Blackjack: Spielstrategien mit Kartenzählen

Florian Kochems

31.01.2012

Literatur: N. Richard Werthamer:
Risk and Reward - The Science of Casino Blackjack.
Springer

- Analyse und Vergleich verschiedener Möglichkeiten der Ertragssteigerung beim Blackjack durch zählbasierte Optimierung der Spielstrategie.
- Vergleich verschiedener Zählvektoren.
- Überblick zur Counter Basic Strategy.

- Zählvektoren: $\boldsymbol{\alpha}_\lambda, (1 \leq \lambda \leq \Lambda \leq 9)$
- Anzahl der gezogenen Karten mit Wert j, $(1 \leq j \leq 10)$: m_j
- Running Count: $\boldsymbol{\alpha}_\lambda \cdot \boldsymbol{m} = \sum_{j=1}^{10} \alpha_\lambda(j) m(j)$
- True Count: $\gamma = \frac{Running\ Count}{verbleibende\ Decks} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_\lambda \cdot \boldsymbol{m}}{D - \sum_j m(j)/52}$
- Wahrscheinlichkeitsvektor: $\mathbf{d}$
  Beispiel: $\mathbf{d}_0 = \left(\frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{4}{13}\right)$
- Deckdicke: f
- Normalisierte Variablen: $\hat{\gamma}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\mathbf{d}}, \hat{\nabla}$.
- Familie der Spielstrategien: $\boldsymbol{\pi}$

Beispiel: Hi-Lo Zählvektor

j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
α_j	1	1	1	1	1	0	0	0	-1	-1

Spiel mit $D = 6$ Decks, 5 Karten ($\approx$ 0.1 Decks) gespielt: Bube, 3, 5, 8, 6

- *Running Count:* $-1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 2$
- *True Count:* $\gamma \approx \frac{2}{5{,}9} \approx 0.34$

Expected Return ist der Anteil des Einsatzes, den man pro Spielrunde bekommt (gewinnt oder verliert).

$$\langle R_f(\mathbf{d};\boldsymbol{\pi})\rangle_{\hat{\gamma}}$$

Ertrag Y ist der durchschnittliche *Expected Return* in Abhängigkeit der *Wahrscheinlichkeitsverteilung* von γ, gewichtet mit dem *Wetteinsatz B* und gemittelt über alle *Deckdicken f* bis zum Einstich *F*.

$$Y = \frac{1}{F}\int_0^F df \int d\hat{\gamma}\ \hat{p}(\gamma)B(\hat{\gamma})\langle R_f(\mathbf{d};\boldsymbol{\pi})\rangle_{\hat{\gamma}}$$

$$= \langle\langle B(\hat{\gamma})\ \langle R_f\ (\mathbf{d};\boldsymbol{\pi})\rangle_{\hat{\gamma}}\rangle\rangle$$

Ziel: optimiere $\boldsymbol{\pi}$

- $\boldsymbol{\pi}_0$ maximiert Y bei $\hat{\gamma} = 0$.
- $\Delta \equiv \sqrt{\frac{f}{52D(1-f)}}$, Δ^2 ist vernachlässigbar klein für $D \geq 4$.
- Potenzreihendarstellung des Expected Return mit den Hermite Polynomen H_n:

$$\langle R_f(\mathbf{d})\rangle_{\hat{\gamma}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} H_n(-\sum_{\lambda} \frac{\hat{\gamma}_\lambda}{\Delta} \boldsymbol{\alpha}_\lambda \hat{\nabla}) R_0(\mathbf{d}_0).$$

$$(H_0(z) = 1,\ H_1(z) = z,\ H_2(z) = z^2 - 1)$$

Potenzreihenentwicklung
um $\delta\boldsymbol{\pi} \equiv \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}_0$ bis $n = 2$:

$$\begin{aligned}\langle R_f(\mathbf{d};\boldsymbol{\pi})\rangle_{\hat{\gamma}} \cong{} & R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0) + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\pi}^T \left(\left(\frac{\partial^2 R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0)}{\partial\boldsymbol{\pi}_0 \partial\boldsymbol{\pi}_0} \right) \delta\boldsymbol{\pi} \right) \\ & - \sum_{\lambda} \hat{\gamma}_\lambda \hat{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda \cdot \hat{\nabla} \left(R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0) + \delta\boldsymbol{\pi} \cdot \frac{\partial R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0)}{\partial\boldsymbol{\pi}_0} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\lambda'} (\hat{\gamma}_\lambda \hat{\gamma}_{\lambda'} - \Delta^2 \delta_{\lambda,\lambda'})\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda^T \left(\left(\hat{\nabla}\hat{\nabla} R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0) \right) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\lambda'} \right)\end{aligned}$$

