# Äußere Algebra

**Katrin Steinborn**

28. Oktober 2008

Seminar

**„Differentialformen in Natur und Technik“**

WS 2008/09

## Inhaltsverzeichnis

## 1 Der Raum der p-Vektoren

$\mathbb{L}$ sei ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Vektoren $\alpha$ , $\beta$ ,...

Für $p = 0, 1, ..., n$ konstruieren wir einen neuen Vektorraum $\bigwedge^{\mathbf{p}} \mathbb{L}$ über $\mathbb{R}$.

Der Raum der p-Vektoren

Beispiele:

- $\bigwedge^0 \mathbb{L} = \mathbb{R}$
- $\bigwedge^1 \mathbb{L} = \mathbb{L}$
- $\bigwedge^2 \mathbb{L} = \mathbb{L} \wedge \mathbb{L} = ?$

**Herleitung von $\bigwedge^2 \mathbb{L}$:**
$\bigwedge^2 \mathbb{L}$ besteht aus den Summentermen

$$\sum a_i(\alpha_i \wedge \beta_i),$$

Hierbei bezeichnet $\alpha_i \wedge \beta_i$ das **Dachprodukt (Äußeres Produkt, Wedge-Produkt)**.

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \wedge \beta &= a_1(\alpha_1 \wedge \beta) + a_2(\alpha_2 \wedge \beta) \qquad (1) \\
\alpha \wedge (b_1\beta_1 + b_2\beta_2) &= b_1(\alpha \wedge \beta_1) + b_2(\alpha \wedge \beta_2) \qquad (2) \\
\alpha \wedge \alpha &= 0 \qquad (3) \\
\alpha \wedge \beta &= -\beta \wedge \alpha \qquad (4)
\end{aligned}
$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $\alpha_i$, $\beta_i \in \mathbb{L}$.

- Für $\alpha = c\beta$ ist $\qquad \alpha \wedge \beta = (c\beta) \wedge \beta = c(\beta \wedge \beta) = c \cdot 0 = 0$
- Für $\alpha \neq c\beta$ ist $\qquad \alpha \wedge \beta \neq 0$

Seien $\sigma_1, ..., \sigma_n$ eine Basis von $\mathbb{L}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{L}$. Dann ist

$$\alpha = \sum_i a_i \sigma_i \qquad\qquad \beta = \sum_j b_j \sigma_j.$$

Somit ist

$$\alpha \wedge \beta = (\sum_i a_i \sigma_i) \wedge (\sum_j b_j \sigma_j) = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i \wedge \sigma_j)$$

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i)(\sigma_i \wedge \sigma_j)$$

Für alle $\lambda \in \bigwedge^2 \mathbb{L}$ gilt:

$$\lambda = \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i)(\sigma_i \wedge \sigma_j)$$

$$dim \bigwedge^2 \mathbb{L} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

**Allgemeine Herleitung von $\bigwedge^p \mathbb{L}$ ($2 \leq p \leq n$):**

Der p-Vektorraum besteht aus allen Summentermen von $\sum a(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p)$ mit Berücksichtigung folgender Rechenregeln:

1. $(a\alpha + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_p = a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_p) \qquad \forall \alpha_i$
   $\Longrightarrow \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p$ ist multilinear.

2. $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p = 0$ falls für $i \neq j$ $\alpha_i = \alpha_j$

3. $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p$ ändert das Vorzeichen, sobald zwei beliebige $\alpha_i$ vertauscht werden.
   $\Longrightarrow$ Für eine beliebige Permutation $\pi$ aus der Menge {1,2,...,p} gilt:
   $\alpha_{\pi(1)} \wedge ... \wedge \alpha_{\pi(p)} = (sgn\pi)\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p$

Sei $\sigma_1, ..., \sigma_n$ eine Basis von $\mathbb{L}$. Eine Basis von $\bigwedge^p \mathbb{L}$ hat die Form

$$\sigma_H = \sigma_{h_1} \wedge ... \wedge \sigma_{h_p},$$

$H = \{h_1, h_2, ..., h_p\}$ mit $1 \leq h_1 < h_2 < ... < h_p \leq n$.

