Die Äußere Ableitung

Felix Retter

25.06.2008

Inhaltsangabe

Die p-Form

Sei P ein Punkt in E^n. Der n-dimensionale lineare Raum $L = L_p$ wird dann gebildet von

$$\sum_{i=1}^{n} a_i dx^i, \; a_i \text{ Konstant.}$$

Die p-Formen ω sind Elemente

$$\omega = \sum a_H dx^{h_1} \cdots dx^{h_p} = \sum a_H dx^H \in \bigwedge^p L.$$

Die p-Form (2)

- Sei $U \subset E^n$ offen. Eine p-Form ω auf U hat die Form

  $$\omega = \sum a_H \left(x^1, \ldots, x^n\right) dx^H.$$

  $F^p(U)$ bezeichnet die Menge der p-Formen auf U. Auf dieser wird die äußere Algebra angewendet.
- Beispiel 1: 0-Form: alle glatten Funktionen auf U
- Beispiel 2: 2-Form: $\alpha = Adydz + Bdzdx + Cdxdy$

Äußere Algebra

Sei $U \subset E^n$ offen und

$$\omega = \sum a_H dx^H \in \bigwedge^p L, \ \nu = \sum b_K dx^K \in \bigwedge^q L$$

zwei Differentialformen auf U. Es gilt:

- $\omega = 0, \quad \text{falls } dx^i = dx^j \text{ für } i \neq j,$
- $\omega \wedge \nu = \sum a_H b_K dx^H dx^K,$
- $\omega \wedge \nu = (-1)^{pq} \, \nu \wedge \omega.$

Äußere Ableitung - Definition

Definition (Äußere Ableitung)

Sei $\omega = \sum a_H dx^H \in F^p(U),\ U \subset E^n$. Die Äußere Ableitung von ω ist eine Abbildung $d : F^p\,(U) \longrightarrow F^{P+1}\,(U)$

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_H}{\partial x^i} dx^i dx^H. \tag{1}$$

Eigenschaften:

i $d\,(\omega + \nu) = d\omega + d\nu$,

ii $d(\omega \wedge \nu) = d\omega \wedge \nu + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\nu$,

iii Für jedes $\omega,\ d(d\omega) = 0$ (Poincaré Lemma).

Äußere Ableitung - Eigenschaften (1)

Zu ii: Sei $\omega = adx^H, \nu = bdx^K$.

$$
\begin{aligned}
d\left(\omega \wedge \nu\right) &= d\left(abdx^H dx^K\right) = \sum \frac{\partial(ab)}{\partial x^i} dx^i dx^H dx^K \\
&= \sum \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}\right) bdx^i dx^H dx^K + \sum a \left(\frac{\partial b}{\partial x^i}\right) dx^i dx^H dx^K \\
&= \sum \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}\right) dx^i dx^H \wedge bdx^K + \\
&+ (-1)^{(\deg \omega)} \sum (adx^H) \wedge \left(\frac{\partial b}{\partial x^i}\right) dx^i dx^K \\
&= d\omega \wedge \nu + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\nu
\end{aligned}
$$

Äußere Ableitung - Eigenschaften (2)

Zu iii: Sei $\omega = adx^H$.

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i dx^H\right) \\ &= \sum \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j}\right) dx^j dx^i dx^H \\ &= \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j}\right) dx^j dx^i dx^H \\ &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung der äußeren Ableitung

Betrachte eins-Form $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial P}{\partial y}dydx + \frac{\partial P}{\partial z}dzdx + \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy + \frac{\partial Q}{\partial z}dzdy + \\ &\quad + \frac{\partial R}{\partial x}dxdz + \frac{\partial R}{\partial y}dydz \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)dxdz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dydz \end{aligned}$$

Abbildungen

Sei $U \subset E^m, V \subset E^n$, Φ eine Abbildung von U nach V und g eine reellwertige Funktion auf V. Die Koordinaten von E^m und E^n sind $x_1, \ldots, x_m$ und $y_1, \ldots, y_n$. Definiere

$$\Phi^* g = g \circ \Phi$$

und somit

$$\Phi^* : F^0(V) \to F^0(U). \tag{2}$$

Für eine Eins-Form $\omega = \sum a_i(y) dy^i$ setzen wir

$$\Phi^* : F^1(V) \longrightarrow F^1(U)$$

$$\Phi^* \omega = \sum a_i(\Phi(x)) \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Eigenschaften von Φ^* (1)

Eigenschaften von Φ^*:

i $\Phi^*(\omega + \nu) = \Phi^*\omega + \Phi^*\nu$,

ii $\Phi^*(\omega \wedge \nu) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\nu)$,

iii $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega)$,

iv Wenn $\Phi : U \longrightarrow V$ und $\Psi : V \to W$, dann $(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*$.

FOLGERUNG: Die äußere Ableitung ist unabhängig von dem Koordinatensystem, in dem sie berechnet wird!