Maximierung bezüglich $\delta\boldsymbol{\pi}$:

$$\langle R_f(\mathbf{d};\boldsymbol{\pi}_0)\rangle_{\hat{\gamma}} = R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0) - \sum_{\lambda} \hat{\gamma}_\lambda \hat{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda \cdot \hat{\nabla} R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda^T \left(\left[\left(\hat{\gamma}_\lambda \hat{\gamma}_{\lambda'} - \Delta^2 \delta_{\lambda,\lambda'}\right) \hat{\nabla}\hat{\nabla} R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0) + \hat{\gamma}_\lambda \hat{\gamma}_{\lambda'} \mathbf{Q} \right] \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\lambda'} \right)$$

mit

$$\mathbf{Q} \equiv \sum_{l,l'} \frac{\partial \hat{\nabla} R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0)}{\partial \boldsymbol{\pi}_{0,l}} \left(\frac{\partial^2 R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0)}{\partial \boldsymbol{\pi}_0 \partial \boldsymbol{\pi}_0} \right)^{-1}_{l,l'} \frac{\partial \hat{\nabla} R_0(\mathbf{d}_0;\boldsymbol{\pi}_0)}{\partial \boldsymbol{\pi}_{0,l'}}.$$

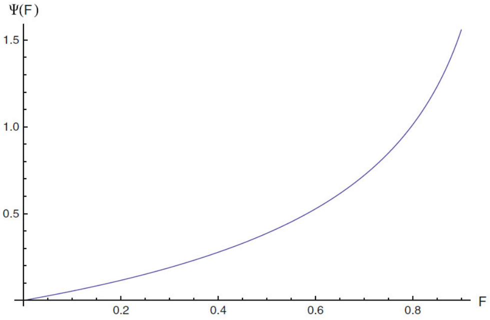
- Die reell-symmetrische 10×10 Matrix $\mathbf{Q}$ enthält partielle Ableitungen von R nach $\boldsymbol{\pi}_0$.
- Wegen $\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\nabla} = 0$ gilt auch $\hat{\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0$.
- Die 55 verschiedenen Einträge von $\mathbf{Q}$ werden numerisch berechnet.

Ist die Wette fixiert, so ergibt sich als Ertrag:

$$Y = B \left[R_0 + \frac{\psi(F)}{52D} \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \hat{\alpha}_\lambda^T (\mathbf{Q}\, \hat{\alpha}_\lambda) \right]$$

mit

$$\psi(F) \equiv 52D \langle\langle \Delta^2 \rangle\rangle = -1 + \frac{1}{F}\, ln \frac{1}{1-F}$$



Zählvektor zur Spielanpassung

Aufgabe: Maximiere Y bezüglich $\hat{\alpha}_\lambda$.

Idee: Benutze die algebraischen Eigenschaften von $\mathbf{Q}$.

- Darstellung $\mathbf{Q} = \sum_{\kappa=1}^{9} Q_\kappa \mathbf{e}_\kappa \mathbf{e}_\kappa^T$.
- Das Eigenwertspektrum kann geordnet werden: $Q_1 \geq \cdots \geq Q_9 \geq 0$.
- Y wird maximal, wenn die Λ größten Eigenwerte $Q_1, ..., Q_\Lambda$ gewählt werden.

Maximum

$$Y = B \left[R_0 + \frac{\psi(F)}{52D} \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{\Lambda} Q_\kappa \right]$$

Zählvektor zur Spielanpassung

- $Q_1 / \sum_{\kappa=1}^{9} Q_\kappa = .833/1.256 \approx 2/3$
  Also wird durch den einzelnen Zählvektor bereits ein großer Teil der möglichen Ertragssteigerung erreicht.
- Der optimale Zählvektor zur Spielanpassung ist $\alpha^\star(j) \equiv e_1(j)/\hat{d}(j)$, jedoch für die Praxis ungeeignet.
- Die Spielkorrelation $C_p \equiv \hat{\alpha}^\star \, \mathbf{e}_1$ ist ein Maß für den Wert eines approximativen Zählvektors.

Zählvektoren zur Spieloptimierung

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e_1(j)$	+0.10	+0.09	+0.16	+0.30	+0.42	+0.06	+0.25	+0.18	-0.03	-0.77
$\boldsymbol{\alpha}^\star(j)$	+0.37	+0.33	+0.57	+1.10	+1.52	+0.22	+0.88	+0.66	-0.12	-1.38
$\boldsymbol{\alpha}^\star_{HO}(j)$	0	0	0	+1	+1	0	+1	+1	0	-1
Hi-Opt	0	0	+1	+1	+1	+1	0	0	0	-1
Hi-Lo	-1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	-1

Spielkorrelation der approximativen Zählvektoren:

- $\boldsymbol{\alpha}^\star_{HO}$: $C_p = .95$
- Hi-Opt: $C_p = .88$
- Hi-Lo: $C_p = .80$

- Unter Verwendung des Zählvektors $\alpha^\star$ und Anpassung der Spielstrategie verbessert sich der Ertrag.
- $Y/B = R_\infty + (.0067 + .0080\psi(F))/D$

Ergebnis:

- Die Anpassung der Spielstrategie verbessert das Ertragsverhältnis Y/B nur geringfügig: höchstens um $+0.002$ für $D \geq 4$.
- Der Ertrag kommt dadurch nicht annähernd in einen positiven Bereich!