Somit ist $dim \bigwedge^p \mathbb{L} = \binom{n}{p}$
Nebenbei: $dim \bigwedge^n \mathbb{L} = \binom{n}{n} = 1$

Also:
Ein beliebiger Vektor $\lambda \in \bigwedge^p \mathbb{L}$ lässt sich in der Form

$$\lambda = \sum_H a_H \sigma_H$$

darstellen, wobei H aus den geordneten Indizes besteht.

Was geschieht für $p > n$ mit $\bigwedge^p \mathbb{L}$?

- Jeder Vektor $\alpha$ kann durch $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p$ als eine Linearkombination der Basisvektoren $\sigma_1, ..., \sigma_n$ dargestellt werden.

  $\Longrightarrow \alpha = \sum a_{h_1,...,h_p} \sigma_{h_1} \wedge ... \wedge \sigma_{h_p}$

  $\Longrightarrow$ Jeder Term $\sigma_{h_1} \wedge ... \wedge \sigma_{h_p}$ besteht aus p $(> n)$ Vektoren aus den Basisvektoren.

  $\Longrightarrow \exists \sigma_i = \sigma_j$

  $\Longrightarrow \alpha = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p = 0$

  $\Longrightarrow \bigwedge^p \mathbb{L} = 0$ für $p > n$

- Definition einer linearen Abbildung auf $\bigwedge^p \mathbb{L}$:

g genüge folgenden Eigenschaften:

(1) g besteht aus p Variablen aus $\mathbb{L}$ und ist multilinear,

(2) g ist alternierend, d. h. g wird Null für $\sigma_i = \sigma_j, i \neq j$ und g vertauscht das Vorzeichen, sobald zwei Variablen vertauscht werden

$\Longrightarrow f(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) = g(\alpha_1, ..., \alpha_p)$

$\Longrightarrow$ Definition der Determinante

## 2 Determinanten

Sei A eine lineare Transformation von $\mathbb{L}$ auf sich selbst. Definiere eine Funktion $g = g_A$ mit n Variablen auf $\mathbb{L}$:

$$g_A(\alpha_1, ..., \alpha_n) = A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_n,$$
$$g_A : \bigtimes^n \mathbb{L} \longrightarrow \bigwedge^n \mathbb{L}$$

g multilinear und alternierend $\Longrightarrow \exists$ lineares Funktional $f = f_A$

$$f_A : \quad \bigwedge^n \mathbb{L} \longrightarrow \bigwedge^n \mathbb{L} \text{ mit}$$
$$f_A(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) = g_A(\alpha_1, ..., \alpha_n) = A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_n$$

Da $dim \bigwedge^n \mathbb{L} = 1$, ist die einzige lineare Transformation durch eine Skalarmultiplikation gegeben:

$$A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_n = |A|(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$$

Determinante von A

Außerdem gilt:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |AB|(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) &= (AB\alpha_1) \wedge ... \wedge (AB\alpha_n) \\ &= |A|(B\alpha_1 \wedge ... \wedge B\alpha_n) \\ &= |A| \cdot |B|(\alpha_1 \wedge ...\alpha_n) \qquad q.e.d. \end{aligned}$$

**Bezug zur Determinante einer Matrix:**

Sei $\sigma_1, ..., \sigma_n$ eine Basis von $\mathbb{L}$ und $\|a_{ij}\|_{n,n}$ eine Matrix.