Eigenschaften von Φ^* (2)

Beweis von **iii** mittels vollständiger Induktion über den Grad der Differentialform. Induktionsanfang: Sei g eine 0-Form aus V.

$$
\begin{aligned}
dg &= \sum \frac{\partial g(y)}{\partial y^j} dy^j, \\
\Phi^*(dg) &= \sum \frac{\partial g(\Phi(x))}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \\
&= \sum \frac{\partial(\Phi^* g)}{\partial x^i} dx^i = d(\Phi^* g).
\end{aligned}
$$

Eigenschaften von Φ^* (3)

Beweis von **iv** mittels vollständiger Induktion über den Grad der Differentialform.
Induktionsanfang: Sei h eine 0-Form auf W.

$$
\begin{aligned}
[(\Psi \circ \Phi)^* h](x) &= h[(\Psi \circ \Phi)(x)] = h\{\Psi[\Phi(x)]\} \\
&= [\Psi^* h][\Phi(x)] = \{\Phi^*[\Psi^* h]\}(x) \\
&= [(\Phi^* \circ \Psi^*) h](x)
\end{aligned}
$$

Zylinderkonstruktion

Sei $U \subset E^n$ und $I = [0,1]$. Wir betrachten folgende Abbildungen von $x \in U$ nach $(t,x) \in I \times U$,

$$j_1 : \; j_1(x) = (1,x)\,,$$
$$j_0 : \; j_0(x) = (0,x)\,.$$

Und den entsprechenden $* - Operator$

$$j_i^* : \; F^p\,(I \times U) \longrightarrow F^p(U), \qquad (i = 0,1)\,.$$

K-operator

Definiere Operator

$$
\begin{aligned}
K:\ F^{p+1}(I \times U) &\longrightarrow F^{p}(U);\\
K\left(a(t,x)\,dx^{H}\right) &= 0,\\
K\left(a(t,x)\,dtdx^{H}\right) &= \left(\int_0^1 a(t,x)dt\right) dx^{H}
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$
K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^*(\omega) - j_0^*(\omega)
$$

Beweis(1)

Sei $\omega = a(t,x)dx^H$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} j_1^*\omega - j_0^*\omega &= [a(1,x) - a(0,x)]dx^H, \\ d(K\omega) &= 0 = K\omega, \\ K(d\omega) &= K\left(\frac{\partial a}{\partial t}dtdx^H + \dots\right) \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}dt\right)dx^H \\ &= [a(1,x) - a(0,x)]dx^H. \end{aligned}$$

Beweis(2)

Sei $\omega = a(t,x)dtdx^H$.

$$\begin{aligned}
j_1^*\omega = j_0^*\omega &= 0,\\
Kd\omega &= K\left[-\sum \frac{\partial a}{\partial x^i} dtdx^i dx^H\right]\\
&= -\sum \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i} dt\right) dx^i dx^H,\\
dK\omega &= d\left[\left(\int_0^1 a(t,x)dt\right) dx^H\right]\\
&= \sum \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i} dt\right) dx^i dx^H.
\end{aligned}$$

Definition (P-homotop)

Ein Gebiet U ist zu einem Punkt P zusammenziehbar (P-homotop) wenn es eine stetige Abbildung $\Phi : I \times U \longrightarrow U, \ I = [0,1]$ gibt, mit

$$\begin{aligned} \Phi(1,x) &= x, \\ \Phi(0,x) &= P \end{aligned}$$

Lemma (konverse Poincaré Lemma)

Sei U ein Gebiet in E^n das zu einem Punkt P zusammengezogen werden kann. Sei ω ein $(p+1)$-Form auf U mit $d\omega = 0$. Dann existiert eine p-Form α auf U mit

$$\omega = d\alpha$$

Beweis

- $\Phi \circ j_1 = id, \qquad \Phi \circ j_0 = P \qquad$ (U P-homotop).
- $\implies j_1^*(\Phi^*\omega) = \omega, \quad j_0^*(\Phi^*\omega) = 0.$
- Nach Voraussetzung gilt $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega) = 0.$
- $$K\left(d(\Phi^*\omega)\right) + d\left(K(\Phi^*\omega)\right) = j_1^*(\Phi^*\omega) - j_0^*(\Phi^*\omega) = \omega$$
  $$\iff d\left(K(\Phi^*\omega)\right) = \omega$$

  Wir haben $d\alpha = \omega$ für $\alpha := K(\Phi^*\omega)$

Eindeutigkeit

Seien β und γ zwei Lösungen von $\omega = d\alpha$. Es gilt

$$d\beta = \omega = d\gamma$$
$$\iff d(\beta - \gamma) = 0$$

Wenn $p \geq 1$ so existiert also eine (p-1)-From λ mit $\beta - \gamma = d\lambda$.
$\implies$ Die allgemeine Lösung ist somit $\beta - d\lambda$.

Beispiel

Betrachte $\mathbb{R}^3$ und die 2-Form $\omega = Adydz + Bdzdx + Cdxdy$ mit $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$. Es gilt $d\omega = 0$. Mit $\Phi(t,x,y,z) = (tx,ty,tz)$ ist $\mathbb{R}^3$ ferner nullhomotop.

$$\Phi^*\omega = A(tx,ty,tz)d(ty)d(tz) + \ldots = A(tx,ty,tz)(ytdtdz - ztdtdy) + \ldots + \text{ (Terme ohne dt)}$$

$$\begin{aligned} \alpha := K\left(\Phi^*\omega\right) = &\left(\int_0^1 A(tx,ty,tz)tdt\right)(ydz - zdy) \\ &+ \left(\int_0^1 B(tx,ty,tz)tdt\right)(zdx - xdz) \\ &+ \left(\int_0^1 C(tx,ty,tz)tdt\right)(xdy - ydx) \end{aligned}$$

Danke

Ich bedanke mich bei allen aufmerksamen Zuhörern