Universität des Saarlandes
Seminar der Fachrichtung Mathematik
Rudolf Umla

Sätze über Konvexität von Kapitel 4.7 bis 4.10

Theorem 4.7-1. Sei U ein konvexer Unterraum eines normierten Vektorraums. Dann sind sowohl $\overline{U}$ als auch int U konvex. Außerdem:

$$u \in \operatorname{int} U \,\text{und}\, v \in \overline{U} \Rightarrow [u, v[\subset \operatorname{int} U,$$

dh. $\overline{\operatorname{int} U} = \overline{U}$, falls $\operatorname{int} U \neq \varnothing$.

Theorem 4.7-2.
a) Sei U ein nichtleerer abgeschlossener konvexer Unterraum eines normierten Vektorraums V und sei $w \notin U$. Dann gibt es $L \in (V' - \{0\})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$, so dass

$$L(w) \geq \alpha + \epsilon \,\text{und}\, L(v) \leq \alpha - \epsilon \quad \forall v \in U.$$

b) Ein nichtleerer abgeschlossener konvexer Unterraum, der echt in einem normierten Vektorraum enthalten ist, ist in mindestens einem abgeschlossenen Halbraum enthalten, und er ist der Durchschnitt aller Halbräume, die ihn enthalten.

Definition konvexe Hülle. Sei U ein nichtleerer Unterraum des Vektorraums V. Folgende Definitionen sind äquivalent: Die *konvexe Hülle* co U von U ist

(i) der Durchschnitt aller konvexer Unterräume von V, die U enthalten.

(ii) der kleinste konvexe Unterraum, der U enthält.

(iii) der Raum, der durch die Konvexkombinationen der Elemente von U aufgespannt wird, dh. von allen Elementen aus V der Form

$$v = \sum_{k=1}^{N} \mu_k v_k, \text{ mit } v_k \in U \text{ und } \sum_{k=1}^{N} \mu_k = 1, \ N \text{ beliebig.}$$

Bemerkung. Analog zu (i) und (ii) ist die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{co}\, U$ von U definiert; man ersetze lediglich konvexen Unterraum durch abgeschlossenen konvexen Unterraum.

Theorem 4.7-3.
(a) Sei U ein nichtleerer Unterraum eines normierten Vektorraums. Dann ist

$$co\, \overline{U} \subset \overline{co}\, U = \overline{co\, U}.$$

(b) $\overline{co}\, U$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die U enthalten.
(c) Die konvexe Hülle eines kompakten Unterraums U eines endlich dimensionalen Raums ist kompakt. Folglich ist dann $co\, \overline{U} = \overline{co}\, U$.

Theorem 4.7-4. Sei $\mathbb{M}^3_+ = \{\mathbf{F} \in \mathbb{M}^3 \, ; \, det\, \mathbf{F} > 0\}$. Dann gilt

(i) $co\, \mathbb{M}^3_+ = \mathbb{M}^3$,

(ii) $co\left\{(\mathbf{F}, \, \mathbf{Cof\ F}, \, det\, \mathbf{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}; \, \mathbf{F} \in \mathbb{M}^3_+\right\} = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[$.

Theorem 4.7-5. (Notwendige Bedingung für ein lokales Minimum) Sei $J : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf einer konvexen Teilmenge U eines normierten Vektorraums definierte Funktion. Falls ein Punkt $u \in U$ eine lokale Minimumstelle der Funktion J ist, und die Funktion J bei u differenzierbar ist, dann gilt

$$J'(u)(v - u) \geq 0 \ \ \forall v \in U.$$

Definition konvexe Funktion. Sei U eine konvexe Teilmenge des normierten Raums V, dann heißt die Funktion $J : U \to \mathbb{R}$ *konvex* auf U, wenn

$$u, v \in U \text{ und } \lambda \in [0,1] \Rightarrow J(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v),$$

und *streng konvex* auf U, wenn

$$u, v \in U,\ u \neq v, \text{ und } \lambda \in]0,1[\Rightarrow J(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v).$$