Setze

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sigma_j$$

Dann ist

$$\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n = |a_{ij}|(\sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_n)$$
$$\text{mit } |A| = |a_{ij}|$$

Bezieht man die Matrixdarstellung von A auf die Basisvektoren $\sigma_i$, d.h.:

$$A\sigma_i = \sum a_{ij}\sigma_j$$

so gilt:

$$A\sigma_1 \wedge ... \wedge A\sigma_n = |a_{ij}|\sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_n$$

$$\text{mit } |A| = |a_{ij}|$$

## 3 Lineare Transformationen

Seien $\mathbb{M}$ und $\mathbb{N}$ zwei lineare Vektorräume mit $dim\mathbb{M} = m$ und $dim\mathbb{N} = n$.
Seien $\sigma_1, ..., \sigma_m$ eine Basis von $\mathbb{M}$ und $\tau_1, ..., \tau_n$ eine Basis von $\mathbb{N}$.
Weiter sei A eine lineare Transformation

$$A : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Die Abbildung

$$\begin{gathered} g : \quad \bigtimes^p \mathbb{M} \longrightarrow \bigwedge^p \mathbb{N} \\ (\alpha_1, ..., \alpha_p) \longrightarrow A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_p \end{gathered}$$

ist multilinear und alternierend. Somit existiert eine lineare Transformation

$$\bigwedge^p A : \quad \bigwedge^p \mathbb{M} \longrightarrow \bigwedge^p \mathbb{N}$$

$$(\bigwedge^p A)(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) = A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_p$$

Sei A eine $m \times n$ Matrix $\|a_{ij}\|$. Somit gilt

$$A\sigma_i = \sum a_{ij}\tau_j$$

Mit $\sigma_H$ Basis von $\bigwedge^p \mathbb{M}$ und $\tau_K$ Basis von $\bigwedge^p \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\bigwedge^p A)\sigma_H &= A\sigma_{h_1} \wedge ... \wedge A\sigma_{h_p} \\
&= \sum a_{h_1k_1}...a_{h_pk_p}(\tau_{k_1} \wedge ... \wedge \tau_{k_p}) \\
&= \sum a_{HK}\tau_K
\end{aligned}$$

Deshalb wird durch $\bigwedge^p A$ eine Matrix $\|a_{HK}\|$ aller $p \times p$-Minore von $\|a_{ij}\|$ definiert.

1. **Zusammenhang zwischen $\bigwedge^p(AB)$ und $(\bigwedge^p(A))(\bigwedge^p(B))$:**

Seien $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$ und $\mathbb{N}$ drei lineare Räume mit

$$\mathbb{L} \xrightarrow{B} \mathbb{M}, \qquad \mathbb{M} \xrightarrow{A} \mathbb{N}, \qquad \mathbb{L} \xrightarrow{AB} \mathbb{N}$$

Was ist $\bigwedge^p(AB)$?

$$\begin{aligned} \bigwedge^p(AB)(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) &= (AB\alpha_1) \wedge ... \wedge (AB\alpha_p) \\ &= (\bigwedge^p A)[(B\alpha_1) \wedge ... \wedge (B\alpha_p)] \\ &= (\bigwedge^p A)[(\bigwedge^p B)(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p)] \\ &= [(\bigwedge^p A)(\bigwedge^p B)](\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \bigwedge^p(AB) = (\bigwedge^p A)(\bigwedge^p B)$$

2. **Zusammenhang zwischen** $(\bigwedge^{p+q} A)(\lambda \wedge \mu)$ **und** $(\bigwedge^{p} A)(\lambda) \wedge (\bigwedge^{q} A)(\mu)$**:**

Definition der äußeren Produkte:

$$\wedge : \quad (\bigwedge^{p} \mathbb{L}) \bigtimes (\bigwedge^{q} \mathbb{L}) \longrightarrow \bigwedge^{p+q} \mathbb{L}$$

