaß an Konzentration und ist nur mit viel Übung durchführbar.
- Der **Running Count** ist noch einfach zu zählen, den **True Count** innerhalb kurzer Zeit im Kopf zu berechnen ist fast unmöglich.
- Das Rechnen ist die eine Kunst, Rechnen ohne dass es jemand merkt, die andere.
- Der **Running Count** ergibt sehr häufig Werte in der Nähe von 0.

- Welche Möglichkeiten des Zählens gibt es?

  → Man benutzt einen Zählvektor. Jeder Kartenwert erhält einen Eintrag.

- Was sind Running Count und True Count?

- Welche Vorteile habe ich als Spieler?

# Zusammenfassung

- Welche Möglichkeiten des Zählens gibt es?

  $\rightarrow$ Man benutzt einen Zählvektor. Jeder Kartenwert erhält einen Eintrag.

- Was sind Running Count und True Count?

  $\rightarrow$ Der Running Count bezeichnet die resultierende Zahl aus der Zählung im Verlauf des Spiels, der True Count setzt ihn in Beziehung zur verbleibenden Anzahl der Karten.

- Welche Vorteile habe ich als Spieler?

# Zusammenfassung

- Welche Möglichkeiten des Zählens gibt es?

  $\rightarrow$ Man benutzt einen Zählvektor. Jeder Kartenwert erhält einen Eintrag.

- Was sind Running Count und True Count?

  $\rightarrow$ Der Running Count bezeichnet die resultierende Zahl aus der Zählung im Verlauf des Spiels, der True Count setzt ihn in Beziehung zur verbleibenden Anzahl der Karten.

- Welche Vorteile habe ich als Spieler?

  $\rightarrow$ Wenn ich die Zusammensetzung der verbleibenden Karten abschätzen kann, kann ich meine Wetteinsätze anpassen und meinen Ertrag steigern.

- N. Richard Wethamer: Risk and Reward - The Science of Casino Blackjack, Springer
- J. Bewersdorff: Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen, Vieweg
- www.casino.de/blackjack

- **Balancierte Zählungen** starten nach dem Reshuffle bei 0.
- **Unbalancierte Zählungen** machen das nicht.

### Vorteil

*Balancierter Zählvektor kann durch Zufügen einer additiven Konstante in einen unbalancierten Zählvektor überführt werden, ohne dass sich seine Performance ändert. Somit lassen sich die Zahlen im Vektor sowie die Werte für $C_b$ vereinfachen.*

### Nachteil

*Nach dem Reshuffle muss zur Berechnung des True Counts der alte Running Count vom neuen Running Count abgezogen werden (Stichwort human capability). Darüber hinaus wird f als konstant angenommen (Werte zwischen 0.6 und 0.75), sodass die resultierende Wetthöhe B nur approximiert wird.*