Theorem 4.7-6. (Konvexität und Ableitung) Sei $J : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf der konvexen Menge U eines normierten Vektorraums.
(a) Die Funktion J ist genau dann konvex auf U, wenn

$$J(v) \geq J(u) + J'(u)(v-u) \ \ \forall u, v \in U.$$

(b) Die Funktion J ist genau dann streng konvex auf U, wenn

$$J(v) > J(u) + J'(u)(v-u) \ \ \forall u, v \in U, u \neq v.$$

Theorem 4.7-7. (Konvexität und zweite Ableitung) Sei $J : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion auf der konvexen Menge U eines normierten Vektorraums.
(a) Die Funktion J ist genau dann konvex auf U, falls

$$J''(u)(v-u, v-u) \geq 0 \ \ \forall u, v \in U.$$

(b) Die Funktion J ist streng konvex auf U, falls

$$J''(u)(v-u, v-u) > 0 \ \ \forall u, v \in U, u \neq v.$$

Theorem 4.7-8. (Minima einer konvexen Funktion) Sei $J : U \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion auf einer konvexen Teilmenge U eines normierten Vektorraums.
(a) Jedes lokale Minimum von J auf U ist global auf U.

(b) Falls J streng konvex ist, hat J eine Minimumstelle auf U und dieses ist ein striktes Minimum.
(c) Sei J differenzierbar bei $u \in U$. Der Punkt u ist genau dann eine Minimumstelle von J auf U, wenn

$$J'(u)(v-u) \geq u \ \ \forall v \in U.$$

(d) Falls die Menge U offen ist, ist ein Punkt u genau dann ein Minimum von J auf U, wenn J'(u)=0 ist.

Theorem 4.7-9. Sei U eine Teilmenge eines Vektorraums V und sei $J : U \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktion. Dann ist die Funktion $\bar{J} : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit

$$\bar{J}(v) = \begin{cases} J(v) & \text{, falls} \quad v \in U \\ +\infty & \text{, falls} \quad v \notin U \end{cases}$$

genau dann konvex, wenn die Menge U und die Funktion J konvex sind.

Theorem 4.7-10. Sei V ein Vektorraum.
(a) Eine Funktion $J : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist genau dann konvex, wenn ihr Epigraph

$$\text{epi}\, J := \{(v, \alpha) \in V \times \mathbb{R};\ J(v) \leq \alpha\}$$

eine konvexe Teilmenge des Raums $V \times \mathbb{R}$ ist.
(b) Sei $(J_i : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\})_{i \in I}$ eine Familie von konvexen Funktionen. Dann ist die Funktion $J = \sup\limits_{i \in I} J_i$ ebenfalls konvex.
(c) Sei V endlichdimensional. Eine konvexe Funktion $J : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist im Inneren der Menge $\{v \in V; J(v) < +\infty\}$ stetig.

Theorem 4.8-1. Sei $x \in \overline{\Omega}$ so, dass die Funktion

$$\hat{W}(x, \cdot) : \mathbf{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{W}(x, \mathbf{F}) \ \in \mathbb{R}$$

konvex ist. Dann gilt:
(a) Diese Eigenschaft ist unverträglich mit der Eigenschaft: $\hat{W}(x, \mathbf{F}) \to +\infty$ bei $\det \mathbf{F} \to 0^+,\ \mathbf{F} \in \mathbb{M}^3_+$.
(b) Das Axiom über die 'Rand-Gleichheit' (frame-indifference) besagt für eine beliebige Deformation φ der Referenz-Konfiguration $\overline{\Omega}$, dass die Eigenwerte

τ_i des Cauchyschen Spannungstensors $T^\varphi(x^\varphi)$ bei jedem Punkt $x^\varphi = \varphi(x)$ der deformierten Konfiguration den folgenden Ungleichungen genügen:

$$\tau_1 + \tau_2 \geq 0,\ \tau_2 + \tau_3 \geq 0,\ \tau_1 + \tau_3 \geq 0,\ \ \tau_i = \lambda_i \left(T^\varphi(x^\varphi)\right).$$

Theorem 4.9-1. Sei $\Phi : [0, +\infty[^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, konvexe,in jeder Variablen nicht fallende Funktion. Dann ist die Funktion

$$W : \mathbf{F} \in \mathbb{M}^n \to W(\mathbf{F}) = (\Phi(v_1(\mathbf{F}), v_2(\mathbf{F}), ..., v_n(\mathbf{F}))$$

$[v_i(\mathbf{F}) :=$ Singulärwert von $\mathbf{F}]$ konvex.