A: $\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{N}$ und $\lambda \in \bigwedge^p \mathbb{M}$ und $\mu \in \bigwedge^q \mathbb{M}$
Schreibe $\lambda$ und $\mu$ als Dachprodukt von Monomen $\alpha_i$ und $\beta_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(\bigwedge^{p+q} A)(\lambda \wedge \mu) &= (\bigwedge^{p+q} A)(\alpha_1 \wedge ...\alpha_p \wedge \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q) \\
&= A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\beta_q \\
&= (A\alpha_1 \wedge ... \wedge A\alpha_p) \wedge (A\beta_1 \wedge ... \wedge A\beta_q) \\
&= (\bigwedge^{p} A)(\lambda) \wedge (\bigwedge^{q} A)(\mu)
\end{aligned}$$

## 4 Innere Produkträume

Sei $\mathbb{L}$ ein Vektorraum mit innerem Produkt $(\alpha, \beta)$. Dies ist eine skalarwertige Funktion auf $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. multilinear

2. symmetrisch: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

3. nichtdegeneriert: wenn für ein festes $\alpha$, $(\alpha, \beta) = 0 \ \ \forall \beta$, dann ist $\alpha = 0$

3. Bedingung (nichtdegeneriert: wenn für ein festes $\alpha$, $(\alpha, \beta) = 0 \ \ \forall\beta$, dann ist $\alpha = 0$)ist äquivalent zu Folgendem:

Wenn $\sigma_1, ..., \sigma_n$ eine Basis von $\mathbb{L}$ ist, dann ist die Gram-Determinante

$$|(\sigma_i, \sigma_j)| \neq 0$$

Diese Determinante wird nur 0 für eine nichttriviale Lösung $(a_1, ..., a_n)$ des homogenen Systems

$$\sum a_i(\sigma_i, \sigma_j) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = \sum a_i\sigma_i \text{ mit } (\alpha, \beta) = 0 \quad \forall\beta,$$

$$\text{da } (\alpha, \beta) = (\sum a_i\sigma_i, \sum b_j\sigma_j)$$

$$= \sum\sum a_ib_j(\sigma_i, \sigma_j) = \sum b_j \sum a_i(\sigma_i, \sigma_j)$$

Eine **Orthonormalbasis** von $\mathbb{L}$ besteht aus einer Basis $\sigma_1, ..., \sigma_n$ sd.

$$(\sigma_i, \sigma_j) = \pm\delta_{ij} = \begin{cases} \pm 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Angenommen es gibt r Pluszeichen und s Minuszeichen, dann ist $r + s = n$ und die **Signatur des inneren Produkts** $t = r - s$.

Jeder innere Produktraum $\mathbb{L}$ besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweisidee: Wähle eine Orthonormalbasis von $\mathbb{M}$ mit $dim\mathbb{M} \leq dim\mathbb{L}$ und zeige, dass $dim\mathbb{M} = dim\mathbb{L}$ gelten muss.

Eine weitere Eigenschaft innerer Produkträume:
Sei f ein lineares Funktional auf $\mathbb{L}$. Dann existiert ein Vektor $\beta \in \mathbb{L}$ sd. gilt

$$f(\alpha) = (\alpha, \beta)$$

Beweis:

Sei $\sigma_1, ..., \sigma_n$ eine Orthonormalbasis. Setze $b_i = f(\sigma_i)$ und

$$\beta = \sum \pm b_j \sigma_j = \sum (\sigma_j, \sigma_j) b_j \sigma_j$$

Damit ist

$$(\sigma_i, \beta) = \sum_j (\sigma_j, \sigma_j) b_j (\sigma_i, \sigma_j) = b_i = f(\sigma_i)$$

Beispiel:

Das euklidische innere Produkt:

$$\alpha = (a_1, ..., a_n) \ \text{ und } \quad \beta = (b_1, ..., b_n)$$

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$$

# 5 Innere Produkte von p-Vektoren

Sei $\mathbb{L}$ ein n-dim. VR mit innerem Produkt $(\alpha, \beta)$.

Setze $\qquad (\lambda, \mu) = |(\alpha_i, \beta_j)|$
mit $\lambda = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p$ und $\mu = \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_p$.