Zählvektor für Wette und Spiel

- Die Ausrichtung der Spielstrategie nach dem True Count führt nur zu geringfügiger Ertragssteigerung.
- Eine Anpassung des Wetteinsatzes erscheint sinnvoll und wird nun ebenfalls betrachtet.

Anpassung des Wetteinsatzes und der Spielstrategie durch

- einen *gemeinsamen* Zählvektor oder
- zwei *verschiedene* Zählvektoren.

Verwendung eines gemeinsamen Zählvektors für Wetteinsatz und Spielentscheidungen

$$Y = Y_0 + Y_1 \hat{\alpha} \mathbf{v}_b + \hat{\alpha}\hat{\alpha} : \left(Y_{21} \hat{\nabla}\hat{\nabla} R_0(\mathbf{d}_0; \boldsymbol{\pi}_0) + Y_{22} \mathbf{Q} \right) /2$$

mit

- $Y_1 \equiv \langle\langle B(\hat{\gamma})\ \hat{\gamma} \rangle\rangle\ |\hat{\nabla} R_0(\mathbf{d}_0; \boldsymbol{\pi}_0)|$.
- $Y_{21} \equiv \langle\langle B(\hat{\gamma})\ (\hat{\gamma}^2 - \Delta^2) \rangle\rangle$.
- $Y_{22} \equiv \langle\langle B(\hat{\gamma})\ \hat{\gamma}^2 \rangle\rangle$.

Durch Berechnungen erhält man

$$Y \cong Y_0 + Y_1(1 + .28\eta + .03\eta^2)$$

- $\eta = Y_{22}/Y_1$ ist in der Realität klein, wenn Wettanpassung durchgeführt wird.
- Die Ertragssteigerung ist daher weitestgehend vernachlässigbar.

Verwendung zweier Zählvektoren

- $\mathbf{e}_1$ für Spielentscheidungen und $\mathbf{v}_b$ für den Wetteinsatz.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e_1(j)$	+0.10	+0.09	+0.16	+0.30	+0.42	+0.06	+0.25	+0.18	-0.03	-0.77
$v_b(j)$	-1.28	+0.82	+0.94	+1.21	+1.52	+0.98	+0.57	-0.06	-0.42	-1.07

$$Y = Y_0 + Y_1 + Y_{22} Q_1 / 2 \approx Y_0 + Y_1 (1 + .42\eta)$$

- Ertragssteigerung (für $\eta < 4.8$) gegenüber der Verwendung eines einzelnen Zählvektors.

Ertragssteigerung durch Versicherung

- Bei Befolgung der Basisstrategie ist der Expected Return der Versicherung negativ.
- Dieser Return wird jedoch positiv für hohe (positive) True Counts.
- $\langle R_I \rangle_\gamma = \langle\langle d\ (1)\ (3d(10) - 1)/2 \rangle\rangle_\gamma$
- Eine Vereinfachung davon ist

$$\langle R_I \rangle_\gamma^0 \equiv \frac{1}{2} \langle\langle d\ (1) \rangle\rangle_\gamma\ (3\langle\langle d(10) \rangle\rangle_\gamma - 1)$$

$\rightarrow$ positiv für $\gamma \geq \gamma_I^0 \approx 4.053$.

- Zusätzlicher Gewinn $Y_I \cong \langle\langle B(\gamma)\ \langle R_I\rangle_\gamma^0\ \Theta\ (\gamma - \gamma_I^0)\rangle\rangle$.
- Der Wert dieses Ausdrucks ist zwar klein, jedoch positiv und vergleichbar mit anderen Ertragssteigerungen durch zählabhängige Spielentscheidungen.

Empfehlung:
Versicherung sollte nur abgeschlossen werden, wenn der True Count höher als ungefähr +5 ist (unter Verwendung eines Hi-Lo Zählvektor o.ä.).

Verwendung eines speziell auf die Versicherung abgestimmten Zählvektors $\mathbf{v}_i$.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_i(j)$	+2/3	+2/3	+2/3	+2/3	+2/3	+2/3	+2/3	+2/3	+2/3	-3/2

- Etwa 50 Prozent Verbesserung gegenüber Hi-Lo.
- Die relativ geringe Ertragssteigerung rechtfertigt es kaum, einen separaten Zählvektor für die Versicherung zu verwenden.