Definition Polykonvexität. Eine Funktion $\hat{W} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{F} \subset \mathbb{M}^3$ heißt *polykonvex*, falls es eine konvexe Funktion $\mathbb{W}^* : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{U} := \left\{(\mathbf{F},\ \mathbf{Cof\ F},\ \det \mathbf{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R};\ \mathbf{F} \in \mathbb{F}\right\},$$

gibt, so dass

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \mathbb{W}^* \left(\mathbf{F},\ \mathbf{Cof\ F},\ \det \mathbf{F}\right) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbb{F}$$

oder äquivalent dazu, falls es eine konvexe Funktion $\mathbb{W} : co\,\mathbb{U} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \mathbb{W} \left(\mathbf{F},\ \mathbf{Cof\ F},\ \det \mathbf{F}\right) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbb{F}.$$

Theorem 4.9-2. Sei $\hat{W} : \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ eine Energiefunktion vom Typ

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{M} a_i \left(v_1^{\gamma_i} + v_2^{\gamma_i} + v_3^{\gamma_i}\right) + \sum_{j=1}^{N} b_j \left((v_2 v_3)^{\delta_j} + (v_1 v_3)^{\delta_j} + (v_2 v_3)^{\delta_j}\right) + \Gamma(det\,\mathbf{F}),$$

wobei

$$\begin{cases} v_i = v_i(\mathbf{F})\,\text{sind die Singulärwerte von } \mathbf{F}\,; \\ a_i > 0,\ \text{und } \gamma_i \geq 1,\ 1 \leq i \leq M;\ b_j > 0 \text{ und } \delta_j \geq 1,\ 1 \leq j \leq N\,; \\ \Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \text{ ist eine konvexe Funktion.} \end{cases}$$

Dann ist die Funktion $\hat{W}$ polykonvex, und es gilt eine Koerzivitäts-Ungleichung der Form

$$\hat{W}(\mathbf{F}) \geq \alpha \left(\|\mathbf{F}\|^p + \|\mathbf{Cof\ F}\|^q\right) + \Gamma(\det\ \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbb{M}^3_+$$

$$\text{mit } \alpha > 0,\ p = \max_i \gamma_i,\ q = \max_j \delta_i.$$

Theorem 4.10-1. Eine Energiefunktion vom Typ

$$\hat{W} = a_1 \cdot \text{tr } \mathbf{C} + a_2 \cdot \text{tr } \mathbf{C}^2 + b \cdot \text{tr } \mathbf{Cof\ C}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \text{ mit } a_2 > 0,\ b > 0,$$

ist nicht polykonvex, falls $a_1 < 0$ ist.

Theorem 4.10-2. Seien $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ zwei Lamé Konstanten.
Dann existiert eine polykonvexe Energiefunktion der Form

$$\mathbf{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{W}(\mathbf{F}) = a \left\|\mathbf{F}\right\|^2 + b \left\|\mathbf{Cof\ F}\right\|^2 + \Gamma(\det \mathbf{F}) + e$$

mit

$$a > 0,\ b > 0,\ \Gamma(\delta) = c\delta^2 - d \operatorname{Log} \delta,\ c > 0,\ d > 0,\ e \in \mathbb{R},$$

für die gilt

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = \breve{W}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu \, \text{tr } \mathbf{E}^2 + \mathcal{O}\left(\left\|\mathbf{E}\right\|^3\right),$$

$$\mathbf{I} + 2\mathbf{E} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}.$$

Eine Energiefunktion diese Typs genügt der Koerzivitäts-Ungleichung

$$\hat{W}(\mathbf{F}) \geq \alpha \left(\left\|\mathbf{F}^2\right\| + \left\|\mathbf{Cof\ F}\right\|^2 + (\det \mathbf{F})^2\right) + \beta, \quad \alpha > 0.$$