Diese Definition ist sinnvoll, da

1. Determinante alternierend und multilinear
   $\Longrightarrow (\lambda, \mu)$ definiert skalarwertige Funktion auf $(\bigwedge^p \mathbb{L}) \bigtimes (\bigwedge^p \mathbb{L})$

2. $(\lambda, \mu)$ symmetrisch (Transponieren verändert Determinante nicht)

3. nichtdegeneriert:

   Sei $\sigma_1, ..., \sigma_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{L}$. $\sigma_H$ bildet somit eine Basis von $\bigwedge^p \mathbb{L}$, $H = \{h_1 < h_2 < ... < h_p\}$. Es gilt:

$$(\sigma_H, \sigma_K) = |(\sigma_{h_i}, \sigma_{k_j})|$$

   Für $H \neq K$ ist das innere Produkt Null (Nullzeile bzw. -spalte).
   Für $H = K$ Diagonalmatrix mit $\pm$ 1. Daher gilt

$$(\sigma_H, \sigma_K) = \pm\delta_{H,K}$$

   $\Longleftrightarrow \sigma_H$ bildet eine Orthonormalbasis von $\bigwedge^p \mathbb{L}$

Beispiel:
Sei $\sigma = \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_n$ eine Orthonormalbasis von $\bigwedge^n \mathbb{L}$.

$$(\sigma, \sigma) = (\sigma_1, \sigma_1) \cdot ... \cdot (\sigma_n, \sigma_n) = (-1)^{(n-t)/2}$$

## 6 Der Stern-Operator

Sei $\mathbb{L}$ ein linearer Raum mit innerem Produkt $(\alpha, \beta)$. Wir gehen von einer festen Orientierung von $\mathbb{L}$ aus. Als weitere Basen kommen nur orientierungstreue in Frage.

**Definition von $*$ :**

- lineare Transformation von $\bigwedge^p \mathbb{L}$ nach $\bigwedge^{n-p} \mathbb{L}$
  - sie ist abhängig vom inneren Produkt und von der Orientierung
  - eine andere Orientierung verändert das Vorzeichen
- Die Orientierung von $\mathbb{L}$ legt eine Orthonormalbasis $\sigma$ von $\bigwedge^n \mathbb{L}$ fest.

Sei $\lambda \in \bigwedge^p \mathbb{L}$ fest. Die Abbildung

$$\mu \longrightarrow \lambda \wedge \mu$$

ist eine lineare Transformation von $\bigwedge^{n-p} \mathbb{L}$ nach $\bigwedge^n \mathbb{L}$ (1-dim.)

$$\Longrightarrow \lambda \wedge \mu = f_\lambda(\mu)\sigma$$

Lineares Funktional auf $\bigwedge^{n-p} \mathbb{L}$

Nach Kapitel 4 existiert genau ein $(n-p)$-Vektor (Bezeichnung $*\lambda$), der von $\lambda$ abhängig ist, sodass

$$\lambda \wedge \mu = (*\lambda, \mu)\sigma$$

Diese Gleichung definiert die $*$-Abbildung, die linear von $\bigwedge^p \mathbb{L}$ nach $\bigwedge^{n-p} \mathbb{L}$ ist.

**Berechnung von $*\lambda$:**

Sei $\lambda = \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_p$ mit Orthonormalbasis $\sigma_1, ..., \sigma_n$ und sei K eine $(n-p)$-elementige Menge mit $n - p = q$. Dann ist

$$\lambda \wedge \sigma_K = (*\lambda, \sigma_K)\sigma$$

L.S. $\neq 0$ für $K = \{p+1, ..., n\}$, somit ist

$$*\lambda = c\sigma_{p+1} \wedge ... \wedge \sigma_n = c\sigma_K$$

Bestimmung von c:

Sei $K = \{p+1, ..., n\}$:

$$\sigma = \lambda \wedge \sigma_K = c(\sigma_K, \sigma_K)\sigma$$

$$c = (\sigma_K, \sigma_K) = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad *\lambda = (\sigma_K, \sigma_K)\sigma_K$$