Counter Basic Strategy

- Spielanpassung an den jeweiligen True Count ist sehr schwierig.
- Suche nach guten vereinfachten Strategien.
- Illustrious 18, Catch 22 (Schlesinger)
- *Counter Basic Strategy* (Werthamer, Marcus)

Idee:

- Verwendung eines einzelnen für den Wetteinsatz optimierten True Counts.
- Ertragssteigerung kann auch erreicht werden, wenn nicht alle Spielparameter nach dem True Count variieren.
- Für höhere True Counts sind die Wetteinsätze höher.
- Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wetteinsätze hat daher ein Maximum für einen positiven True Count $\gamma^\star$.
  $\rightarrow$ wähle die Spielstrategie $\pi^\star$ die in der Nähe von $\gamma^\star$ optimal ist.
- *Spielstrategie ist fixiert*!

Ertrag mit Strategie $\boldsymbol{\pi}^\star$:

$$Y^\star = Y(\gamma^\star) = \langle\langle B(\gamma)\ \langle R_f\ (\mathbf{d}; \boldsymbol{\pi}^\star)\rangle_\gamma\rangle\rangle$$

Wettstil	Lifetimer		Weekender	
Anzahl Decks	1	4	1	4
Optimal Basic	+.076	+.019	+.006	+.008
Counter Basic	+.091	+.023	+.009	+.011
Count-Dependent	+.083	+.022	+.013	+.011
true count $\gamma^\star$	5.1	3.2	4.6	3.5

- Counter Basic führt zu deutlich höherer Ertragssteigerung als Optimal Basic.
- Ertragsverhältnis ist bei Counter Basic zum Teil sogar *besser* als bei Count-Dependent!

Counter Basic Strategy für $D = 1$ und $\gamma \approx +5$
Abweichungen zu $\gamma = 0$ sind fett gedruckt.

Upcard	Stand on	Double	Split
A	17; s18	**10,** 11	A, 8, **9**
2	**12**; s18	9-11; s17, **18**	A, 6-9
3	**12**; s18	9-11; **s15, 16,** 17, 18, **19 18**	A, 2, **3,** 6-9
4	12; s18	**8,** 9-11; s13-18, **19**	A, 2, **3**, 6-9
5	12; s18	8-11; s13-18, **19, 20**	A, 2, 3, 6-9
6	12; s18	8-11; s13-19	A, 2, 3, 6-9
7	17; s18	**9,** 10, 11	A, 2, 3, 7, 8
8	17; s18	10, 11	A, 8, 9
9	**16**; s19	10, 11	A, 8, 9
10	**15**; s19	**10,** 11	A, 8

Zusammenfassung

- Anpassung der Spielstrategie an den True Count liefert bei fixiertem Wetteinsatz nur geringfügige Ertragssteigerung.

- Anpassung der Spielstrategie an den True Count liefert bei fixiertem Wetteinsatz nur geringfügige Ertragssteigerung.
- Zwei separate Zählvektoren für Wetteinsatz und Spielstrategie liefern eine höhere Ausbeute als ein gemeinsamer Zählvektor.

- Anpassung der Spielstrategie an den True Count liefert bei fixiertem Wetteinsatz nur geringfügige Ertragssteigerung.
- Zwei separate Zählvektoren für Wetteinsatz und Spielstrategie liefern eine höhere Ausbeute als ein gemeinsamer Zählvektor.
- Versicherung erst ab einem True Count von etwa +5.

Zusammenfassung

- Anpassung der Spielstrategie an den True Count liefert bei fixiertem Wetteinsatz nur geringfügige Ertragssteigerung.
- Zwei separate Zählvektoren für Wetteinsatz und Spielstrategie liefern eine höhere Ausbeute als ein gemeinsamer Zählvektor.
- Versicherung erst ab einem True Count von etwa +5.
- Counter Basic Strategy ist eine vereinfachte Strategie, die den Ertrag maximiert.

- Anpassung der Spielstrategie an den True Count liefert bei fixiertem Wetteinsatz nur geringfügige Ertragssteigerung.
- Zwei separate Zählvektoren für Wetteinsatz und Spielstrategie liefern eine höhere Ausbeute als ein gemeinsamer Zählvektor.
- Versicherung erst ab einem True Count von etwa +5.
- Counter Basic Strategy ist eine vereinfachte Strategie, die den Ertrag maximiert.
- Der Wetteinsatz richtet sich dabei nach dem True Count, die Spielstrategie ist fixiert und optimiert für einen positiven True Count.

- N. Richard Werthamer: Risk and Reward - The Science of Casino Blackjack. Springer.
- N. Richard Werthamer: Basic Strategy for Card-Counters: An Analytic Approach.
- N.Richard Werthamers Website: www.blackjack-science.net