Mit $H = \{1, ..., p\}$ und $K = \{p+1, ..., n\}$: $\quad \Longrightarrow *\sigma_H = (\sigma_K, \sigma_K)\sigma_K$

Es gilt: $\sigma_K \wedge \sigma_H = (-1)^{p(n-p)}\sigma_H \wedge \sigma_K$

Bei Berücksichtigung der Orientierung gilt:

$$*\sigma_K = (-1)^{p(n-p)}(\sigma_H, \sigma_H)\sigma_H$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow *(*\sigma_H) &= (-1)^{p(n-p)}(\sigma_H, \sigma_H)(\sigma_K, \sigma_K)\sigma_H \\
\Longleftrightarrow *(*\sigma_H) &= (-1)^{p(n-p)}(\sigma, \sigma)\sigma_H \\
\Longleftrightarrow *(*\sigma_H) &= (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}\sigma_H
\end{aligned}$$

Mit Signatur $t = r - s, ((n-t)/2 = s)$

Es folgt:

- Für einen bel. p-Vektor $\alpha$ gilt:
  $* * \alpha = (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}\alpha$

- Für zwei p-Vektoren $\alpha$ und $\beta$ gilt:
  $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = (-1)^{(n-t)/2}(\alpha, \beta)\sigma$
  Für $\beta = \sigma_H$, muss $\alpha = \sigma_H$ sein, damit $\alpha \wedge *\beta \neq 0$ und dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge *\beta &= \sigma_H \wedge (\sigma_K, \sigma_K)\sigma_K \\
\Longleftrightarrow \alpha \wedge *\beta &= (\sigma_K, \sigma_K)\sigma \\
\Longleftrightarrow \alpha \wedge *\beta &= (\sigma_H, \sigma_H)(-1)^{(n-t)/2}\sigma \\
\Longleftrightarrow \alpha \wedge *\beta &= (-1)^{(n-t)/2}(\alpha, \beta)\sigma
\end{aligned}$$

Beispiele:

1. Seien $dx^1, dx^2, dx^3, dt$ eine Orthonormalbasis eines 4-dim. VR und die Signatur $t = 2$.
   Außerdem gilt:
   $(dx^i, dx^i) = 1$ und $(dt, dt) = -1$.
   $\Longrightarrow (-1)^{(n-t)/2} = -1$
   Sei $p = 2 \quad \Rightarrow p(n-p) = 4$. Somit gilt:

$$*(dx^i \wedge dt) = (dx^j \wedge dx^k, dx^j \wedge dx^k) \cdot dx^j \wedge dx^k$$
$$= (dx^j, dx^j)(dx^k, dx^k) \cdot dx^j \wedge dx^k = dx^j \wedge dx^k$$

   mit der zyklischen Ordnung $(i, j, k)$ und es gilt

$$*(dx^j \wedge dx^k) = (dx^i \wedge dt, dx^i \wedge dt) \cdot dx^i \wedge dt$$
$$= (dx^i, dx^i)(dt, dt)dx^i \wedge dt = -dx^i \wedge dt$$

Seien $E_i$ die Komponenten der elektrischen Feldstärke und $H_i$ die Komponenten der magnetischen Feldstärke (im freien Raum) und sei

$$\omega = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dt + (H_1 dx^2 \wedge dx^3 + H_2 dx^3 \wedge dx^1 + H_3 dx^1 \wedge dx^2)$$

Dann ist

$$*\omega = (E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2) - (H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3) \wedge dt$$

2. Gegeben sei ein 3-dim. VR, f und g seien Funktionen.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$*df = \frac{\partial f}{\partial x}dydz + \frac{\partial f}{\partial y}dzdx + \frac{\partial f}{\partial z}dxdy$$

Und es gilt:

$$df \wedge *dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right) dxdydz$$

**Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!**